Алгебра 1А

20. 5. 2010.

1. Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ различити прости бројеви, доказати да је свака комутативна група реда $p_1 p_2 \cdots p_n$ циклична.

2. Доказати да је свака група реда 10 изоморфна или групи $\mathbb{Z}_{10}$ или групи D_5.

3. Одредити класе конјугованости у групама D_5 и D_6.

4. Генералисати претходни задатак—одредити класе конјугованости у D_n, при чему посебно разликовати случај парног и непарног n.

5. Одредити класе конјугованости у групама S_4 и A_4

6. Одредити број различитих класа конјугованости у групи S_6.

7. Наћи пермутацију $\pi \in S_6$ такву да је $\pi(123)(456)\pi^{-1} = (531)(264)$. Показати да су $(123)(456)$ и $(531)(264)$ конјуговани у групи A_4, док елементи $(12345)(678)$ и $(43786)(215)$ нису конјуговани у A_8.

8. Показати да су свака два циклуса дужине 3 у групи A_5 конјугована.

9. Подсетимо се да су нормалне подгрупе неке групе дефинисане као оне подгрупе, које су унија неких класа конјугованости. Користећи ту дефиницију и задатак 4, одредити све нормалне подгрупе у групи D_n.

10. Нека је p прост број. Показати да матрице облика

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_p$$

    формирају некомутативну групу реда p^3.