Алгебра

28. 3. 2010.

1. Нека су $\sigma_1, \dots \sigma_k$ дисјунктни циклуси. Доказати да је ред пермутације $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ једнак најмањем заједничком садржаоцу редова пермутација σ_i.
2. Пермутације $(4568)(1245)$ и $(624)(253)(876)(45)$ из S_8 представити као производ дисјунктних циклуса и одредити њихов ред.
3. Показати да је $H = \{\pi \in S_8 : \pi(2) = 2, \pi(3) = 3, \pi(6) = 6\}$ подгрупа групе S_8 (у односу на композицију пермутација) и одредити ред те подгрупе.
4. Наћи све подгрупе од S_4 које имају 6 елемената.
5. Доказати да се за $n \geq 4$ свака пермутација из S_n може представити у облику производа две пермутације од којих је свака реда 2.
6. Ако $\pi, \sigma \in S_n$, доказати да $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1} \in A_n$.
7. Ако је n непаран број, доказати да (123) и $(12 \cdots n)$ генеришу A_n. Ако је n паран број, доказати да (123) и $(23 \cdots n)$ генеришу A_n.
8. Нека су $\sigma, \pi \in S_n$ такве да $\sigma\pi = \pi\sigma$. Доказати да σ пермутује оне бројеве, које π не помера. Уколико је π циклус дужине n, доказати да је $\sigma = \pi^k$, за неко k.
9. Показати да A_4 садржи подгрупу изоморфну групи симетрија правоугаоника који није квадрат.
10. Показати да бројеви 1, 2, 4, 5, 7, 8 чине групу у односу на множење по модулу 9 и да је та група изоморфна групи $\mathbb{Z}_6$
11. Показати да бројеви 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 чине групу у односу на множење по модулу 20 и да та група није изоморфна групи $\mathbb{Z}_8$.
12. Показати да је $S_3 \cong D_3$. Одредити број изоморфизама између S_3 и D_3.
13. Нека је G група. Доказати да је $f : G \to G$, дефинисано са $f(x) = x^{-1}$ изоморфизам ако и само ако је група G Абелова.
14. Доказати да је подгрупа групе S_6, која је генерисана циклусима (1234) и (56) изоморфна групи из 11. задатка.
15. Доказати да је подгрупа од S_4, генерисана елементима (1234) и (24) изоморфна групи D_4.
16. Нека је G група. Показати да је $Z(G) = \{g \in G : (\forall x \in G) xg = gx\}$ подгрупа групе G (ова подгрупа се зове центар групе G).
17. Одредити $Z(S_n)$, $Z(A_n)$, $Z(D_n)$.