Алгебра

30. 5. 2010.

1. Одредити инваријантне делитеље за групе
$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}; \quad \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42}; \quad \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}.$$

2. Доказати да свака Абелова група реда 100 има елемент реда 10. Одредити инваријантне делитеље у случају да у таквој групи нема елемената реда већег од 10.

3. Класификовати све Абелове групе реда 81, 144 и 216.

4. Нека је p прост број и нека Абелова група реда p^n има $p-1$ елемената реда p. Доказати да је та група циклична.

5. Нека је G коначна Абелова група реда 360, која не садржи елементе реда 12, као ни елементе реда 18. Одредити инваријантне делитеље за G. Одредити број елемената реда 6 у групи G.

6. Доказати да је свака коначно генерисана нетривијална подгрупа групе $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ изоморфна или групи $\mathbb{Z}_2$, или групи $\mathbb{Z}^s$ или групи $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$, за неко $s \geq 1$.

7. Нека је G коначна Абелова група. Означимо са $\#(q)$ број елемената у G за које је $x^q = e$. Наћи инваријантне делитеље за групу G у случају: $\#(2) = 16$, $\#(4) = 32$, $\#(3) = 9$, $\#(9) = 81$ и $x^{36} = e$ за све $x \in G$.

8. Одредити канонску форму за Абелове групе задате генераторима x_1, x_2, x_3, x_4 и релацијама

   (а)
$$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 11x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0; \end{aligned}$$

   (б)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 12x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 3x_4 &= 0; \end{aligned}$$

   (в)
$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 9x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

   (г)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

9. Нека је p прост број и $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : p \nmid n\}$. Доказати да је R потпрстен од $\mathbb{Q}$.

10. Нека је R прстен са јединицом у коме је $x^2 = x$ за свако $x \in R$. Доказати да је R комутативан прстен.

11. Нека је R комутативан прстен. За елемент x кажемо да је нилпотентан уколико је за неко $n \geq 1$ испуњено $x^n = 0$. Доказати да скуп свих нилпотентних елемената чини идеал.

12. Ако је x нилпотентан елемент комутативног прстена са јединицом R доказати да је елемент $1 - x$ инвертибилан.

13. Нека је $R = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Показати да је R потпрстен од $\mathbb{C}$ у коме је сваки елемент различит од 0 инвертибилан.

14. Нека је $R = I + J$ за неке идеале I, J прстена R. Доказати да је тада и $I^2 + J^2 = R$ $(I^2 = I \cdot I)$.

15. Нека је S потпрстен прстена R и I идеал у R. Доказати или оповргнути: $S + I$ је потпрстен од R.

16. Показати да је пресек два потпрстена увек потпрстен, као и да унија не мора бити потпрстен.

17. Одредити праве делитеље нуле у прстенима $\mathbb{Z}_{21}$ и $\mathbb{Z}_{16}$.