Алгебра

13. 5. 2010.

1. Нека је G подгрупа групе S_8 генерисана елементима $(123)(45)$ и (78). Нека G дејствује као група пермутација скупа $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Одредити орбиту и стабилизатор сваког елемента из X.

2. Нека је G група и $x \in G$. Показати да је подскуп $C(x) = \{g \in G : xg = gx\}$ чини подгрупу групе G (ова подгрупа се назива централизатор елемента x). Одредити везу те подгрупе и броја елемената у класи коњугованости елемента x. Показати да уколико у G постоји класа коњугованости са тачно два елемента, група G не може бити проста.

3. Нека група G дејствује на скуповима X и Y. Показати да је са $g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y)$ дефинисано једно дејство групе G на скупу $X \times Y$ (ово дејство се назива дијагонално дејство). Одредити везу између стабилизатора елемената x, y и (x, y).

4. Показати примером да група G може дејствовати транзитивно и на X и на Y, а да дијагонално дејство на $X \times Y$ ипак не буде транзитивно.

5. Нека је $X = \{1, 2, 3, 4\}$ и G подгрупа од S_4 генерисана елементима (1234) и (24). Одредити орбите и стабилизаторе за дијагонално дејство G на $X \times X$.

6. Нека је p прост број. Показати да скуп матрица

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

   чини некомутативну групу реда p^3 у односу на множење матрица.

7. Рођенданска торта је подељена на 8 једнаких парчића. На колико различитих начина се могу поређати црвене и плаве свећице које се постављају у центар сваког парчета (тако да добијемо истински различито украшене торте).

8. Одредити колико различито обојених правилних тетраедара има уколико бојимо сваку ивицу тог тетраедра са једном од 4 могуће боје.