Алгебра 1А

3. 6. 2010.

1. Нека је p прост број и $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : p \not| n\}$. Доказати да је R потпрстен прстена $\mathbb{Q}$.
2. Доказати да је $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ потпрстен од $\mathbb{C}$.
3. Нека је R комутативан прстен са јединицом. Доказати да је $\{x \in R : (\exists n \geq 1) x^n = 0\}$ један идеал.
4. Ако је елемент x комутативног прстена са јединицом R нилпотентан, тј. ако је $x^n = 0$ за неко $n \geq 1$, доказати да је $1 - x \in U(R)$.
5. Ако су I и J идеали у комутативном прстену са јединицом R, доказати да су и $I + J := \{x + y : x \in I, y \in J\}$, $I \cap J$, $I \cdot J := \{x_1 y_1 + \cdots x_k y_k : x_r \in I, y_s \in J, k \geq 1\}$ такође идеали у R.
6. Доказати да за све $a, b \in \mathbb{Z}$ важи:
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = NZD(a, b)\mathbb{Z}, \quad a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = NZS(a, b)\mathbb{Z}, \quad a\mathbb{Z} \cdot b\mathbb{Z} = ab\mathbb{Z}.$$
(Присетимо се да је сваки идеал у $\mathbb{Z}$ облика $m\mathbb{Z} = \{mn : n \in \mathbb{Z}\}$.)
7. Нека је $I = \{p \in \mathbb{R}[X] : p(2) = p(3) = 0\}$. Доказати да је I главни идеал у прстену $\mathbb{R}[X]$.
8. Решити системе конгруенција:
   (а) $x \equiv 3 \pmod 7$, $\quad x \equiv 5 \pmod 8$;
   (б) $x \equiv 1 \pmod{11}$, $\quad x \equiv 5 \pmod{15}$;
   (в) $x \equiv -4 \pmod{16}$, $\quad x \equiv 5 \pmod 7$;
   (г) $x \equiv 5 \pmod{13}$, $\quad x \equiv -1 \pmod 8 \quad x \equiv 4 \pmod 7$;
   (д) $x \equiv 5 \pmod{23}$, $\quad x \equiv 3 \pmod{18} \quad x \equiv 2 \pmod{17}$;
   (ђ) $x \equiv 3 \pmod 5$, $\quad x \equiv 1 \pmod 8 \quad x \equiv -4 \pmod{11}$.
9. Испитати да ли решење постоји и уколико постоји наћи сва решења наведених конгруенција:
   (а) $3x \equiv 4 \pmod 7$;
   (б) $4x \equiv 2 \pmod 6$;
   (в) $15x \equiv 4 \pmod{10}$;
   (г) $12x \equiv 21 \pmod{15}$;
10. Наћи бар један примитивни корен r модуло 11 и помоћу таблице за ind_r одредити све примитивне корене модуло 11. Испитати да ли следеће конгруенције имају решење и у потврдном случају наћи сва решења:
$$4x \equiv 3 \pmod{11}, \quad x^2 \equiv 3 \pmod{11}, \quad x^3 \equiv 2 \pmod{11}, \quad x^4 \equiv -3 \pmod{11}.$$
11. Наћи бар један примитивни корен r модуло 17 и помоћу таблице за ind_r одредити све примитивне корене модуло 17. Испитати да ли следеће конгруенције имају решење и у потврдном случају наћи сва решења:
$$7x \equiv 3 \pmod{17}, \quad x^2 \equiv -2 \pmod{17}, \quad x^3 \equiv 3 \pmod{17}, \quad x^4 \equiv 3 \pmod{17}.$$
12. Наћи бар један примитивни корен r модуло 7 и помоћу таблице за ind_r одредити све примитивне корене модуло 7. Испитати да ли следеће конгруенције имају решење и у потврдном случају наћи сва решења:
$$4x \equiv 3 \pmod 7, \quad x^2 \equiv 2 \pmod 7, \quad x^3 \equiv 2 \pmod 7, \quad x^4 \equiv 3 \pmod 7.$$
13. Одредити све просте бројеве p за које конгруенција $x^2 \equiv -1 \pmod p$ има решење.
14. Одредити остатак при дељењу 2005^{2005} бројем 14.

15. Одредити остатак при дељењу броја 1248^{632} бројем 39.

16. Одредити остатак при дељењу броја 1235^{27262} бројем 105.

17. Решити конгруенцију $x^2 + 12 \equiv 10^{100} \pmod{247}$ (обратите пажњу на чињеницу да 247 није прост број).

18. Решити конгруенцију $x^2 + 1 \equiv 1035125^{5642} \pmod{17}$.

19. Одредити најмањи природан број m за који је $1823^{242} \equiv m \pmod{18}$.

20. Одредити бар једно решење једначине $a^5 + 5 \equiv 2222^{321} \pmod{20}$.