

# АЛГЕБРА 1

## Групе

Групе пермутација

Зоран Петровић

9. новембар 2011.

У овој лекцији обрађујемо веома значајан пример групе — групу пермутација (групу симетрија).

**Дефиниција 1** Нека је  $X$  непразан скуп. Посматрајмо скуп  $S_X$  задат са:

$$S_X = \{ \pi: X \rightarrow X \mid \pi \text{ је бијекција} \}.$$

Тада је  $\mathbb{S}_X = (S_X, \circ)$ , где је са  $\circ$  означена операција композиције функција, једна група и зовемо је групом пермутација скупа  $X$ .

Елементе групе  $\mathbb{S}_X$  зовемо и пермутацијама скупа  $X$ . Ако постоји бијекција између  $X$  и  $Y$ , онда су одговарајуће групе пермутација изоморфне.

**Став 2** Ако постоји бијекција између  $X$  и  $Y$ , онда је  $\mathbb{S}_X \cong \mathbb{S}_Y$ .

**Доказ.** Нека је  $g: X \rightarrow Y$  бијекција. Дефинишимо  $f: \mathbb{S}_X \rightarrow \mathbb{S}_Y$  са:

$$f(\pi) := g \circ \pi \circ g^{-1}.$$

Јасно је да је  $g \circ \pi \circ g^{-1}$  једна пермутација скупа  $Y$  уколико је  $\pi$  пермутација скупа  $X$ . Осим тога, ако је  $\sigma \in \mathbb{S}_Y$ , онда је  $f(g^{-1} \circ \sigma \circ g) = \sigma$ , те је  $f$  „на“. Јасно је да је  $f$  и „1-1“. Треба само проверити да је  $f(\rho \circ \pi) = f(\rho) \circ f(\pi)$ , уколико  $\rho, \pi \in \mathbb{S}_X$ . Учинимо то:

$$f(\rho \circ \pi) = g \circ (\rho \circ \pi) \circ g^{-1} = (g \circ \rho \circ g^{-1}) \circ (g \circ \pi \circ g^{-1}) = f(\rho) \circ f(\pi).$$

Дакле,  $f$  заиста успоставља изоморфизам између  $\mathbb{S}_X$  и  $\mathbb{S}_Y$ .  $\square$

Уколико је  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , онда уместо  $\mathbb{S}_{\{1, 2, \dots, n\}}$  пишемо краће  $\mathbb{S}_n$ . На основу претходног става, свака коначна група пермутација неког скупа изоморфна је једној од група  $\mathbb{S}_n$ . Стога се сада концентришемо на групу  $\mathbb{S}_n$ .

---

Почнимо једним примером. Нека је  $n = 9$  и пермутација  $\sigma \in \mathbb{S}_9$  задата је са:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 8 & 2 & 7 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Можемо ли ову пермутацију некако једноставније записати? Елемент 1 слика се у 4, 4 у 8, 8 у 6, 6 у 7, а 7 у 1. Некако смо „затворили круг“:

$$1 \mapsto 4 \mapsto 8 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 1.$$

Запишимо то овако: (14867). Прецизније, (14867) означава пермутацију скупа  $\{1, 2, \dots, 9\}$  у којој се 1 слика у 4, 4 у 8, 8 у 6, 6 у 7, а 7 у 1, док се остали елементи сликају сами у себе. Како се остали елементи не појављују у овом запису, а сликају се сами у себе, то се (14867) може видети и као елемент групе  $S_n$  за ма које  $n \geq 8$ . Оваква пермутација назива се **циклус** или **цикл дужине 5**. Пермутација у којој

$$a_1 \mapsto a_2 \mapsto \dots \mapsto a_{k-1} \mapsto a_k \mapsto a_1,$$

при чему су елементи  $a_i$  различити, означава се са  $(a_1 a_2 \dots a_k)$ , зове се **циклус дужине  $k$**  (или  $k$ -цикл).

Вратимо се пермутацији  $\sigma$ . Први елемент који нисмо „покупили“ до сада је елемент 2. Видимо да

$$2 \mapsto 5 \mapsto 2.$$

Дакле, добијамо нови цикл (25), који је дужине 2. Цикли дужине 2 зову се и **транспозиције** (само два елемента замене своја места). Видимо да се преостали елементи 3 и 9 не померају при пермутацији  $\sigma$ :  $3 \mapsto$ , односно  $9 \mapsto 9$ . То се може записати и у облику циклуса дужине 1: (3), односно (9). Но, то су, по нашој дефиницији, заправо идентичне пермутације (3 се слика у 3, а остали такође сами у себе!), те их често и не пишемо. Проверимо да ли је

$$\sigma = (14867)(25).$$

Овде треба напоменути да знак за композицију  $\circ$  најчешће нећемо писати. Осим тога, подсетимо читаоца да су ово функције, те ова ознака значи да прво делује (25), а потом (14867). Није тешко проверити да горња једнакост заиста важи. Овако смо нашу пермутацију приказали у облику производа дисјунктних циклуса (циклуси  $(a_1 a_2 \dots a_k)$  и  $(b_1 b_2 \dots b_l)$  су дисјунктни уколико су  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  и  $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$  дисјунктни скупови). Заправо важи следећа теорема.

**Теорема 3** Свака пермутација из  $\mathbb{S}_n$  може се на јединствен начин, до на редослед фактора, представити у облику производа дисјунктних циклуса.

Ову теорему нећемо доказивати. Приметимо да важи следеће. Уколико су циклуси  $\rho$  и  $\pi$  дисјунктни, онда је  $\rho\pi = \pi\rho$ . То није тешко директно проверити анализирајући где се сликају поједини елементи.

Уколико пак циклуси нису дисјунктни, они не морају да комутирају:

$$(12)(23) = (123), \quad (23)(12) = (132).$$

Приметимо да је

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_2 \dots a_k a_1) = \dots = (a_k \dots a_1 a_2 \dots a_{k-1}).$$

У конкретном случају  $k = 4$ :

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = (a_2 a_3 a_4 a_1) = (a_3 a_4 a_1 a_2) = (a_4 a_1 a_2 a_3).$$

У вези са овим, природно се поставља питање колико у  $S_n$  има различитих циклуса дужине  $k$ , где је  $k \leq n$ . На то питање није тешко одговорити. Наиме, најпре је потребно из скупа од  $n$  елемената изабрати њих  $k$ . То се може извести на  $\binom{n}{k}$  начина. Ти елементи се међусобно могу поређати у циклус дужине  $k$  на  $k!$  начина. Но, видели смо да неке од тих пермутација заправо задају исти циклус. Прецизније, од датих  $k$  елемената може се формирати  $\frac{k!}{k} = (k-1)!$  различитих циклуса. Дакле, различитих циклуса дужине  $k$  у  $S_n$  има  $\binom{n}{k}(k-1)! = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k}$ . Наравно, ово се може доказати и на друге начине. Размислите како.

Позабавимо се мало рачунањем са циклусима. Најпре, лако је проверити да је, ако су  $a, b, c$  међусобно различити,  $(ab)(bc) = (abc)$ . Општији резултат је следећи. Ако су  $a_1, a_2, \dots, a_{k+l}$  међусобно различити онда је:

$$(a_1 a_2 \dots a_k)(a_k a_{k+1} \dots a_{k+l}) = (a_1 a_2 \dots a_{k+l}),$$

за све  $k \geq 2, l \geq 1$ . Користећи овај резултат, лако се показује да је сваки циклус производ транспозиција:

$$(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2 \dots a_k).$$

Како је свака пермутација производ циклуса то закључујемо да важи следећи став.

**Став 4** Свака пермутација из  $S_n$  може се представити у облику производа транспозиција.

Овде треба истаћи да представљање није јединствено. Нпр.

$$(12)(23)(34) = (14)(13)(12).$$

Оно што јесте јединствено је **парност** броја транспозиција које се појављују у факторизацији дате пермутације. Тај резултат такође нећемо доказивати. Укажимо само да пермутације које се могу представити у облику производа парног броја транспозиција зовемо парне пермутације, док се пермутације које се представљају у облику непарног броја транспозиција зову непарне пермутације. Скуп свих парних пермутација означава се са  $A_n$  и важи следећи став.

---

**Став 5** За свако  $n \geq 2$  је  $\mathbb{A}_n \leq \mathbb{S}_n$  и  $|\mathbb{A}_n| = \frac{n!}{2}$ .

**Доказ.** Како је идентична пермутација очигледно парна (зашто?), то је  $\mathbb{A}_n \neq \emptyset$ . Осим тога, ако су  $\sigma$  и  $\pi$  парне пермутације, то је и  $\sigma\pi^{-1}$  парна пермутација. Наиме, ако је  $\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_{2k}$ , а  $\pi = \phi_1\phi_2 \cdots \phi_{2l}$ , представљање ових пермутација у облику производа парног броја транспозиција то је  $\sigma\pi^{-1} = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_{2k}\phi_{2l} \cdots \phi_2\phi_1$  представљање у облику производа парног броја транспозиција (појаснити ову последњу једнакост).

Да бисмо одредили ред подгрупе  $\mathbb{A}_n$ , изаберимо било коју транспозицију  $\tau$ . Тада можемо дефинисати функцију  $\Phi: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{S}_n \setminus \mathbb{A}_n$  са:  $\Phi(\pi) := \tau\pi$ . Није тешко уверити се да је  $\Phi$  бијекција. Резултат одавде следи (проверити да је  $\Phi$  бијекција и објаснити како се добија тражени резултат).  $\square$

Ако је  $\pi \in \mathbb{S}_n$  и  $(a_1a_2 \dots a_k)$  један  $k$ -цикл тада је

$$\pi(a_1a_2 \dots a_k)\pi^{-1} = (\pi(a_1)\pi(a_2) \dots \pi(a_k)).$$

Ово се лако може проверити. Споменимо узгред да је

$$(a_1a_2 \dots a_k)^{-1} = (a_k a_{k-1} \dots a_1).$$

Видели смо да је група  $\mathbb{S}_n$  генерисана транспозицијама. То је прилично велики генераторни скуп. Заправо се могу наћи знатно једноставнији скупови генератора за  $\mathbb{S}_n$ .

**Став 6** Група  $\mathbb{S}_n$  генерисана је:

1. транспозицијама  $(12), (13), \dots, (1n)$ ;
2. транспозицијама  $(12), (23), (34), \dots, (n-1, n)$ ;
3. пермутацијама  $(12)$  и  $(123 \dots n)$ .

**Доказ.**

1. Лако се може проверити да је  $(ab) = (1a)(1b)(1a)$ . Дакле, све транспозиције се могу добити помоћу наведених.

2. Довољно је показати да можемо да добијемо све транспозиције облика  $(1a)$  за  $2 \leq a \leq n$ . Наравно,  $(12)$  је већ на списку! Ево како добијамо  $(13)$ :

$$(13) = (12)(23)(12).$$

Сада када имамо  $(13)$  није тешко добити и  $(14)$ :

$$(14) = (13)(34)(13).$$

Уочавамо правилност:

$$(1, k+1) = (1k)(k, k+1)(1k).$$

---

На овај начин добијамо све транспозиције за које знамо да генеришу  $\mathbb{S}_n$ . Стога и почетне транспозиције генеришу  $\mathbb{S}_n$ .

3. Подсетимо се формуле:  $\pi(a_1 \dots a_k)\pi^{-1} = (\pi(a_1) \dots \pi(a_k))$  (веома пажљив читалац је можда приметио да се ова формула крије и у идентитету  $(13) = (12)(23)(12)$ ). Уколико је  $\pi = (12 \dots n)$  добијамо

$$(12 \dots n)(12)(12 \dots n)^{-1} = (23).$$

Када смо добили (23), није нам тешко да добијемо и (34):

$$(12 \dots n)(23)(12 \dots n)^{-1} = (34).$$

Уочавамо правилност:

$$(12 \dots n)(k, k+1)(12 \dots n)^{-1} = (k+1, k+2),$$

за  $1 \leq k \leq n-2$ . Тако добијамо све транспозиције за које знамо да генеришу  $\mathbb{S}_n$ , па према томе закључујемо да и дате две пермутације такође генеришу  $\mathbb{S}_n$ .  $\square$

Приметимо да парност  $k$ -цикла зависи од  $k$ . Заправо је  $k$ -цикл парна пермутација ако и само ако је  $k$  непаран (погледајте како смо  $k$ -цикл представили у облику производа транспозиција). То посебно значи да је сваки цикл дужине три (трицикл!) једна парна пермутација. Важи следећи став.

**Став 7** Ако је  $n \geq 3$ , онда је  $\mathbb{A}_n$  генерисана циклусима дужине 3.

**Доказ.** Ово заправо није тешко доказати. Уколико је  $n = 3$  и немамо шта да доказујемо. Наиме,  $\mathbb{S}_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$  ((1) представља идентичну пермутацију). Дакле, овде је заправо  $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$ . Претпоставимо стога да је  $n \geq 4$ . Како је, према претходном ставу, скуп  $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$  један скуп генератора групе  $S_n$ , то се и сваки елемент из  $A_n$  може представити у облику производа ових елемената. Но, како је у питању елемент из  $A_n$ , он је представљен у облику производа парног броја таквих транспозиција. Групишући их две по две, добијамо да је довољно да покажемо да се пермутације облика  $(1a)(1b)$ , где је  $a \neq b$  могу представити у облику производа циклуса дужине 3. Но, заправо је  $(1a)(1b) = (a1)(1b) = (a1b)$ ! Дакле, то је већ циклус дужине 3. Овим је доказ завршен.  $\square$

Позабавимо се сада питањем одређивања реда елемената из  $S_n$ . Директном провером се добија да је  $\omega((a_1 \dots a_k)) = k$ . Како се свака пермутација може представити у облику производа дисјунктних циклуса, то би морало бити корисно за одређивање реда произвољне пермутације. Доказаћемо један општи став.

**Став 8** Нека је  $G$  произвољна група и  $a, b \in G$  су такви да је:

1.  $\omega(a) = m, \omega(b) = n$ ;

---

2.  $ab = ba$ ;

3.  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ .

Тада је  $\omega(ab) = \text{NZS}(m, n)$ .

**Доказ.** Како је  $ab = ba$ , то је за сваки  $k \in \mathbb{N}$ :  $(ab)^k = a^k b^k$ . То се лако доказује индукцијом. Ради краћег записа уведемо ознаке:  $s = \omega(ab)$ ,  $t = \text{NZS}(m, n)$ . Осим тога,  $t = mt_1 = nt_2$ . Како је

$$(ab)^t = a^t b^t = a^{mt_1} b^{nt_2} = (a^m)^{t_1} (b^n)^{t_2} = e^{t_1} e^{t_2} = e,$$

то добијамо  $s \mid t$ .

С обзиром да је  $s = \omega(ab)$ ,

$$e = (ab)^s = a^s b^s.$$

Добијамо да је  $a^s = (b^s)^{-1}$ . Но,  $a^s \in \langle a \rangle$ , а  $(b^s)^{-1} \in \langle b \rangle$  те смо добили елемент из пресека  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ . Како је овај пресек тривијалан, мора бити  $a^s = e$  и  $(b^s)^{-1} = e$ , тј.  $b^s = e$ . Но, с обзиром на то да је  $m = \omega(a)$  и  $n = \omega(b)$ , следи да  $m \mid s$  и  $n \mid s$ . Имајући у виду да је  $t = \text{NZS}(m, n)$ , добијамо да  $t \mid s$ . Закључујемо да је  $s = t$ .  $\square$

Из овог резултат можемо добити две последице.

**Последица 9** Ако су  $\sigma$  и  $\tau$  дисјунктни циклуси из  $\mathbb{S}_n$ , онда је  $\omega(\sigma\tau) = \text{NZS}(\omega(\tau), \omega(\sigma))$ .

**Доказ.** Да бисмо применили претходни став, довољно је показати да је  $\langle \tau \rangle \cap \langle \sigma \rangle = \{(1)\}$ . Претпоставимо да је  $\pi \in \langle \tau \rangle \cap \langle \sigma \rangle$ . Нека је  $\sigma = (a_1 \dots a_k)$ , а  $\tau = (b_1 \dots b_l)$ . Нека је  $i \in \{1, \dots, n\}$  произвољан елемент. Ако  $i \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ , с обзиром да је  $\pi = \sigma^s$ , за неко  $s$ , мора бити  $\pi(i) = i$ . Ако пак  $i \in \{a_1, \dots, a_k\}$ , онда  $i \notin \{b_1, \dots, b_l\}$ , те с обзиром да је  $\pi = \tau^t$ , за неко  $t$ , мора бити  $\pi(i) = i$ . Закључујемо да је  $\pi$  идентична пермутација, те је пресек тривијалан.  $\square$

Следећи резултат је генерализација претходног.

**Последица 10** Ако је  $\pi = \sigma_1 \dots \sigma_k$  представљање пермутације  $\pi$  у облику производа дисјунктних циклуса, онда је  $\omega(\pi) = \text{NZS}(\omega(\sigma_1), \dots, \omega(\sigma_k))$ .

Искористимо управо доказано на једном примеру.

**Пример 11** а) Испитати да ли у  $\mathbb{S}_7$  постоји елемент реда 12.

б) Испитати да ли у  $\mathbb{S}_7$  постоји елемент реда 8.

а) Елемент  $(1234)(567)$  је на основу претходних резултата реда 12.

б) Питање се своди на следеће. Да ли број 8 може бити најмањи заједнички садржалац бројева мањих од њега? Да то није могуће,

---

може се проверити једноставном анализом. Остављамо читаоцима да се у то убеде.

Ми смо се до сада бавили цикличним, диедарским и групама пермутација. Да ли се можда неке од ових група подударају? Није тешко видети да су групе  $S_2$  и  $A_3$  цикличне групе (реда 2 односно 3). Много је занимљивија следећа чињеница:

$$D_3 \cong S_3.$$

Наиме, група  $D_3$  је група симетрија једнакоугаоног троугла. Означимо темена тог троугла бројевима 1, 2 и 3. Свака симетрија троугла индукује једну пермутацију скупа свих темена, а тиме и скупа  $\{1, 2, 3\}$ . Није тешко уверити се која пермутација одговара којој симетрији троугла. Препоручујемо читаоцима да нацртају цртеж и сами одреде наведене симетрије.

Следећи пример је још интересантнији.

**Пример 12** Група ротационих симетрија правилног тетраедра изоморфна је групи  $A_4$ .

И овде је добро темена тетраедра нумерисати бројевима од 1 до 4. Свака ротациона симетрија индукује пермутацију скупа темена. Тако добијамо функцију из групе симетрија тетраедра у групу  $A_4$  (уверите се да добијамо само парне пермутације). Но, та функција не само да је бијекција, него је и изоморфизам, пошто је у оба случаја операција у групи заправо композиција пресликавања.

**Пример 13** Група ротационих симетрија коцке изоморфна је групи  $S_4$ .

размотримо најпре колико има ротационих симетрија коцке. Како коцка има 6 страна, то за сваки пар страна постоје три нетривијалне ротације коцке око оса које пролазе кроз центре наспрамних страна. Ротације су за  $\pi/2$ ,  $\pi$  и  $3\pi/2$ . Тако добијамо 9 ротација.

Коцка има и 4 дијагонале и око сваке дијагонале постоје две нетривијалне ротације — за углове од  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$ . Дакле, добијамо још 8 ротација.

Коцка има и 12 ивица. Постоји 6 ротација за  $\pi$  око оса које пролазе кроз средишта наспрамних ивица коцке.

Укупно смо добили  $9+8+6+1 = 24$  ротације (додали смо и идентичну трансформацију).

Свака од ротација пермутује дијагонале коцке. Тако се свака ротација може видети и као пермутација скупа од 4 елемента. Све оне су различите, а има их 24 колико и елемената групе  $S_4$ . С обзиром да су у оба случаја групне операције композиција функција добијамо да је тражена група симетрија изоморфна групи  $S_4$ . Препоручујемо читаоцима да детаљније проуче овај пример и провере које ротације одговарају којим елементима из  $S_4$ .

---

За крај ове лекције докажимо једну једноставну, али веома важну теорему, која показује зашто групе пермутација имају значајно место у теорији група.

**Теорема 14 (Кејлијева теорема)** Свака група  $G$  изоморфна је некој подгрупи групе  $\mathbb{S}_G$ .

**Доказ.** Ако је  $g \in G$ , са  $L_g: G \rightarrow G$  означимо бијекцију дефинисану са:

$$L_g(x) := g \cdot x.$$

Јасно је да је  $L_g$  бијекција пошто је  $L_g \circ L_{g^{-1}} = \text{id}_G (= L_e)$ . Дакле,  $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ . Осим тога:

$$L_g \circ L_h = L_{g \cdot h}.$$

Дакле, видимо да је  $G' = \{L_g : g \in G\}$  једна подгрупа групе  $\mathbb{S}_G$ .

Функција  $f: G \rightarrow G'$  дефинисана са  $f(g) = L_g$  остварује изоморфизам између  $G$  и  $G'$ .  $\square$

У случају да је група коначна добијамо следећу последицу.

**Последица 15** Свака коначна група реда  $n$  изоморфна је некој подгрупи групе  $\mathbb{S}_n$ .