ИСТОРИЈА И ФИЛОЗОФИЈА МАТЕМАТИКЕ
Предавања за академску 2023/24. годину

Зоран Петровић

Праисторија

Антрополози нам кажу да нема културе, ма колико примитивна била, која нема у себи неко поимање броја. Наведимо неке примере.

- Нека абориџинска племена у Аустралији немају речи за бројеве веће од 2, имају само за 1 и 2, све остало је „много”.
- Индијанци око Амазона броје до 6, но немају речи за 3, 4, 5, 6, него је 3 два-један, 4 је два-два итд.
- Бушмани слично броје по 2 до 10. Овде је занимљиво истаћи да не желе да замене 2 краве за 4 свиње, али је у реду да замене једну краву за две свиње, а потом опет исто то!

Веома је занимљива анализа бројевних система код северноамеричких Индијанаца коју је 1913. године објавио Илс. Пре свега, наводи се да има 60 језичких група, а укупно око 750 језика. Нису сви различити, сматра се да има око 500 различитих језика. У оквиру исте језичке групе су језици који су слични као што су слични, на пример, шпански, италијански и француски. За 307 бројевних система базираних на анализи језика, имамо следеће податке:

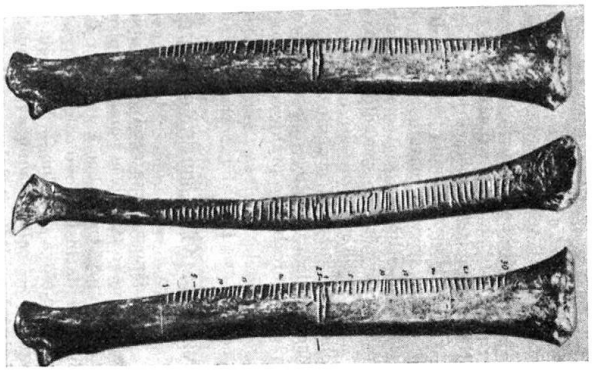
- 146 имају основу 10;
- 106 користе комбинацију основе 5 и 10;
- 35 користе комбинацију основе 5 и 20;
- 15 користе основу 4;
- 3 користе основу 3;
- 1 користи основу 8.

Не постоји чисто бинарни систем, али се трагови бинарног система налазе у 81 језику, где се појављује „дуплирање” – на пример 6 се изражава као 2×3, „поново 3”, „3, 3”, „тројке” и слично за 4, 8, 10 и 12. Сматра се да је то последица постојања великог броја природних парова (очију, шака, крила...).

Једна занимљивост – на Навахо језику се број 10 изговара: „незна”.

За регистровање броја неких ствари, плодова, животиња коришћено је урезивање у камен, дрво, прављење чорова на нитима различите боје или дужине. Ако би били превелики бројеви за запис, онда би се зарези груписали у групе од по 5, 10, 20. То је значајно побољшање од бројања један по један.

Остаци костију показују да су такав начин записивања изумели људи у Старом каменом добу чак и пре 30 хиљада година. Посебно значајан пример је голењача младог вука нађена у Чехословачкој тридесетих година прошлог века. Она је дуга око 18 цм и има 55 дубока зареза који су мање-више исте дужине, а груписани су у групе од 5 зареза.



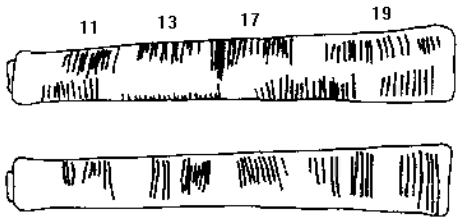
Слика 1: Кост из Старог каменог доба

Дуго се сматрало да су такви зарези записи из лова, али скорија разматрања су више склона интерпретацији да је ту било речи и о неком записивању о протоку времена. Обележавања на костима нађеним у неким француским пећинама крајем осамдесетих година XIX века су груписана у низове бројева који се понављају и који се слажу са бројем дана у узастопним Месечевим фазама. Тако да ту као да имамо неки лунарни календар.

Један изузетан примерак нађен је 1960. године у Ишангу дуж обала Језера Едвард, близу извориштa Нила. Старост тог археолошког налазишта је процењена на 17 хиљада година п. н. е. што је неких 12 хиљада година пре појављивања првих пољопривредних заједница у долини Нила. Ради се о лишњачи бабуна, која је највероватније

служила као ручка неког оруђа, које се користило за урезивање, тетовирање, или чак и за писање на неки начин. Садржи групе зареза које су груписане у три јасно дефинисане колоне. Не чини се да се ради о декоративном начину груписања, због своје неправилности. Наиме, једна од колона садржи групе од 11, 21, 19 и 9 зареза, што подсећа на $10+1, 20+1, 20-1, 10-1$. У другој колони има осам група са (редом): 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7 зареза. Као да овде има речи о неком удвостручавању (али, чему онда ту и 7?).

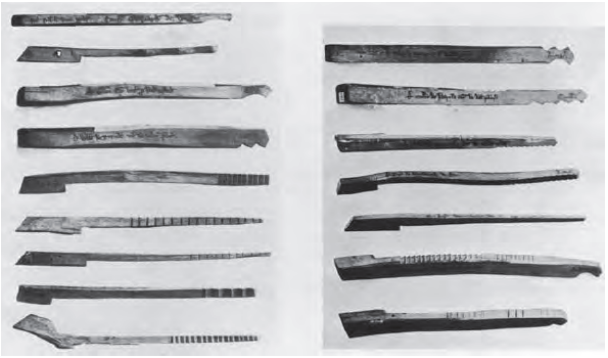
Последња колона има групе од по 11, 13, 17 и 19 зареза. Тешко да се овде, као што неки наводе, ради о простим бројевима. Више се чини да је и овде реч о неком календару пошто је $11+21+19+9=60=11+13+17+19$ (збирови бројева у првој и трећој колони).



Слика 2: Зарези на кости из Ишанга

Урезивање као метод за регистровање података, дуго је задржан. Следећи пример је занимљив. У Британији су се у дашчице од лешниковог дрвета дужине од 15 до 23 цм правили зарези као записи о новцу. Зарез који је био дебљине шаке, одговарао је износу од 1000 фунти, дебљине палца – 100 фунти, а дебљине малог прсте – 20 фунти. Када би се давао зајам, дашчица би се преломила на пола тако да се видео зарез на свакој половини. Један део би задржао државни трезор, а други би узео дужник. Тако би се лако могло проверити поређењем дашчица да ли се рачуни „слажу”.

Занимљива је терминологија. Уколико би неко позајмио новац енглеској националној банци, он би узимао половину те дашчице и тај део који би он узео називао се „stock”. Дакле, он је био „stockholder”. Када би он желео да уновчи то што је имао, донео би свој део дашчице и онда би се то проверило – „check”. Одатле су казније изведени називи за „акције” и „чекове”. Тај систем је укинут тек 1826. године. Године 1834. када су силне дашчице које су још преостале спаљене у пећима које су подгревале Кућу лордова, ватра је измакла контроли и проширила се толико да је изгорела цела зграда парламента.



Слика 3: Дашчице из тринаестог века

Други начин записивања налазимо код Инка у Перуу. Постојао је прилично добро разрађен систем „кипуа” („чворова који говоре”).

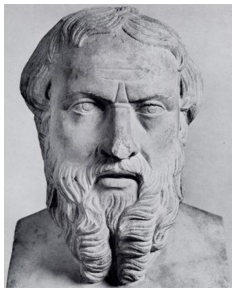
Слика 4: Кипу

То су биле групе врпци направљених од уплетених влакана од вуне или длаке животиња из породице камелида (на пример, ту спада лама), различите боје и дужине са више чворова на њима. Инке нису имали писмо, кипуи су чували разне податке. Ми не знамо у потпуности које су све податке, сем чисто нумеричких (подаци о складиштима, броју људи и слично), чували на тај начин, али је занимљиво да се тако неки логичко-нумерички систем могао развити у култури која није имала писмо. Кипуи су садржали од 3 до скоро 1000 ниски. Нажалост, шпански освајачи су сматрали да су ти чудни записи ђавољи производ и скоро су сви уништени, остало је само око 600 кипуа. До скора се сматрало да они потичу од 650 г. п. н. е. али је 2005. године у обалском граду Каралу у Перуу откривен кипу, можда је боље рећи прото-кипу, стар 5000 година и то у добром стању. У почаст старих кипуа, неки компјутерски системи за чување података називају се Quipu.

Египат

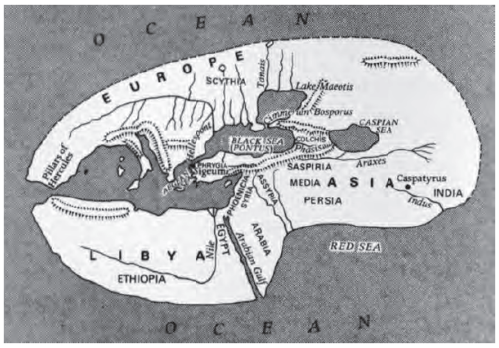
Груписањем мањих пољопривредних заједница у периоду од 3500. до 3100. г. п. н. е. формирана су два краљевства – Горњи и Доњи Египат. Око 3100. г. п. н. е. освајањем са југа дошло је до уједињења.

Класичан извор сазнања о Египту је Херодотова „Историја”.



Слика 5: Херодот

Херодот (485-430. г. п. н. е.) је рођен у Халикарнасу у југозападном делу Мале Азије. То је био грчки град у саставу Персије. Данас је то Бодрум у Турској. Због политичких разлога, био је присиљен да напусти родно место и сместио се у Атини. Одатле је путовао, можда као трговац, у разне крајеве тада познатог света, од јужних делова садашње Русије, преко Сирије и Ирака до Египта. Он је записивао приче које су му људи причали, тако да је његова „Историја” више путопис са социолошким и антрополошким подацима него историја у садашњем смислу. Али, он је покушавао да садашњост тумачи прошлим догађајима и то је један од разлога што је прозван „Оцем историје”.



Слика 6: Познати свет у време Херодота

Модерно интересовање за Египат почиње неуспешном Наполеоновом војном авантуром у Египту. Наиме, Наполеон је 1798. године са нешто више од 300 бродова и 38000 војника кренуо у Египат у покушају да га освоји и на тај начин угрози британски пут за Индију. Но, већи део флоте је убрзо уништен код Александрије, мада је војна кампања трајала још годину дана. Наполеон је, желећи да ублажи војну акцију и да промовише француску културу, у ту експедицију уврстио и многе научнике, између осталих и француске математичаре Гаспара Монжа и Жан Баптист Фуријеа. Научници су имали задатак да прикупе што више информација о свим аспектима територије земље у коју су дошли. Они су у току војних сукоба заробљени, али су пуштени са свим својим записима и цртежима. Захваљујући тим материјалима, у току наредних 25 година, објављено је монументално дело „Опис Египта”.

Никада до тада није нека страна земља била приказана са толико много података, који су сакупљени брзо и квалитетно, а при веома тешким условима. До тада је у Европи стари Египат био непознат, но овим делом је почело велико интересовање у европским интелектуалним круговима за Египат као древну цивилизацију.

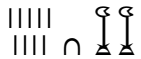
Као што знамо, писмо које се користило за значајне натписе било је хијероглифско („свети знаци”) које је у самом свом почетку било сликовно, но касније су додавани и појединачни симболи. У следећој таблици можемо видети приказ бројева, заједно са описом симбола

број	хијероглиф	опис
1		палица
10		кост пете
100		уже
1000		цвет локвања
10000		савијени прст
100000		пуноглавац
1000000		Хех, бог вечности

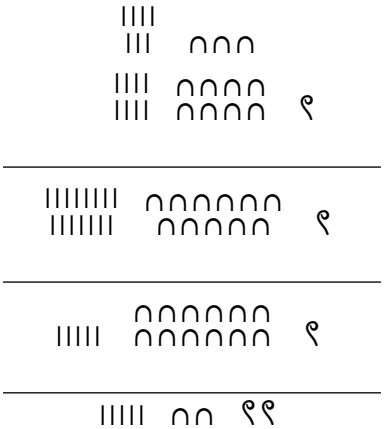
У неким текстовима је уже умотано у другом смеру, прст је савијен на другу страну, а уместо пуноглавца, појављује се жаба.

Као што можемо видети, систем јесте базиран на основи десет, али није позициони пошто су се различити симболи користили да означе разне декадне јединице (немамо цифре). Бројеви су приказивани тако што би се низали симболи за поједине декадне јединице и то би, обично, здесна долазиле ознаке за веће јединице, но, с обзиром да систем није позициони, то није било обавезно. На пример, 2019 би се могло записати овако:

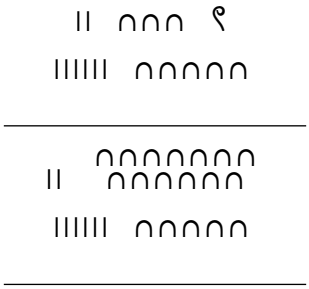
Но, због уштеде простора, некад би се низали и један изнад другог.

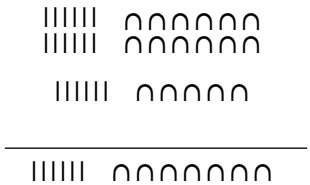


Сабирање се вршило груписањем и потоњим сређивањем. На пример, ако бисмо желели да нађемо збир $37+188$, то бисмо радили овако:



Одузимање се изводи уз „позајмљивање". На пример, одузимање $132-56$ би се изводило као што следи.





Као што знамо, многи записи су пронађени на папирусима на којима се писало пером и мастилом. У сврху лакшег писања на папирусу, египатски свештеници су развили *хијератско* (*свето*) писмо. Могло би се рећи да се оно према хијероглифском односи као писани текст према штампаном. Касније, када се употреба папируса проширила, развијено је и *демотско* (народно) писмо.

Француски војници су, приликом једног укопавања у близини Розете, открили значајан камен на којима се налазио натпис на три писма — хијероглифском, демотском, грчком.

Било је јасно да се ради о изванредно важном открићу пошто нико до тада није био у стању да прочита хијероглифске натписе. Стога су начињене копије помоћу папира и мастила, које су разаслане по Европи. Не само то, него су при преговорима о капитулацији француских снага у Египту, Британци у уговор ставили и захтев за предају *камена из Розете*. Он је тада пребачен у Британски музеј, а гипсане копије су дате водећим британским универзитетима – Оксфорд, Кебриџ, Даблин и Единбург.

Хијероглифе је на крају ипак дешифровао један Француз – Шамполион (1790-1832) који је цео свој, не баш дуги живот, посветио томе још од детињства.

Главни извори нашег знања о египатској математици потичу од два папируса – Рајндовог (или Ахмесовог, по имену писара који га је исписао) и Московског (или Голенишевљевог). Осим ових, од мањег значаја су и Берлински папирус, као и *египатска математичка кожна ролна*.

Ахмесов папирус је открио Шкот Рајнд 1858. године. Заправо, тај папирус тада није био цео. Он је имао два дела и недостајао му је средњи део. Касније је откупљен један папирус за кога се сматрало да садржи податке о медицини. Испоставило се да је он вештачки састављен од више других и ту је заправо нађен и централни део Рајндовог папируса. Рајндов папирус је дужине нешто мање од 5,5 метара и ширине 32 cm. Ахмес је био писар који га је исписао најкасније 1550. године п.н.е. Он наводи да пише о резултатима познатим од стране старијих аутора из XII династије (1849-1801. године п.н.е).

Занимљиво је навести да постоји и документ врло сличног садржаја, а који је написан 2000 година после овог.

Слика 7: Део Рајндовог (Ахмесовог) папируса

Ахмес почиње амбициозно: „Ово је детаљна студија свих ствари, увид у све што постоји, знање свих опскурних тајни”. Но, то је заправо математички приручник састављен од 85 проблема, а те „опскурне тајне” су множење и дељење.

Множење је заправо била у суштини адитивна операција код старих Египћана. Основна идеја код множења састојала се у удвостручавању (или преполовљавању) и каснијем сабирању.

$19 \cdot 37$

/	1	37
/	2	74
	4	148
	8	296
/	16	592
	19	703

$37 \cdot 19$		
/	1	19
	2	38
/	4	76
	8	152
	16	304
/	32	608
	37	703

Дељење је супротно множењу – тражи се број који множењем са делиоцем даје дељеник. За дељење $91:7$ прави се иста таблица као за множење, али се резултат другачије очитава.

$91:7$		
/	1	7
	2	14
/	4	28
/	8	56
	13	91

Наравно, при дељењу се појављују и разломци. Египћани су имали велику преференцу ка **јединичним разломцима**, тј. ка разломцима облика $\frac{1}{n}$. Они су означавани тако што је изнад хијероглифских симбола за именилац исписиван издужени овал (који значи „део”). На пример:  . Ми можемо да користимо скраћене ознаке, на пример, $\overline{134}$, за разломак $\frac{1}{134}$. Осим ових, имали су посебну ознаку и за 2/3:

Занимљиво је навести да, ако би желели да нађу 1/3 од неког броја, најпре би налазили 2/3, а потом 1/2 од добијеног резултата! Осим тога,

за рачунање би се понекад множило (делило) са 10. Дакле, комбинацијом удвостручавања, множења са 10, преполовљавања, дељења са 10 и множења са 2/3 трудило се да се дође до резултата. Но, Египћани су изражавали резултате користећи те јединичне разломке. Јасно је да је онда потребно видети како се бројеви облика $2 \cdot \overline{n} (= \frac{2}{n})$ изражавају преко јединичних разломака.

Прва трећина Ахмесовог папируса заправо се састоји од таблице у којој се разломци $2/n$ изражавају у облику збира јединичних разломака за непарне бројеве од 5 до 101. Сем што је коришћен идентитет

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k},$$

није јасно због чега су коришћени баш такви записи, а не неки други. Наведимо неке развоје из таблице.

$$\begin{array}{ll}
2 \cdot \overline{5} = \overline{3} + \overline{5} & 2 \cdot \overline{7} = \overline{4} + \overline{28} \\[1ex]
2 \cdot \overline{11} = \overline{6} + \overline{66} & 2 \cdot \overline{17} = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68} \\[1ex]
2 \cdot \overline{19} = \overline{12} + \overline{76} + \overline{114} & 2 \cdot \overline{31} = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155} \\[1ex]
2 \cdot \overline{37} = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296} & 2 \cdot \overline{41} = \overline{24} + \overline{246} + \overline{328} \\[1ex]
2 \cdot \overline{47} = \overline{30} + \overline{141} + \overline{470} & 2 \cdot \overline{49} = \overline{28} + \overline{196} \\[1ex]
2 \cdot \overline{71} = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710} & 2 \cdot \overline{73} = \overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365} \\[1ex]
2 \cdot \overline{91} = \overline{70} + \overline{130} & 2 \cdot \overline{97} = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}.
\end{array}$$

На пример, у таблици имамо

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114},$$

а не

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}.$$

Нека правила су уочена.

1. Преферирају се мањи имениоци, ниједан није већи од 1000.

2. Што мање јединичних разломака, никад их нема више од 4.

3. Пожељнији су парни имениоци од непарних, посебно за почетне чланове у представљању.

4. Прво иду мањи имениоци и нема једнаких.

5. Најмањи се може повећати ако то може довести до смањивања осталих разломака. На пример, имамо $\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$, а не $\frac{2}{31} = \frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}$.

Множење разломака се изводи једноставно.

$$(2+\overline{4})\cdot(1+\overline{2}+\overline{7})$$

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1+\overline{2}+\overline{7} \\
/ & 2 & 3+\overline{4}+\overline{28} \\
 & \overline{2} & \overline{2}+\overline{4}+\overline{14} \\
/ & \overline{4} & \overline{4}+\overline{8}+\overline{28} \\
\hline
 & 2+\overline{4} & 3+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}
\end{array}$$

Наравно, овде је коришћен развој из таблице $2\cdot\overline{7} = \overline{4}+\overline{28}$, као и то да је $2\cdot\overline{2n} = \overline{n}$.

У проблему 33 из Ахмесовог папируса појављује се проблем налажења броја који помножен са $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ даје 37. То је сложеније. Најпре почиње стандардно (користићемо стандардне садашње ознаке ради лакшег праћења):

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7} \\
 & 2 & 4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28} \\
 & 4 & 9+\frac{1}{6}+\frac{1}{14} \\
 & 8 & 18+\frac{1}{3}+\frac{1}{7} \\
/ & 16 & 36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}
\end{array}$$

Сада се израчуна шта се добија када се збир ових последњих разломака, који је мањи од 1, помножи са 42.

	1	42
/	$\frac{2}{3}$	28
	$\frac{1}{2}$	21
/	$\frac{1}{4}$	$10+\frac{1}{2}$
/	$\frac{1}{28}$	$1+\frac{1}{2}$
		40

Зашто је ту множено са 42? Очигледно зато што је то заједнички именилац за почетне разломке $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$, а сврха је била да се установи колико недостаје до 1. Недостаје дакле 2/42. Но, с обзиром да је $(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7})\cdot 42 = 97$, а што је показано у проблему 31, број који треба да се дода броју 16 је број $\frac{2}{97}$, а из таблице је то $\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$. Дакле, коначно решење је $16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.

Проблем 24 је лакши, али је занимљив метод његовог решавања. Он спада у 'аха' проблеме, или проблеме 'гомиле':

Гомила и њена седмина дају 19. Колика је та гомила.

Решење је базирано на методу 'погрешне претпоставке' – за решење се најпре узме нешто погодно, што није решење, а затим се пропорционално коригује. Дакле, овде се ради о линеарној једначини:

$$x+\frac{1}{7}x = 19.$$

Примећујемо да је погодно узети да је $x = 7$. Тада се добија да је $x+\frac{1}{7}x = 8$, што није оно што желимо и зато то коригујемо – оним чиме треба помножити 8 да се добије 19 множимо 7 да добијемо резултат.

Најпре се израчуна шта се добија када се претпостави да је резултат 7.

/	1	7
/	$\frac{1}{7}$	1
		8

Потом се тражи број којим треба помножити 8 да се добије 19.

	1	8
/	2	16
	$\frac{1}{2}$	4
/	$\frac{1}{4}$	2
/	$\frac{1}{8}$	1
	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	19

И на крају се тај број множи са 7.

/	1	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
/	2	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
/	4	$9+\frac{1}{2}$
	7	$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

Проблем 28 је сличног облика, али се из решења може разумети да он спада и у ону групу проблема са којима смо се сретали када смо били деца – старији вам кажу да замислите неки број и да онда изведете неке операције са њим, те онда 'погоде' који сте број замислили.

Одреди који је то број коме када додаш његове 2/3 и од добијеног одузмеш 1/3 суме добијеш 10.

А процедура за решење је кратка.

Нађи 1/10 од 10. То је 1. Од 10 одузми 1. Добијеш 9. И то је решење.

У овом решењу се заправо крије следећи идентитет (n је природан број):

$$n+\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2}{3}n\right)-\frac{1}{10}\left(n+\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2}{3}n\right)\right)=n.$$

У проблему 79 налазимо сумирање геометријског низа.

			кође	7
/	1	2801	мачке	49
/	2	5602	мишеви	343
/	4	11204	снопови	2401
		19607	хекати	16807
				19607

О чему се овде ради? Најпре, каква је ово рачуница у првој колони? Једна од интерпретација је да се овде користи идентитет (наравно у врло једноставном облику):

$$q + q^2 + \cdots + q^n = q(q + \cdots + q^{n-1} + 1).$$

Наиме, 2801 је сума прва четири члана низа са десне стране, увећана за 1. А спомињање кућа, мачки, мишева и осталог као да сугерише неки забаван проблем у коме се види колико би се уштедело хеката пшенице (хекат је египатска мера) уколико би свака од 7 мачака у свакој од 7 кућа појела по 7 мишева ...

Рецимо на крају нешто и о египатској геометрији. Херодот Египћанима приписује стварање геометрије:

Кажу да овај краљ подели земљу међу свим Египћанима тако да сваки добије четвороугао исте величине и да онда он повлачи своје приходе од пореза на ту земљу. Али свако коме би река одузела део земље је имао обавезу да дође код краља и да га обавести шта се десило. Краљ би онда послао надзорнике који би премерили за колико се земља смањила, да би власник могао да плати порез на остатак земље. На тај начин, чини се мени, настала је геометрија.

Премеравање земље су вршили експерти које су Грци називали „затезачи конопца". Наиме, по свему судећи, њихово главно оруђе су били конопци са означеним чворовима на њима. Демокрит је 420. године п. н. е. у једном спису показао да су они били и тада врло цењени. Наиме он се похвалио:

Нико ме не може надмашити у конструкцији равних фигура уз доказ, чак ни такозвани затезачи конопца у Египту.

Наравно, нама нису остали никакви подаци о доказима из Египта. Има више примера правила рачунања неких површина, која су емпиријског карактера. Укључујући и нека погрешна. На пример, у доста

каснијем периоду, око 100. године п. н. е. у храму Хоруса у Едфу, налазе се подаци о многим четвоространим пољима која су била поклони храму и за свако од њих се површина рачунала по формули

$$P = \frac{1}{4}(a+c)(b+d),$$

где су a и c, односно b и d наспрамне странице тог четвороугла. Јасно нам је да то није тачна формула; она јесте приближно тачна ако је четвороугао приближно правоугаоник.

Геометријски проблеми у Ахмесовом папирусу су проблеми 41–60. У проблему 51, Ахмес описује да се површина једнакокраког троугла налази када се половина основице помножи његовом висином. То образлаже тиме да се једнакокраки троугао може поделити на два правоугла троугла из којих се може саставити правоугаоник. На сличан начин, у проблему 52, одређује се формула за површину трапеза чије су основие 4 и 6, а висина 20. Узимајући половину збира две основице, да би се направио правоугаоник, множи са висином и налази површину.

Значајно египатско остварење је налажење површине круга. У проблему 50, објашњава Ахмес да се површина круга пречника 9 добија тако што се од пречника одузме његова деветина, то јест 1, и онда се то што се добије, то јест 8, помножи са самим собом. Добија се 64, што је, како каже Ахмес, тражена површина.

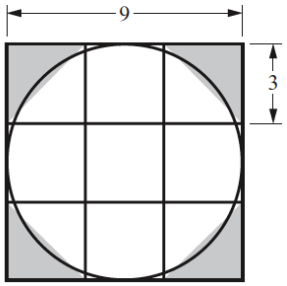
Дакле, ако са R означимо пречник круга, формула за површину круга је

$$P = \left(R - \frac{R}{9}\right)^2 = \left(\frac{8R}{9}\right)^2.$$

Ово нам даје вредност за π, $\pi = 3\frac{1}{6}$. Што и није тако лоше. Још је важније, од ове приближне вредности, египатско правило да је однос површине круга према обиму једнака односу површине описаног квадрата према његовом обиму, а то је потпуно тачно. Не знамо са сигурношћу како су Египћани дошли до ове формуле, али проблем 48 код Ахмеса можда даје наговештај.

Слика 8: Проблем 48 код Ахмеса

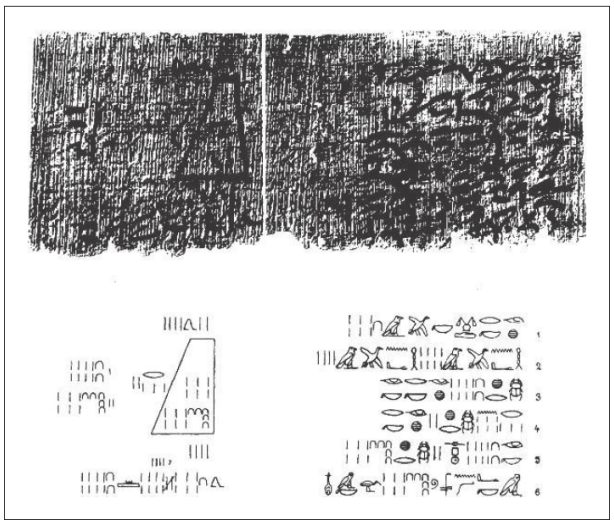
Ту се као поставка проблема појављује ова слика која представља квадрат од кога је формиран осмоугао. Пошто се ту налази и демотски знак за број 9, чини се да се ради о квадрату странице 9 из кога су исечени једнакокраки правоугли троуглови од којих сваки има површину $\frac{9}{2}$.



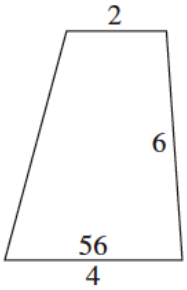
Слика 9: Круг уписан у квадрат

Могуће је да је Ахмес закључио да је површина тог осмоугла блиска површини круга уписаног у квадрат.

У вези рачунања запремина, наводимо проблем 14 са Московског папируса (који има само 25 проблема). Ту се може видети следећа сличица.



Заправо, ако поставимо само оно што је ту најважније имамо ово.



Наравно да немамо ознаке арапским бројевима, исписано је хијератским симболима. Чини се да је овде опет у питању неки трапез, али се из поступка види да се заправо ради о схематском приказу зарубљење пирамиде. Основе чине два квадрата странице 4 и 2, док је висина 6. Описује се поступак налажења запремине ове зарубљене пирамиде који заправо одговара формули

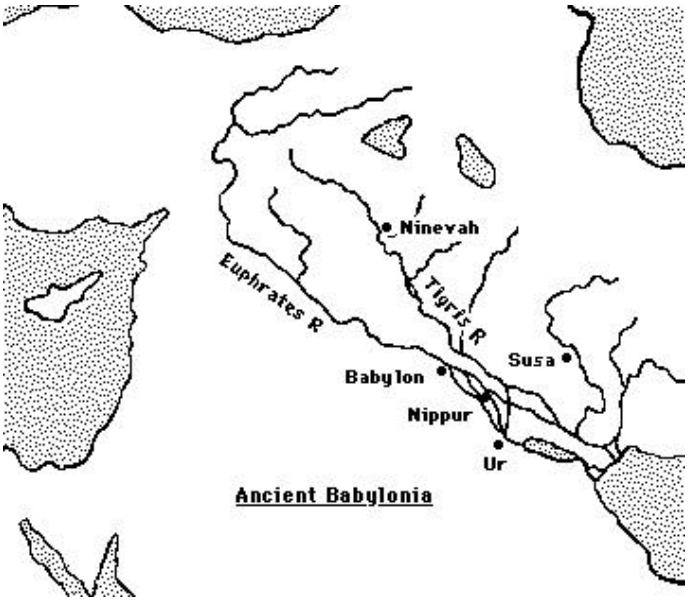
$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Наиме,

$$\frac{6}{3}(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 2(16 + 8 + 4) = 2 \cdot 28 = 56.$$

За крај наведимо да су Египћани користили и концепт који de facto одговара котангенсу угла. Није се наравно спомињао угао, али се рачунало колико закошена дуж одступа од вертикалне рачунањем односа одступања једног темена од вертикалне пројекције другог и висине на којој се налази друго теме – однос две катете у правоуглом троуглу чија је хипотенуза та дуж. Занимљиво је да је за вертикално одстојање коришћена једна јединица мере, а за хоризонтално друга, но наравно да то није суштински важно.

Математика Месопотамије



Слика 10: Месопотамија

Та цивилизација Месопотамије (Међуречја) развијала се према најширим временским оквирима од 2900. године п. н. е. до Александрових освајања 330. године п. н. е. Господари су се мењали, али су битне карактеристике за нашу причу остајале довољно конзистентне да можемо говорити о математици Месопотамије (у англосаксонској литератури доминира термин 'вавилонска математика').

О цивилизацији Месопотамије имамо знатно више извора, јер, као што знамо, глинене плочице (таблице) на којима су писани разни документи знатно су трајније од папируса, или пергамента. Око 400 хиљада плочица, од којих је неких 2000 са математичким садржајем су омогућили многа сазнања чак и о обичном животу људи. Као што неки француски научници наводе, више се зна о породичном животу људи у Месопотамији пре више од 3000 година, него што се зна о животу француских сељака из XIII века.

Глинене плочице јесу трајније, али тако немамо записе већих докумената, јер су те плочице често величине разгледница. Но, има их довољно да можемо да дамо одређену слику. Што се математичких резултата тиче, сигурно је за њихову обраду најзаслужнији аустријско-амерички математичар и историчар наука Ото Нојгебауер. На пример,

његов први рад, из 1927. године, о математици Месопотамије, био је посвећен пореклу сексагезималног система.

Као што знамо, користило се клинасто писмо. Ознака јединице је био вертикални знак у облику клина, који ћемо ми означавати са $\curlyvee$, док је за ознаку броја 10 коришћен положени знак у облику нешто 'дебљег' клина, који ћемо означавати са $\prec$. На пример, број 46 се записивао овако:

$$\begin{array}{l} \prec\prec\curlyvee\curlyvee\curlyvee \\ \prec\prec\curlyvee\curlyvee\curlyvee \end{array}$$

Сада долазимо до важне чињенице. У математици Месопотамије користио се позициони систем са основом 60 (сексагезимални систем), али са два недостатка. Први недостатак је био у томе што није постојао симбол за празно место. У запису се остављао мало већи размак, али то није баш било увек јасно. Овај недостатак је при самом крају ове цивилизације исправљен – додата је ознака за празно место у облику два искошена клина, али се овај симбол никада није користио на самом крају броја и то говори о другом недостатку: нема ознаке за децимални (заправо сексагезимални) зарез, мада се види да се у примерима радило и са бројевима који нису били цели. Из контекста се видело о чему се ради.

Дакле, запис

$$\prec\curlyvee\curlyvee\curlyvee \quad \prec\prec\prec\curlyvee \quad \curlyvee\curlyvee$$

могао је да означава број $13\cdot 60^2+31\cdot 60+2$, али и број $13\cdot 60^4+31\cdot 60^2+2$, као и број $13+31\cdot 60^{-1}+2\cdot 60^{-2}$. Заправо, на бесконачно много бројева се односио тај запис. Из контекста се морало схватити о ком се броју заиста ради.

У даљем тексту ћемо користити скраћени запис за сексагезималне бројеве. На пример,

$$12,6;38,23,14$$

означава број

$$12\cdot 60+6+38\cdot 60^{-1}+23\cdot 60^{-2}+14\cdot 60^{-3}.$$

На једној од таблица можемо наћи апроксимацију за $\sqrt{2}$: $1;24,51,10$. То је прилично добра апроксимација за $\sqrt{2}$:

$$1+24/60+51/3600+10/216000\approx 1,41421296296.$$

Како су дошли до овако доброг резултата? Користили су заправо сада нама добро познати алгоритам за налажење приближне вредности $\sqrt{a}$. Наиме, ако је a_1 нека апроксимација за тај корен и ако је тај број, на пример, мањи од корена, онда је број $\frac{a}{a_1}$ друга апроксимација, која

је већа од тог корена. И онда се узме аритметичка средина ова два броја као нова апроксимација:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a}{a_1}\right).$$

Број који се наводи као апроксимација за корен из 2 је заправо следећа апроксимација, тј. a_3, ако је $a_1 = 1;30$ (тј. 1,5 у децималном запису).

Велики број глинених плочица са математичким садржајем састоји се од разних таблица: реципрочних вредности, квадрата, кубова, квадратних коренова. На пример, имамо овакву таблицу реципрочних вредности:

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5
15	4
16	3,45
18	3,20
20	3
24	2,30
25	2,24
27	2,13,20

Постоје таблице квадрата бројева од 1 до 59, као и кубова бројева до

31. За множење су користили формуле

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}.$$

Дељење се изводило множењем реципрочном вредношћу:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Рецимо, да бисмо нашли 34/5, помножимо 34 са 12 и померимо за једно сексагезимално место. Но, неке вредности овде недостају. Наведене су само реципрочне вредности 'правилних' бројева, тј. оних код којих имамо коначан запис (облика су $2^m 3^n 5^p$). Рецимо, овде немамо 1/7. Но, и 1/7 се може наћи, бар приближно, на неким другим местима. Може се наћи процена:

$$0;8,34,16,59 < \frac{1}{7} < 0;8,34,18.$$

Имамо и апроксимације:

$$\frac{1}{59} = ;1,1,1 \qquad \frac{1}{61} = ;0,59,0,59.$$

Наравно да би овде требало да буде бесконачни развој, но појављује се само коначна апроксимација.

Осим ових, постоје и таблице степена са разним основама, а које се користе у налажењу de facto логаритама са различитим основама. Но, наравно да немамо баш појам логаритма ни приближно, ради се о извесном броју таблица, са циљем решавања неких конкретних проблема.

Линеарне једначине су сматране за једноставне и њима није поклањана превелика пажња. Много су занимљивије биле квадратне, па чак и кубне једначине. Једначине су знали да трансформишу додавањем на обе стране једначине једнаких вредности и множењем обе стране истим бројем

С обзиром да нису разматрани негативни бројеви, постојала су de facto три типа квадратних једначина (а овако ће бити и више од хиљаду година по нестанку ове цивилизације):

1. $x^2 + px = q$,
2. $x^2 = px + q$,
3. $x^2 + q = px$.

Наравно да није постојао никакав симболички запис, ово је само наш запис за разматране једначине. За непознате су се користили термини 'дужина', 'ширина', 'површина', 'запремина'. Но, јасно је да су ти термини ипак коришћени у апстрактном смислу, јер није представљао проблем да се од површине одузима дужина.

У једном од проблема се тражило да се одреди дужина странице квадрата ако се добија 14,30 када се од површине одузме дужина те странице. У нашем садашњем и то децималном запису ради се о једначини $x^2 - x = 870$. Опис решења није ништа друго до опис метода комплетирања квадрата, односно формуле

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2,$$

за једначину облика 2 (записану као $x^2 - px = q$). Мада овде имамо одузимање, ипак немамо негативна решења. Слично се решавао и први тип једначине. Али, ту имамо још један занимљив пример/метод.

Једначина $11x^2 + 7x = 6;15$ трансформисана је тако што су обе стране помножене са 11 и онда се тако добије једначина $(11x)^2 + 7 \cdot (11x) = 1,8;45$. Ова има нормалну форму по непознатој $y = 11x$ и решење се налазило као у претходном случају.

Но, трећи тип једначине сводио се на решавање система

$$x + y = p, \quad xy = q.$$

Има више примера за решавање система једначина у којима једна једначина задаје збир (или разлику) две непознате величине, а друга њихов производ. То је, тада, евидентно био неки канонски начин представљања једначина типа 3.

На пример, за решавање система једначина $x + y = 6;30$, $xy = 7;30$ дат је поступак у коме се најпре израчуна

$$\frac{x+y}{2} = 3;15,$$

затим се ово квадрира:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10;33,45$$

и израчуна

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3;3,45.$$

Тако се добија да је

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 3;3,45$$

и одатле имамо

$$\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1;45.$$

Наравно, посматра се само позитиван корен. Одавде се добијају x, y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 3;15 + 1;45 = 5, \\ y &= \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 3;15 - 1;45 = 1;30. \end{aligned}$$

Посебно је занимљиво решавање кубних једначина за шта нема пандана у египатској математици. С обзиром да је постојала таблица кубова онда су се једноставне једначине попут $x^3 = 0;7,30$ решавале директно из таблице када је то било могуће, односно користећи линеарну интерполацију за добијање решења. Но, постојале су и таблице за $n^3 + n^2$. Те таблице су коришћене за решавање једначина попут једначине

$$144x^3 + 12x^2 = 21.$$

Наиме, множењем обе стране са 12, добија се једначина по непознатој $y = 12x$:

$$y^3 + y^2 = 4,12$$

и добија се решење $y = 6$, односно $x = 0;30$. Све кубне једначине облика

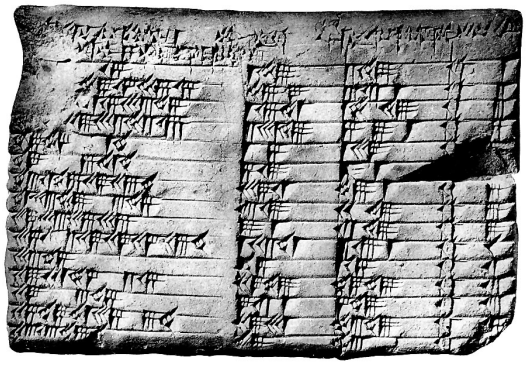
$$ax^3 + bx^2 = c.$$

могу се свести на једначину

$$y^3 + y^2 = d$$

множењем са a^2/b^3. Немамо податке да ли су они успевали да реше и општију једначину облика $ax^3 + bx^2 + cx = d$, мада су, на основу постојећих примера, могли да нађу одговарајућу смену. Но, нема ниједног таквог примера.

Једна таблица је посебно занимљива, те се и ових година појављују научни радови у којима се разматра њен значај. Она је позната као таблица Плимптон 322, јер је она под тим бројем заведена у Плимптоновој колекцији на Универзитету Колумбија.



Слика 11: Плимптон 322

Таблица је величине 9×13 cm, мало оштећена и по свему судећи је била део веће таблице.

Но, оно што имамо су четири колоне од по 15 бројева. Наводимо део те таблице.

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6

Наравно, нећемо да памтимо ту таблицу, али можемо мало да проанализирамо шта овде имамо.

Јасно је да последња колона нумерише врсте. Испишимо другу и трећу колону у декадном систему

119	169
3367	4825
4601	6649
12709	18541
65	97
319	481

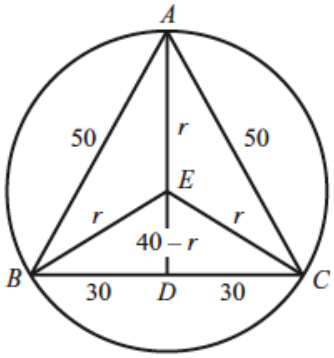
Тада је:

$$\begin{aligned}
169^2 - 119^2 &= 120^2 \\
4825^2 - 3367^2 &= 3456^2 \\
6649^2 - 4601^2 &= 4800^2 \\
18541^2 - 12709^2 &= 13500^2 \\
97^2 - 65^2 &= 72^2 \\
481^2 - 319^2 &= 360^2
\end{aligned}$$

Дакле, овде имамо Питагорине тројке бројева. Заправо, ако се посматра правоугли троугао у коме је мања катета a, већа катета b и

хипотенуза c, онда је прва колона заправо једнака $(c/b)^2 = \sec^2 \alpha$. Наравно, нема смисла сматрати на основу овога да су у старој Месопотамији имали појам секанса угла, ни у Египту ни у Месопотамији немамо увођење мере угла, но ово је ипак занимљив резултат. Нисмо написали целу таблицу, али се правилност и даље одржава – бројеви у првој колони су опадајући. Осим тога, увек је b 'правилан' број, тј. у његовој факторизацији се појављују само прости бројеви 2, 3 и 5, што омогућава коначан запис у основи 60. Нећемо се даље бавити тиме како је таблица формирана.

На крају наведимо и пар речи о геометрији у Месопотамији. Пре свега, јасно је да је Питагорина теорема била позната. На једној таблици имамо квадрат на коме је број 30 написан дуж странице, док су бројеви 42;25,35 и 1;24,51,10 записани дуж дијагонале. Приметимо да је овде други број апроксимација за $\sqrt{2}$, коју смо већ наводили, и да се види да се знало да се дужина дијагонале квадрата добија када се дужина странице помножи са $\sqrt{2}$. Имамо и пример, на једној другој плочици, рачунања полупречника круга описаног око једнакокраког троугла.



Слика 12: Примена Питагорине теореме

Друга примена Питагорине теореме је у задатку где греда дужине 0;30 стоји уз зид и питање је колико ће се доњи део померити од зида ако се горњи део спусти за 0;6.

Занимљива је и таблица у којој су поређене површине и квадрати страница правилних многоуглова са три, четири, пет, шест и седам страница. Неки су резултати приближни, али са добром апроксимацијом. Ту се такође налази и пример поређења обима кружице описане око правилног шестоугла и његовог обима. Из тог резултата се може закључити да је апроксимација за π заправо 3;7,30, односно $3\frac{1}{8}$ што

није лоша апроксимација (мада се за рачунање површине круга ипак најчешће користила вредност 3).

Мане су сличне као и у Египту. Није се правила разлика између тачних и приближних вредности. Па се тако површина четвороугла налазила као производ аритметичких средина парова наспрамних страница, док се за запремину зарубљене пирамиде могла наћи и тачна вредност, али и слабије апроксимације.

За крај можемо рећи да, мада ни у Египту ни у Месопотамији немамо експлицитних доказа, ипак се може наслутити да су постојали методи којима су се решавали општи задаци и да је било и случајева доказа помоћу провере рачуна. Прави математички докази долазе тек са Грцима. Можемо рећи и да математика старијих цивилизација није била сасвим утилитарна. Види се да је ту било и задатака чисто забавног и непрактичног карактера.