Алгебра 1А

28. 3. 2010.

1. Одредити ред сваког елемента из $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_9$ и $\mathbb{Z}_{14}$.

2. Доказати да група парног реда мора имати непаран број елемената реда 2.

3. Нека елементи x, y, xy неке групе G имају ред 2. Доказати да је $xy = yx$.

4. Нека је $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1)$. На скупу A дефинисана је операција $+$ са:

$$x + y = \begin{cases} x + y, & 0 \leq x + y < 1 \\ x + y - 1, & x + y \geq 1. \end{cases}$$

Показати да је A бесконачна Абелова група чији су сви елементи коначног реда.

5. Нека је

$$GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Доказати да је $GL_2(\mathbb{Z})$ група у односу на множење матрица. Ако су матрице A и B из $GL_2(\mathbb{Z})$ задате са

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

одредити ред елемената A, B, AB, BA.

6. Нека је H <u>коначан</u> непразан подскуп групе G. Доказати да је $H \leq G$ ако и само ако за све $x, y \in H$ важи $xy \in H$.

7. Нека је A Абелова група и T скуп свих елемената из A који су коначног реда. Доказати да је T подгрупа од A.

8. Доказати да Абелова група $\mathbb{Q}$ <u>нема</u> коначан скуп генератора.