Кавалијери

Слика 1: Бонавентура Кавалијери

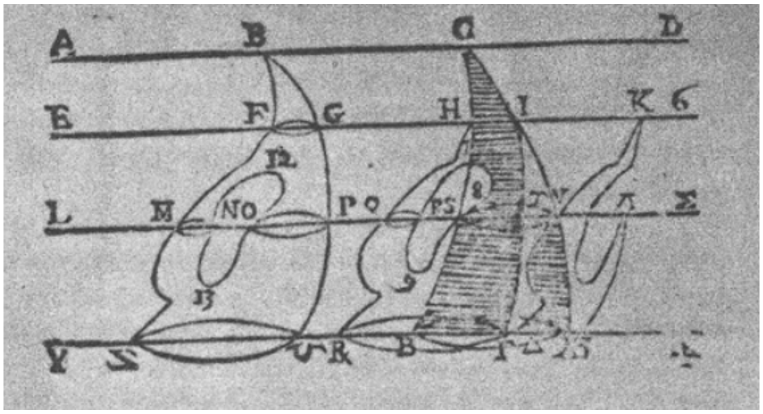
Бонавентура Кавалијери (1598–1647), био је професор у Болоњи. Као млад је математику учио од Кастелија, који је био предавач на универзитету у Пизи. Кастели га је увео у Галилејеве идеје и када га је најзад упознао, сматрао је себе његовим учеником. У периоду 1619–1641. Кавалијери је написао више од 100 писама Галилеју, који је само повремено писао Кавалијерију. Кавалијери је уз препоруку Галилеја 1629. добио позицију на универзитету у Болоњи. Галилеј је, између осталог написао:

> ...мало је оних, ако их уопште и има, који су од Архимеда тако дубоко ушли у геометријску науку као што је то урадио Кавалијери...

Његово изузетно значајно дело „Геометрија недељивих” објављено је у Болоњи 1635. године. Може се рећи да је то први уџбеник у коме су разматране методе интеграције. Ту он посматра равне површине као суме недељивих, тј. дужи од којих су састављене. Слично су запремине суме равних површина. У том делу се налази и добро нам познати Кавалијеријев принцип за одређивање површине равних фигура, као и запремине тела који се и сада користи у математици у средњој школи. Ево како га је он формулисао.

Теорема. Ако се између две паралеле конструишу две равне фигуре тако да свака права линија које је подједнако удаљена од тих паралела сече две фигуре тако да су одговарајући пресеци међусобно једнаки, онда су и те равне фигуре једнаке једна другој; и ако се између две паралелне равне конструишу два тела тако да свака раван која је подједнако удаљена од ових паралелних равни сече оба тела у једнаким деловима, онда су та тела једнака једно другом.

Наравно, када каже „једнаке” мисли да су одговарајуће дужине, односно површине једнаке.

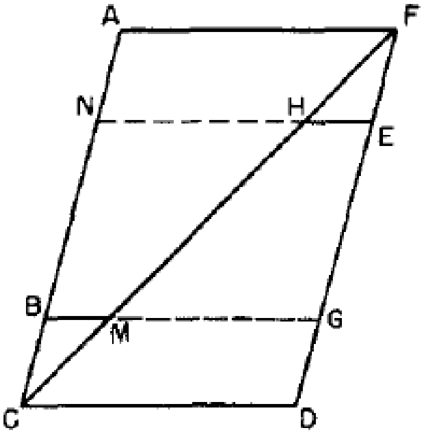


Доказ који презентира базира се на постепеном преклапању ових фигура (тела). Наиме, једну од њих помери да се бар делимично преклопи са другом. После тога, у обе остају делови који се не преклапају, али ти делови задовољавају иста својства као и почетни. Узастопним преклапањем смањују се те ’непреклапајући’ делови. Кавалијери каже да се тај поступак настави док не дође до потпуног преклапања. Наравно, нећемо се бавити критиком овог доказа, желимо само да прикажемо Кавалијеријево размишљање.

Кавалијеријев метод се састојао од поређења недељивих у једној фигури са недељивим у другој. И он сам је био свестан опасности које су ту крију и даћемо и један његов такав конкретан пример и како је он покушао да разреши проблем. Но, пре тога ћемо показати како је дошао до, de facto, формуле

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

за $1 \leqslant n \leqslant 9$. Резултат за $n = 2$ приказао је у „Геометрији недељивих”. Како се то своди на квадратуру параболе, коју је већ извео Архимед, он нема ништа ново. У делу „Шест геометријски вежби” објављеном у Болоњи 1647. нашао је горенаведену формулу за остале случајеве. Показаћемо како је он то урадио за $n = 3$, али најпре ћемо објаснити његов метод на једноставнијим случајевима, тј. за $n = 1$. Кључна је следећа слика.



Видимо паралелограм који је дијагоналом подељен на два (подударна) троугла. Приметимо да је $HE = BM$, $NH = MG$. Сва образложења код Кавалијерија су текстуална, да бисмо лакше и представили и разумели шта ради користићемо симболику. Нека је $HE = x$, $NH = y$ и $AF = a$. Тада је $x + y = a$, те је $\sum x + \sum y = \sum a$, где смо уместо Кавалијеријевог *o.l. (omnes lineae)*, тј. све линије, користили ознаку за суму. Ту се сумира по свим дужима (већ смо рекли како је он гледао на налажење површине). Но, како је $HE = BM$, имамо да је $\sum x = \sum y$, те је $\sum x = \frac{1}{2} \sum a$. Овде је $\sum x$ површина троугла, док је $\sum a$ површина паралелограма. Тако смо добили да је површина троугла половина површине паралелограма, што је наравно добро познато од давних времена, али ово заправо одговара нашој формули $\int_0^a x dx = \frac{1}{2} a^2$. Наиме, ако додамо Δx, имамо да је

$$\sum x \Delta x = \frac{1}{2} \sum a \Delta x = \frac{1}{2} a \sum \Delta x = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{1}{2} a^2.$$

А ова сума $\sum x \Delta x$ одговара интегралу $\int_0^a x dx$. Наравно, не причамо о доказу у пуној коректности, говоримо о идејама.

Ево како је Кавалијери формулисао резултат који ми видимо као формулу $\int_0^a x^3 dx = \frac{1}{4} a^4$.

Став 21. Сви кубови паралелограма AD су четворострука вредност свих кубова било ког од троуглова ACF или FDC.

Већ смо, од грчке математике, упознати са тим скраћеним ознакама за паралелограм (а Кавалијери је био под великим утицајем Еуклида). Користимо исте ознаке као и у претходном доказу. Кавалијери тврди да је

$$\sum a^3 = 4\sum x^3 = 4\sum y^3.$$

Ево како он то показује (уз нашу симболику). Најпре наводи да је

$$\sum a^3 = \sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum xy^2 + 3\sum x^2 y. \tag{1}$$

Потом констатује да је

$$\sum a^3 : \sum ax^2 = \sum a^2 : \sum x^2 = 3:1,$$

а последњи однос зна из случаја $n = 2$. Дакле,

$$\sum a^3 = 3\sum ax^2.$$

Но,

$$\sum ax^2 = \sum (x+y)x^2 = \sum x^2 y + \sum x^2 x = \sum x^2 y + \sum x^3.$$

Дакле, из горње пропорције се добија да је

$$\sum a^3 = 3\sum x^2 y + 3\sum x^3. \tag{2}$$

Из (1) и (2) добија

$$\sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum xy^2 = 3\sum x^3.$$

Но, како је $\sum x^3 = \sum y^3$, добијамо да је

$$3\sum xy^2 = 3\sum x^2 y = \sum x^3.$$

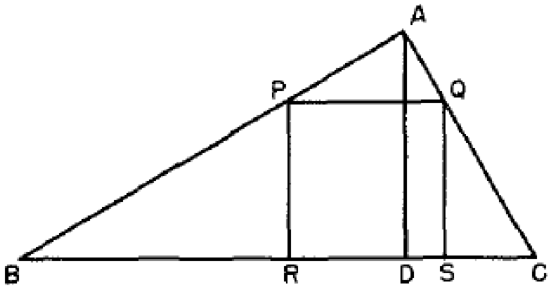
Коначно је

$$\sum a^3 = 4\sum x^3,$$

јер је сваки сабирак у (1) једнак $\sum x^3$. И овакав доказ се може скратити, али то нам није важно.

У писму Кавалијерија његовом млађем колеги Торичелију наводи се следећи парадокс. Посматрамо разнострани троугао ABC са висином AD.

Ако посматрамо паралеле PQ страници BC и онда паралеле PR и QS висини AD, видимо да је $PR = QS$. Стога је $\sum PR = \sum QS$. Но, по теорији недељивих $\sum PR$ је површина троугла ABD, док је $\sum QS$ површина троугла ADC. А јасно је да те површине нису једнаке. Кавалијери је покушао да разреши тај парадокс тако што је дужи PR, QS посматрао као танке нити тканине. Ако је $AB = 2AC$ и ако AC садржи 100 тачкица, онда AB садржи 200 тачкица и стога имамо 100 нити у ADC, а 200 у ADB. Но, овде имамо ипак прелаз на дводимензионалне објекте. То није конзистентно са теоријом недељивих. Наравно да је нама сада јасно да је једно разматрати да ли постоји бијекција између два објекта, а нешто друго је питање да ли им је мера (површина, запремина) иста. Са тим проблемом се касније срео и Лајбниц, који је најпре користио, попут Кавалијерија, скраћеницу $omn.$ (све): $omn.y$, потом $\int y$ ($omn.$ представља суму (свих), а $\int$ је продужена верзија слова S (сума)), али је потом ипак дошао до $\int y dx$.



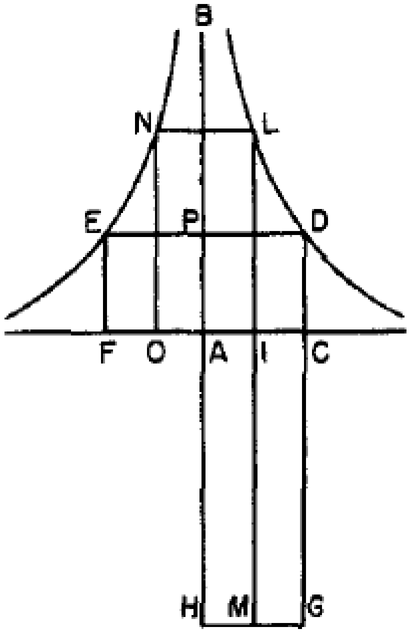
Торичели

Слика 2: Еванђелиста Торичели

Еванђелиста Торичели (1608–1647) данас нам је пре свега познат као физичар и изумитељ барометра, но у своје време он је имао значајне математичке резултате. Да је дуже поживео, могуће је да би он дошао до резултата до којих су нешто касније дошли Њутн и Лајбниц. Нажалост, добио је тифус и веома брзо после тога је умро. Оставио је једном свом пријатељу своја дела да би овај обезбедио да она буду објављена. Но, неки се тог задатка нису ни желели да прихвате, Вивијани јесте прихватио, али на крају није то урадио. Неки су рукописи изгубљени, а прва три тома су објављена тек 1919. године, а четврти 1944, дакле скоро 300 година после његове смрти.

У младости је учио математику од Кастелија, као и Кавалијери, али се временом упознао са делима Архимеда, упознао је и Галилеја, као и Кавалијерија и наставио да развија метод недељивих. У почетку је био веома скептичан према том методу, али га је касније прихватио и дошао до низа резултата. Бавио се циклоидом, нашао је површину испод једног њеног лука и тај резултат објавио због чега је дошао у сукоб са Робервалом, који је до тог резултата дошао пре њега, али га није објавио. Можда није лоше навести да је Робервал често долазио у сукоб са разним математичарима свог времена у вези приоритета резултата. Наиме, он није желео да објави своје резултате из врло практичног разлога. Имао је позицију која је захтевала проверу на сваке четири године и онда би се кандидати за ту позицију „надметали” са њим у решавању проблема. Он је имао те резултате и методе које је чувао за себе и тако би обезбеђивао позицију. Но, нужно су до тих резултата долазили временом и други математичари, те је имао те сукобе, а и мање резултата носи његово име захваљујући таквом приступу.

Торичели се бавио и разним спиралама и у вези проблема квадратуре и проблема ректификације (одређивања дужине). Изучавање путање пројектила, где је наставио рад Галилеја, посебно зависности пређеног пута и брзине од времена, указивале су му на инверзност процеса налажења површине и тангенте, али није то у довољној мери наставио (а можда и јесте, но ми то не знамо, пошто су свакако неки његови рукописи изгубљени). За решавање проблема квадратуре користио је метод недељивих, али је и давао доказе на класичан, Архимедов геометријски начин да би их учинио доступним и онима којима нови метод није био довољно познат. У његовим делима се могу наћи и разни парадокси до којих се долази некритичном применом метода недељивих (као што смо већ видели на једном ранијем примеру), те је јасно да је био свестан ограничења тог метода.



Можда је најзанимљивији за нас његов резултат у коме доказује коначност запремине једног бесконачног тела. Прецизније, он заправо доказује да тело, које се добија ротацијом око y- осе дела хиперболе $xy = a^2$ уз y-осу до тачке D, која има координате (a, a) којој је додата и дуж DC, има исту запремину као и цилиндар који за основу има круг пречника AH, где је $AH = 2AD$, а висину $AC = a$. Недељиве које је овде користио су паралелни кругови који се добијају при тој ротацији.

Валис

Џон Валис (1616–1701) био је један од првих чланова Краљевског друштва у Енглеској и сматра се за најутицајнијег енглеског претходника Њутна. Био је професор на Оксфорду и на тој позицији је наследио Бригза о коме је било речи у теми о логаритмима. Године 1665. Валис је објавио две изузетно значајне књиге од којих се једна бави даљим развојем аналитичке геометрије („Трактат о конусним пресецима”), но друга је ипак посебнија, пошто није имала свог пандана. Ради се о књизи „Аритметика бесконачно малих” у коме је Валис извршио 'аритметизацију' Кавалијеријевих идеја о недељивим. Он је гледао да те идеје ослободи геометријских разматрања попут оних манипулација које је изводио Кавалијери поредећи дужи у троуглу и

Слика 3: Џон Валис

паралелограму, а које смо видели у Кавалијеријевом поступку налажења, de facto интеграла $\int_0^a x^n dx$. Ево како он објашњава како се, на пример, долази до резултата $\int_0^1 x^3 dx$.

Он пореди суме трећих степена чланова аритметичког низа, за који заправо узима да је 0,1,2,... са сумама трећег степена највећег од њих. Наиме, ова сума трећих степена одговара троуглу који се састоји од паралелних дужи чије дужине чине аритметички низ (а полази се од тачке, темена троугла и рачунају се кубови њихових дужина), а сума трећег степена највећег од њих одговара сумама кубова дужи у паралелограму који се састоји од једнаких паралелних дужи (он каже да се „такорећи троугао састоји од паралелних дужи...”; наравно да је за ово „такорећи” било критике од стране других математичара касније). Како је

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125+125} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216}{216+216+216+216+216+216+216} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24},$$

он закључује да се по индукцији може закључити да је однос увек за $\frac{1}{4n}$ већи од $\frac{1}{4}$ уколико је n највећи члан којим степенујемо. Наравно да се не ради о строгој математичкој индукцији, и због тога је био критикован од стране француских математичара, него о наслућивању правила на основу постојећих примера. Констатује да када имамо суму бесконачно много чланова (да не улазимо сада у питање како је то замислио да се реализује, јасно је интуитивно шта жели) онда тог додатка и нема, те је тражени однос $\frac{1}{4}$. Ово он констатује за све n од 1 до 10. Но, сада може да закључи и то да је $\int_0^1 \sqrt[n]{x} dx = \frac{n}{n+1}$. Наиме, функција $y = x^n$ може се записати и као $x = \sqrt[n]{y}$, те је површина испод криве $y = \sqrt[n]{x}$ (када је $0 \leqslant x \leqslant 1$), а која се може записати и као $x = y^n$ заправо комплемент површини испод криве $y = x^n$ када је $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пошто за њу зна да је једнака $\frac{1}{n+1}$, ова друга је $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Онда он смело закључује да је површина испод криве $y = x^{m/n}$ (модерне ознаке, он је користио нешто другачије ознаке) једнака $\frac{1}{1+\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n}$.

Ево још једног његовог занимљивог закључивања, у коме је антиципирао касније Ојлерове резултате о Гама и Бета функцији. Знајући претходне резултате, он је могао да израчуна површине испод кривих $y = (x - x^2)^n$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$ (дакле, de facto $\int_0^1 (x - x^2)^n dx$). Пошто је израчунао за неколико вредности n, закључио је да је резултат (у нашим садашњим ознакама) $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. С друге стране је знао да је интеграл $\int_0^1 (x - x^2)^{1/2}$ заправо површина полукруга полупречника 1/2, те мора бити једнак $\frac{\pi}{8}$. Но, није знао како да тог резултата директно дође пошто није знао како да 'развије' $(x - x^2)^{1/2}$ у нешто што би му омогућило рачунање, тј. није знао биномну формулу за експонент 1/2. Но, ипак је смело заменио $n = 1/2$ у горњу формулу и добио да је

$$\int_0^1 (x - x^2)^{1/2} dx = \frac{(\frac{1}{2}!)^2}{2!},$$

те је тако дао смисао изразу $\frac{1}{2}!$:

$$\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Подсетите се формула за Гама и Бета функцију.)

Још један његов вредан резултат, који носи назив по њему, је Валисова формула:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}.$$

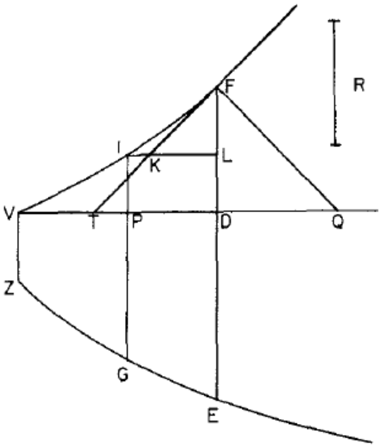
Начин на који је дошао до ње је изузетно занимљив, али га ипак нећемо наводити.

Бароу

Слика 4: Исак Бароу

Исак Бароу (1630–1677) био је други енглески математичар који је извршио велики утицај на Њутна. Он је био професор на Кембрицу и његов приступ математици је био дијаметрално супротан од Валисовог. Није волео алгебарске формализме и сматрао је да алгебра треба да буде део логике, а не математике. Велики поштовалац грчке науке, уређивао је дела Еуклида, Аполонија и Архимеда. Његова два значајна дела су „Лекције из оптике" из 1669. и „Лекције из геометрије" из 1670. Њему је у припремама за објављивање ових дела помогао Њутн који је слушао његова предавања на Кембрицу. Као што је и сам Бароу рекао, „Лекције из геометрије", које се састоје из 13 лекција, нису у потпуности сређене, али је ипак, на наговор пријатеља (Њутна) решио да их објави такве какве су „у природном оделу, као што су и рођене". У њима налазимо разне резултате о налажењу тангенти, површина и дужина лукова. Користио је најпре кинематички приступ, затим и метод недељивих, метод близак Фермаовом за налажење тангенте. Све је приказано на геометријски начин те стога није било тако лако да се препозна важност тих резултата. Ево како је он приказао (и доказао) резултат који данас знамо као Њутн-Лајбницову формулу, или као Основну теорему Calculusa.

Нека је ZGE нека крива чија је оса VD и нека су ортогоналне ординате на ову осу (VZ, PG, DE) такве да непрекидно расту од почетне ординате VZ. Нека је VIF крива таква да ако се постави права линија EDF ортогонално на VD, а која сече криве у тачкама E и F, а VD у тачки D, правоугаоник који је одређен дужином DF и датом дужином R једнак је површини $VDEZ$, а осим тога је тачка T таква да је $DE : DF = R : DT$. Ако се споје тачке T и F, онда ће TF додиривати криву VIF.



Слика 5: Њутн-Лајбниц геометријски

Уверимо се најпре, коришћењем савремених знања и ознака да овде заиста имамо Њутн-Лајбницову формулу у геометријском облику. Нека је $y = f(x)$ једначина криве ZGE, а $y = g(x)$ једначина криве VIF. По претпоставци је $Rg(x) = -\int_0^x f(t)dt$. Осим тога је $(-f(x)) : g(x) = R : DT$. Чињеница да је TF тангента на криву VIF нам даје да је $g(x) : DT = g'(x)$. Дакле

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = -Rg'(x) = -R\frac{g(x)}{DT} = -\frac{R}{DT}g(x) = -\frac{-f(x)}{g(x)}g(x) = f(x).$$

Ево како је то Бароу доказао (додајемо поново слику ради лакшег праћења).

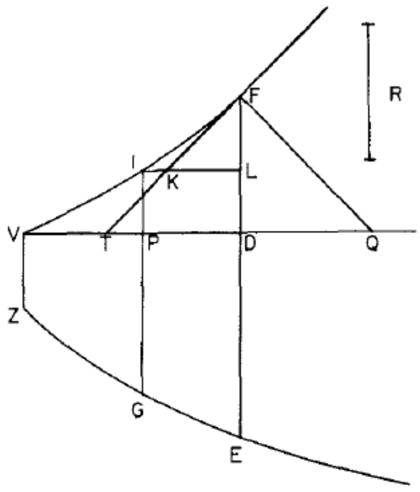
Узмимо било коју тачку I на кривој VIF (најпре са исте стране F са које је и V) и кроз њу поставимо IG паралелно са VZ и IL паралелно са VD, које секу дате линије у тачкама као на слици. Тада је $LF : LK = DF : DT = DE : R$, односно $R \cdot LF = LK \cdot DE$.

Али, из природе наведених линија DF и LK, имамо да је $R \cdot LF$ једнако површини $PDEG$. Стога је $LK \cdot DE$ једнако површини $PDEG$ која је мања од $DP \cdot DE$. Те је $LK < DP = LI$. На сличан начин се показује да ако се I узме на другој страни од F (у односу на V), и иста конструкција понови, лако се показује да је $LK > DP = LI$.

Одавде је јасно да се цела права TKF налази испод криве VIF.

Он затим додаје да се на сличан начин тражено може добити ако ординате VZ, PG и DE опадају.

Ако постоји нека недоумица зашто је $R \cdot LF$ једнако површини $PDEG$,



приметимо да је $R \cdot IP$ једнако површини $VPGZ$, те одатле следи и то што је наведено, јер је $LF = DF - DL = DF - IP$.

Њутн и Лајбниц

Да би се привело крају формирање Calculusa било је потребно некако ујединити геометријски приступ (Кавалијери, Бароу) и рачунски (Декарт, Ферма, Валис) и прецизно истаћи везу између тражења тангенти и квадратуре. То су извели Њутн и Лајбниц, а касније су њихови следбеници наставили да појашњавају и развијају метод. Наравно, као што смо већ рекли, све је то најзад постављено на чврсте основе тек крајем деветнаестог века, али до главних резултата се дошло знатно раније.

Њутн је до своје верзије Calculusa дошао у годинама 1664–1668, док је Лајбниц своју верзију формирао у периоду 1672–1676. Јасно је да је Њутн дошао до резултата раније, али их је објавио доста касније, док је Лајбниц своју верзију објавио непосредно по откривању својих резултата. Лајбницова верзија је била практичнија и јаснија и брзо се развијала кроз радове браће Бернули, Ојлера и других. Маркиз де Лопитал (1661–1704)
је објавио чак и уџбеник „Анализа бесконачно малих” 1696. године на француском у коме су ове идеје изложене. Он је ту навео да је и Њутн дошао до одговарајућих резултата, али је Лајбницов метод знатно лакши и ефикаснији пре свега због погодније нотације. Занимљиво је напоменути да тај уџбеник заправо представља сређене лекције које је Лопиталу о новим резултатима држао Јохан Бернули.

Слика 6: Гијом Франсоа Антоан Маркиз де Лопитал

Слика 7: Јохан Бернули (1667–1748)

Рецимо, данас нам добро познато Лопиталово правило је заправо Бернулијев резултат. Наиме, за добар хонорар, Бернули је пристао да даје лекције Лопиталу, који је био врло способан математичар аматер, уз то веома имућан човек и племић. Бернули му је такође слао, према договору, своје нове резултате, које није смео да шаље другим математичарима. Питање је зашто је Бернули направио такав договор, пошто му је позиција професора у Гронингену ипак обезбеђивала довољно средстава. Вероватно је желео да искористи добар положај имућног племића. Све у свему, уџбеник је био одлично написан и објављиван је у више издања. Лопитал је умро као млад човек и после његове смрти Јохан Бернули је навео да су то његови резултати, посебно „Лопиталово правило”. Занимљиво је да му је ретко ко у то поверовао, пошто је он био познат по својим расправама о првенству открића, док је Лопитал важио за врло пристојну особу. Бернулијева прича је потврђена тек почетком двадесетог века налажењем одговарајуће кореспонденције и лекција које је он држао Лопиталу. У сваком случају, данас се сматра да је ту и Лопитал дао значајан допринос у излагању резултата.

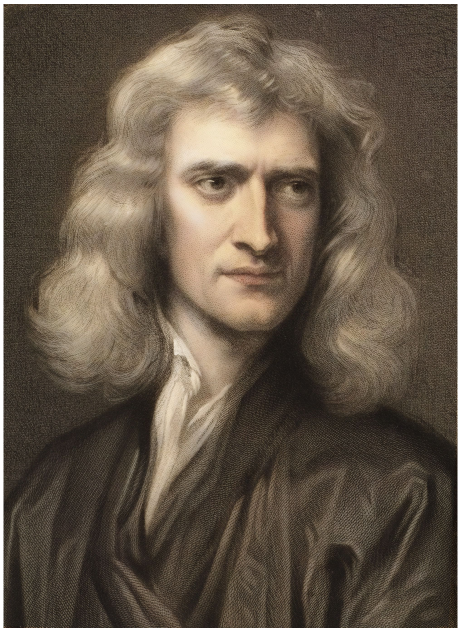
Њутнове идеје су даље развијали Тејлор, Меклорен и други британски математичари. Разлог зашто су се тиме бавили само британски математичари треба најпре потражити у расправи о приоритету открића. Занимљиво је да је Њутн у почетку у потпуности признавао Лајбницу независно откриће, али је драстично променио мишљење када су му неки почели да причају како се Calculus на европском континенту у потпуности сматра за Лајбницово откриће. Кренуле су оптужбе за плагијат и свачега је ту било. Ми се тиме нећемо бавити. Јасно је да су обојица имали значајан удео у формирању Calculusa. Тек почетком деветнаестог века су британски математичари прихватили Лајбницове ознаке, највише под утицајем Лапласових резултата. Њутнова ознака $\dot{x}$, за извод по времену, је ипак остала до данас. Физичари је посебно доста користе.

Најпре ћемо се позабавити Њутновим резултатима, пошто је ипак он до њих дошао раније.

Њутн

Исак Њутн (1643–1727) је, на препоруку ујака који је завршио Кембриџ уписао Тринити Колеџ 1661. године и свакако није планирао да постане математичар пошто је до тада врло мало учио математику. Чак се и на самом Кембриџу у то време веома мало предавала математика. Но, он је одмах кренуо да учи Еуклида, а потом и Ван Схутеново издање Декартове „Геометрије”, веома цењен у то време Отредов уџбеник „Кључ за математику”, Кеплерову „Оптику”, Вијетове радове и, наравно, Валисову „Аритметику”. Осим тога, слушао је и Бароуове лекције. После 1663. се упознао и са делима Галилеја, Ферма, Хајгенса и других математичара.

Од 1664. почиње сопствена истраживања. Први резултат до кога је дошао је била биномна теорема за рационалне изложиоце. Заправо је он само открио формулу, није је никада доказао, а није је ни сам објавио. Његова размишљања на ту тему налазе се у писмима која је слао Олденбургу, Немцу који је био стални секретар Краљевског друштва и који је водио интензивну кореспонденцију са многим мислиоцима у то време, нешто попут Марина Мерсена у Француској. Ради се о два писма, која су заправо настала као одговор на Лајбницово интересовање о томе шта је Њутн урадио у вези бесконачних редова. Ова писма су касније објављена у оквиру Валисове „Алгебре”.



Слика 8: Исак Њутн

Прво писмо је из јуна 1676. године. Оно почиње похвалама Лајбницу, који је, како каже Њутн, сигурно до свега тога дошао и сам, чак можда и боље, али кад се већ распитује шта су Енглези по том питању урадили, ево да он, који је до тога дошао пре неколико година, бар делимично испуни његове жеље.

Разломци се своде на бесконачне редове дељењем; а величине које у себи садрже корене, налажењем корена, извођењем операција са симболима као што се оне уобичајено раде за децималне бројеве. То су основе ових редукција. Али налажење корена се знатно упрошћава овом теоремом

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{ итд.}$$

где је $P+PQ$ величина чији се корен или неки степен или корен неког степена тражи.

Овде најпре да кажемо да је Њутн користио малу другачију нотацију. У то време се уместо заграда користила црта изнад израза. Њутн је заправо писао $\overline{P+PQ}|^{m/n}$. Ово и није необично колико нам се чини. Заправо остатак тога имамо у запису корена. Корен је заправо $\sqrt{}$, а ми онда постављамо црту изнад свега што је под тим кореном. Дакле, да би било јасније, пишемо $\sqrt{a+b}$, а не само $\sqrt{}a+b$. Код Њутна је то овако записано: $\sqrt{}\overline{a+b}$.

Њутн затим објашњава мало ову нотацију, па пише, на пример, да уместо $\sqrt{c:a^5}$ пише $a^{\frac{5}{3}}$ ($\sqrt{c}:$ се користило за кубни корен). А и каже да A, B, C, D, представљају цео претходни израз. Па је $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ$ и слично за C и D. Даје и пример

$$(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^3}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \text{ итд},$$

који детаљно образлаже.

Остали примери дају решење једначина $y^3-2y-5=0$ и $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$, редове за $\sin x$, $\sin^2 x$, решење једног Кеплеровог проблема за елипсу, ректификациу лука елипсе и хиперболе, површину хиперболе уз помоћ развоја за логаритам, квадратуре квадратрисе и запремину одсечка ротационог елипсоида. Њутн не жели баш све да открије, те наводи резултате који су познати.

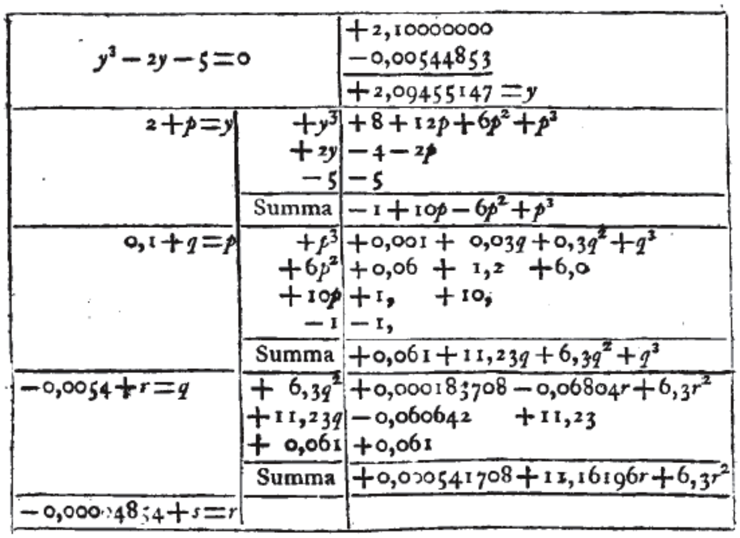
Наравно, овде је природно запитати се какве везе имају решења ове две наведене једначине са развојем у ред. Наиме, Њутн је 1669. године, када је проучио рад Меркатора „*Logarithmotechnia*" из 1668. и Грегорија „*De vera circuli et hyperbolae quadratura*" из 1667. у којима су разматрани и неки развоји у редове, саставио рукопис „О анализи једначинама са бесконачно много чланова", који је објављен тек доста касније, 1711. године. У том делу разматра баш та два примера. Ево како је он то радио.

Најпре се позабавио нумеричким решењем горенаведене једначине $y^3-2y-5=0$. Примећује да је једно решење близу двојци, те поставља $y=2+p$. Заменом у горњу једначину добија $p^3+6p^2+10p-1=0$. Како је p мало, он занемарује део p^3+6p^2 и поставља $10p-1=0$. Добија да је $p=0{,}1$. Наравно, p није толико, али је близу, стога поставља $p=0{,}1+q$ и то ставља у једначину по p. Добија $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0$. Зна да је q мало, па занемари $q^3+6{,}3q^2$ и добије $11{,}23q+0{,}061=0$. Стога за q узима приближно $-0{,}0054$ (овде је извршио заокругљивање, али нема то значаја) и поставља $q=r-0{,}0054$. Добија једначину по r и занемаривањем виших степена добија $r=-0{,}00004853$ (као што и овде видите, Њутн је волео да рачуна). Тако да добија приближно решење једначине $2{,}09455147$. Ево таблице коју је дао да прикаже рачун.

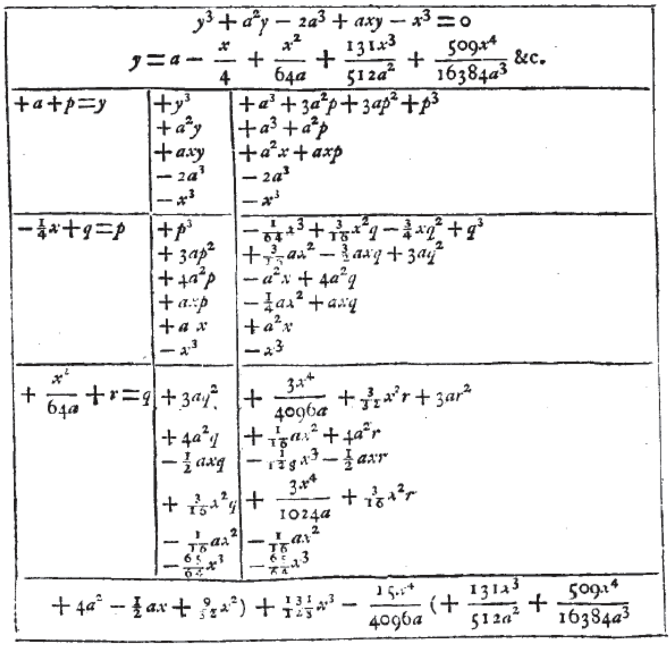
Затим прелази на, de facto, симболичко решавање једначине

$$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0.$$

Најпре тражи шта се добија када је $x=0$. Добије једначину $y^3+a^2y-2a^3=0$ и констатује да је решење $y=a$. Сада у почетну једначину замени $y=a+p$ и посматра само линеарне и константне чланове по p, тј. $4a^2p+a^2x=0$. Дакле, p је „приближно" $-\frac{1}{4}x$. Замени $p=-\frac{1}{4}x+q$ и понови поступак. На следећој таблици можемо видети тражени развој y и поступак рачунања.



$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$
		$-0,00544853$
		$+2,09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$+2y$	$-4-2p$
	-5	-5
	Summa	$-1+10p-6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0,06\ +\ 1,2\ \ +6,0$
	$+10p$	$+1,\ \ \ +10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$	$+6,3q^2$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642\ \ \ +11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$
$-0,00004854+s=r$		



$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ $y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ &c.		
$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$
	$+a^2y$	$+a^3+a^2p$
	$+axy$	$+a^2x+axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x+4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2+axq$
	$+ax$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$		

Вратимо се кореспонденцији Њутна и Лајбница преко Олденбурга. Лајбниц је одговорио на ово писмо у августу и у њему је навео неке своје резултате о квадратурама, алудирајући на то да има општи метод. Такође је навео неке примере редова, попут $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$, који представља однос површине круга и њему описаног квадрата (дакле $\pi/4$).

Њутн је одговорио у октобру дужим писмом у коме је похвалио Лајбница на резултатима и навео да је и он дошао до таквих резултата. Па ће у овом писму указати на други начин како је дошао до неких развоја.

На почетку својих студија математике, када сам се упознао са радовима нашег славног Валиса, при разматрању редова чијим је уметањем он сам одредио површине круга и хиперболе, чињеница је да се у низу кривих чија је заједничка база или оса x а ординате

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \text{ итд.}$$

ако се површине сваке друге међу њима, наиме

$$x, \quad x-\frac{1}{3}x^3, \quad x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5, \quad x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7, \text{ итд.}$$

могу интерполирати, морали бисмо добити површине оних између њих, од којих је прва $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ круг: да бих интерполирао ове редове приметио сам да је код свих њих први члан x и да су други чланови $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, итд. у аритметичком низу, и стога прва два члана реда који настаје уметањем треба да буду $x-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right)$, $x-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^3\right)$, $x-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3\right)$, итд. Да бих уметнуо остале чланове, приметио сам да су имениоци 1, 3, 5, 7, итд. у аритметичком низу, тако да само још вредности бројилаца треба одредити. Али, у датим површинама појављивале су се цифре бројева који су степени броја 11, наиме 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4, тј. најпре 1; онда 1,1; на трећем месту 1, 2, 1; на четвртом 1, 3, 3, 1; на петом 1, 4, 6, 4, 1, итд. И онда сам почео да размишљам како се остали бројеви у низу могу добити помоћу прва два и нашао сам да ако ставимо m за други број, остали се добијају непрекидним множењем чланова овог низа

$$\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}, \text{ итд.}$$

На пример, ако је $m=4$, онда ће $4\times\frac{1}{2}(m-1)$, тј. 6 бити трећи члан и $6\times\frac{1}{3}(m-2)$, тј. 4 ће бити четврти, $4\times\frac{1}{4}(m-3)$, тј. 1 ће бити пети и $1\times\frac{1}{5}(m-4)$, тј. 0 ће бити шести у ком тренутку се низ зауставља. У складу са тим сам применио ово правило и како је, за круг, други члан $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right)$, ставио сам $m=\frac{1}{2}$ и онда су чланови који су се појавили били

$$\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2} \text{ или } -\frac{1}{8}, \quad -\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}-2}{3} \text{ или } +\frac{1}{16}, \quad \frac{1}{16}\times\frac{\frac{1}{2}-3}{4} \text{ или } -\frac{5}{128},$$

и тако до бесконачности. Тако сам разумео да је површина кружног одсечка коју сам тражио

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{3}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \quad \text{итд.}$$

Потом констатује да се тако могу формирати одговарајући редови и за остале случајеве. Но, онда је приметио да се и

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{6}{2}}, \quad \text{итд},$$

тј.

$$1, \quad 1-x^2, \quad 1-2x^2+x^4, \quad 1-3x^2+3x^4-x^6, \quad \text{итд.}$$

могу на исти начин интерполирати као и површине које они одређују. Само нема имениоца $1,3,5,7$, итд. Дакле, помоћу раније примећеног правила добио је да је

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\dots$$

као и развоје за $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ и $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. Тако је добио опште правило за развој које је презентовао у првом писму. Да би проверио те развоје помножио је $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\dots$ са самим собом и заиста добио $1-x^2$, јер су остали чланови реда нестали. Слично је $1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\dots$ помножио два пута са самим собом и добио заиста $1-x^2$, те је тако проверио и развој за $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. Напокон је извео и другачију проверу. Наиме, нашао је $\sqrt{1-x^2}$ помоћу стандардног метода којим се тражи квадратни корен из неког броја формирањем цифара, а који смо раније објаснили. Овде нам степени x-а представљају цифре. И наравно да је добио исти резултат.

Занимљиво је ово што је Њутн писао прокоментарисати. Видимо да је он „погађао” резултат на један доста једноставан начин. То вероватно није необично, пошто је био инспирисан Валисовим радом, а код њега тога доста има. Но, ипак је извршио проверу касније на други начин. Друга је ствар да он уопште не говори о обичном биномном развоју и одговарајућим коефицијентима (Паскалов троугао), него до тога долази из разматрања површине. Забавна је и напомена у вези степена броја 11. Нама је јасно да се тај феномен дешава због обичне биномне формуле и чињенице да је $11^n=(10+1)^n$. Но, тако можемо добити само биномне коефицијенте који су једноцифрени. Ако бисмо желели да добијемо двоцифрене, онда би требало посматрати 101^n. На пример $101^5=\underline{1}\,\underline{05}\,\underline{10}\,\underline{10}\,\underline{05}\,\underline{01}$. За вишецифрене наравно треба гледати степене бројева $1001, 10001$, итд.

Њутн потом у писму наводи следећи анаграм

6accdæ13effi3l9n4o4qrr4s8t12vx.

Наравно, ми смо навикли на занимљивије анаграме, где треба од неке речи или реченице, које све имају смисла, пермутацијама слова направити нову реч или реченицу. Но, овде је само наведен број појединих слова. Ако би Лајбниц могао ово да распетља, добио би

Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvent fluxiones invenire et vice versa.

У преводу:

За дату једначину која укључује ма који број течних величина, наћи протоке, и обратно.

Пре него што прокоментаришемо „шта је писац хтео да каже”, наведимо, као занимљивост да су научници у то време користили анаграме да објаве неки свој резултат и да тако установе свој приоритет у проналаску. На пример, Хајгенс је 1655. објавио своје откриће Сатурновог месеца (то је тада био први, сада знамо да је то највећи његов сателит Титан) у облику анаграма:

ADMOUERE OCULIS DISTANTIA SIDERA NOSTRIS UUUUUUU CCCRRHNBQX.

Решење: *Saturno luno sua circunducitur diebus sexdecim horis quatuor*, у преводу: Сатурнов месец има орбитални период од 16 дана и 4 сата.

Дакле, Њутн је желео да обезбеди свој приоритет. У чему? Он ту наводи да има општи метод и то је његов метод флуксија. Овде одмах треба рећи да смо у преводу анаграма превели, да се тако изразимо, и више него што је требало. Наиме, ’течне величине’ ћемо убудуће звати ’флуенте’, а нећемо користити ни термин ’проток’, него флуксија. Њутн је разматрао величине које се мењају у времену (то су те флуенте) и брзине њихових промена (флуксије). Вратићемо се на ово врло брзо.

У писму наводи кратко како се налази квадратура криве $z^{\theta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}$ (овде уместо y користи z, док су f и e константе, а θ, λ и η рационалне константе). Заправо овде видимо основни његов метод решавања проблема квадратуре. На почетку свог раније споменутог дела „О анализи једначинама са бесконачно много чланова” Њутн наводи три правила за рачунање површине испод кривих.

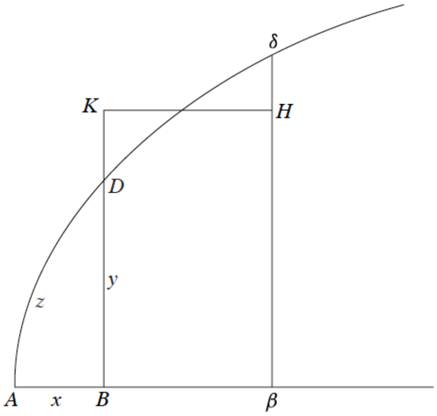
Правило 1. Ако је $y = ax^{\frac{m}{n}}$, онда је површина испод y једнака $a\frac{n}{n+m}x^{\frac{n+m}{m}}$.

Правило 2. Ако је y сума више чланова, којих може бити и бесконачно, онда је површина испод y дата сумом површина за све чланове.

Правило 3. Да би израчунали површину испод криве $f(x, y) = 0$, треба развити y као суму чланова облика $ax^{\frac{m}{n}}$ и применити Правило 1 и Правило 2.

Видели смо да је Валис извео то прво правило. Ево како је Њутн доказао то правило.

Треба да докаже да, ако је $ax^{\frac{m}{n}} = y$, онда је $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ површина ABD. Заправо, он доказује обрат, тј. из претпоставке да је површина дата наведеном формулом, онда је и y тако као што је наведено!



Најпре је, као припрему, детаљно доказао специјалан случај, када је $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Са цртежа видимо ознаке, а још је $B\beta = o$ и $BK = v$. Ево како он доказује општи случај.

Ако се стави да је $\frac{na}{m+n} = c$ и $m+n = p$, тада је $cx^{\frac{p}{n}} = z$, или $c^n x^p = z^n$. Тада заменом $x+o$ уместо x и $z+ov$ (или, што је исто $z+oy$) уместо z, добија се

$$c^n(x^p + pox^{p-1} \text{ итд.}) = z^n + noyz^{n-1} \text{ итд.}$$

при чему испуштам остале чланове који ће на крају крајева нестати. Даље, ако одбацим једнаке $c^n x^p$ и z^n, а остале поделим са o, остаје

$$c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}\left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right)$$

или, када се подели са $c^n x^p$:

$$px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}} \quad \text{или} \quad pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny.$$

Када се c замени својом вредношћу $\frac{na}{m+n}$, а p са $m+n$... добија се $ax^{\frac{m}{n}} = y$.

Дакле, он овде користи да су операције којима барата, а које су, de facto налажење интеграла $\int_0^x f(t)dt$ и извода, инверзне једна другој да би дошао до закључка. Заправо он наводи после и таблицу кривих и површина, односно, de facto, таблицу интеграла. У вези доказа можемо да кратко прокоментаришемо да му је o та мала величина (без обзира што на слици изгледа велико!) и да променом x за то o се површина z повећа за површину правоугаоника (свеједно да ли за страницу узме y или v и једно и друго је приближно, а на крају v постаје y — у доказу специјалног случаја, он користи v и ради развоје до краја, дакле детаљније и пажљивије).

Њутну је од централног значаја било то што је и са редовима могао да ради исто као и са коначним изразима. Ево шта је о томе рекао у овом делу:

> И шта год да обична Анализа (мисли на алгебру) остварује помоћу једначина са коначно много чланова, нови метод може то исто да уради помоћу бесконачних једначина. Тако да нисам имао никакав проблем да му дам име Анализа. Пошто резоновање није мање сигурно него у претходном нити су једначине мање егзактне ... Да закључимо, можемо безбедно да прихватимо да то све припада Аналитичкој вештини помоћу чега можемо одредити површине и дужине лукова кривих егзактно и геометријски.

Као што знамо, Вијет је за Алгебру користио назив Аналитичка вештина. О томе овде Њутн говори. Заправо са Њутном и његовим вештим коришћењем редова при рачунању површина, као и прихватањем од стране других математичара, почиње то терминолошко одвајање Алгебре, за коју се везују коначни изрази и Анализе која манипулише са бесконачним изразима (поједностављено говорећи наравно), а коју имамо данас.

Већ смо споменули флуенте и флуксије. Њутн је припремио рад „О методу редова и флуксија” до 1671, али је тај рад доста касније објављен. Дакле, ту имамо кинематичку идеју о величинама које „теку” у времену. На пример, тачка генерише линију, линија генерише површ. Такве величине се називају флуенте, а њихове брзине промене флуксије. Код Њутна се на одређеним местима појављују и моменти који представљају бесконачно мале прираштаје таквих величина у бесконачно малим интервалима времена (то ће касније Њутн избегавати). У бесконачно малим интервалима сматра да су флуксије константе, те се може сматрати да су моменти пропорционални њима.

Увео је и нотацију да означи тај свој рачун. Са a,b,c,d је означавао константе, са v,x,y,z флуксије, а одговарајуће флуенте са l,m,n,r, док је бесконачно мали интервал времена био o. Касније је, у деведесетим годинама XVII века увео ознаке $\dot{v},\dot{x},\dot{y},\dot{z}$. Саме флуксије имају своје флуксије, па је тако посматрао и $\ddot{x}$, па и $\dddot{x}$. А флуенту чија је флуксија x означавао је са $\acute{x}$. Површину испод криве y је означавао са Qy или са $\boxed{y}$.

Њутн је навео једноставан алгоритам којим би добијао везу између флуксија на основу везе између флуенти. Наиме, ако би имао израз ax^n, он би га замењивао са $anx^{n-1}\dot{x}$. Тако би урадио за све чланове у изразу по свим флуентама и онда све то сабирао. На пример, ако има

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0, \tag{3}$$

добио би

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0. \tag{4}$$

То би оправдао на следећи начин. На x и y би додао бесконачно мале приараштаје $\dot{x}0$ и $\dot{y}o$ и заменио у једначину (3).

$$(x+\dot{x}o)^3 - a(x+\dot{x}o)^2 + a(x+\dot{x}o)(y+\dot{y}o) - (y+\dot{y}o)^3 = 0, \tag{5}$$

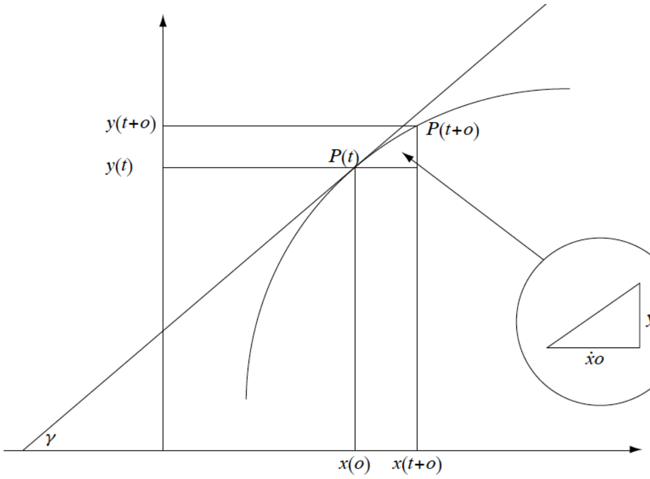
Средио би (5) користећи (3), делећи са o, а онда занемарио чланове који још у себи садрже o, јер је „o бесконачно мало”. Тако би добио заиста (4).

Он се ту бавио проблемима максимума и минимума, налажења тангенте, кривине, површина, дужина лукова. Сви се ти проблеми своде на два проблема.

Проблем 1. Ако је познат пређени пут у сваком тренутку времена, наћи брзину у свакој тачки.

Проблем 2. Ако је позната брзина у свакој тачки, наћи пређени пут у свакој тачки.

Видимо да се ради о два инверзна проблема. Проблем налажења тангенти, екстремних вредности и кривине, своди се на први проблем.



Имамо криву у равни дату једначином $f(x,y)=0$. Како је $x(t+o) - x(t) = \dot{x}o$ (на слици уместо $x(o)$ треба да стоји $x(t)$) и $y(t+o) - y(t) = \dot{y}o$ и како је o бесконачно мало, може се сматрати да троугао који је издвојен на слици сличан троуглу који чине тачке пресека тангенте и x-осе, $(x(t),0)$ и $P(t)$, те је

$$tg\gamma = \frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Наравно, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ се може наћи раније наведеним алгоритмом. Екстремна тачка је дата са $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0$, док је Њутн показао да је полупречник кривине ρ дат са

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\dot{y}/\dot{x}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(\ddot{y}/\dot{x}^2\right)}.$$

Године 1687. Њутн је објавио своје „Математичке принципе природне филозофије”. То је свакако једно од најзначајнијих научних дела икада. Пут који је довео до његовог објављивања је био занимљив и нимало једноставан. Нећемо се њиме бавити због недостатка времена, наведимо само као занимљивост да се, да би обезбедио објављивање тог дела, Едмонд Халеј (сви смо чули за Халејеву комету) обавезао да ће он финансирати издање тог дела. Наиме, Краљевско друштво је практично банкротирало издајући „Историју риба”, дело које се уопште није продавало. Пошто је Халеј обезбедио штампање Њутновог дела, добио је на поклон од друштва 50 примерака те књиге коју нико није желео да купи. Сматра се да је прво издање имало око 300 примерака.

Главни проблем је био да се на основу закона универзалне гравитације, по коме сила гравитације опада са квадратом растојања, установе Кеплерови закони, посебно да се планете крећу по елипсама са Сунцем у једној жижи. Постојао је и озбиљан технички проблем како при овим разматрањима редуковати тела, на оно што сада зовемо, материјалну тачку — како показати да се може претпоставити да је сва маса, на пример, Земље скупљена у тачку. Њутн је успео да разреши те и друге проблеме, попут кретања тела кроз средину која је пружала отпор (дакле, не кроз вакуум). Сам назив дела даје и критику раније Декартове филозофије која није одговарала физичкој стварности. Овде се ради о МАТЕМАТИЧКИМ ПРИНЦИПИМА а не о чисто филозофском размишљању.

Само дело је написано у геометријском духу, ту се практично флуксије и не појављују. Но, на самом почетку дела налазимо, после основних закона (Њутнових закона како их сада зовемо) 11 математичких лема. Заправо прва глава прве књиге (дело се састоји од три књиге) носи назив Метод првих и завршних односа величина помоћу којих доказујемо тврђења која следе.

Ових 11 лема су разматрали многи аутора током више од 300 година од појављивања Њутновог дела. Занимљивости ради, 1995. године су изашле чак четири књиге које се баве Њутновим Принципима. Ми ћемо покушати само укратко да кажемо о чему се овде ради.

Лема I

Величине, или односи величина, који у сваком коначном времену конвергирају непрекидно ка једнакости, и пре истека тог времена се приближавају ближе једна другој од сваке дате разлике, постају напокон једнаке.

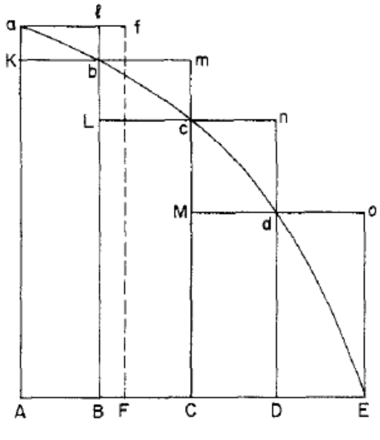
Доказ следи

Ако то одричете, претпоставите да су напокон различите и нека је D њихова крајња разлика. Онда се оне не могу примаћи више једнакости него што је та дата разлика D; што је супротно претпоставци.

Видимо да овде имамо неки облик лимеса, односно закључак да ако имамо две величине чија разлика тежи 0, онда се њихове граничне вредности једнаке (садашњим језиком речено). Претпоставља се 'коначно време' да величине не би постале бесконачно велике. Ово је само коментар, не и озбиљна дискусија, видимо да могу да постоје разне примедбе на ово закључивање.

Лема II de facto говори о постојању интеграла монотоне функције.

Ако се у дату фигуру $AacE$, коју ограничавају праве линије Aa, AE и крива acE упише ма који број паралелограма Ab, Bc, Cd, итд. над једнаким базама AB, BC, CD, итд. и страницама Bb, Cc, Dd, итд. паралелним страници Aa фигуре; и паралелограми $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, итд. се комплетирају: тада ако се претпостави да се ширине паралелограма смањују, и њихов број повећа до бесконачности, кажем да ће завршни односи које ће уписана фигура $AKbLcMdD$, описана фигура $AalbmcndoE$ и криволинијска фигура $AabcdE$ имати једна према другој бити односи једнакости.



Дакле, тврди се да количници ових површина теже ка 1, па се тиме имплицитно тврди и да све површине теже ка истој вредности. Доказ није тежак. Њутн констатује да је разлика између сума површина описаних и уписаних правоугаоника (он наравно каже паралелограма) једнака површини правоугаоника $ABla$, али та површина тежи ка нулу када се AB неограничено смањује. Дакле, он заправо показује да разлике ових површина теже нули, па онда добија тражено уз помоћ прве леме.

Следећа лема говори да се слично може закључити и ако основе нису једнаке. Заправо на горњој слици то видимо. Ту се претпостави да је највећа основа AF, па опет разлика буде мања од површине правоугаоника $AFfa$, која опет тежи нули.

Лема IV пореди две фигуре попут ових са претходне слике, од којих је једна увећана у односу на другу и тврђење је да ако се односи сума уписаних површина правоугаоника приближавају некој вредности, онда ће односи и тих површина бити једнаки тој вредности. Овде видимо нека једноставна својства интеграла (али монотоне функције). Лема V нам такође не представља проблем, она каже да су одговарајуће стране сличних фигура, било криволинијских било праволинијских, пропорционалне једна другој и да се површине сличних фигура односе као квадрати одговарајућих страница.

Но, касније леме су сложеније и више би времена однело да покушамо да их протумачимо. Рецимо само да постоје јаки аргументи да се у њима препозна дефиниција извода функције, да се одређује извод синуса (заправо да се показује да $\frac{tg\,x}{x}$ и $\cos x$ теже истој вредности када се x приближава 0, а пошто се зна да се $\cos x$ приближава 1, онда имамо и познати резултат да $\frac{\sin x}{x}$ тежи ка 1, а то наравно одговара резултату да је извод синуса једнак косинусу). Такође се међу тим лемама крије и разматрање другог извода, а и Њутн-Лајбницова формула.

Њутн јесте био свестан проблема у вези његових КРАЈЊИХ ОДНОСА. Пошто он ту, de facto, разматра лимесе облика $\frac{0}{0}$; он покушава да објасни да то може да постоји мада се, јасно, не могу директно заменити вредности. Бискуп Џорџ Беркли је био велики, али и добронамеран критичар тих и сличних, непрецизно дефинисаних појмова и те критике су свакако озбиљно схватане и у даљем су чињени покушаји да се ствари поправе. Наравно, после доста времена смо дошли и до добро заснованог појма лимеса, али Њутн јесте те ствари антиципирао.

Лајбниц

Готфрид Вилхелм Лајбниц (1646–1716) рођен је у Лајпцигу у протестантској породици међу чијим је даљим прецима сигурно било и Словена. Да ли је баш био лужички Србин или не, нећемо овде расправљати. ☺

Његов отац, Фридрих Лајбниц (1597–1652), био је професор филозофије морала на универзитету у Лајпцигу и имао је богату библиотеку где је млади Лајбниц рано могао да почне са својим образовањем. Студирао је филозофију и право на универзитетима у Лајпцигу, Јени и Алтдорфу. Што се математичких знања тиче, ту је имао само елементарно образовање. Но, рано је замислио пројекат конструкције математичког језика помоћу кога би се дедуктивно закључивање

Слика 9: Лајбниц

могло изводити. Те његове идеје су антиципирале каснији развој алгебре логике у XIX веку. Тај програм он никада није ни напустио, те и на његова каснија математичка истраживања треба гледати у том светлу. Пошто је 1666. докторирао на универзитету у Алтдорфу, ушао је у службу надбискупа у Мајнцу. Положај надбискупа у Мајнцу је био изузетно важан у Светом римском царству. Наиме, надбискуп у Мајнцу је био један од седам људи који су бирали цара.

Лајбниц је године 1672–1676. провео у дипломатској мисији у Француској. Наиме, немачке државе су биле прилично ослабљене после тридесетогодишњег рата (1618–1648) и заправо је Царство постојало само на папиру. Било је много држава и територија које су могле да одржавају своју војску. Стога је постојала опасност од уједињене Француске и агресивне политика краља Луја XIV („Краљ Сунце”). Лајбницова идеја, коју је изложио у *Consilium Aegyptiacum*, је била да се пажња Француске са Немачке и Холандије скрене на турски Египат, да је то оно што би требало да интересује једног хришћанског краља. Но, када је стигао у Париз, није му био дозвољен пријем код краља, а један од краљевих министара му је рекао да крсташки ратови нису више интересантни. Заправо је већ тада Луј XIV решио да изврши инвазију на Холандију, на нацију „продавачица риба и трговаца” по његовим речима.

Но, Лајбницов долазак у Париз му је омогућио да упозна многе значајне научнике, а посебно холандског научника Хајгенса, који је живео у Паризу од 1666. до 1681.

Слика 10: Кристијан Хајгенс (1629–1695)

Хајгенс је баш у то време припремао своје значајно дело ***Holorogium Oscillatorium***, које је било посвећено разним физичким и математичким аспектима кретања клатна. Он је видео да Лајбниц има талента, али да је слабо математички образован, те га је упутио у то шта да учи. Године 1673. нова дипломатска мисија одвела је Лајбница у Енглеску. Радило се о сугестији надбискупа Мајнца да енглески краљ посредује у сукобу Француске и Холандије. У сваком случају, Лајбниц је упознао Немца Олденбурга (кога смо већ споменули) и уз његову помоћ многе значајне научнике Енглеске. Заправо, он је у Краљевском друштву добио прилику да прикаже рад своје машине за рачунање, која је била унапређење у односу на Паскалову по томе што је могла да врши и множење и дељење. Мало због те машине, а више због веза које је Олденбург имао, Лајбниц је успео да постане члан Краљевског друштва. Од 1676. године Лајбниц је у служби Куће Хановер, самим тим, на самом крају, и у служби енглеског краља Џорџа I.

У периоду 1672–1673. Лајбниц се бавио редовима. Посебно му је било занимљиво да разматра нумеричке низове разлика, тј. низове (b_n) за које је

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_2 - a_3, \quad b_3 = a_3 - a_4, \ldots$$

за неки низ (a_n). Наравно, тада је лако могао да нађе суму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Ова једноставна идеја му је касније помогла и у развоју диференцијалног рачуна, по његовим сопственим речима. Први пример на коме је применио овај поступак је, добро нам познати ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$. Наиме, $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$, те се лако добија да је сума реда једнака 2. Дакле ове, како их сада зовемо „телескопске суме” су му биле посебно значајне. С тим у вези, формирао је ‘хармонијски троугао’ (Паскалов троугао се зове и ‘аритметички троугао’):

1

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\[6pt]
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\[6pt]
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \boxed{\tfrac{1}{4}} \\[6pt]
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \boxed{\tfrac{1}{20}} \quad \boxed{\tfrac{1}{5}} \\[6pt]
\frac{1}{6} \quad \boxed{\tfrac{1}{30}} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6} \\[6pt]
\frac{1}{7} \quad \boxed{\tfrac{1}{42}} \quad \boxed{\tfrac{1}{105}} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}
\end{array}$$

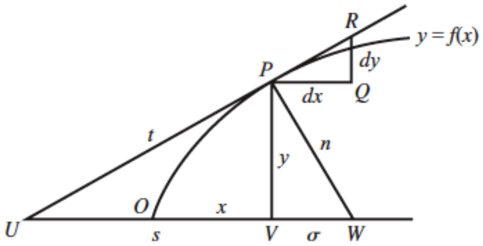
Овај се троугао формира помоћу разлика. Наиме $n+1$-ва 'дијагонала' има чланове који су разлике одговарајућих чланова n-те 'дијагонале'. На пример: $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{42} = \frac{1}{30} - \frac{1}{105}$. Стога је сума бројева у n-тој дијагонали заправо телескопска сума помоћу добијена од бројева у претходној, те је та сума једнака броју на почетку претходне дијагонале. На пример,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \cdots = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{105} + \cdots = \frac{1}{4}, \qquad \text{итд.}$$

Године 1673. Лајбниц се срео са идејом такозваног карактеристичног троугла читајући Паскалова *Lettres de ‘A. Detonville* из 1659. године. У овим писмима је Паскал

Слика 11: Блез Паскал (1623–1662)

приказао разне резултате о квадратурама. Amos Detonville је заправо анаграм од Louis de Montalte (уз изједначавање v и u), псеудоним који је Паскал користио у својим „Писмима из провинције”. Паскал је у том конкретном проблему разматрао инфинитезимални троугао придружен тачки на кругу, али је Лајбниц ту идеју генерализовао.



У произвољној тачки P на кривој $y = f(x)$ постављена је тангента и формиран је тај 'карактеристични (криволинијски) троугао' који чине бесконачно мали померај дуж x-осе, тј. dx, бесконачно мали померај дуж y-осе, тј. dy и бесконачно мали померај дуж саме криве ds. Са t је означен део тангенте од те тачке до пресека са x-осом, а са n део нормале од те тачке такође до пресека са x-осом. Са s, односно σ је означена пројекција тангенте t на x-осу (подтангента), односно нормале n на x-осу (поднормала).

Пошто се ради о инфинитезималном троуглу, може се сматрати да се крива у том бесконачно малом делу поклапа са тангентом те можемо сматрати да се троугао са страницама dx, dy, ds поклапа са троуглом PQR, који је сличан и троуглу UVP и троуглу PVW. Стога је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma}{y} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{n}{y}.$$

Лајбниц је, да би имао конкретан проблем, претпоставио да је поднормала (σ) обрнуто пропорционална ординати, тј. претпоставио је да је $\sigma = a^2/y$. Тада из прве релације добија

$$\int y^2 dy = \int a^2 dx,$$

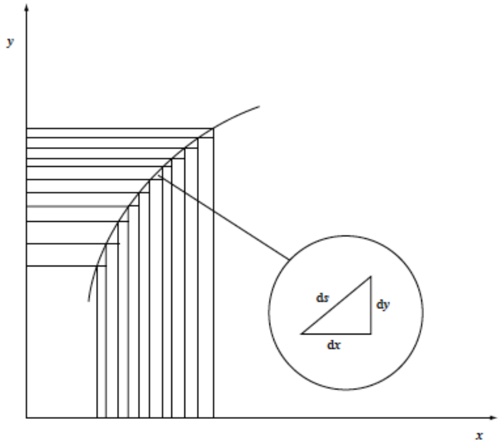
чиме добија да крива има једначину $y^3/3 = a^2 x$ те констатује да је крива са наведеном особином кубна парабола.

Из друге релације добија

$$\int y ds = \int n\, dx,$$

што даје формулу за површину тела које се добија обртањем криве око x-осе.

Током 1675. Лајбниц је направио суштинске кораке који су га довели до формулације метода који се, у нешто промењеној форми и сада користи. У ту сврху су му посебно били значајни карактеристични



троугао и посматрање површине испод криве као суме бесконачно много трака.

Лајбниц је замислио дељење x-осе испод задате криве на бесконачно много бесконачно малих интервала чији су крајеви $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Диференцијал је дефинисао као $dx = x_{n+1} - x_n$. На самој кривој имамо одговарајуће тачке $s_1, s_2, s_3, \ldots$, као и ординате $y_1, y_2, y_3, \ldots$ на y-оси, као и диференцијале $ds = s_{n+1} - s_n$, $dy = y_{n+1} - y_n$. Карактеристични троугао је издвојен на слици и има стране dx, dy, ds, а видели смо већ да можемо сматрати да је сличан троуглу који формирају s, y, t (ознаке са претходне слике). Стога је $tg\gamma = \frac{dy}{dx}$, где је са γ означен угао који тангента у датој тачки заклапа са x-осом. Површина испод криве је унија трака ydx. Лајбниц је у почетку користио Кавалијеријев симбол omn. али је касније, вероватно на сугестију Јохана Бернулија (од кога потиче и назив интегрални рачун), прешао на ознаку $\int$ као издужену варијанту слова s, а наравно од речи сума. Прво Лајбницово публиковано појављивање ознаке диференцијала је било 1684, а интеграла 1686. године.

Симболи d и $\int$ могу се примењивати више пута те се тако може посматрати и, на пример, ddx, које је бесконачно мало у односу на dx. За d поновљено n пута користио се симбол d^n, па је n-ти диференцијал од x био $d^n x$. Израз $\frac{dy}{dx}$ код Лајбница не треба сматрати изводом функције, него просто односом диференцијалних величина dy и dx. То олакшава алгебарске манипулације диференцијалима. На пример „ланчасто правило”, тј. извод сложене функције се може видети као проста манипулација разломцима:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ако се y посматра као зависна променљива од x у којој се узима да су x_n еквидистантне, тада је dx константно, па је $d^2x = ddx = 0$ и сви остали диференцијали од x вишег реда нестају. За рачунање $d(xy)$ користио је формулу

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy,$$

а потом је, без даљег образложења, изоставио $dxdy$ као бесконачно малу вишег реда. Наравно, итерацијом овог поступка, ако је $y = x$ може се добити и $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. За рационалне изложиоце, тј. за случај $y = x^{a/b}$, посматрао је изведену једнакост $y^b = x^a$, применио претходно правило, те добио $by^{b-1}dy = ax^{a-1}dx$, те је одатле извео да је $d(x^{a/b}) = \frac{a}{b}x^{\frac{a-b}{b}}dx$. Лајбниц је своја правила за диференцијални рачун објавио у раду у часопису *Acta Eroditorum*, чији је он био и један од уредника, 1684. године, са дугачким насловом у коме се de facto описује шта се све може урадити његовим коришћењем: ***Nova methodus pro maximis i minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.*** Лајбниц се веома трудио да рекламира своје идеје, комуницирао је са многим математичарима ван Британије и то је, уз једноставнији и бољи запис од Њутновог, свакако допринело великом ширењу његовог приступа ван Британије.

Деведесетих година XVII века, као и у првим декадама XVIII једна од главних области истраживања у Лајбницовом калкулусу састојала се у развоју правила за диференцирање и интеграцију трансцендентних функција – тригонометријских, логаритма и експоненцијалне функције. Јохан Бернули је ту био посебно активан. Дошао је до правила за, како га је називао, 'експоненцијални калкулус':

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}, \quad d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u dv.$$

Лајбниц је $\int ydx$ видео као 'суму' бесконачног низа трака (правоугаоника) ydx. Из рада са редовима знао је да се сума реда може добити помоћу низова разлика. Да би редуковао $\int ydx$ на суму разлика, треба да нађе z тако да је $dz = ydx$ (сетите се низова (b_n) и (a_n): треба сумирати b_n а зна се да је $b_n = a_n - a_{n+1}$). Тако да закључује да је

$$\int ydx = \int dz = z.$$

Када је открио тако инверзну природу диференцирања и интеграције, одмах је могао да нађе и правило за парцијалну интеграцију. Наиме, из $d(xy) = xdy + ydx$ следи

$$xy = \int d(xy) = \int xdy + \int ydx.$$

Ојлер

Слика 12: Леонард Ојлер

Леонард Ојлер (1707–1783) је био ученик Јохана Бернулија и сигурно је најпознатији швајцарски математичар, а можда и најплоднији математичар у историји математике. Како је он највећи део свог радног века провео у Русији, можемо га сматрати и руским математичаром. Математику је учио од Јохана Бернулија и дружио се са његовим синовима Николом и Данијелом. Уз подршку Бернулијевих, добио је позицију у Петрограду 1727. године. Ојлер је био свестрано образован и заправо је добио место на медицини и физиологији, касније на природној филозофији. Но, Никола Бернули је умро 1726, а Данијел се 1733. из Петрограда преселио у Базел и Ојлер тако остаје, у својој 26-ој години најзначајнији математичар у Петрограду.

Започнимо најпре Ојлеровим доприносом математичкој нотацији. Он је увео и промовисао коришћење слова e за базу природног логаритма. Симбол π јесте коришћен и раније, али га је Ојлер значајно промовисао. Пред крај живота је увео и симбол i за корен из -1. Занимљиво је да га је раније користио за ознаку бесконачности, па је тако писао и $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, где је i бесконачни број. У елементарној геометрији је такође имао значајан допринос у нотацији. Странице троугла је означавао са a, b, c, а одговарајуће углове са A, B, C, док је са R, r, s означавао полупречнике описаног и уписаног круга и полуобим троугла. Од других ознака треба навести да је Σ користио за суму, а да је са $f(x)$ је означавао функцију.

У свом делу „Introductio in Analysin Infinitorum" из 1748, које даје основе математичке анализе, увео је функцију од променљиве величине као ‘било који аналитички израз сачињен од те променљиве величине и бројева или константних величина’. Јасно је да таква дефиниција није прецизна, но послужила је Ојлеровој сврси — форсирао је аналитички приступ, па и у раду са тригонометријским функцијама; синус је задат преко реда $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \cdots$. На пример, још је у писму Јохану Бернулију из 1740. навео формулу $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$.

Покажимо сада како је Ојлер нашао суму реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Пођимо од следеће чињенице: ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуле полинома $p(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, онда је

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Није се тешко уверити да је ово тачно. Наиме, ако је

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

дељењем са x^n добијамо

$$\frac{1}{x^n} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_2 \frac{1}{x^{n-2}} + \cdots + a_n = 0.$$

Ако је $y = \frac{1}{x}$, онда из $y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ и Вијетових формула добијамо $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -a_1$, тј.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Ојлер сада ово екстраполира на функцију синус. Наиме, на основу развоја у ред:

$$\sin z = 0 \text{ и } z > 0 \text{ акко } 0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots.$$

Сменом $w = z^2$ добија се

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \cdots$$

По аналогији са коначним случајем, ако су нуле овог реда $w_1, w_2, \ldots$ (што су заправо квадрати нула синуса), онда је

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \cdots = -(-\frac{1}{3!}) = \frac{1}{6}.$$

Но, знамо да су позитивне нуле синуса $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, па су ове нуле заправо $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \ldots$. Стога добијамо

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6},$$

односно $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$. Ојлер је нашао суме $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2l}}$ за све $l\in\{1,2,\dots,13\}$. На пример, добио је

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{26}}=\frac{2^{24}\cdot 76977927\cdot\pi^{26}}{27!}.$$

Наведимо и Ојлеров доказ бесконачности скупа простих бројева коришћењем дивергенције хармонијског реда.

Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и нека су то $p_1,p_2,\dots,p_k$. Нека је n неки природан број. Тада је

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

за неке $\alpha_i\geqslant 0$. Узмимо $\alpha=\max\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$. Посматрамо производ

$$P=\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right).$$

Јасно је да се у развоју овог производа у збир појављују сви бројеви од 1 до $\frac{1}{n}$, те је $P>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. Но,

$$\begin{aligned}P &< \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}=\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1}.\end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1},$$

но, како израз на десној страни не зависи од n добијамо да је сума $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ограничена, а знамо да то није тачно. Стога мора постојати бесконачно много простих бројева. Ојлер је много експериментисао са бесконачним редовима, али о томе нећемо сада писати.

У писму Голдбаху из 1746. Ојлер је навео следећи занимљив резултат: $i^i=e^{-\pi/2}$. Наиме, из Ојлерове формуле $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ за $\theta=\pi/2$ добија се да је $e^{i\pi/2}=i$. Стога је

$$i^i=(e^{i\pi/2})^i=e^{i^2\pi/2}=e^{-\pi/2}.$$

Заправо, Ојлер је 1749. показао да се сваки комплексан степен комплексног броја, тј. $(a+bi)^{c+di}$ може изразити у облику $p+qi$. Овај аспект Ојлеровог рада је занемарен и прича о реалним вредностима i^i се озбиљније разматрала тек у XIX веку.

Немогуће је и приближно навести све Ојлерове идеје и резултате из теорије обичних и парцијалних диференцијалних једначина, рачуна коначних разлика, елиптичких интеграла, специјалних функција и других области. У вези нотације наведимо још његову ознаку

$$\left[\frac{p}{q}\right] = \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdots q},$$

која је, евидентно претеча модерне ознаке $\binom{p}{q}$.

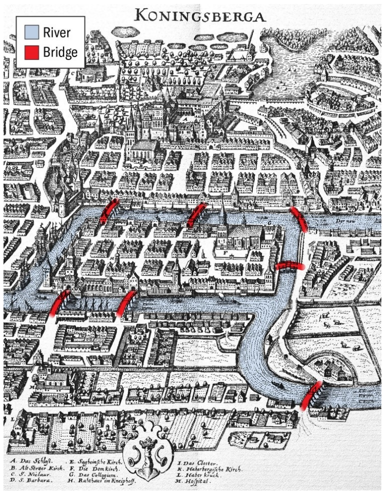
За крај наведимо и Ојлеров доказ мале Фермаове теореме, која каже да је, ако је p прост број, који не дели цео број a, онда p дели $a^{p-1}-1$.

Он је заправо доказао да $p \mid (a^p - a)$ за све a , индукцијом по a. Наравно да је тврђење тачно за $a=1$. И, ако претпоставимо да је тачно за a, лако се покаже за $(a+1)^p-(a+1)$ (наравно користимо модерне ознаке у доказу ради краћег записа):

$$(a+1)^p-(a+1) = a^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k + 1 - a - 1 = a^p - a + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k.$$

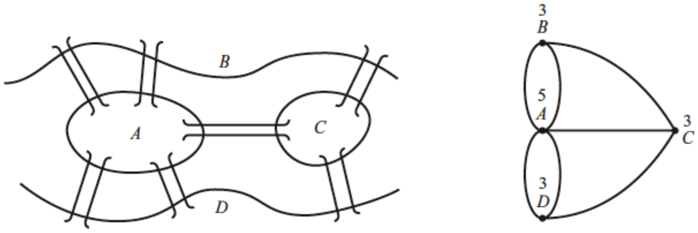
Како $p \mid \binom{p}{k}$ за све $1 \leqslant k \leqslant p-1$, резултат следи из индуктивне хипотезе.

Године 1736. Ојлер је објавио рад за који се сматра да је први рад из области теорије графова. У том раду је он дао решење **Проблема о кенигзбершким мостовима**. Наиме, у граду Кенигзбергу који је био значајан универзитетски град у Источној Прускої, а у коме је дуги низ година живео и Имануел Кант, на реци Прегал било је седам мостова који су спајали два острва са копном, а и између себе.



Слика 13: Кенигзберг у средњем веку

Проблем се састојао у томе да се установи да ли се може прећи преко сваког моста али тачно једном. Ојлер је проблем поједноставио тако што је и острва и обе обале заменио тачкицама, а мостове луковима који их повезују. Тако је добио граф са слике.



Слика 14: Кенигзбершки мостови и придружен граф

Ако желите да прођете ивицом сваког графа тачно једном, онда у свако теме улазите и излазите паран број пута сем у случају почетног и завршног темена. Видимо да у сваком темену има по три лука (степен сваког темена је 3). Стога је немогуће проћи свим мостовима тачно једном, било да је захтев да се вратите у почетну тачку или не. Пут у графу који пролази сваком ивицом тачно једном, назива се Ојлеров пут. А Кенигсберг се данас зове Калињинград и налази се у Русији.

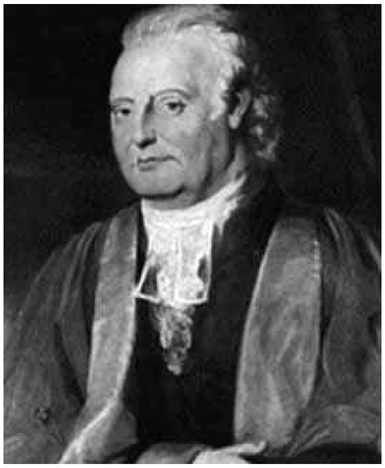
Ка модерној алгебри

Као што смо видели, проблем налажења решења алгебарских једначина трећег и четвртог степена, која се изражавају као рационалне функције корена израза добијених од коефицијената једначине, решен је у ренесансној Италији. Но, питање за једначине вишег степена остало је неразрешено. У овом делу ћемо се позабавити тим питањем, тј. како је разматрање овог проблема довело до резултата Евaристе Галоа са којим се може рећи да почиње развој модерне алгебре, дакле области која проучава алгебарске структуре попут група, прстена, поља.

Варинг

Едвард Варинг (1736–1798) био је енглески математичар који је у два своја значајна дела *Miscellanea analytica* (Кембриџ 1762) и *Meditationes algebricae* (Оксфорд 1770) (при чему је заправо друго дело, упркос новом називу, било друго, проширено издање првог) дао прве резултате на том путу. Наиме, ако се посматра општа једначина степена n:

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots + \cdots = 0,$$



Слика 15: Едвард Варинг

и њени корени $x_1,\ldots,x_n$, онда нам је познато да су коефицијенти a_i заправо елементарне симетричне функције ових корена:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1+\cdots+x_n, \\ a_2 &= x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n, \quad \text{итд.} \end{aligned}$$

Варинг је у свом првом делу показао да се свака рационална симетрична функција корена ове једначине може изразити као рационална функција коефицијената тако што је то најпре показао за суму степена

$$s_m = x_1^m+\cdots+x_n^m,$$

а потом за све остале симетричне функције. У другом делу је разматрао решења циклотомичне једначине (једначине „деобе круга” пошто се налажење правилног n-тоугла уписаног у дати круг своди на решавање ове једначине):

$$x^n-1=0.$$

Разматрао је и проблем да се нађу једначине које се могу решити сумама облика

$$x=\sqrt[m]{\alpha_1}+\sqrt[m]{\alpha_2}+\cdots+\sqrt[m]{\alpha_n}.$$

Вандермонд

Александар-Теофил Вандермонд (1735–1796) био је француски математичар, који је 1770. године представио париској Академији наука рад под насловом „О решавању једначина”. Он почиње од добро

Слика 16: Вандермонд

познатих решења квадратне и кубне једначине са жељом да нађе општи принцип за решавање алгебарских једначина. Најпре решења квадратне једначине x_1, x_2 напише у облику

$$\frac{1}{2}\left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}\right].$$

Овај се израз може написати и у облику

$$\frac{1}{2}\left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right]$$

и видимо да се овде појављују симетричне функције корена.

Вандермонд се потом пита да ли се општа једначина степена n може решити помоћу аналогног израза

$$\tfrac{1}{n}\left[(x_1 + \cdots + x_n) + \sqrt[n]{(\rho_1 x_1 + \cdots \rho_n x_n)^n} + \sqrt[n]{(\rho_1^2 x_1 + \cdots \rho_n^2 x_n)^n} + \cdots + \sqrt[n]{(\rho_1^{n-1} x_1 + \cdots \rho_n^{n-1} x_n)^n}\right],$$

где су $\rho_1, \ldots, \rho_n$ n-ти корени из јединице. Данас изразе облика

$$\rho_1 x_1 + \cdots + \rho_n x_n$$

називамо Лагранжовим решавачима, пошто их је Лагранж увео у раду приложеном берлинској Академији 1771. Наиме, Вандермондов рад јесте предат раније, али је објављен тек 1774.

Вандермондов метод у случају кубне једначине фино 'ради'. Наиме, ако је $\zeta^3 = 1$, а $\zeta \neq 1$, те су и ζ и ζ^2 примитивни корени из јединице, а x_1, x_2, x_3 решења кубне једначине, онда имамо једнакост

$$\left(x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3\right)^3 = S + 3\zeta X + 3\zeta^2 Y, \tag{6}$$

где је

$$\begin{aligned} S &= x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3 \\ X &= x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1 \\ Y &= x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2. \end{aligned}$$

Видимо да S јесте симетрична функција корена, док X и Y нису, но $X+Y$ и XY јесу симетричне функције, па тиме изразиве преко коефицијената, а и корени су квадратне једначине. Стога се може добити колики је израз на десној страни једначине (6) те се могу добити и корени једначине. За једначину степена 4, Вандермонд је нешто модификовао свој метод, док за једначине вишег степена тај метод јесте успешан само у специјалним случајевима. На пример, он је решио једначину

$$x^{11}-1=0.$$

Најпре ју је редуковао на једначину степена 5 чији су корени

$$\rho+\rho^{-1}, \quad \rho^2+\rho^{-2}, \quad \rho^3+\rho^{-3}, \quad \rho^4+\rho^{-4}, \quad \rho^5+\rho^{-5},$$

где је ρ примитивни једанаести корен из јединице. Затим је, за решавање те једначине петог степена користио раније наведене решаваче у облику

$$x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3+\alpha^3x_4+\alpha^4x_5,$$

где је α примитивни пети корен из јединице. Но, овде се мора пажљиво изабрати редослед корена x_i да би се L^5 могао фино одредити и за овај случај се то може разрешити пробањем, али за општи случај је потребан доказ да се то може увек урадити. То је извео тек Гаус. Вандермонд је тврдио да се решења опште једначине $x^n-1=0$, његовим методом увек могу лако наћи, те се чини да није био свестан проблема избора редоследа корена.

Лагранж

Жозеф Луј Лагранж (1736-1813) рођен је у Торину и крштен је као Ђузепе Лодовико Лагранђа. Данас је познат као француски математичар, мада га Италијали 'воде' као италијанског математичара. У сваком случају, његова породица је имала веза са Француском. Он сам је дуго времена радио у Берлину и у Паризу, мада је започео каријеру у Италији. Био је свестран математичар, овде наводимо само његове резултате о решавању алгебарских једначина.

Веома занимљив (и обиман) рад од преко 200 страница, Лагранж је приложио берлинској Академији. Наслов тог рада је био „Размишљање о алгебарском решавању једначина”.

Слика 17: Жозеф Луј Лагранж

Ту најпре разматра кубну једначину у облику

$$x^3 + nx + p = 0.$$

Наравно, решење нам је познато из Карданове књиге где се оно тражи у облику $x = u + v$, где су u^3 и v^3 корени квадратне једначине. Лагранж показује да се u и v могу изразити као функције корена a, b, c почетне кубне једначине:

$$u = \frac{1}{3}(a + \alpha b + \alpha^2 c), \quad v = \frac{1}{3}(a + \alpha^2 b + \alpha c),$$

где је наравно α примитивни трећи корен из јединице.

Лагранж каже да се овакав резултат може добити и директним методом. Наиме, он полази од произвољне линеарне функције по a, b, c:

$$y = Aa + Bb + Cc.$$

Пермутовањем корена a, b, c добија се 6 израза који су стога корени једначине шестог степена. Ако желимо да то буде једначина у којој ће се појављивати само степени од y^3 (можда можемо да је зовемо бикубна једначина), онда се може показати да су A, B, C пропорционални са $1, \alpha, \alpha^2$, или са $1, \alpha^2, \alpha$. Тако да се добијају ипак раније наведени изрази. Дакле, занимљиво је да он разматра понашање израза при пермутацији корена.

Потом разматра једначину четвртог степена у облику

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0.$$

Ферари је показао да се решења добијају помоћу решења кубне једначине („разрешавајућа кубика”):

$$y^3 - \frac{1}{2}ny^2 - qy + \frac{1}{8}(4nq - p^2) = 0.$$

Лагранж показује да се корени u, v, w ове једначине добијају као симетричне функције корена a, b, c, d почетне једначине четвртог степена:

$$u = \frac{1}{2}(ab + cd), \quad v = \frac{1}{2}(ac + bd), \quad w = \frac{1}{2}(ad + bc).$$

У одељку под бројем 100, Лагранж разматра рационалне функције $f(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ корена опште једначине степена n. Ти корени се разматрају као неодређене. За две функције t и y ових корена каже да су сличне ако свака пермутација ових корена која оставља t инваријантним, оставља и y инваријантним и обратно. Лагранж доказује следећу теорему.

Ако све пермутације које остављају t инваријантним остављају и y инваријантним, онда се y може изразити као рационална функција од t и коефицијената дате једначине.

Он ову теорему примењује на једначине степена 2, 3 и 4, а каже да је примена на једначине вишег степена још увек превише компликована. Такође је разматрао и неке специјалне случајеве већ навођене циклотомичне једначине $x^n - 1 = 0$.

Малфати

Ђанфранческо Малфати (1731–1807) био је италијански математичар који се бавио геометријом, механиком и вероватноћом, али нас занима његов допринос у решавању алгебарских једначина. Он је 1770. поднео Академији наука у Сијени интересантну расправу о једначинама петог степена и она је објављена од стране те Академије 1771.

Он најпре разматра кубну једначину

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{7}$$

Следећи Ојлеров метод за решавање ове једначине (о коме истина нисмо причали, али ево сада је прилика да се спомене), он посматра корен x који задовољава линеарну једначину

$$x + m\sqrt[3]{f^2} + n\sqrt[3]{f} = 0. \tag{8}$$

Слика 18: Малфати

Да би елиминисао треће корене, користи метод Габријела Манфредија (Манфреди, 1681–1761, био је италијански математичар који се највише бавио диференцијалним једначинама). Наиме, уместо $\sqrt[3]{f}$ посматра $\alpha\sqrt[3]{f}$ и $\alpha^2\sqrt[3]{f}$, где је α примитивни трећи корен из јединице, замени то у (8) и помножи та три израза те добије једначину трећег степена

$$x^3 - 3mnfx + m^3f^2 + n^3f = 0. \tag{9}$$

Потом постави $f = 1$ и добије

$$x^3 - 3mnx + m^3 + n^3 = 0. \tag{10}$$

Ова је једначина еквивалентна једначини (7) акко је

$$mn = -a, \quad m^3 + n^3 = b. \tag{11}$$

Одавде се наравно могу наћи m^3 и n^3, а онда наравно и m и n (видели смо већ овако нешто код решавања једначина трећег степена).

Но, Малфати сада ово жели да примени на једначину петог степена

$$x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0. \tag{12}$$

Жели наравно да добије корен x из

$$x + m\sqrt[5]{f^4} + p\sqrt[5]{f^3} + q\sqrt[5]{f^2} + n\sqrt[5]{f} = 0. \tag{13}$$

Наравно, сада уместо $\sqrt[5]{f}$ посматра $\alpha^k\sqrt[5]{f}$ за $k=\overline{1,4}$, где је α пети примитивни корен из јединице, формира одговарајуће изразе, множи их и тако добија 'канонску' једначину петог степена. Поставља $f=1$ и изједначава коефицијенте те канонске једначине с почетном једначином (12) те добија услове за m,p,q,n. Поставља затим $mn=y$, $pq=u$, $25uy-5a^2+5c/3=z$ и после доста рачунања добија једначину шестог степена по z. У општем случају, ова једначина нема рационалан фактор степена 1, 2, или 3, а ако би имала онда би једначина (12) била решива преко радикала.

Независно од Малфатија и Лагранж је конструисао 'решавач' z који је функција корена и који има шест вредности при пермутацији корена. И један и други решавач су инваријантни у односу на подгрупу групе пермутација од пет корена $x_1,\dots,x_5$, која је реда 20 за коју се $k\in\{1,\dots,5\}$ слика у $k'=ak+b \pmod 5$ (при чему уместо 0 узимамо 5), где је $a\in\{1,2,3,4\}$, а $b\in\{0,1,2,3,4\}$. Занимљиво је, али не и неочекивано да ова подгрупа има значајну улогу и у Галоаовој теорији (наравно, она је решива).

Руфини

Слика 19: Руфини

Паоло Руфини (1765–1822) објавио је неколико радова у раздобљу од 1798. до 1813. (одговарајући на критике и поправљајући доказе) у којима је тврдио да је показао да једначине степена већег од четири не могу бити решене у радикалима.

Он ради слично Лагранжу. Посматра рационалне функције корена опште једначине степена n. Ако је p број пермутација које фиксирају такву функцију, онда је p делитељ од $n!$ и број различитих вредности које функција може узети при пермутовању корена је $n!/p$ (ако се сетимо дејства групе, орбита и стабилизатора, биће нам јасније зашто је ово тачно). Руфини је ово детаљно изучавао и показао је да у случају да је $n=5$ тај број $5!/p$ може бити 2, 5 или 6, али не може бити ни 3 ни 4. То значи да Лагранжов решавач не може задовољавати једначину степена 3 или 4. Ако $5!/p$ није 2, он мора бити дељив са 5, а ако је $5!/p=5$, онда заиста постоји решавач који задовољава једначину степена 5, али се не може свести на биномну једначину $z^5-m=0$.

Руфинијев доказ генерално није био добро прихваћен, њему је недостајало коришћење и корена из јединице у решавању и то је комплетирао Абел.

Коши

Слика 20: Коши

Огистен Луј Коши (1789–1857) је наравно био свестрани француски математичар који је дао велики допринос у више области математике, посебно у математичкој анализи, али овде ће нас занимати да укратко наведемо његове резултате за тему коју обрађујемо.

Коши је проширио резултате Руфинија на функције од n променљивих. Наиме, доказао је да ако је p највећи прост број који дели n, онда број различитих вредности коју несиметрична рационална функција од n променљивих може имати не може бити мањи од p сем ако је једнак 2. Он је увео и разлику између пермутација и супституција. Наиме, он је под пермутацијом подразумевао ређање n променљивих (или слова) у неком поретку (дакле отприлике онако како се о пермутацијама прича у средњој школи), док су супституције функције којима се од једне пермутације прелази до друге. Галоа је такође користио ту терминологију, а и требало је извесно време да се пређе на назив „пермутације” за Кошијеве „супституције”. Коши је разматрао производе супституција. Ако су S и T супституције он је њихов производ означачао са ST и овде се прво примењивало S, а потом T (дакле, овде супституције „вуку” променљиве, не „гурају” их како се популарно каже).

У периоду од 1844. до 1846. године, Коши је написао низ радова о супституцијама. За две супституције каже да су „сличне” уколико имају исту поделу на циклусе. Показује да су P и Q сличне ако постоји R тако да је $Q = R^{-1}PR$ (видимо да је користио појам сличности, на који смо навикли изучавајући матрице; појам конјугације је касније уведен). Такође је доказао да је ред групе супституција дељив редом сваке супституције из те групе, као и да је ред ма које групе супституција n променљивих делилац броја $n!$. Овај резултат је већ доказао Лагранж. И код Коклија се у доказу појављује партиција групе на косете подгрупе. Општи резултат, који данас знамо као Лагранжова теорема дао је касније Жордан, али је приписао тај резултат Лагранжу. Иста прича важи и за Кошијеву теорему.

Абел

Нилс Хенрик Абел (1802–1829) био је норвешки математичар који је осим резултата везаних за решавање алгебарских једначина имао значајне резултате у области теорије елиптичких интеграла и данас многи математички објекти носе име по њему.

Он је 1824. о личном трошку објавио на француском дело о решавању алгебарских једначина, а 1826. је у Креловом Журналу објавио нешто проширену верзију. У тим радовима је дат јасан доказ да се једначине степена већег од 4 не могу решити у радикалима.

Он користи резултате осталих математичара који су се бавили овим проблемом, али ради и нешто есенцијално ново што комплетира овај доказ. Полази од једначине

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0, \tag{14}$$

Слика 21: Абел

са „општим” коефицијентима – коефицијенти су независне променљиве. Претпостављајући да се y може изразити као функција коефицијената преко радикала, Абел каже да се y може написати у облику

$$y = p + p_1R^{1/m} + p_2R^{2/m} + \cdots + p_{m-1}R^{(m-1)/m} \tag{15}$$

где је m прост број. Величине $R, p, p_1, \dots, p_{m-1}$ су све истог облика као и y, тј. укључују нове радикале, итд. све док се не дође до рационалних функција коефицијената почетне једначине. Он увек међу коефицијенте укључује и све m-те корене из јединице, за све просте m који се појављују као експоненти. $R^{1/m}$ је, да тако кажемо, последњи радикал који смо увели.

Наравно, он каже да се може претпоставити да се $R^{1/m}$ не може изразити као рационална функција од $a, b, \dots, p, p_1, \dots$ пошто би иначе додавање те величине било непотребно. Слично искључује могућност да $p_1, p_2, \dots$ сви буду једнаки 0.

У првом раду претпоставља да $p_1 \neq 0$ (у другом показује да то ограничење није суштинско). Заменом R са R/p_1^m може да претпостави да је $p_1 = 1$. Означимо $R^{1/m}$ са z. Тада је

$$y = p + z + p_2z^2 + \cdots + p_{m-1}z^{m-1}. \tag{16}$$

Заменом у (14) добија се да је

$$q + q_1z + q_2z^2 + \cdots + q_{m-1}z^{m-1} = 0, \tag{17}$$

где су $q, q_1, \dots, q_{m-1}$ полиноми по $a, b, \dots, p, p_2, \dots$ и R (сетимо се да је $z^m = R$, те се тако уклањају виши степени од z). Абел сада тврди да је неопходно да сви ови q_i буду једнаки 0. Наиме, ако се претпостави да то није тако и посматра (17) и

$$z^m - R = 0, \tag{18}$$

видимо да је z заједнички корен две алгебарске једначине. Тада ће z бити корен и највећег заједничког делиоца одговарајућих полинома. Ако тај делилац није нераставлјив, онда је z корен и неког његовог нераставлјивог фактора за који можемо да претпоставимо да је степена бар 2 (јер би z иначе био већ рационална функција од постојећих величина). Дакле,

$$t_0 + t_1 z + \cdots + t_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0, \tag{19}$$

при чему је одговарајући полином нераставлјив. То је једначина најнижег степена коју z задовољава. Но, она има k корена заједничких са (18), а ова једначина има корене облика αz где је α нетривијалан m-ти корен из јединице. Дакле, имали бисмо

$$t_0 + t_1 z + \cdots + t_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0 \qquad \text{и} \qquad t_0 + t_1 \alpha z + \cdots + t_{k-1} \alpha^{k-1} z^{k-1} + \alpha^k z^k = 0. \tag{20}$$

Множењем прве од ових са α^k и одузимањем од друге, добили бисмо једначину нижег степена који z задовољава, те то води до контрадикције. Стога сви коефицијенти $q, q_1, \ldots, q_{m-1}$ морају бити једнаки 0.

Користећи сада чињеницу да су решења једначине (18), сем z и αz, $\alpha^2 z, \ldots \alpha^{m-1} z$, заменом $R^{1/m}$ у (15) са $\alpha^i R^{1/m}$ такође се добијају корени почетне једначине (14). Ови корени су сви различити, m не може бити веће од 5. Ако су $y_1, \ldots, y_m$ тако добијени корени, онда имамо

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & p + z + p_2 z^2 + \cdots + p_{m-1} z^{m-1} \\ y_2 & = & p + \alpha z + \alpha^2 p_2 z^2 + \cdots + \alpha^{m-1} p_{m-1} z^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ y_m & = & p + \alpha^{m-1} z + \alpha^{m-2} p_2 z^2 + \cdots + \alpha p_{m-1} z^{m-1}. \end{array}$$

Ако се ово посматра као систем линеарних једначина по непознатим $p, z, p_2 z^2, \ldots, p_{m-1} z^{m-1}$, видимо да имамо систем од m једначина са m непознатих и то такав да има једнозначно решење (уочите која је матрица система). Стога се ове „непознате” све могу изразити као рационалне функције по $y_1, \ldots, y_m$ а тиме су и $p, p_2, \ldots, p_{m-1}$, $z = R^{1/m}$ (па онда наравно и $R = z^m$) рационалне функције корена.

Сама величина R је можда рационална функција неког раније уведеног радикала $v^{1/n}$. Понављањем претходног поступка добијамо да су све ирационалне величине које се појављују у изразу за корене y_i заправо неки радикали рационалних функција корена, укључујући свакако и одговарајуће корене из јединице. Руфини је пошао од те претпоставке, испуштајући корене из јединице и Абел је то оправдао. После овога он наставља користећи претходне резултате других математичара које смо навели и закључује да се општа једначина степена 5 не може решити преко радикала.

Два месеца пре смрти је објавио рад о једној класи решивих алгебарских једначина. У класу коју је разматрао спада и циклотомична једначина. Он ту доказује следећу општу теорему.

Ако су корени једначине такви да се сви корени могу изразити као рационалне функције једног од њих, на пример x, и ако су ма која два корена $\theta(x)$ и $\theta_1(x)$ (где су θ и θ_1 рационалне функције), тако повезана да је $\theta(\theta_1(x)) = \theta_1(\theta(x))$ онда се једначина може решити у радикалима.

Данас наравно групе у којима је множење комутативно називамо Абелове групе. Овде је доказан специјални случај општег резултата који је дао Галоа. Наиме, знамо да је свака Абелова група решива и стога се одговарајућа једначина може решити преко радикала.

Гаус

Слика 22: Карл Фридрих Гаус

Карл Фридрих Гаус (1777–1855) свакако је био један од најзначајнијих математичара у историји, а имао је немале доприносе и у астрономији и физици. Овде ћемо се посветити његовим најважнијим доприносима нашој теми, а то је, најпре, комплетно решење циклотомичне једначине $x^n - 1 = 0$, а затим и резултатом да сваки реалан полином може да се факторише на линеарне и квадратне факторе, што пак повлачи „основну теорему алгебре”: сваки полином са комплексним коефицијентима може да се факторише на линеарне факторе.

Почнимо од „једначине деобе круга” $x^n - 1 = 0$. Још као студент математике, Гаус је дошао до изванредног открића, које је најавио, помало неочекивано, у литерарном часопису који је излазио у Јени. Ево његове најаве (када каже да се могу геометријски конструисати мисли на то да се могу конструисати искључиво користећи лењир и шестар) од априла 1796. године.

> Познато је сваком почетнику у геометрији да су разни правилни многоуглови попут троугла, четвороугла, петоугла, петнаестоугла, као и они који се добијају непрекидним удвостручавањем страна претходних, могу геометријски конструисати.
>
> То је већ урађено у време Еуклида и, чини се, генерално се каже да се поље елементарне геометрије не продужава даље: бар ја не знам ни за један успешан покушај да се њене границе продуже у том правцу.
>
> Стога ми се чини да заслужује пажњу откриће да, сем наведених правилних многоуглова више њих, на пример 17-оугао допуштају геометријску конструкцију. Ово откриће је само специјалан додатак широј теорији, која још није комплетирана и која ће бити представљена јавности чим буде заокружена.
>
> К. Ф. Гаус из Брауншвајга,
> Студент математике у Гетингену

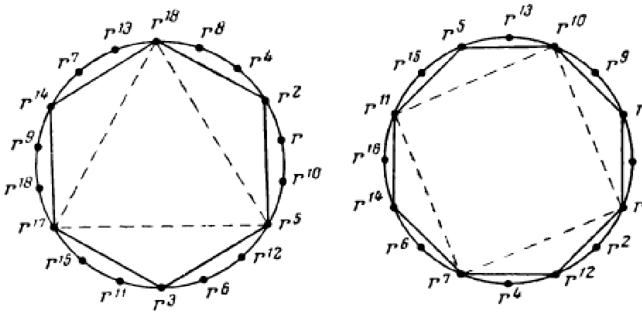
Овај резултат је представио у свом обимном делу „Аритметичка истраживања” објављеном у лето 1801. године. Заправо је томе била посвећена последња, седма глава овог дела. Претходне главе су биле посвећене теорији бројева.

Он ту показује да, ако је број страна правилног многоугла облика $p_1 p_2 \cdots p_l \cdot 2^k$, где су p_i различити прости бројеви облика $2^{2^n} + 1$ (Фермаови прости бројеви), онда се тај многоугао може конструисати помоћу лењира и шестара (прича се да је он толико био поносан тим својим резултатом да је тражио да му цртеж правилног седамнаестоугла буде уклесан на надгробну плочу, али да је каменорезац то одбио тврдећи да се таква фигура не би разликовала од круга...). У једном одељку овог дела Гаус наводи да он има исправан метод да докаже да су то једини правилни многоуглови за које је могуће извршити конструкцију помоћу лењира и шестара и да, мада то превазилази границе овог дела, он то наводи због осећаја одговорности за то да други не би губили време покушавајући да овај резултат прошире.

Гаус најпре своди проблем на случај када је n прост број, и у даљем стално претпоставља да је то тако. Најпре, на доста компликован начин, доказује да је полином $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ (који он означава са

X) нерастављив над рационалним бројевима. Скуп свих корена овог полинома Гаус означава са Ω. Он наводи потом да се идеја доказа састоји у томе да ако је $n-1$ производ фактора $\alpha\beta\gamma\cdots$), који се сви могу сматрати простим бројевима, онда се једначина $X=0$ може решити сукцесивним решавањем једначина степена $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$. На пример, за $n=17$, $n-1=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, те за овај случај треба решити четири квадратне једначине.

За доказивање овог резултата, Гаус користи такозване „периоде”. Тачка 347 гласи: Сви корени из Ω разбијају се на неке класе (периоде). Наиме, нека је r неки од корена из Ω. Сматрамо да је n прост. Тада су сви корени заправо $r, r^2, r^3, \ldots, r^{n-1}$. Гаус је у трећој глави својих „Истраживања” заправо доказао да ако је n прост број, онда је група $(\mathbb{Z}_n\backslash\{0\},\cdot)$ циклична, те постоји „примитивни елемент” g који је генератор те групе. Тада су $1, g, g^2, \ldots, g^{n-2}$ по модулу n заправо бројеви $1, 2, \ldots, n-1$, али не нужно у истом поретку. Стога су $r, r^g, r^{g^2}, \ldots, r^{g^{n-2}}$ такође сви корени из Ω при чему је сваки од њих g-ти степен претходног (приметимо да је и $\left(r^{g^{n-2}}\right)^g = r^{g^{n-1}} = r$ такође степен „претходног” ако их гледамо поређане на кругу. Поставимо те корене из Ω тако да деле круг на n једнаких делова.



$n=19,\ g_{19}=2,\ (6,2)\ u\ (3,16)$ $\quad$ $n=17,\ g_{17}=3,\ (8\ 3)\ u\ (4,10)$

Слика 23: Периоди

Они ће чинити темена правилног n-тоугла. Приметимо да на левој слици у врху уместо r^{18} треба да стоји r^{16}. Нека је $n-1=ef$. Размотримо каква својства имају суме од по f тих корена тако да f тих темена која им одговарају чине темена правилног f-тоугла. Такве суме Гаус назива ПЕРИОДИМА дужине f (заправо скуп корена који се појављује у овој суми Гаус назива периодом, али каже да се и сама сума може тако назвати). Ако се у тој суми пође од корена r^λ она је једнака

$$r^\lambda + r^{\lambda h} + r^{\lambda h^2} + \cdots + r^{\lambda h^{f-1}},$$

где је $h = g^e$, а овде је сваки члан суме h-ти степен претходног (гледано циклички, тј. и први члан је h-ти степен последњег). Ову суму Гаус означава са (f,λ), при чему. Наравно, може се поћи од било ког темена, те је $(f,\lambda) = (f,\lambda h^k)$. Ако се стави $\lambda = 0$, добија се да је $(f,0) = f$. И ту суму Гаус назива периодом, мада она нема исти статус као претходне. Ради прегледности писања, уместо r^μ пише $[\mu]$. Тада је $[\lambda]\cdot[\mu] = [\lambda+\mu]$, а такође важи: ако је $\lambda \equiv \mu \pmod p$, онда је $[\lambda] = [\mu]$; наравно, тада је и $(f,\lambda) = (f,\mu)$.

Гаус потом доказује низ лема за ове периоде, посебно како се налази формула за производе $(f,\lambda)\cdot(f,\mu)$. Наиме, ако је

$$(f,\lambda) = [\lambda] + [\lambda'] + [\lambda''] + \cdots,$$

онда је

$$(f,\lambda)\cdot(f,\mu) = (f,\lambda+\mu) + (f,\lambda'+\mu) + (f,\lambda''+\mu)\cdots.$$

На пример, нека је $n = 19$, тј. $n-1 = 18$ и $f = 6$. Тада је $e = 3$ и $g = 2^3 = 8$ (2 је генератор за $(\mathbb{Z}_{19}\backslash\{0\},\cdot)$). У том случају је

$$(6,1) = [1] + [8] + [64] + [512] + [4096] + [32768],$$

односно после редукције по модулу 19 и приказа у растућем поретку.

$$(6,1) = [1] + [7] + [8] + [11] + [12] + [18].$$

Тада је

$$(6,1)^2 = (6,1)\cdot(6,1) = (6,2) + (6,8) + (6,9) + (6,12) + (6,13) + (6,19).$$

Но, имамо једнакости:

$$(6,8) = (6,8\cdot 8) = (6,64) = (6,7) = (6,56) = (6,18) = (6,144) = (6,11) = (6,88) = (6,12) = (6,96) = (6,1),$$

$$(6,9) = (6,72) = (6,15) = (6,120) = (6,6) = (6,48) = (6,10) = (6,80) = (6,4),$$

$$(6,13) = (6,104) = (6,9) = (6,4), \quad (6,19) = (6,0) = 6.$$

Стога је $(6,1)^2 = 2(6,1) + (6,2) + 2(6,4) + 6$.

Ево приказа периода у овом случају:
Без даљег разматрања, наведимо како се ти периоди појављују при формирању наведених помоћних једначина.

Ако је $n = 19$, онда је $n-1 = 18 = 3\cdot 3\cdot 2$. Тада су периоди $(6,1), (6,2), (6,4)$ корени једначине $x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$. Периоди $(2,1), (2,8), (2,7)$ су корени једначине $x^3 - (6,1)x^2 + ((6,1) + (6,4))x - 2 - (6,2) = 0$, а r, r^{18} су корени једначине $x^2 - (2,1)x + 1$. Кад имамо r имамо и све остале.

За случај $n = 17$, имамо $n-1 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$. Ево приказа периода за овај случај.

$$\Omega = (18,1)\left\{\begin{array}{l} (6,1)\left\{\begin{array}{l}(2,1)\ \ldots [1],[18]\\ (2,8)\ \ldots [8],[11]\\ (2,7)\ \ldots [7],[12]\end{array}\right.\\ (6,2)\left\{\begin{array}{l}(2,2)\ \ldots [2],[17]\\ (2,16)\ldots [3],[16]\\ (2,14)\ldots [5],[14]\end{array}\right.\\ (6,4)\left\{\begin{array}{l}(2,4)\ \ldots [4],[15]\\ (2,13)\ldots [6],[13]\\ (2,9)\ \ldots [9],[10]\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Слика 24: Периоди за случај $n = 19$

$$\Omega = (16,1)\left\{\begin{array}{l} (8,1)\left\{\begin{array}{l}(4,\ 1)\left\{\begin{array}{l}(2,\ 1)\ldots [1],[16]\\ (2,13)\ldots [4],[13]\end{array}\right.\\ (4,\ 9)\left\{\begin{array}{l}(2,\ 9)\ldots [8],[\ 9]\\ (2,15)\ldots [2],[15]\end{array}\right.\end{array}\right.\\ (8,3)\left\{\begin{array}{l}(4,\ 3)\left\{\begin{array}{l}(2,\ 3)\ldots [3],[14]\\ (2,\ 5)\ldots [5],[12]\end{array}\right.\\ (4,10)\left\{\begin{array}{l}(2,10)\ldots [7],[10]\\ (2,11)\ldots [6],[11]\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Слика 25: Периоди за случај $n = 17$

Периоди $(8,1),(8,3)$ су корени једначине $x^2 + x - 4 = 0$; $(4,1),(4,9)$ су корени једначине $x^2 - (8,1)x - 1 = 0$; $(2,1),(2,13)$ су корени једначине $x^2 - (4,1)x + (4,3) = 0$ и r, r^{16} су корени једначине $x^2 - (2,1)x + 1$. Тако смо добили те четири квадратне једначине. Како се решења квадратних једначина изражавају помоћу квадратних корена, а њих је могуће конструисати помоћу лењира и шестара (под условом да је поткорена величина већ конструисана), то се и правилни 17-угао може конструисати помоћу лењира и шестара. На пример, ако желимо да видимо колико је $\cos\frac{2\pi}{17}$ изражено алгебарски, онда можемо да приметимо да је $r = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$, те је $r^{16} = r^{-1} = \bar{r} = \cos\frac{2\pi}{17} - i\sin\frac{2\pi}{17}$. Добијамо да је

$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2}(r + r^{16}) = \frac{1}{2}(2,1)$. Само треба наћи $(2,1)$...

Пређимо сада на разматрање основне теореме алгебре. Гаус се више пута враћао на ову теорему. Први доказ је објавио 1799, други и трећи 1816, а четврти 1849. Четврти доказ је базиран на истим идејама као и први, те је он заправо дао три различита доказа овог важног резултата.

Заправо је Гаусова теза, коју је одбранио код Фафа (Pfaff) 1799. у Хелмштету, садржала анализу ове теореме и први доказ. Наслов тезе: *„Нови доказ за теорему да се свака цела рационална алгебарска функција једне промењиве може разложити у реалне факторе првог или другог степена”.* Теза није дуга, има неких 26 страница. Најпре Гаус анализира, уз критику, раније покушаје доказа овог резултата. Најпре се то односи на Даламберов доказ из 1746. године, а потом и на Ојлерову даљу разраду. Имајући у виду критику коју је дао, Гаус у другом делу представља свој доказ.

Гаус разматра полином са реалним коефицијентима

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Lx + M,$$

где је x неодређена. Он жели да докаже да или линеаран или квадратни фактор од X постоји. Треба приметити да ако одговарајућа једначина има двоструки корен, онда је он, као што знамо, нула и извода тог полинома, па се проблем може свести на полином мањег степена. Стога се може претпоставити да X нема вишеструких корена. Гаус избегава експлицитно коришћење комплексних бројева, што је рађено у претходним доказима и формулише следећу лему.

Лема. Ако је m произвољан позитиван цео број, онда је функција $\sin\varphi \cdot x^m - \sin m\varphi \cdot r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi \cdot r^m$ дељива са $x^2 - 2\cos\varphi \cdot rx + r^2$.

Констатује да се ово показује директном провером и формулише следећу лему.

Лема. Ако су величина r и угао φ одређени на такав начин да важе следеће једначине

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \ldots + Krr\cos 2\varphi + Lr\cos\varphi + M = 0, \tag{21}$$

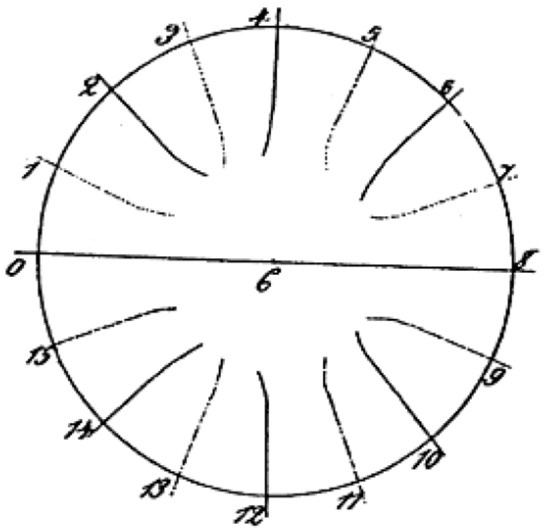
$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \ldots + Krr\sin 2\varphi + Lr\sin\varphi = 0, \tag{22}$$

онда је функција $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + KxxLx + M = X$ дељива фактором другог степена $xx - 2\cos\varphi \cdot rx + rr$, ако $r \cdot \sin\varphi$ није $= 0$. Али, ако јесте $r \cdot \sin\varphi = 0$, онда је та функција дељива простим фактором $x - r\cos\varphi$.

Ову лему доказује уз помоћ претходне. Гаус потом образлаже да се овако нешто доказује углавном коришћењем „имагинарних бројева” и наводи Ојлера, али да он, ето, сматра да је добро видети како се то може и директно доказати.

За једначине (21) и (22) он говори да су једначине алгебарских кривих степена m, само представљене у поларним координатама и леву страну у једначини (21) означава са U, а у једначини (22) са T.

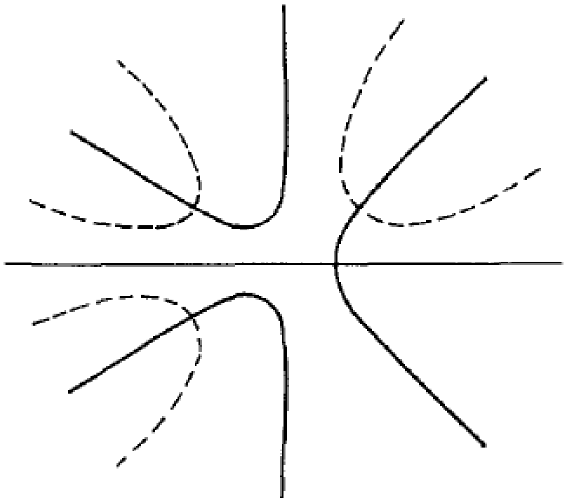
Гаус сада жели да покаже да систем једначина $U = 0$, $T = 0$ има решење, тј. да се ове криве секу. Он тврди да за довољно велико R постоји тачно $2m$ тачака пресека криве $U = 0$ и круга полупречника R, као и тачно $2m$ тачака пресека криве $T = 0$ и тог круга, и то тако да се тачке пресека једне и друге криве појављују једна између друге. Ове алгебарске криве имају по m грана и он то илуструје цртежом:



Слика 26: Гаусов први доказ

Додаје и слику
ради појашњења. Каже да је она добијена помоћу функције $X = x^4 - 2xx + 3x + 10$. Парни бројеви на првој слици означавају пресеке круга и грана криве $T = 0$ (обратите пажњу да је x-оса једна од грана те криве), а непарни се односе на криву $U = 0$. Зашто се све дешава баш тако? Гаус каже да ако грана неке алгебарске криве улази у неки домен, она одатле и излази. Он ово сматра за јасно и не доказује, даје само следећи коментар у облику фусноте.

> Чини се да је доказано са довољном сигурношћу да алгебарска крива нити може да се прекине било где (као што се дешава, на пример, са кривом чија је једначина $y = 1/\ln x$) нити се може изгубити, да тако кажемо, у некој тачки после бесконачно много намотаја (као код логаритамске спирале). Колико ја знам, нико није истакао било какву сумњу у вези овога. Ипак, ако би неко то



Слика 27: Гаусов први доказ – додатна слика

тражио, онда бих се подухватио задатка да дам доказ, који не подлеже било каквој сумњи, неком другом приликом...

Но, ово тврђење о реалним алгебарским кривама није нимало једноставно и данас многи сматрају да је Даламберов доказ, који има мана, лакше поправити но Гаусов. Заправо је тек 1920. године Александар Островски дао непобитан доказ свих Гаусових тврдњи у овој тези и то је објављену у научном часопису у Гетингену. Но, тај доказ нимало није лак. Занимљиво је навести да је једноставнији доказ тога што Гаус тврди, дат у часопису *American Mathematical Monthly* 2017. године.

Наставак доказа да постоји пресек ове две криве Гаус изводи овако. Претпоставимо да пресек не постоји. Тачка 0 је повезана са тачком $2m$ x-осом (видети цртеж, ту је $m = 4$). Тачка 1 се онда не може повезати са неком тачком са друге стране x-осе а да је не пресече. Стога, ако је тачка 1 повезана са неком непарном тачком n, онда је $n < 2m$. На исти начин, ако је 2 повезано са парном тачком n' мора бити $n' < n$. Приметимо да је разлика $n' - 2$ парна и да је мања од разлике $2m - 0$. Настављањем поступка долазимо до ситуације да је тачка h повезана са тачком $h + 2$. Но, сада грана алгебарске криве која 'улази' у круг у тачки $h + 1$ мора обавезно сећи грану која повезује h и $h + 2$ што противречи претпоставци.

Гаусов други доказ је алгебарски, не укључује геометријска разматрања. Он је базиран на два резултата.

1. Сваки реални полином непарног степена има бар једну нулу.

2. Свака квадратна једначина са комплексним коефицијентима има два комплексна корена.

Гаус разматра реални полином степена m

$$Y = x^m - L'x^{m-1} + L''x^{m-2} - \cdots + \cdots \tag{23}$$

Он овај полином мења полиномом y чије су нуле неодређене $a, b, c, \ldots$:

$$y = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots \tag{24}$$

Посматра потом помоћни полином σ у новој промењљивој u дефинисан као производ

$$\zeta = (u-(a+b)t+ab)(u-(a+c)t+ac)\cdots. \tag{25}$$

Видимо да је ово производ линеарних фактора који су добијени избором пара неодређених. Стога је $\deg\zeta = m' = \binom{m}{2} = \frac{1}{2}m(m-1)$. Дакле, овај полином је изражен помоћу u, t и симетричан је у неодређеним $a, b, c, \ldots$. Но, елементарне симетричне функције од ових неодређених дају коефицијенте $L', L'', \ldots$ полинома Y (присетимо се Вијетових формула; знаци коефицијената су тако бирани да су коефицијенти баш симетричне функције). Заменом добијамо помоћни полином Z степена m'. Гаус сада доказује да ако дискриминанта полинома Y није нула, онда ни дискриминанта од Z није 0 (дискриминанта неког полинома је једнака нули акко он има вишеструке корене). Потом бира за t реалну вредност тако да дискриминанта остаје различита од нуле и показује да, ако је корен од Z познат, пар корена оригиналног полинома се може добити (знамо колико су $a+b$ и ab, те онда решавањем квадратне једначине добијамо a и b). Главна ствар у овом доказу је да се итерирањем овог поступка добијају полиноми чији је степен све мање дељив са 2. Наиме, ако је $m = 2^\mu(2k+1)$, онда је $m' = 2^{\mu-1}(2k+1)(2^\mu(2k+1)-1) = 2^{\mu-1}(2k'+1)$. Тако најзад добијамо полином непарног степена који има реалну нулу. И онда идемо уназад те добијамо и нуле почетног полинома.

Трећи Гаусов доказ користи математичку анализу. Можемо да га гледамо и као доказ, који у својој основи користи Гринову формулу из Анализе 2, или резултате из Комплексне анализе. Свакако је то директан доказ. О њему ћемо заиста кратко. Поново се полази од полинома са реалним коефицијентима

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Lx + M$$

и разматрају помоћне функције

$$t = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \cdots + Lr\cos\varphi + M;$$

$$u = r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \cdots + Lr\sin\varphi.$$

Гаус наравно жели да докаже да систем једначина $t = 0, u = 0$ има решење. Претпоставимо да то решење не постоји, тј. да је $t^2 + u^2 \neq 0$ за све вредности r и φ. Гаус посматра функцију

$$y = \frac{g}{r(t^2 + u^2)^2},$$

при чему је g полином по t, u, као и њиховим првим и другим парцијалним изводима по φ (с обзиром на природу ових функција, ти парцијални изводи су функције истог облика). Затим тражи интеграл ове функције по довољно великом диску са центром у координатном почетку.

$$\Omega = \int\int_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant R} y\, dr\, d\varphi.$$

Заправо код Гауса φ узима вредности од 0° до 360°. Ми смо то ипак мало модернизовали ☺. Но, испоставља се да ако се интеграли прво по φ добија се да је $\Omega = 0$, а ако се интеграли прво по r, па онда по φ, добија се да је $\Omega > 0$. Ова контрадикција показује да је $t^2 + u^2 = 0$ негде, а то је и тражено.

Галоа

Слика 28: Еварист Галоа

Еварист Галоа (1811–1832) био је син градоначелника једног малог града у околини Париза. Два пута (1828. и 1829) је покушао да се упише у École Polytechnique и после ових неуспелих покушаја уписао је École Normale. Треба рећи да је Политехничка школа била на знатно вишем нивоу од Нормалне, али је младог Галоа привлачила и због јаког студенцког политичког покрета у тој школи, а Галоа је републиканске идеје наследио од својих родитеља. Осим тога, Галоа је доживео породичну трагедију непосредно пре свог другог покушаја да упише Политехнику — отац му је извршио самоубиство због скандала изазваног његовим фалсификованим потписом на неким дописима.

Његов први објављени рад је чланак од 8 страна о верижним разломцима објављен у *Математичким аналима* Жергоња 1828. године (Жозеф Жергоњ (1771–1859) био је француски математичар који је издавао овај утицајни часопис). Ту је он показао како се, ако се један корен алгебарске једначине ма ког степена изражава непосредно периодичним верижним разломком, онда се неки други корен изражава такође периодичним верижним разломком који се добија дељењем -1 истим верижним разломком, али написаним у обратном поретку.

У мају 1829, Галоа је приложио свој први рад о својим истраживањима о решавању алгебарских једначина, Академији наука Париза, а други, о једначинама простог степена осам дана касније, 1. јуна. Оба рада су послата Кошију који их је изгубио и они никада нису нађени.

У фебруару 1830. Галоа је Академији приложио још један рад на исту тематику да би био разматран за Велику награду Академије. Овај пут је рад добио стални секретар Академије Фурије, али је он умро пре него што је стигао да прегледа рад. Ни овај рукопис никада није нађен. Награду су поделили Јакоби и Абел (постхумно), док Галоаов рад није ни разматран.

Софи Жермен (1776–1831, француска математичарка која је имала значајне резултате посебно у теорији бројева) је писала о овоме:

> ...смрт господина Фуријеа је била превише за овог студента Галоу који, упркос својој дрскости, показује знаке паметне природе. Све ово је довело до тога да је он избачен са Нормалне школе. Сада је без новца... Кажу да ће потпуно полудети. Плашим се да је то тачно.

У априлу 1830. Галуа је објавио „ноту” (кратак рад) од две странице у *Билтену* (барона) Ферусака у којој су главни резултати рада који је приложио Академији били наведени без доказа. Прва и најзначајнија теорема која је наведена у овој ноти гласи:

> Да би једначина простог степена била решива у радикалима потребно је и довољно да се сви остали корени могу рационално изразити преко нека два од њих.

Јасно је да ово показује да општа једначина реда 5, која има 5 корена који су независни један од другог, не може решити у радикалима.

Изузетно значајан је рад крајње једноставног наслова „О теорији бројева” објављен у *Билтену* Ферусака у јуну 1830. године, а у коме је Галоа одредио структуру коначних поља (која се данас називају и Галоаовим пољима). Прикажимо до којих је резултата дошао.

И Абел и Галоа су имали јасан појам „поља”. Поља која су и Абел и Галоа разматрали у проблему решивости алгебарске једначине су увек поља која садрже у себи поље рационалних бројева. Садашњим језиком говорећи, ради се о пољима карактеристике 0. Но, у овом раду он се бави пољима карактеристике p за прост број p. Њега заправо занимају величине које постају 0 после множења са p. Ево шта он пише.

> Ако се договоримо да сматрамо за нулу све величине које при алгебарском рачунању јесу умношци од p и ако се покуша да се, при овој конвенцији, нађе решење једначине $Fx = 0$, које господин Гаус означава нотацијом $Fx \equiv 0$, обичај је да се разматрају само целобројна решења. Како сам ја, вођен својим истраживањима, разматрао и несамерљива решења, добио сам неке резултате за које сматрам да су нови.

Дакле, Галуа јесте мотивисан разматрањем решавања конгруенција, али за разлику од Гауса који и за нелинеарне конгрупенције, попут $x^2 \equiv a \pmod p$, допушта само целобројна решења, Галуа би желео да размотри и 'ирационална решења', тј. желео би да посматра раширења од $\mathbb{Z}_p$ добијена додавањем нових елемената. Он претпоставља да је полином Fx нерастављив по модулу p. Пита се да ли може наћи нова решења увођењем нових 'симбола' који се могу показати исто тако корисним као и увођење имагинарне јединице i у анализу.

Галуа означава са i један од корена конгруенције $Fx \equiv 0$ степена ν (то i наравно није из $\mathbb{Z}$) и формира p^ν израза

$$a + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_{\nu-1} i^{\nu-1}. \tag{26}$$

где су $a, a_1, \ldots, a_{\nu-1}$ цели бројеви по модулу p. Ови елементи ће формирати поље, које данас називамо Галуаово поље и једна од ознака је и $GF(p^\nu)$.

Он даље показује да, ако се посматрају сви ненула елементи (и тако добије једна група у односу на множење) и овде, као у случају разматрања по модулу p постоје примитивни корени, тј. ова група је циклична (у данашњој терминологији). Дакле, сваки елемент Галоаовог поља је корен полинома $x^{p^\nu} - x$.

На крају свог рада, Галуа полази од ма ког раширења од $GF(p)$ у коме се горњи полином факторише на линеарне факторе. Посматрајући само потпоље генерисано коренима горњег полинома, он констатује да постоји „примитивни елемент” и у том потпољу. Каже да је то јасно на основу једне Абелове теореме. Тај елемент је нула неког нерастављивог полинома степена ν. Без обзира који полином да се узме, увек се долази до истог поља $GF(p^\nu)$. На пример, у случају $p = 7$

и $v=3$ констатује да се за тај полином може узети x^3-2 који је нерастављив по модулу 7.

У јануару 1831. Академија је примила трећу, редиговану верзију, његовог централног рада под насловом „Мемоар о условима за решивост једначина радикалима”. Академија је замолила Поасона и Лакроа да напишу рецензију за овај рукопис. Поасон га је пажљиво прегледао и закључио да не може да га разуме. Ево и завршетка те рецензије.

> Урадили смо све највише што смо могли да разумемо Галоаове доказе. Његово резоновање није довољно јасно, нити је довољно развијено да бисмо могли да дамо оцену његове тачности и чак нисмо у могућности да дамо идеју његовог резоновања у овој рецензији. Аутор тврди да је тврђење које је посебан циљ овог мемоара део опште теорије, која потенцијално има многе примене. Често се дешава да разни делови теорије, који појашњавају један други, буду лакше схватљиви као целина, него изоловани. Стога, да би се формирала сигурна оцена треба причекати док аутор не објави своје дело као целину. Но, у садашњем облику, за део који је поднесен Академији не можемо дати позитивно мишљење.

Галоа није стигао да представи своју комплетну теорију у облику научног рада. Он је погинуо у двобоју 30. маја 1832. Како је до двобоја дошло, јесте једна од мистерија које окружују овог младог човека. На основу најновијих истраживања, а која свакако нису рекла последњу реч о овом питању, укратко то можемо овако појаснити.

Већ је речено да је Галуа био истакнут у својим револуционарним активностима усмереним против уставне монархије установљене 1830. године у Француској. Дана 9. маја 1831. године 200 републиканаца се скупило да прослави ослобађање 19 артиљеријских официра Националне гарде који су крајем 1830. године ухапшени и оптужени за издају. Током ове вечере је Галоа, наводно, са бодежом у руци, претио краљу. Ухапшен је исте вечери, али је, изненађујуће, на суђењу 15. јуна ослобођен оптужбе. На Дан Бастиље 14. јула 1831. је поново ухапшен јер је носио забрањену униформу артиљеријског официра Националне гарде, а носио је и напуњену пушку, више пиштоља и нож. Ухапшен је и враћен у затвор у коме је претходно био. Током боравка у затвору, добио је обавештење да му је „Мемоар” одбијен. Покушао је самоубиство, али су га остали затвореници у томе спречили. У стању пијанства се жалио другима колико му недостаје отац. У марту 1832. дошло је до епидемије колере у овом затвору и затвореници су пребачени на друго месту. Ту се, по свему судећи, заљубио у ћерку лекара из тог краја. Пошто је био отпуштен из затвора 28. априла, разменио је нека писма са њом, али је јасно да његова осећања нису била узвраћена.

Све те невоље које су га снашле, укључујући и ту неузвраћену љубав, довеле су до тога да је решио да се жртвује за револуционарну ствар. За покретање оружаног устанка, била је потребна и нека жртва и Галоа је решио да он буде та жртва. У наредним данима је написао неколико писама у којима је навео да је изазван на двобој од стране монархиста (а није пропустио да спомене да ће погинути и због „озоглашене кокете”). Заправо се договорио са својим пријатељем да одглуме двобој у коме ће Галуа страдати. Скоро је сигурно да је идентитет његовог пријатеља Перше Дербенвил (а то име је и Александар Дима навео у својим мемоарима). Галоа је навео да не замере онима који ће га убити, јер имају добру намеру. На његовој сахрани се скупило 3000 људи који су били спремни да нападну полицију и тиме започну побуну, но током сахране се сазнало да је генерал Ламарк, који је такође био велики критичар тренутног режима (генерал је био познат по значајним војним успесима под Наполеоном, касније је био критичар и рестаурације Бурбона и касније уставне монархије) и онда је закључено да би његова сахрана била боља прилика за побуну. До те побуне је и дошло у јуну 1832. године, али то није тема за нас.

У сваком случају, за нашу причу је значајно да је Галоа последњу ноћ пред двобој, дакле ноћ између 29. и 30. маја, провео састављајући подуже писмо свом пријатељу Огисту Шевалијеу у коме је објаснио основне идеје своје теорије. Ово писмо је објављено у Енциклопедијској ревији у септембру 1832. године. Галуа га завршава молбом пријатељу да јавно затражи мишљење од Јакобија и Гауса, не о тачности, него о значају теорема до којих је дошао.

> После тога, наћи ће се, надам се, људи којима ће бити у интересу да распетљају сав овај галиматијас.

Нажалост, ни Јакоби ни Гаус се никада нису изјаснили овим поводом и шири круг математичара је тек 1846. године када је Лиувил у свом часопису објавио Галоаове математичке радове, сазнао за ове његове идеје.

Прикажимо сада, укратко, садржину Галоаовог „Мемоара”. Галоа почиње од једначине $f(x) = 0$. Коефицијенти овог полинома су познате величине, на пример рационални бројеви, или чак и само слова. Све рационалне функције ових коефицијената он назива рационалним. Могу се додавати и нове величине, на пример m-ти корени из постојећих. У савременој терминологији, Галоа почиње од неког основног поља и онда додаје нове елементе, те тако формира раширења поља. Он овде користи, али не сасвим конзистентно, термине пермутација и супституција. Посматра групе супституција које имају следеће својство: ако S и T припадају некој таквој групи, онда је у њој и ST. Обратите пажњу да он захтева само да је композиција две супституције у истој групи. Но, супституције су бијекције, а групе које разматра су коначне и ово му је довољно да може да закључи да је и идентична супституција ту, као и да је инверз сваке супституције у тој групи (размислите зашто).

Галоаова прва лема каже да ако неки полином f има заједнички корен са неким нерастављивим полиномом g, онда је f дељиво са g. Овај се резултат такође налази у Абеловом раду из 1829. Ова лема нам говори да је поље $K(V)$ које се добија додавањем неког корена нерастављивог полинома пољу коефицијената K потпуно одређено чим се зна базно поље K и нерастављив полином g – ми сада знамо да је то поље изоморфно количничком прстену $K[X]/\langle g\rangle$.

Он затим показује да ако једначина $g(x)=0$ нема вишеструке корене и ако су корени $a,b,c,\ldots$ увек се може наћи функција ових корена V тако да су све вредности које се добијају свим пермутацијама $a,b,c,\ldots$ различите. Заправо Галуа каже да се за то може узети

$$V = Aa + Bb + Cc + \cdots$$

за неке целе бројеве $A,B,C,\ldots$. Одавде он добија да се тада сви корени $a,b,c,\ldots$ добијају као рационалне функције од V. Другим речима, $K(a,b,c,\ldots)=K(V)$. У овом доказу он неке међукораке и не доказује, те је Поасон исправно написао да је доказ овога некомплетан, али да је резултат тачан на основу једног Лагранжовог резултата. Тај елемент V је корен неког нерастављивог полинома. Ако су сви корени тог полинома $V,V',V'',\ldots,V^{(n-1)}$ онда следећа лема констатује да ако је $a=\varphi(V)$ корен почетне једначине, онда је $\varphi(V')$ такође корен те једначине.

Потом доказује главни резултат.

Став 1. Постоји група пермутација слова $a,b,c,\ldots$ тако да

1° Свака функција корена која је инваријантна на супституције у групи јесте рационално одредива.

2° Обратно, свака функција корена која је рационално одредива је инваријантна у односу на групу.

Видимо овде неконзистентност терминологије у вези пермутација и супституција, но јасно је о чему се ради. Он потом истражује како се мења група једначине ако се основно поље проширује додавањем једног, или чак свих корена неке помоћне једначине (задате нерастављивим полиномом). Јасно је да ће нова група бити нека подгрупа H почетне групе G. Он пажљивије говори о овоме у писму Шевалијеу.

Пише да се, уколико је H права подгрупа од G група G може раставити у облику

$$G = H + HS + HS' + \cdots \tag{27}$$

или у облику

$$G = H + TH + T'H + \cdots \tag{28}$$

Овде се наравно ради, у савременој терминологији, о разбијање групе на десне, односно леве косете по некој подгрупи. Галоа каже да се ове две декомпозиције не морају поклапати, а ако се поклапају, он каже да се ради о „правој” декомпозицији. У савременој терминологији наравно имамо тада у питању нормалну подгрупу. Он посебно наводи да је то случај када се додају сви корени помоћне једначине. Он доказ не наводи, само каже да се може наћи.

Сада он долази до основног питања: када се једначина може решити помоћу радикала. Наравно, довољно је посматрати радикале (корене) простог степена. Галоа овде претпоставља да се додају одговарајући корени из јединице на самом почетку, али на основу радова Гауса, то није неопходно претпоставити — p-ти корени из јединице могу се изразити преко радикала степена мањег од p.

Претпоставимо да додавање радикала r, који је корен једначине

$$x^p - s = 0 \tag{29}$$

доводи до редукције Галоаове групе. Како су сви p-ти корени из јединице по Галои већ у основном пољу, то смо заправо додали све корене једначине (29) (остали су облика αr, где је α p-ти корен из 1). Дакле, ради се о „правој” декомпозицији (подгрупа је нормална). Галоа тврди, али не доказује, да је број чланова у декомпозицији (27) (дакле, индекс подгрупе H у групи G) једнак p. Важи и обратно — ако је H подгрупа индекса p онда се Галоаова група G може редуковати на H додавањем радикала степена p.

Дакле, једначина $f(x) = 0$ је решива у радикалима ако и само ако постоји низ подгрупа

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_m = \{e\}$$

тако је да H_k нормална подгрупа од H_{k-1} чији је индекс прост број. Наравно, те групе данас називамо решивим групама.

Галоа потом претпоставља да је једначина $f(x) = 0$ задата нерастављивим полином чији је степен прост број p. Доказује да се ова једначина може решити у радикалима ако и само ако свака супституција из G трансформише корен x_k у корен $x_{k'}$ линеарном трансформацијом k по модулу p:

$$k' \equiv ak + b \pmod{p}.$$

Галоаова група опште једначине петог степена нема овај облик, те стога ова једначина није решива у радикалима.

Почеци теорије скупова

Сада ћемо покушати да прикажемо како се развио савремени поглед на бесконачне скупове и како су скупови постали основа на којој градимо савремену математику. Но, у том приказу видећемо и како се развијао појам функције.

Наше излагање започињемо кратким освртом на рад Бернарда Болцана (1781–1848), који је био чешки филозоф и математичар италијанског порекла.

Слика 29: Бернард Болцано

Сигурно најпознатије дело овог математичара је његов рад из 1817. године у којем је доказао теорему да свака непрекидна функција узима све међувредности и која је свакако свим студентима позната из курса математичке анализе (сличан доказ је касније дао и Коши у свом *Курсу анализе*, те је зато та теорема и позната као Болцано-Кошијева теорема).

Но, ми се нећемо задржавати на овом раду, но на његовој постхумно објављеној расправи *Парадокси бесконачног* (1851). До овог рада, чак и велики математичари попут Даламбера и Гауса, су избегавали да прихвате стварно постојање бесконачног, но су о појму бесконачности писали као о *начину изражавања*, у контексту променљивих величина које могу узимати произвољно велике вредности и слично. Болцано у овој својој расправи истиче да бесконачни објекти заиста постоје. На пример, он овде наводи да је реална права бесконачна, а није променљива. Такође наводи и следећи пример (скоро идентичан пример је касније навео и Дедекинд (Јулијус Виљем Рихард Дедекинд, 1831–1916, немачки математичар) у својој дискусији о бесконачним скуповима, а о којој ће касније бити више речи): скуп свих истина је бесконачан. Наиме, узмимо било које истинито тврђење A. Онда можемо формирати ново тврђење B, које НИЈЕ идентично старом: „A је истинито". Дакле, на тај начин добијамо ново истинито тврђење B и потом C итд. Он указује да тако добијамо бесконачно много тврђења, а и истиче сличност формирања ових тврђења формирању скупа свих (природних) бројева.

Најзанимљивији део за ову нашу причу је вероватно следећи пример, који Болцано наводи. Он разматра два скупа: све реалне бројеве (за њега, све *величине*) између 0 и 5 и све реалне бројеве између 0 и 12 и истиче да постоји бијекција (овде користимо савремену терминологију, Болцано није то тако исказао) између ова два скупа задата једначином $5y = 12x$. Но, он нажалост пропушта могућност да препозна појам кардиналности бесконачних скупова, него истиче да ипак не можемо те скупове сматрати једнаким у односу на бројност својих чланова, пошто, тако каже Болцано, елементима 3 и 4 одговарају елементи $7\frac{1}{5}$ и $9\frac{3}{5}$ и док су елементи 3 и 4 на растојању 1, дотле су елементи који њима одговарају на растојању $2\frac{2}{5}$. И стога те скупове он не сматра истобројним. Очигледно је да код њега још увек превелики значај имају метричка својства. Из других примера које наводи види се да и Еуклидово „цело је веће од свог дела" има велики утицај на њега, чак и у разматрањима која се тичу бесконачних скупова (и сума). Занимљиво је да он чак понегде истиче да скупови могу имати исте елементе, а да су ипак различити! Наводи као пример крчаг и разбијени крчаг. Очигледно је да апстрактан појам скупа није још присутан код њега.

На крају треба још истаћи да Болцанови радови нису били довољно познати у своје време, па чак ни доста касније, те да стога нису имали значајан утицај на развој математике тога времена.

Први велики математичар (Болцано је као математичар имао одређени значај, али сигурно се не би могло рећи да је био велики математичар), који је имао значајан утицај на развој теорије скупова био је свакако Риман (Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866), немачки математичар).

Слика 30: Георг Риман

Риманов живот је био нажалост кратак, али изузетно плодотворан са математичке тачке гледишта. Он је започео студије на универзитету у Гетингену 1846. године да би године од 1847. до 1849. провео у Берлину где је имао прилику да учи од Јакобија и Дирихлеа. По повратку у Гетинген започела је једна од сигурно најуспешнијих деценија у историји математике. Риман је одбранио докторат 1851. године из области комплексне анализе и у том докторату је увео појам Риманове површи. Године 1853, предао је своју тезу за хабилитацију на тему Фуријеових (Жан Баптист Жозеф Фурије (1768–1830), француски математичар) редова, у оквиру које је прецизирао појам интеграла. Наредне године је одржао своју лекцију за хабилитацију о нееуклидској геометрији у којој је увео појам многострукости и са којом се може рећи да започиње модерни развој диференцијалне геометрије. Значајан рад о Абеловим функцијама објавио је 1857. године, а рад о зета функцији 1859. године. Читаоцу је свакако јасно да би за приказ свих ових радова и њиховог значаја, била сигурно потребна не једна, но више књига, али ми ћемо се у нашем историјском осврту задржати само на најважнијим елементима који се тичу теорије скупова.

Први Риманов утицај на развој теорије скупова је садржан у његовој лекцији за хабилитацију, коју је имао обавезу да одржи да би добио одобрење да предаје у Гетингену. У ту сврху он је понудио три теме и Гаус је, што је било неуобичајено, одабрао да Риман одржи лекцију на трећу тему. И Римана је то изненадило (у писму свом брату је писао да је припремио прве две теме добро и да се надао да ће Гаус изабрати неку од њих, али да сада мора да припреми и предавање за ту трећу тему). Ово предавање је одржано 10. јуна 1854. године и наслов је био: *О хипотезама које леже у основи геометрије.* Сам Гаус, који је предложио тему, био је веома импресиониран Римановим излагањем.

Како је предавање било замишљено за ширу публику, у њему није било техничких резултата, као што би се популарно рекло „није било много формула”, но било је богато дубоким и новим идејама. У њему је Риман увео појам многострукости, на немачком *Mannigfaltigskeit*, као *n*-тоструко проширене величине. Ту је практично дата савремена дефиниција многострукости — (тополошки) простор, који је локално еуклидски простор од *n* димензија. Дискутовано је о појму растојања, дужине кривих и уопште о рачуну у таквим просторима. Треба истаћи да је Риман ту успутно навео и могућност разматрања, тј. постојања и бесконачно димензионалних многострукости (многострукости чије су тачке функције, за које је потребно задавање бесконачно много величина, другим речима вредности функција). Но, за нашу причу је значајно то што Риман разликује непрекидне многострукости и дискретне многострукости. Он каже да су индивидуалне специјализације непрекидних многострукости тачке, а дискретних, елементи многострукости.

Заправо, може се рећи да је он овим својим радом желео да учини и више од онога што је садржано у самом наслову. Док би се за непрекидне многострукости могло рећи да представљају истинску расправу о геометријском простору, дотле дискретне многострукости заправо представљају први почетак заснивања свих појмова математике на појму скупа. Наиме, дискретна многострукост није ништа друго него скуп. Заправо Кантор (Георг Фердинанд Лудвиг Филип Кантор, 1845–1918, немачки математичар), под очигледним утицајем Риманових идеја, у својим првим радовима посвећеним скуповима *није* користио за скупове термин ***Menge***, но Риманов термин ***Mannigfaltigskeit***. Ово Риманово предавање није било одмах доступно широј публици. Заправо, оно је објављено тек 1868. године, две године после Риманове смрти и имало је изванредан утицај на развој математичара те и будућих генерација.

Док се у овом Римановом предавању о геометрији налази клица каснијег заснивања математике на појму скупа и оно као такво представља методолошко-филозофску основу за почетак развоја теорије скупова, дотле његова хабилитациона теза, која је посвећена разматрању Фуријеових редова, представља конкретну основу на којој су започела истраживања која су довела до развоја апстрактне теорије скупова, основних тополошких појмова, као и теорије мере. Стога ћемо посветити пажњу и тој тези.

Да бисмо боље схватили проблеме који су се истраживали, морамо да се вратимо мало уназад у времену, до Ојлера.

У свом *Уводу у анализу бесконачности* из 1748. године, он је дефинисао функцију променљиве величине као „аналитички израз”, који је на произвољан начин направљен од те променљиве и разних константи. Дакле, за функцију је неопходно да има запис у облику формуле. Но, он је у свом ранијем раду из 1734. у области парцијалних диференцијалних једначина допуштао и могућност да функција буде „прекидна”, тј. да нема јединствен аналитички запис у целој области, него да *криве* које представљају график функције буду састављене од више делова са потенцијално различитим аналитичким записом. То је истакао и у расправи са Даламбером (Жан ле Рон Даламбер (1717–1783), француски математичар) који је 1747. показао да једначина струне која осцилује има решење $F(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t))$. Даламбер је истицао да f мора бити „непрекидна”, тј. да има јединствен аналитички запис, док је Ојлер сматрао да може да буде и прекидна у горенаведеном смислу те речи. У ту дискусију се укључио и Данијел Бернули (1700–1782, швајцарски математичар), који је на основу физичког разматрања о струни која осцилује, навео да функција f мора бити представљива у облику реда

$$f(x) = a_1 \sin(\pi x/L) + a_2 \sin(2\pi x/L) + \cdots,$$

где је L дужина струне. Са математичке тачке гледишта, Бернулијево тврђење се своди на то да се свака функција може представити тригонометријским редом. То тврђење је већина водећих математичара одбацила.

Но, Фурије, најпре у свом раду о провођењу топлоте из 1807, који није објављен, а потом у свом значајном делу *Аналитичка теорија топлоте* из 1822, враћа се на ту идеју. Заправо, он тврди да се свака ограничена функција f на $(-\pi,\pi)$ може представити у облику

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{$*$}$$

где су коефицијенти задати са

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Наравно, ово су сада свима добро познате формуле из теорије Фуријеових редова.

Фурије говори о произвољној функцији, али се из његовог излагања види да ипак размишља на начин својих претходника. На пример, њему је функција задата са e^{-x} за ненегативне x, а са e^x за негативне x (другим речима, функција $e^{-|x|}$) „прекидна” пошто је задата помоћу два аналитичка израза.

Он је заправо дао два доказа свог тврђења о развоју произвољне функције у тригонометријски ред. У првом доказу је претпоставио да се функција може развити у степени ред и затим решавајући систем од бесконачно много једначина са бесконачно много непознатих, дошао до траженог развоја. У другом доказу он разматра „произвољну” функцију (претпоставља се да је ограничена) и полази од једначине $(*)$. Множењем те једначине са $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$ и интеграцијом (при чему интеграл пролази кроз суму) он добија коефицијенте у наведеном облику и тиме тврди да је функција f заиста представљена тим тригонометријским редом. Много се примедби може навести у вези таквог 'доказа'. Пре свега, није јасно зашто се ред може интегралити члан по члан, зашто чак и када се интеграли члан по члан, наведени интеграли постоје и напокон, зашто тако одређени коефицијенти заиста дају тригонометријски ред чија је сума једнака датој функцији. Дакле, много је примедби, а Фурије је покушао да оправда постојање интеграла о којима је реч. Наиме, он је објаснио да је функција $f(x)\sin x$ која се добија множењем произвољне функције функцијом синус сличног понашања као и синусна функција, она само представља синус који је 'увећан' за одговарајући фактор (као да имамо осцилацију тако да величина амплитуде варира у свакој тачки) и да онда интеграл јесте задат површином. Но, није дао објашњење зашто та површина постоји.

Дакле, модерни концепт непрекидне функције се сигурно не може наћи код Фуријеа и заправо се први пут појављује код Кошија. У свом *Курсу анализе*, он уводи појам непрекидности на следећи начин. функција f, која је дефинисана и ограничена на одсечку $[a,b]$ је непрекидна унутар тих граница уколико за x из тог одсечка „нумеричка вредност разлике $f(x+\alpha)-f(x)$ бесконачно опада како то чини α". Дакле, Коши дефинише не појам непрекидности у тачки, него непрекидности на одсечку. Заправо се појам непрекидности и појам равномерне непрекидности код њега не разликују. Године 1823, Коши дефинише одређени интеграл непрекидне функције помоћу интегралних сума. Он наиме разматра поделу одсечка $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ и суму $S=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_i)$. Уз коришћење равномерне непрекидности функције f (као што је горе напоменуто), он показује да су за поделе чија је норма довољно мала (норма поделе је наравно максимална дужина интервала поделе) и одговарајуће суме произвољно близу и закључује да постоји јединствени лимес и тај лимес је заправо одређени интеграл. Он у даљем, за непрекидну функцију f, разматра и функцију $F(x)=\int_0^x f$ и количник $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ и показује да је F једна примитивна функција за f, тј. $F'=f$, као и да се свака друга примитивна функција за f од F разликује за константу.

Као што видимо, резултати које је Коши добио су сасвим савремени и у модерном духу. Но, и поред тога, Коши ипак није разматрао опште функције, тј. за Кошија функција ипак није била произвољно придруживање, но се и код њега у основи крила концепција да функција мора бити задата аналитичким изразом. То се најбоље може видети у чињеници да је Коши у доказима који се тичу конвергенције Фуријеових редова, у функцији $f(x)$ реалну променљиву x замењивао комплексном променљивом $z=x+iy$, што заиста нема много смисла, сем уколико се подразумева да је f ипак задата неким аналитичким записом.

И поред дефиниције појма непрекидности, Коши није у пуној мери разматрао могућности постојања произвољних прекидних функција. „Најнеправилније" функције у том смислу које је он разматрао су заправо биле функције облика (наравно у модерној нотацији)

$$\chi_{I_1}g_1+\cdots+\chi_{I_n}g_n,$$

где су са χ_{I_j} означене карактеристичне функције одсечака I_j, а g_j су непрекидне функције у његовом смислу. Дакле, прекидне функције које је Коши разматрао су биле искључиво оне које су имале највише коначно много тачака прекида. Први математичар који је озбиљно разматрао функције са бесконачно много тачака прекида био је Дирихле (Јохан Петер Густав Лежен Дирихле, 1805–1859, немачки математичар).

Дирихле је лично познавао Фуријеа, пошто је од 1822. до 1825. године боравио у Паризу. Он је 1829. године дао први строг доказ о

Слика 31: Лежен Дирихле

конвергенцији Фуријевог реда дате функције f (наравно под одређеним условима). Наиме, он је разматрао парцијалну суму Фуријеовог реда $S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ и приказао је ту суму у облику

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}dt,$$

коју су сигурно видели сви студенти на курсу анализе у којем се изучавају Фуријеови редови. Саму формулу наравно није тешко извести (присетимо се дефиниције коефицијената Фуријевог реда — одатле се добија интеграл). Дирихле је претпоставио да функција има или највећу или најмању вредност и да није непрекидна у највише коначно много тачака. Заправо тај услов му је требао да би се доказала егзистенција интеграла помоћу којих се одређују Фуријеови коефицијенти. Доказао је да парцијална сума конвергира ка $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ за $x \in (-\pi,\pi)$, а ка $\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$ за $x = \pm\pi$. У доказу је ипак користио и претпоставку да је функција f монотона у довољно малом интервалу сваке тачке $x \in [-\pi,\pi]$.

Сматрао је да се случајеви када функција има бесконачно много екстремних вредности, или бесконачно много тачака прекида, могу свести на случај који је разматрао. Заправо је сматрао да је једини услов да функција има интеграл. Као довољан услов за постојање интеграла, он је навео (користимо модерну терминологију) да функција мора бити таква да је скуп D, тачака прекида те функције, нигде густ (подсетимо читаоца да је нигде густ скуп онај скуп чије затворење не садржи ниједан интервал). Дирихле то тврђење није доказао и навео је да ће доказ бити презентиран у неком наредном раду, али... Тај доказ никада није објавио.

Године 1864, у својој докторској дисертацији, Липшиц (Рудолф Ото Сигисмунд Липшиц,1832–1903, немачки математичар) је покушао да

Слика 32: Рудолф Липшиц

прошири Дирихлеове резултате о конвергенцији Фуријеових редова. Интересантно је да је упркос чињеници да је његова теза рађена чак 10 година после Риманових основних резултата о којима ћемо ускоро говорити, ти резултати нису утицали на Липшицов рад и по свему судећи, он их и није био свестан. Као што смо већ написали, многи Риманови главни резултати су постали опште познати тек после његове смрти. Липшиц је пажљиво анализирао Дирихлеов доказ и разматрао је могућности под којима Дирихлеов доказ 'не би прошао' за дату функцију. Установио је да проблем настаје у случају ограничене и део-по-део монотоне функције (као што смо већ навели, те претпоставке јесу стајале у основи Дирихлеовог доказа), која има бесконачно много тачака прекида између $-\pi$ и π. Заправо, закључио је да би Дирихлеов доказ и прошао под условом да та функција има интеграл (дакле уколико се појам интеграла може проширити и на ту класу функција). Закључио је да уколико функција задовољава услов који је Дирихле навео (да је скуп тачака прекида D нигде густ), то може бити изведено. Грешка коју је направио била је у томе што је сматрао да се тада може добити да је скуп D', тачака нагомилавања скупа D, коначан. Проблем је заправо био и у томе што у то време није било занимљивих, другим речима нетривијалних, примера скупова који су нигде густи и онда није било неочекивано да се дође то таквог закључка.

Но, Липшиц је ипак у својој тези дошао и до значајних резултата. Наиме, он се потрудио да замени Дирихлеов услов о монотоности неким другим условом и успео је да га замени другом претпоставком из које је успео да докаже Дирихлеов резултат. Услов који је дао данас је добро познат свим математичарима као Липшицов услов: $|f(x+h)-f(x)| \leqslant C|h|^{\alpha}$ за позитивне бројеве C и α.

Пре него што најзад пређемо на Риманов допринос у овој области, а који је био и основа за почетак Канторовог истраживања, а како ћемо видети и почетак озбиљног разматрања бесконачних скупова, наведимо ипак две значајне последице Дирихлеовог рада у овој области. Са његовим радом је први пут почела да се разматра разлика између појма непрекидних и појма интеграбилних функција. Такође је Дирихле био први значајни математичар који је заиста разматрао општи појам функције реалне променљиве, као придруживање $x \mapsto f(x)$ независно од цртежа и формула. Уосталом добро нам је позната Дирихлеова функција која је на један начин задата на рационалним, а на други начин на ирационалним бројевима и коју је свакако немогуће нацртати, а и задати формулом на начин како је то рађено до тада (поделом датог одсечка на мање одсечке и задавањем формулама на тим деловима). Дирихле је увео ту функцију као пример функције за коју појам интеграла нема смисла. Тек је са појавом Лебеговог (Анри Леон Лебег, 1875–1941, француски математичар) појма интеграла показано да то није тако, али то није већ није део наше приче.

Значајан помак у разумевању појма интеграла и у питањима конвергенције Фуријеових редова дао је Риман. Он је имао прилику да у Берлину прати Дирихлеова предавања из теорије бројева, интеграла, као и парцијалних диференцијалних једначина. Веома је ценио Дирихлеа и сматрао га је, уз Гауса, за највећег живог математичара.

Интересантно је да је Риман имао различит приступ комплексним и реалним функцијама. Наиме, у случају функција $f(z)$ комплексне променљиве, он је захтевао обавезно постојање извода $f'(z)$ док је у случају функција реалне променљиве допуштао, по угледу на Дирихлеа, произвољно придруживање. Но, треба имати у виду да је Риман као и Дирихле и Гаус сматрао да се свака реална функција на одсечку $[-\pi,\pi]$ може представити Фуријеовим редом. Заправо је Ди Буа-Рејмон (Паул Давид Густав ди Буа-Рејмон, 1831–1889, немачки математичар) био први математичар који је дао пример да то у општем случају није тачно.

У проблему представљања функција тригонометријским редовима, Риман је најпре истакао да је значајно установити под којим условима интеграл постоји. Као и Коши, он је разматрао интегралне суме и поставио је питање под којим условима те суме имају граничну вредност. Коши јесте показао да је то тачно за (равномерно) непрекидне функције, но Римана су занимали општи услови. Он је истакао да је то тачно ако и само ако сума $\sum_{i=1}^{n} D_i(x_i - x_{i-1})$ тежи нули када параметар поделе (максимална дужина интервала у подели) тежи нули, где је са D_i означена осцилација функције f на одсечку $[x_{i-1}, x_i]$. Осим овог услова разматрао је и следеће. Уколико је σ неки позитиван број, са

$s(P,\sigma)$ означимо збир дужина интервала на којима је осцилација већа од σ. Природно се поставља питање да ли можда $s(P,\sigma)$ тежи нули када параметар поделе и σ теже нули. Риман је показао да је тај услов еквивалентан претходно наведеном. То су дакле били услови које је он добио као потребне и довољне услове за постојање граничне вредности интегралних сума, тј. за постојање интеграла.

Риман је наравно истакао да такве услове испуњавају и поједине функције које имају бесконачно много тачака прекида на коначном одсечку и дао је следећи пример. Са (x) означимо функцију која реалном броју x придружује растојање до најближег целог броја, ако такав постоји и придружује 0 уколико је x полуцео број (тј. број облика $n/2$, где је n непаран број), пошто у том случају не постоји јединствени цео број који је најближи броју x. Јасно је да је функција (x) прекидна у свим полуцелим тачкама и непрекидна у осталим тачкама. Риман затим разматра ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$. Тај ред задаје функцију која је прекидна у свим тачкама облика $\frac{m}{2n}$, где су m и $2n$ узајамно прости. Дакле, функција је прекидна у свуда густом скупу тачака. И поред тога, како је у тачкама $x=\frac{m}{2n}$, $f(x+0)=f(x)+\frac{\pi^2}{16n^2}$ и $f(x-0)=f(x)-\frac{\pi^2}{16n^2}$ то је функција f интеграбилна пошто је „скок“ у свакој таквој тачки једнак $\frac{\pi^2}{8n^2}$, а очигледно да за свако $\sigma>0$ и сваки ограничени интервал реалне праве, постоји само коначно много тачака у којима је тај скок већи од σ. Стога је други наведени услов испуњен и функција је интеграбилна.

Да би установио потребне и довољне услове да би нека функција била представљена тригонометријским редом

$$\Omega(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

он је урадио следеће. Претпоставио је да низ функција $A_n(x)$ задат са: $A_0(x)=\frac{1}{2}a_0$, $A_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$, равномерно конвергира ка нули када $n\to\infty$ и формално је интегрирао тај ред члан по члан те добио функцију F:

$$F(x)=C+C'x+A_0\frac{x^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^2}.$$

Овај ред конвергира за све вредности x и представља непрекидну функцију. Риман је показао да та функција задовољава два важна услова:

$$D^2F(x)=\lim_{a,b\to 0}\frac{F(x+a+b)-F(x-a+b)-F(x+a-b)+F(x-a-b)}{4ab}=0,$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{F(x+a)-2F(x)+F(x-a)}{a^2}=0.$$

Коришћењем ових резултата, Риман је добио потребне и довољне услове за представљање дате функције тригонометријским редом у датој тачки. Важно је истаћи да коефицијенти a_n и b_n нису добијени интеграцијом, но су то произвољни низови бројева, који морају да задовољавају горенаведени услов, који се тиче равномерне конвергенције низа функција $A_n(x)$.

Дакле, Риман је проширио појам интеграла на ширу класу функција, а дао је и метод за испитивање могућности представљања функција тригонометријским редом. Као што смо већ рекли, ови Риманови резултати су објављени тек 1867. године и тек тада је шири круг математичара имао прилику да настави та истраживања.

Георг Кантор је 14. децембра 1866. године званично завршио своје студије у Берлину.

Слика 33: Георг Кантор

Он је највећи део својих студија провео управо у Берлину учећи од водећих математичара тог времена који су се тамо налазили — Кумера (Ернст Едуард Кумер, 1810–1893, немачки математичар), Кронекера (Леополд Кронекер, 1823–1891, немачки математичар) и Вајерштраса (Карл Теодор Виљем Вајерштрас,1815–1897, немачки математичар). Његов примарни интерес је у почетку био везан за теорију бројева, из те области је и његова дисертација, као и каснија хабилитација. Пошто је неко време предавао у локалној школи за девојке и положио пруски државни испит, Кантор је прихватио позицију приватдоцента на универзитету у Халеу. Посао приватдоцента је специфичан за немачки образовни систем и занимљиво је напоменути да приватдоцент нема плату од универзитета, но његов приход зависи од тога колико се студената пријави на његов курс. Звање му само омогућава да предаје на универзитету, но не гарантује приход. Но, Кантор није имао финансијских проблема и та чињеница није утицала на њега.

Слика 34: Кумер, Кронекер и Вајерштрас

Како је у раније наведеним радовима других математичара било доста речи о могућности представљања функције Фуријеовим редом, то се природно поставило питање о јединствености тог приказа. Дакле, ако функцију f прикажемо помоћу два тригонометријска реда, да ли они морају бити једнаки, тј. да ли су сви одговарајући коефицијенти једнаки. Јасно је да се то своди на следеће питање. Ако је $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$, за све $x \in [-\pi,\pi]$, да ли нужно следи да је $a_0 = a_n = b_n = 0$ за све $n \geqslant 1$?

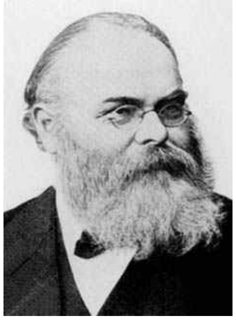
Као што смо већ раније наводили, ако би било допуштена интеграција реда члан по члан, онда би доказ био једноставан. Помножили бисмо дату једнакост са $\cos(mx)$, извршили интеграцију члан по члан на одсечку $[-\pi,\pi]$ и добили да је $a_m = 0$. На сличан начин би се могло показати да су и остали коефицијенти једнаки нули. Но, интеграција на овај начин није увек могућа. Студенти који су учили о појму униформне конвергенције редова знају да она омогућава поступак интеграције члан по члан. У то време је на значај униформне конвергенције стално указивао Вајерштрас.

Инспирисан таквим идејама, Хајне (Хајнрих Едуард Хајне, 1821–1881, немачки математичар), за кога су наши студенти најпре чули због дефиниције граничне вредности функције преко низова, а који је у ово време већ био професор у Халеу, доказао је јединственост Фуријеовог развоја функције под слабијом претпоставком од униформне конвергенције. Наиме, он је доказао јединственост под претпоставком да постоји коначно много тачака у одсечку $[-\pi,\pi]$ тако да је конвергенција униформна на сваком интервалу који не садржи ове тачке.

Слика 35: Хајне

Јасно је да овакав резултат подстиче на генерализацију и то у два смера. Најпре се поставља питање да ли се може ослабити услов за униформну конвергенцију, а потом и да ли се може искључити и више тачака од њих коначно много. На тај начин је размишљао и Кантор.

Кантор је 1870. доказао следећи резултат: ако $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ тежи нули када n тежи бесконачности за све вредности x из неког отвореног интервала, онда и низови (a_n), (b_n) конвергирају ка 0. Да би доказао јединственост приказа нула функције тригонометријским редом, Кантор је искористио Риманов метод. Наиме, он је посматрао раније наведени ред (функцију) F која се добија двоструком формалном интеграцијом датог тригонометријског реда члан по члан. Да би показао оно што је желео, било му је битно да добије да је та функција заправо линеарна.



Слика 36: Шварц

Заправо је баш то у писму од 17. фебруара питао свог колегу Шварца (Херман Амандус Шварц, 1843–1921, немачки математичар). Шварц му је написао да је то заиста тако и послао му је доказ тог тврђења. Одавде је следило да важи следећа једнакост:

$$a_0 \frac{x^2}{2} - Cx - C' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

где је наравно претпостављено да је $0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Како је функција са десне стране добијене једнакости периодична са периодом 2π, то мора бити и полином са леве стране периодичан, а то је могуће једино у случају да је тај полином константан, тј. $a_0 = C = 0$. Ово је омогућило Кантору да покаже да остатак горедобијеног реда равномерно тежи нули, те је могао даље да примени идеју о интеграцији реда члан по члан (не можемо наводити све детаље у доказу) и напокон је добио да су сви коефицијенти једнаки 0. Дакле, на тај начин је доказао јединственост приказа у облику Фуријеовог реда под претпоставком да Фуријеов ред конвергира у *свакој тачки* и да се у *свакој тачки* поклапа са вредношћу функције, али *без претпоставке о униформној конвергенцији* Фуријеовог реда.

Следећи корак који је Кантор предузео је да, пошто се већ „ослободио” претпоставке о униформној конвергенцији Фуријеовог реда, покуша да ослаби и претпоставку о конвергенцији Фуријеовог реда у свакој тачки. То је и успео следеће године. У „ноти” (тако математичари често називају кратке радове) објављеној 1871. године, он наводи поједностављење претходног доказа који му је послао Шварц, али и показује да тврђење важи под слабијом претпоставком да ред не конвергира ка вредности функције у свим тачкама из $[-\pi,\pi]$, но да постоји коначно много тачака $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, у којима се то не дешава.

Идеја доказа састоји се у томе да се најпре примети да, према ранијем, функција F је линеарна на сваком интервалу (x_i, x_{i+1}), тј. да је линеарна функција облика $k_i x + l_i$ на том интервалу, а потом да се покаже да се заправо ради о истој линеарној функцији на свим интервалима и тако се све сведе на претходно доказано. Следећи корак је наравно да се покуша са даљим слабљењем претпоставки, тј. да постоји *бесконачно много* тачака у којима ред не конвергира почетној функцији. ОВАЈ КОРАК ЗАПРАВО ПРЕДСТАВЉА ПРВИ КОРАК У ИЗГРАДЊИ ТЕОРИЈЕ БЕСКОНАЧНИХ СКУПОВА.

Дакле, претпоставимо да је скуп *изузетих* тачака, тј. оних тачака у којима не ред не конвергира ка 0, бесконачан. Према Болцано-Вајерштрасовом ставу тај скуп има тачку нагомилавања. Размотримо најпре случај да има само једну тачку нагомилавања x' и концентришимо се на конвергенцију тригонометријског реда на ограниченом интервалу (a, b) (свеједно је наравно на ком). Посматрајмо интервале (a, x') и (x', b). Ако је (s, t) било који прави подинтервал од (a, x'), онда у њему има само коначно много изузетих тачака (иначе би у њему постојала тачка нагомилавања скупа свих изузетих тачака, а по претпоставци је то само тачка x'). Но, случај коначно много изузетих тачака је већ обрађен и онда знамо да је Риманова функција F линеарна на (s, t). Но, то је непрекидна функција која је линеарна на сваком правом подинтервалу од (a, x'), па проширивањем тог произвољног подинтервала до целог (a, x') добијамо да је F заправо линеарна на (a, x'). Слично се добија да је F линеарна и на (x', b), а потом, као и раније, да је то заправо линеарна функција на (a, b).

Аналогни доказ пролази и у случају да имамо коначно много тачака нагомилавања скупа изузетих тачака (на коначно много подинтервала је F свуда линеарна, а онда се као и раније покаже да је то једна те иста линеарна функција). Шта се дешава у случају у коме скуп изузетих тачака има бесконачно много тачака нагомилавања? Поступа се као у претходном. Претпостави се најпре да тај скуп тачака нагомилавања има само тачно једну тачку нагомилавања x''. Разматрањем интервала (a, x'') и (x'', b), односно њихових правих подинтервала (s, t) добија се да у њима има само коначно много тачака нагомилавања скупа свих изузетих тачака. Но, то је већ урађено и на таквим подинтервалима је F линеарна. Даље се поступа као и у претходном.

Можемо да закључимо да постоји јасна идеја како се резултат генералише и то је било јасно и Кантору. Но, једно је идеја, а друго је реализација. Да би успешно доказао то што се наслућује као резултат, он је морао да се пре свега мало позабави прецизирањем основних резултата који се тичу теорије реалних бројева. Ма колико то било изненађујуће читаоцу, у то време та теорија није била још добро заснована.

Стога Кантор у свом раду из 1872. године почиње баш са тим. Он полази од скупа A, свих рационалних бројева, као датих и циљ му је да заснује теорију ирационалних бројева. У ту сврху посматра фундаменталне низове рационалних бројева (студентима је сигурно познатији термин Кошијеви низови, при чему треба имати на уму да се претпоставља да је ε, које се појављује у дефиницији Кошијевог низа обавезно рационалан број) и каже да је сваком таквом низу придружен један симбол. Потом дефинише уређење на тим симболима, као и аритметичке операције (рационалне бројеве види као константне низове) и пошто све то уведе у даљем те новодобијене објекте назива бројевима. Тако је добио скуп бројева B. Следећи корак савременом читаоцу делује збуњујуће. Наиме, Кантор сада посматра фундаменталне низове бројева из B и формира нови домен C (sic!). Он је потпуно свестан да тиме не добија ништа ново, као што и наши читаоци знају, али истиче концептуалну разлику B и C (подсетимо се да је ово ипак рад о јединствености тригонометријског реда и да Кантор има на уму претходно наведене идеје). После λ таквих конструкција долази до домена L. Дакле, у L су фундаментални низови фундаменталних низова ... Наравно да сваком елементу из L одговара број из B, али као што је већ наведено, Кантору је та дистинкција важна.

Следећи корак је успостављање бијекције између тако добијених реалних бројева и геометријског (једнодимензионог) континуума, тј. праве. Јасно је да избором координатног почетка и основне јединице мерења на датој правој имамо у потпуности одређене *рационалне тачке*, тј. тачке са рационалним координатама. Ако се узме нека друга тачка на правој, онда се њој може „прићи” фундаменталним низом рационалних тачака $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Кантор каже да је растојање b те тачке од координатног почетка онај број у B који одговара том фундаменталном низу. Јасно је да Кантор не може да докаже да обратно, сваком ирационалном броју одговара јединствена тачка на правој и стога он то поставља као аксиому, тј. сваком броју из B јединствено одговара тачка на правој чија је координата управо тај број. Коришћењем ове аксиоме, Кантор успоставља обострано једнозначну кореспонденцију између (аритметички) добијених скупова бројева и геометријских тачака на правој.

Долазимо до фундаменталног појма *скупа тачака прве врсте* (Кантор истиче да кад год користи термин „тачка”, он заправо има у виду број који одговара тачки на правој). Најпре Кантор дефинише појам изводног скупа: ако је дат неки скуп тачака P, онда је нека тачка тачка нагомилавања тог скупа уколико се у сваком интервалу око ње налази бесконачно много тачака тог скупа. Наравно, тачка нагомилавања може, а не мора припадати почетном скупу P. Скуп свих тачка нагомилавања Кантор је назвао „први изводни скуп скупа тачака P” и означио са P'. Овде је важно истаћи да је скуп P' на тачно одређен начин придружен скупу P. Наиме, за сваку тачку је јасно да она или јесте тачка нагомилавања скупа P, или то није. Дакле, скупу P

придружујемо скуп P'. Такво 'баратање' са скуповима није било уобичајено у то време и представљало је новост и омогућавало дубљи продор у проблематику, која се истраживала.

Ако је скуп P бесконачан скуп у неком ограниченом интервалу, онда он има тачке нагомилавања, тј. скуп P' није празан (заправо се у то време празан скуп помало избегавао, па се говорило да P *има* изводни скуп). Уколико је скуп P скуп свих рационалних тачака, онда се наравно добија скуп свих тачака праве. Но, као што се из B конструише $C,\dots,L$, тако се формирају и виши изведени скупови $P'',\dots,P^{\lambda}$. Наравно P'' формирамо у случају бесконачности скупа P' на коначном интервалу итд. Скуп P је *скуп тачака прве врсте* уколико је $P^{(v)}$ коначан скуп за неки природан број v.

Када је ове појмове јасно дефинисао и прецизирао, Кантору није било тешко да докаже генерализацију теореме о јединствености тригонометријског реда. Наиме, доказао је да је тригонометријски ред јединствено одређен под условом да је скуп изузетих тачака скуп тачака прве врсте. Доказ се заснива на раније наведеним својствима Риманове функције F. Ево како се он изводи. Како је почетни скуп P такав да је за неки природан број v одговарајући изводни скуп коначан, то у нашем интервалу (a,b) има само коначно много тачака из $P^{(v)}$. Те тачке деле интервал на коначно много подинтервала. Ако посматрамо било који интервал (a_1,b_1), који је прави подинтервал од неког од њих, онда у њему има само коначно много тачака из $P^{(v-1)}$. У супротном, у том подинтервалу се налази тачка из $P^{(v)}$, а то није могуће, јер су те тачке ван тог скупа као деоне тачке почетног интервала (a,b). Поступак понављамо са свим таквим подинтервалима у којима има само коначно много тачака из $P^{(v-1)}$. После коначно много корака добићемо коначан број подпод...интервала у којима је само коначно много тачака из P. На њима је Риманова функција линеарна и онда постепеним повећавањем тих интервала и њиховим „лепљењем", као што је већ наведено, добијамо да је та функција линеарна на целом почетном интервалу. Тиме је доказ сведен на основни случај.

У доказу теореме о јединствености тригонометријског реда, Кантор се концентрисао на скупове тачака прве врсте, дакле на скупове код којих је $P^{(n)}$ празан скуп за неки природан број n. Но, већ је у том раду имплицитно споменуто да се поступак налажења изводних скупова може продужити и *иза коначног* подручја. Кантор пише: „концепт броја, у смислу у коме је уведен овде, носи у себи клицу неопходне и апсолутно бесконачне екстензије". Скупови тачака друге врсте, тј. они код којих $P^{(n)}$ није празан скуп ни за један природан број n експилицитно се помињу тек у Канторовим каснијим радовима. Но, он у напомени уз свој рад из 1880. наводи да је он низ скупова

$$P^{(\infty)}, P^{(n\infty^{\infty})}, P^{(\infty^{\infty+1})}, P^{(\infty^{\infty+n})}, P^{(\infty)n^{\infty}}, P^{(\infty^{\infty^{n}})}, P^{(\infty^{\infty^{\infty}})},$$

где је са ∞ означен најмањи бесконачни број већи од свих природних бројева, открио још пре десет година. Скуп $P^{(\infty)}$ се природно дефинише као пресек свих $P^{(n)}$ за коначне n, а онда се поставља питање постојања његовог изводног скупа (уколико он има бесконачно много тачака) $(P^{(\infty)})'$ који Кантор означава са $P^{(\infty+1)}$. Сигурно да пажљив читалац, упознат са појмом ординала, не може пропустити да уочи сличност са раније виђеним $(\omega' = \omega + 1)$, но концепт трансфинитних бројева (оних које долазе „иза коначних”) није одмах формулисан и било је потребно време да ти појмови буду усвојени. Но, јасно је да је клица садржана у овим почетним радовима.

Видљиво је да код генерализације теореме о јединствености тригонометријског реда, сам тригонометријски ред има секундарну улогу. Главна је била манипулација реалним бројевима и потпуно је природно да се Кантор у свом даљем истраживању концентрише управо на својства скупа реалних бројева, тј. на реалну праву. Но, пре него што изложимо Канторове почетне резултате, а с њима у вези и улогу, коју је Дедекинд имао у тим првим испитивањима, као и о утицају Дедекинда на увођење скупа као централног појма у математици, одговорићемо на непостављено питање пажљивог читаоца.

Наиме, ми причамо о изведеним скуповима прве и друге врсте, али да ли постоје такви примери? Не само то, него да ли су такви примери били познати у време о којем говоримо. Одговор је потврдан.

Позабавимо се најпре питањем скупова прве врсте. Ханкел (Херман Ханкел, 1839–1873, немачки математичар) је навео један такав пример. То је скуп свих бројева облика $\frac{1}{2^n}$. Јасно је да тај скуп има једну једину тачку нагомилавања 0, те он јесте скуп прве врсте. Наравно, ово је веома једноставан пример, али то је уз пример скупа свих рационалних бројева (који је наравно скуп друге врсте) био у почетку једини познат пример.


Слика 37: Ханкел

Знатно боље примере дао је Хенри Смит (Хенри Џон Стивен Смит, 1826–1883, британски математичар). Он се првенствено бавио теоријом бројева, али је боравио и у Француској те је био упознат са проблемима којима се баве математичари на континенту (као што би рекли прави Британци).

Нажалост његови резултати нису били познати (на континенту), а да јесу сигурно би то убрзало разрешавање неких проблематичних питања, која се тичу својстава скупова реалних бројева. Смит је посматрао генерализацију Хенкеловог примера. Наиме, уочимо скуп

$$P_2 = \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} : n_1, n_2 \geqslant 1 \right\}.$$

Јасно је да је $P_2' = \{0\} \cup \{1/n_1 : n_1 \geqslant 1\}$ и $P_2'' = \{0\}$. Сада се види шта треба радити.

Слика 38: Смит

Скуп

$$P_k = \left\{ \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k} : n_1, \ldots, n_k \geqslant 1 \right\}$$

задовољава услов $P_k^{(k)} = \{0\}$. Дакле, тако добијамо скупове прве врсте (типа n, тј. такве да је n-ти изводни скуп коначан). Како добити пример скупа друге врсте?

Први такав пример дао је Ди Боа Рејмон. Нека је p било који реалан број. Посматрамо два низа тачака (a_n) и (b_n), за које је $a_n < b_n$, а осим тога оба низа конвергирају ка p. На сваком интервалу (a_n, b_n) изаберимо скуп P_n типа n (можемо да узмемо транслацију горенаведеног скупа узимајући да су $n_i \geqslant s$ за неко довољно велико s). Нека је $P = \bigcup_{n \geqslant 1} P_n$. Није тешко уверити се да је $P^{(\infty)} = \bigcap_{n \geqslant 1} P^{(n)} = \{p\}$.

Слика 39: Ди Боа Рејмон

Вратимо се сада главном току нашег излагања. Оно што следи је можда и најинтересантнији део ове приче. Наиме, појаснићемо како је Кантор дошао до доказа непребројивости реалних бројева. Овај доказ нам сада не представља проблем, али не смемо заборавити какво је стање са основама анализе тада било (читалац се у то, надамо се, могао до сада уверити). И не, први доказ није био базиран на дијагоналном поступку (дијагонални поступак је тек доста касније откривен). Ево како се то све десило (след догађаја су историчари реконструисали на основу писама и скица писама, које су размењивали Кантор и Дедекинд).

Године 1873, прецизније, 29. новембра те године, Кантор је упутио следеће питање Дедекинду. Да ли постоји узајамно једнозначна кореспонденција (или, како би ми то краће данас рекли, бијекција) између скупа свих позитивних целих бројева и свих позитивних нумеричких величина (то јест позитивних реалних бројева)? Кантор наводи да би неко могао да укаже да је то немогуће пошто су цели бројеви дискретни, а реални нису, али он истиче да се том напоменом ништа не добија и мада он мисли да таква кореспонденција не може постојати, он ипак нема доказ те чињенице.

Дедекинд је одмах одговорио на то писмо и навео да ни он не може да докаже да таква кореспонденција не постоји, али да сматра да тај проблем није од посебног интереса. Но, он је успео да докаже да постоји бијекција између скупа свих алгебарских бројева и скупа позитивних целих бројева и тај доказ је приложио. Овде треба напоменути да су Дедекиндова писма изгубљена, али да су скице тих писама сачуване, као и то да је Дедекинд био изузетно методичан и организован научник, који је водио веома уредне записе (чак је записивао и дневне температуре!).

Слика 40: Дедекинд

Кантор је у писму од 2. децембра потврдио да је Дедекинд заиста послао доказ тог резултата. Ево како је Дедекинд доказао ту чињеницу. Сваки алгебарски број је нула неког нерастављивог полинома са рационалним коефицијентима. Но, уз помоћ множења одговарајућом константом, можемо претпоставити да се ради о полиному са целобројним коефицијентима код кога је најстарији коефицијент позитиван. Дакле, ако је ω неки алгебарски број, онда постоји полином $p(x)$ (користимо ознаке које су ови математичари користили) такав да је

$$p(\omega) = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Број $N = n-1+|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|$ називамо *висином* полинома $p(x)$ (да, могли смо да не пишемо апсолутну вредност уз a_0, пошто смо претпоставили да је то позитиван број). Можемо да приметимо да за сваки позитиван број N постоји највише коначно много полинома са целобројним коефицијентима, који имају висину баш N (обратите пажњу на значај чињенице да се степен полинома n појављује у дефиницији висине полинома). Но, сваки од тих полинома има највише коначно много нула. Дакле, за фиксирано N, постоји коначно много нула полинома са целобројним коефицијентима који имају висину n. Те нуле можемо да уредимо на произвољан начин и тако добијамо да има пребројиво много алгебарских бројева (најпре узимамо бројеве висине 1, па висине 2, итд.).

Кантор је претходно разматрао постојање бијекције између скупа позитивних целих бројева и скупа ν-торки таквих бројева. Идеја му је била да свакој ν-торци $(n_1,\ldots,n_\nu)$ придружи број $n_1^2+\cdots+n_\nu^2=R$. Идеја је онда слична Дедекиндовој – за сваки R, уредити све n-торке чији је збир квадрата R на произвољан начин и тако показати да n-торки има колико и позитивних целих бројева. Кантору се чинило да је то практично исти доказ као и Дедекиднов, но то није баш тако. Наиме, ако би се у случају полинома поступило по овој идеји, онда бисмо имали проблема са чињеницом да се нигде не појављује степен полинома и да, наравно, неки од коефицијената полинома буду једнаки нули, те бисмо добили бесконачно много полинома за које је збир квадрата коефицијената једнак фиксираном броју. Дакле, без додатка степена, овакав доказ не би могао да „прође”. Но, када је видео Дедекиндов доказ, Кантор је сматрао да он у суштини има сличан доказ и није имао проблема да Дедекиндов доказ у потпуности касније наведе у раду без спомињања да је доказ заправо Дедекиндов (иначе Кантор до тада нигде није писао о томе да има доказ пребројивости алгебарских бројева, нити да је тај проблем уопште разматрао). Но, више о томе касније.

Кантор се у писму од 7. децембра поново враћа питању пребројивости реалних бројева и наводи да је успео да докаже непребројивост. Ево како је изгледао тај први доказ.

Претпоставимо да се сви реални бројеви могу поређати у низ

$$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\ldots.$$

Пођимо од ω_1 и потражимо први следећи члан низа ω_α, који је већи од ω_1. Нека је затим ω_β први следећи члан који је већи од ω_α ($\beta>\alpha$) итд. На тај начин добијамо растући подниз $\omega_1^1,\omega_1^2,\ldots,\omega_1^n\ldots$ (после преозначавања) почетног низа. Понављањем поступка добијамо нови подниз итд. Дакле, на овај начин Кантор добија бесконачну матрицу

$$\begin{array}{ll}
(1) & \omega_1^1,\omega_1^2,\ldots,\omega_1^n\ldots \\
(2) & \omega_2^1,\omega_2^2,\ldots,\omega_2^n\ldots \\
\vdots & \vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots \\
(k) & \omega_k^1,\omega_k^2,\ldots,\omega_k^n\ldots \\
\vdots & \vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots
\end{array}$$

Свака врста ове бесконачне матрице је растући низ. Сада посматрамо одсечак $[p,q]$ у коме нема елемената из прве врсте (нпр. било који одсечак садржан у интервалу (ω_1^1,ω_1^2)). Уколико у овом одсечку нема елемената из преосталих врста, доказ је готов (било који елемент из тог одсечка је тражени реални број који није набројен у почетном низу). У супротном, нека је k најмањи број такав да у том одсечку има чланова низа из k-те врсте. Тада тај одсечак сигурно садржи пододсечак $[p^{(1)}, q^{(1)}]$ у коме нема елемената k-те врсте (k-та врста представља растући низ и довољно је узети пододсечак садржан у интервалу који дефинишу узастопни чланови низа који су у $[p, q]$, а ако је само један члан k-те врсте у $[p, q]$ то је још лакше). Поступак настављамо и добијамо опадајући низ одсечака $[p^{(v)}, q^{(v)}]$, који, као што добро знамо, мора да има непразан пресек. Ма који елемент тог пресека је тражени реалан број пошто се он не може налазити у почетном набрајању – тада би онда био у некој врсти l, а пододсечак $[p^{(v)}, q^{(v)}]$ за довољно велико v не садржи елементе врсте l.

Као што видимо, доказ није баш једноставан и Дедекинд је у писму од 8. децембра навео поједностављење овог доказа, а такође је то одмах урадио и Кантор. Доказ који је објављен доказује да се за сваки низ реалних бројева и сваки интервал (α, β) може наћи елемент η из тог интервала, који није у том низу.

Нека је дат низ $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Означимо са α', β' прва два члана тог низа који се налазе у интервалу (α, β) и за које је $\alpha' < \beta'$. Са α'', β'' означавамо прва два члана наведеног низа у интервалу (α', β') за које је $\alpha'' < \beta''$. Настављамо овај процес и добијамо низ уметнутих одсечака $[\alpha^n, \beta^n]$. Сада се разликују два случаја. Може се десити да је овај низ коначан и уколико је $[\alpha^n, \beta^n]$ последњи одсечак у том низу онда било који елемент у (α^n, β^n) није у датом низу (сем можда једног—може се десити да је у том интервалу један члан низа, али не и два, па зато не можемо наставити процес). Уколико смо добили бесконачан низ уметнутих одсечака, онда заправо имамо два низа бројева — растући и одозго ограничени низ (α^n) и опадајући одоздо ограничени низ (β^n). Дедекинд је у својој верзији доказа навео да сада на основу принципа непрекидности (Дедекинд је сматрао да чињеница да сваки растући одозго ограничени низ има граничну вредност, представља суштину појма непрекидности за реалне бројеве) добијамо да први низ има граничну вредност α^∞, а други β^∞. Кантор у публикованој верзији избацује спомињање принципа непрекидности и само наводи да ове граничне вредности постоје (касније ћемо продискутовати зашто је то урадио). Сада постоје два случаја: у првом је $\alpha^\infty = \beta^\infty$ и тада за η узимамо ту граничну вредност, а у другом је $\alpha^\infty < \beta^\infty$ и за η можемо узети ма коју вредност из интервала $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$. Овим је доказ завршен.

Дакле, видели смо како је Кантор дошао до важног резултата (и какву је улогу ту имао Дедекинд) у коме се показује да не постоји бијекција између скупа природних бројева и скупа реалних бројева, тј. да постоје два бесконачна скупа између којих се не може успоставити бијекција. Тај резултат заправо представља почетак развоја теорије бесконачних скупова. Но, погледајмо како је тај резултат Кантор представио. Видећемо да је он то урадио на помало необичан начин.

Кантор је 25. децембра 1873. године писао Дедекинду да је написао и послао у *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* рад под насловом *О једном својству колекције свих реалних алгебарских бројева.* Написао је да у почетку није имао намеру да објављује ове резултате, али је у Берлину разговарао са Вајерштрасом и он му је рекао да треба да објави резултате док год су у вези са алгебарским бројевима. Кантор је Дедекинду написао да је искористио његове коментаре и начин изражавања. Дедекинд му је сугерисао да избаци реч „реалних” из наслова, пошто резултат о пребројивости важи за све алгебарске бројеве, но Кантор је ипак задржао првобитни наслов. Интересантно је да је Вајерштрас сматрао да је резултат о пребројивости алгебарских бројева посебно занимљив и да је то заправо главни резултат тог рада (те је стога Кантор рад тако и назвао), а не чињеница да не постоји бијекција између реалних и природних (самим тим и алгебарских бројева). Наиме, Вајерштрас је резултат о пребројивости алгебарских бројева касније искористио да да пример непрекидне функције која има извод у свакој трансцендентној тачки, а ни у једној алгебарској. Осим тога, у то време, Вајерштрас је имао изузетно негативан став по питању поређења бесконачних скупова. Он је у лето 1874. држао курс у коме је навео да две бесконачно велике величине нису упоредиве и да примена појма једнакости на бесконачне величине не даје нове резултате (sic!). Касније се његов став променио, али је у то време био управо такав.

Кантор је рад организовао на следећи начин. У првом делу рада наведен је доказ (како га је дао Дедекинд) пребројивости скупа алгебарских бројева, а у другом је показано да не постоји бијекција између скупа реалних и природних бројева и затим су ови резултати примењени на нови доказ Лиувиловог резултата о постојању трансцендентних бројева. Дедекиндов допринос нигде није наведен.

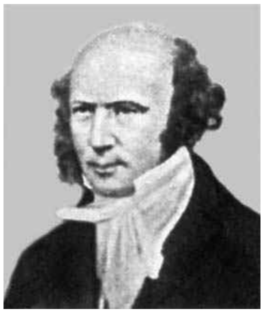
Видели смо да је под утицајем Вајерштраса истакнута пребројивост алгебарских бројева, док је напомена о непостојању бијекције између скупа природних бројева и скупа реалних бројева само укратко наведена и то при исправљању рада у припреми за штампу (навели смо негативан Вајерштрасов став по питању поређења бесконачних скупова). Разлог за искључивање спомињања Дедекинда, па и неистицање принципа непрекидности у доказу, састоји се у следећем. Кантор је био ученик веома утицајне берлинске школе и знао је да водећи професори у Берлину Кумер и Кронекер имају помало негативан став према Дедекинду због његове алгебарске теорије бројева. Наиме, Кронекер је тврдио да је исту ту теорију он имао још 1858. године, али да је није објавио и они никада нису признали Дедекиндов приоритет у тој области. Кантор је касније, развијајући даље своју теорију бесконачних скупова дошао у сукоб са Кронекером, но у времену о коме говоримо, он је био у добрим односима са берлинском школом и рачунао је да су му они потребни за даљу каријеру (но, испоставило се да он никада прешао из Халеа на неко престижније место). Дедекинд је изразио своје чуђење што је Кантор навео његове доказе без спомињања извора и од тада су њихови односи помало захладнели и на писма која му је Кантор упућивао често није одговарао.

Због ограничености (по обиму) овог прегледа, нећемо се бавити Канторовим даљим радом. Тај рад је изузетно значајан и било би потребно доста простора да би се описао.

Ради комплетније слике почетака теорије скупова и то посебно увођења терминологије скупова и функција у све математичке области посветићемо се мало Дедекиндовом доприносу.

Дедекинд је своју хабилитацију одбранио 1854, само неколико дана после Римана, такође у Гетингену. Наслов теме био је: „О увођењу нових функција у математику“. У оквиру те теме он је говорио о тригонометријским функцијама, интеграцији и елементарној аритметици. Дедекинд је тиме започео један програм, који је заправо следио током целе своје каријере. Наиме, идеја грађења бројева почев од природних бројева је нешто о чему је он писао у више објављених и необјављених радова. На самом почетку је централну улогу дао операцијама (дакле функцијама), тј. идеја конструкције све шире класе бројева била је условљена операцијама које вршимо у постојећој класи, прецизније могућности, односно немогућности извођења инверзних операција. У својим каснијим радовима, саме скупове је поставио у центар интересовања.

Године 1857, Дедекинд је прочитао Хамилтоново (Сер Вилијам Роуен Хамилтон, 1805–1865, британски математичар) дело *Лекције о кватернионима.* Као што се комплексни бројеви добијају као уређени парови реалних бројева са одговарајуће дефинисаним операцијама, на сличан начин се кватерниони добијају из комплексних. Множење кватерниона није комутативно, али сва остала својства су задржана. Дедекинд је очигледно закључио да су те конструкције (комплексних бројева и кватерниона) добро изведене и никада се у својим радовима није бавио питањем конструкције нпр. комплексних бројева. Но, бавио се конструкцијом целих и рационалних бројева, као и реалних бројева. Целе и рационалне бројеве је конструисао попут конструкције коју ми данас користимо — помоћу уређених парова са одговарајућим идентификацијама, а што се тиче конструкције реалних бро-



Слика 41: Хамилтон

јева, присетимо се Дедекиндовог реза из Анализе 1. Нас ће овде највише занимати Дедекиндов поглед на природне бројеве.

Главно Дедекиндово дело, које се бави заснивањем математике је *Was sind und was sollen die Zahlen*, објављено 1888. Најчешћи превод овог наслова је *Шта су и чему служе бројеви*, али, имајући у виду садржај дела, превод могао да буде и *Шта су и чему би* <u>*требало*</u> *да служе бројеви*. Ми ћемо се позабавити овим делом, као и рукописима, који су му претходили.

Као што смо већ навели, Дедекинд је био темељан математичар, који није журио са објављивањем радова пре него што би они достигли онај ниво свеобухватности и целовитости који је он желео. Дакле, он је следио Гаусову максиму: *мало, али зрело*. Било је случајева када се то лоше одразило на његову каријеру (недовољан број објављених радова), али он се тог принципа држао целог живота.

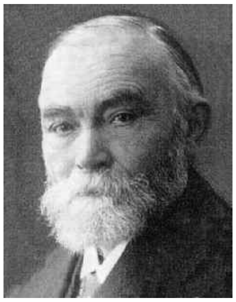
У рукописима насталим између 1854. и 1872. године можемо наћи да је Дедекинд природне бројеве градио почевши од броја 1 и формирајући *следбенике* бројева додавањем јединице. Сабирање је дефинисао формулом $a+(b+1)=(a+b)+1$. Занимљиво је да је Дедекинд многе идеје на основу којих су базирани резултати из тог главног његовог рада о заснивању бројева, наводио у писму извесном гимназијском професору Кеферштајну, а пропустио да их наведе у самом раду и тиме тај рад учинио неразумљивијим и мање схваћеним од стране професионалних математичара. Касније је операцију сабирања дефинисао апстрактније, као функцију φ, која има својства $\varphi(a,d(b))=d\varphi(a,b)$ и $\varphi(a,1)=d(a)$, где је $d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ функција која представља „додавање јединице".

Пређимо сада на само дело. На самом почетку, Дедекинд уводи основну скуповну терминологију: *систем* (скуп), *ствар* (елемент скупа), *део* (подскуп), *прави део* (прави подскуп), *комбинован систем* (унија скупова), *заједница система* (пресек скупова).

Читаоци који су упознати са Хилбертовим (Давид Хилберт 1862–1943, немачки математичар) делом *Основи геометрије*, сигурно су ову терминологију препознали пошто на почетку овог дела Хилберт наводи: „*Разматраћемо три система ствари. Ствари првог система зваћемо тачке.*" Хилберт је тада користио Дедекиндову терминологију.

Слика 42: Хилберт

Поред појма скупа навео је и појам пресликавања и то практично у смислу у коме се у модерној математици оно и уводи — пресликавање система S је *закон* по коме ствари s из S одговара ствар $\varphi(s)$, која се зове слика од s. Дефинисао је и композицију пресликавања. Дедекинд је навео да је овим дао *дефиницију* појма пресликавања, мада са логичке тачке гледишта то се не може назвати дефиницијом (јер, шта је то *закон*?), но само појашњењем.



Слика 43: Фреге

Као главне недостатке Дедекиндове презентације скупова, истакнути логичар Фреге (Фридрих Лудвиг Готлиб Фреге, 1848–1925, немачки математичар) је навео:

1) Нејасно разликовање релације припадности и подскупа.

2) Често неразликовање једночланог скупа и његовог елемента.

3) Избацивање празног скупа.

Наравно, чињеница да постоје овакви проблеми код Дедекинда, не оправдава садашње студенте математике да праве такве грешке! Подсетимо се да је Пеано (Ђузепе Пеано, 1858–1932, италијански математичар) баш у вези са оваквим примедбама увео посебну ознаку, коју и данас користимо, за припадност елемента скупу, док је Дедекинд раније имао појам празног скупа, али га је ипак из публикованог рада избацио.

Слика 44: Пеано

Велики недостатак Дедекиндовог погледа на скупове је и у прихватању постојања универзалног скупа, тј. скупа свих скупова, а знамо да се на тај начин парадокси појављују у теорији скупова, но у тренутку објављивања, то још није било видљиво.

Посветимо се за крај најзанимљивијем појму, са аспекта теорије скупова, који је Дедекинд увео у овом раду, а то је појам *ланца*. Упозоримо одмах да се не ради о појму ланца у вези парцијалног уређења.

Идеја ланца је добијена из идеје математичке индукције, тј. разматрањем доказа помоћу индукције. Ако је дато пресликавање $\varphi : S \to S$, онда подскуп K од S зовемо *ланац* уколико је $\varphi[K] \subseteq K$ (са $\varphi[S]$ означавамо слику подскупа K при пресликавању φ). Дедекинд уводи појам *ланца система* (сетимо се да је тако Дедекинд називао скуп). Наиме, ако је $A \subseteq S$ и $\varphi : S \to S$, онда је *ланац система* A по дефиницији пресек свих ланаца (дакле свих подскупова K скупа S за које је $\varphi[K] \subseteq K$), чији је A подскуп. Ознака коју Дедекинд користи да означи ланац скупа A је A_0 (а понекад користи и ознаку $\varphi_0(A)$). Видећемо ускоро како је ова идеја повезана са аксиоматиком природних бројева, као и са Кантор-Бернштајновом теоремом.

Дедекинд је имао оригиналну идеју — да заснује коначно (природне бројеве) на бесконачном. Стога му је био потребан појам бесконачног скупа. Ту дефиницију је он формулисао још 1872. године. Наиме, скуп S је бесконачан ако постоји бијекција (користимо савремену терминологију) између S и неког његовог правог подскупа. У супротном је коначан. Оригиналност ове идеје је наравно у чињеници да се овде нешто што уопште није спорно, попут природних бројева заснива на нечем што су многи математичари као што смо видели, избегавали да користе, тј. на појму стварне бесконачности.

Ево како је Дедекинд увео природне бројеве. Основни појам је појам *просто бесконачног* скупа. Скуп N је просто бесконачан уколико постоји „1–1" пресликавање $\varphi : N \to N$ (Дедекинд је „1–1" пресликавања називао *слична* или *истакнута*), тако да је N ланац једног елемента који не припада $\varphi[N]$. Овај истакнути елемент зове се базни елемент и означава са 1. Овде поново имамо проблем са Дедекиндновом терминологијом, пошто заправо N не може бити ланац неког елемента, но ланац једночланог скупа са тим елементом као јединим својим чланом, али видимо да се то лако исправља. Дакле имамо четири важна услова:

(α) $\varphi[N] \subseteq N$;
(β) $N = \{1\}_0$;
(γ) $1 \notin \varphi[N]$;
(δ) φ је „1–1".

Да ли је неко споменуо Пеанове аксиоме? Пеано је своје аксиоме објавио 1899. године и навео је да јесте консултовао овај Дедекиндов рад, но сам је пре тога дошао до њих. Но, ево их и овде код Дедекинда.

За крај излагања о Дедекиндовом доприносу теорији скупова, наведимо и горе споменуту везу ланаца и Кантор-Бернштајнове теореме.

Кантор и Дедекинд су се у септембру 1882. године срели у Харцбургу и наравно разговарали о математици. Кантор је тада информисао Дедекинда (а то се види и из писма из новембра те године) да има проблема са доказом следећег тврђења:

Ако је $M'' \subseteq M' \subseteq M$ и ако постоји бијекција између M и M'' онда постоји бијекција између M и M'.

Јасно је да је ово тврђење еквивалентно Кантор-Бернштајновој теореми.

Ево које се тврђење може наћи у наведеном Дедекиндовом раду о бројевима.

Нека је φ дато пресликавање и уведимо ознаку $K' = \varphi[K]$. Претпоставимо да је $K' \subseteq L \subseteq K$. Дакле и K и L су ланци. Дедекинд пише да се при овим условима увек може извршити следећа декомпозиција L и K. Нека је $U = K \backslash L$ и $V = K \backslash U_0$. Тада је

$$K = U_0 \cup V \text{ и } L = U'_0 \cup V.$$

Овај доказ Дедекинд оставља читаоцима (а то ћемо и ми урадити!) и даље га уопште не коментарише. Но, није тешко видети да се у случају да је φ „1–1" добија тражено Канторово тврђење (сугеришемо читаоцу да то сам уради). Подсетимо се да је Дедекинд био врло систематична особа, тако да није могуће да се он није присетио питања које му је поставио Кантор. Пре ће бити да је Дедекинд решио да се мало, да се тако изразимо, нашали са Кантором (а треба имати у виду и ранија искуства која је имао у преписци са њим) и да провери да ли ће он успети да препозна тражено тврђење. Тешко је поверовати, али Кантор не само да је чак и 1895. године сматрао да теорема још није доказана, него се и негативно изразио о овом Дедекиндовом раду, који је описао као вештачки систем од 172 тврђења, који се баве најелементарнијим и понекад најтривијалнијим својствима бројева и који уместо да појасне, само још више замагљују природу бројева! Као поука ове приче може се закључити да треба пажљиво читати дела истакнутих аутора—можда су они доказали баш оно што нам треба, а нису то желели да истакну!