Алгебра 1А

18. 3. 2010.

1. Нека су $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ алгебре истог језика L. Ако су $g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ и $h : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ хомоморфизми алгебри при чему је h мономорфизам, доказати да је $\mathrm{Ker}(h \circ g) = \mathrm{Ker}(g)$
2. Ако су $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ алгебре истог језика и $g, h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ хомоморфизми ових алгебри при чему је $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(h)$ доказати да је са $\tilde{h}([a]) = h(a)$ добро дефинисан један хомоморфизам $\tilde{h} : \mathbb{A}/_{\mathrm{Ker}(g)} \to \mathbb{B}$.
3. Нека су $m, n \geq 1$ природни бројеви и h ендомоморфизам алгебре $\mathbb{Z} = (Z, +)$ дефинисан са $h(x) = mx$. Одредити $\mathrm{Ker}(\rho_n \circ h)$, где је са $\rho_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ означен хомоморфизам задат остатком при дељењу целог броја бројем n.
4. Нека су $m, n \geq 1$ природни бројеви и h ендомоморфизам алгебре $\mathbb{Z}_n = (Z_n, +_n)$ дефинисан са $h(x) = mx$. Применити теорему о декомпозицији хомоморфизма на овај хомоморфизам.
5. Проверити да је са $h(p) = p^2$ задат један хомоморфизам алгебре $\mathbb{Z}_2[X] = (Z_2[X], +, \cdot)$ и одредити језгро и слику тог хомоморфизма.
6. Нека је $G = \cup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Доказати да G чини групу у односу на множење комплексних бројева.
7. Испитати који од следећих скупова чине групу у односу на операцију множења по модулу 14:
$$\{1,3,5\}, \quad \{1,3,5,7\}, \quad \{1,7,13\}, \quad \{1,9,11,13\}.$$
8. Показати да подскуп од $\{1, 2, \ldots, 21\}$, који садржи неки паран број и број 11 не може чинити групу у односу на множење по модулу 22.
9. Нека је g елемент групе G. Доказати да је $G = \{gx : x \in G\}$, при чему је $gx \neq gy$ за $x \neq y$.