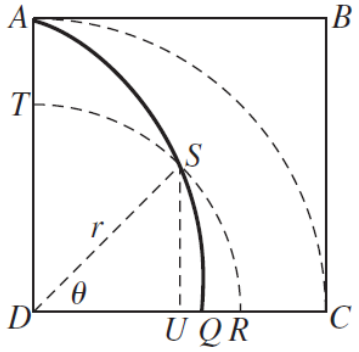
# Грчка математика 2

Зоран Петровић

4. март 2024.

## Динострат и квадратура круга

Ученик Еудокса Менем и његов брат Динострат такође су имали значајне резултате. Менем се бавио конусним пресецима, док је Динострат искористио Хипијину трисектрису да изврши квадратуру круга (те се, стога, та крива назива и квадратрисом). Погледајмо како је то урадио.




Диностратов резултат је да важи следеће:

$$\widehat{AC} : AB = AB : DQ. \tag{1}$$

Претпоставимо да ово није тачно и нека је $\widehat{AC} : AB < AB : DQ$. Тада је $\widehat{AC} : AB = AB : DR$, где је $DR > DQ$. Нека круг са центром у $D$ и полупречником $DR$ сече трисектрису у тачки $S$ и страницу $AD$ у тачки $T$. Нека је подножје нормале из $S$ на $DC$ означено са $U$. Познато је било да се лукови који одговарају истим угловима односе као што се односе полупречници тих кругова, те је $\widehat{AC} : \widehat{TR} = DC : DR$ и, како је $DC = AB$, следи $\widehat{AC} : AB = \widehat{TR} : DR$. Како је, по хипотези, $\widehat{AC} : AB = AB : DR$, добијамо

да је $\widehat{TR} = AB$. На основу особина трисектрисе $\widehat{TR} : \widehat{SR} = AD : SU = AB : SU$ и стога следи да је $\widehat{SR} = SU$, што није могуће јер је дужина нормале из $S$ на $DC$ мања од дужине ма које друге криве од $S$ до тачке на $DC$.

На сличан начин се разрешава и случај $\widehat{AC} : AB > AB : DQ$, те закључујемо да мора бити $\widehat{AC} : AB = AB : DQ$. На основу овога, можемо да конструишемо дуж чија је дужина једнака $\widehat{AC}$. Но, то је четвртина кружнице и онда није тешко конструисати и квадрат чија је површина једнака површини круга са центром у $D$ и полупречником $DC$.

Нама данас није тешко да одредимо једначину трисектрисе у поларним координатама. Добијамо

$$\pi r \sin\theta = 2a\theta,$$

ако је $a = AB = DC$. Наиме, у поларним координатама је $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$. Но, из својстава трисектрисе, која смо већ користили горе, имамо да је

$$\frac{\theta}{\pi/2} = \frac{y}{a}.$$

Дакле, $\pi y = 2a\theta$ и, како је $y = r\sin\theta$, добијамо горенаведену једначину. Одавде лако добијамо координате тачке $Q$ (имамо ту, додуше лимес, али већ смо рекли да се та тачка и не појављује на кривој као пресек те две дужи): $\pi r/2a = \theta/\sin\theta \to 1$, кад $\theta \to 0$, те је $x = r\cos\theta \to r = \frac{2a}{\pi}$, кад $\theta \to 0$. Дакле, $Q$ има координате $(2a/\pi, 0)$. Није тешко видети да се добија исто што и у једначини (1).

## Еуклид

После смрти Александра Великог, дошло је до борбе за власт међу његовим генералима, територија је подељена на три дела, а власт у Египту је била у рукама династије Птолемеја. У Александрији су основане две значајне институције – Музеј (који је заправо био институт у савременом смислу) и Библиотека. Многи значајни мислиоци су дошли у Александрију и ту је сада био центар науке.

Један од тих учених људи био је и Еуклид (око 300 године п. н. е.). Занимљиво је да се о њему зна врло мало, чак се не зна ни место у коме је рођен, ни где се школовао, али се сматра да је учио са Платоновим студентима, ако и није био у самој Академији.

Нису сва Еуклидова дела сачувана. Између осталих, изгубљене су и његове књиге о конусним пресецима, које Архимед наводи и које користи. Но то дело, као и једно раније о конусним пресецима, касније је било превазиђено захваљујући Аполонијевим радовима о конусним пресецима. Аполонијевим радовима се нећемо бавити због недостатка времена.

Пет Еуклидових дела је сачувано: *Елементи, Подаци, Дељење фигура, Феномени* и *Оптика.* Пре озбиљније дискусије о *Елементима* кратко ћемо се позабавити овим осталим делима.

*Оптика* је заправо посвећена раној математичкој теорији перспективе. У њој Еуклид излаже своју теорију директног виђења (дакле без преламања и рефлексије зрака светлости) по којој око шаље зраке који путују до објекта. У делу користи резултат, који се на више места појављује у старим делима, да је $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$ ако је $0 < \alpha < \beta$.

Дело *Дељење фигура* је сачувано само у арапским преводима у којима су изостављени неки докази као лаки. Наравно, оно је касније преведено на латински, а потом и на друге европске језике. Састоји се од 36 ставова у којима се разматрају разне поделе равних фигура. На пример, у ставу 1 се тражи да се нађе права паралелна једној страници троугла која тај троугао дели на два дела исте површине, док се у ставу 4 тражи права која је паралелна основицама трапеза, а полови га. Последњи став тражи поделу четвороугла у датом односу правом која пролази кроз дату тачку на једној од страница тог четвороугла.

Еуклидово дело *Подаци* по свему судећи је настало као додатак *Елементима.* Садржи 95 тврђења која се тичу налажења разних величина, геометријских правила о паралелним правим и пропорционалним величинама. Нека од тврђења су еквивалентна решавању квадратних једначина. На пример, тврђења 84 и 85 су геометријска верзија месопотамских метода за решавање система једначина $xy = a^2, x \pm y = b$.

Дело *Феномени* бави се астрономијом, заправо делом који је посвећен кретањем Сунца и звезда, али се све то третира геометријски. Дакле, ради се о сферној геометрији. Занимљивости ради, Став 1 каже да је Земља у средишту космоса и то се и доказује ...

Позабавимо се сада главним Еуклидовим делом, његовим *Елементима.*

Еуклидови *Елементи* нису прво дело са тим насловом. Зна се за још три ранија таква дела, једно од њих и од Хипократа са Хиоса. Но, она нису сачувана. *Елементи* су уџбеник елементарне математике. Састоји се од тринаест књига (данас би се то пригодније могло назвати главама, али користимо традиционалну терминологију). Првих шест књига посвећено је геометрији у равни, следеће три теорији бројева, десета несамерљивим величинама и последње три скоро у целости геометрији простора.

На почетку књиге дате су 23 дефиниције. Проблем са овим дефиницијама је у томе што оне не дефинишу појмове на основу већ познатих, једноставнијих појмова. Рецимо, дефиниција тачке је ‘оно што нема делова’, дефиниција праве: ‘дужина без ширине’. То свакако нису

дефиниције у правом смислу те речи, могло би се рећи да је то покушај неког појашњења, можда под утицајем Платона.

После ових дефиниција следи пет постулата и пет аксиома (или општих истина). Разлика би требало да буде у томе што су аксиоме опште, односе се на све области, док су постулати специфично геометријски.

Постулати

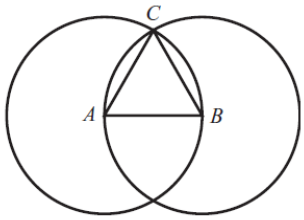
1. Могуће је нацртати праву линију од било које тачке до било које тачке.
2. Коначна права линија може се продужити у праву линију.
3. Може се описати круг са било којим центром и било којим полупречником.
4. Сви прави углови су међусобно једнаки.
5. Уколико права линија сече друге две праве линије и ако је збир унутрашњих углова са једне стране мање од збира два права угла, онда се, ако се те праве линије продуже неограничено, оне секу са те стране са које је збир тих углова мањи од два права угла.

Аксиоме

1. Ствари које су једнаке истој ствари једнаке су и међу собом.
2. Ако једнаким додате једнаке, целине су једнаке.
3. Ако се једнаке одузму од једнаких, остаци су једнаки.
4. Ствари које се поклапају једна са другом, једнаке су међу собом.
5. Целина је већа од дела.

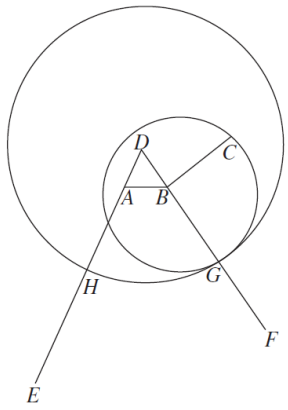
Као што се може видети, Еуклид се трудио да да минималан број постулата. На пример, постулат 3 говори само да се може конструисати круг са датим центром и датим отвором шестара. Нема речи о томе да се нека дужина може 'пренети' помоћу шестара са једне дужи на другу. Дакле, овде имамо колапсибилан шестар – када се подигне са папира, он се затвара. На самом почетку, Еуклид се потрудио да покаже како се ова рестрикција може превазићи. То је урађено у прва три става прве књиге у којој има укупно 48 ставова.

Први став говори о конструкцији једнакостраничног троугла са задатом страницом.




Дакле, задата је дуж $AB$. Нацртају се две кружнице – једна са центром у $A$ и полупречником $AB$ и друга са центром у $B$ и истим полупречником. У пресеку ове две кружице добија се теме $C$ траженог једнакостраничног троугла. Нема никаквих коментара који објашњавају зашто се ове две кружнице уопште секу. Евидентно је да би нам требао неки постулат о непрекидности да бисмо то обезбедили. Но, тога нема.

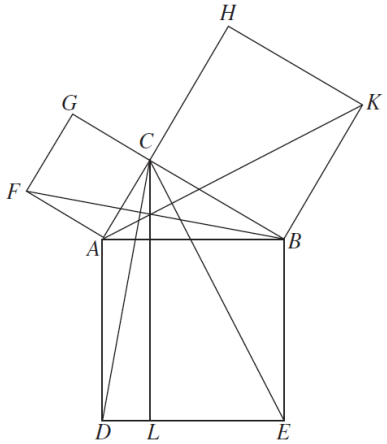
У следећем ставу се говори о томе како се од дате тачке $A$ може нанети дуж једнаке дужине као и задата дуж $BC$, заправо како се може наћи дуж чија је дужина једнака збиру дужина две задате дужи.




Најпре се конструише једнакостранични троугао $\triangle ABD$, потом се налази пресек круга са центром у $B$ и полупречником $BC$ и продужењем дужи $DB$. Коначно се налази пресек круга са центром у $D$ полупречника $DG$ и продужетка дужи $DA$. Јасно је да је $AH$ дуж исте дужине као и $BC$. Тако смо добили да је дужина дужи $DH$ заправо збир дужина дужи $AB$ и $BC$.

Потом се показује и како се од задате дужи веће дужине може одузети задата дуж мање дужине.

У првој књизи се налазе теореме о подударности троуглова, о својствима паралелних правих, а и конструкције паралелограма. Последња два става – 47 и 48 посвећена су доказу Питагорине теореме и њеног обрата. Верује се да доказ Питагорине теореме који је овде приказан потиче од самог Еуклида.



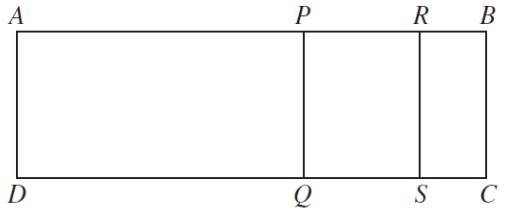
Доказ је неоспорно елегантан. Наиме, примећује се да је квадрат над $AC$ једнак двоструком троуглу $\triangle AFB$ (када се овако каже мисли се да су одговарајуће површине једнаке), јер је основица тог троугла $FA = AC$, а висина је $AC$. Овај троугао је пак једнак троуглу $\triangle ACD$ (подударни су), а тај двоструки троугао је једнак правоугаонику $AL$ (да, понекад се код Еуклида правоугаоник тако означава, а и зашто да не, јасно је о ком се објекту ради, зашто уводити додатне тачке?) – основица троугла је $AD$, а висина је друга страница правоугаоника $DL$ (наравно, није то буквално висина, $DL$ је једнако висини). Закључује се да је квадрат над $AC$ једнак правоугаонику $AL$. На сличан начин се добија да је квадрат над $BD$ једнак правоугаонику $BL$, те се тако и добија да је збир квадрата над $AC$ и $BC$ једнак квадрату над $AB$.

Вредна је спомена чињеница да Еуклид одмах после доказа Питагорине теореме даје и доказ обратног тврђења – уколико збир квадрата над две странице у троуглу јесте једнак квадрату над трећом те две прве странице образују прав угао.

Друга књига *Елемената* је краћа (садржи само 14 ставова) и већи део ње је помало необичан за наше поимање наставе геометрије. Ту се највише ради о грчкој *геометријској алгебри*. Наиме, криза у грчкој математици настала због проблема несамерљивости је, као што смо већ рекли, утицала на то Грци почињу да све бројеве и везе међу њима изражавају помоћу дужи, површина и слично. На пример, први став гласи:

Ако су дате две праве линије и једна од њих се подели на било који број одсечака, онда је правоугаоник одређен са те две праве линије једнак правоугаоницима који су одређени том неисеченом правом линијом и сваким од одсечака.

Наравно, овде су те праве линије заправо дужи и ово није ништа друго до закон дистрибутивности за множење:

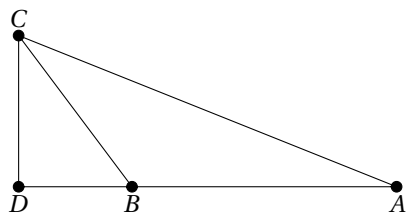



$AD \cdot AB = AD \cdot AP + AD \cdot PR + AD \cdot RB$ (наравно, може и било који број делова, слика се односи на поделу на три дела). У каснијим књигама се налазе и докази закона асоцијативности и комутативности за множење.

Став 5, на компликован начин формулише формулу за разлику квадрата, прецизније ту је показано да је $(a+b)(a-b)+b^2 = a^2$. Све је ово

везано и за решавање квадратне једначине, сличан дијаграм, који се користи за доказ ове чињенице, користи се и за решавање једначине $ax - x^2 = b^2$. Нећемо се детаљније тиме бавити.

Последња три става су занимљива. Став 12 даје формулацију косинусне теореме за тупоугли троугао (наравно формулација укључује тај тупи угао), док став 13 даје формулацију те теореме за оштроугли троугао. Илустрација за став 12:



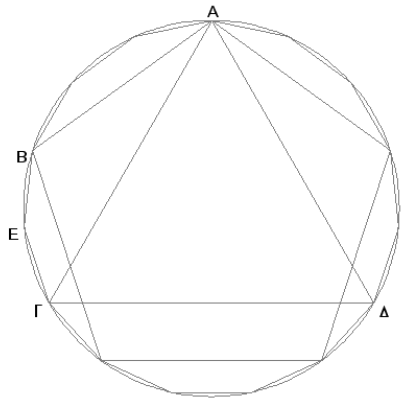

Речима се описује формула: $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BD$. Наравно, ово се лако показује двоструким коришћењем Питагорине теореме.

Став 14 гласи: Конструисати квадрат једнак правоугаоној слици.

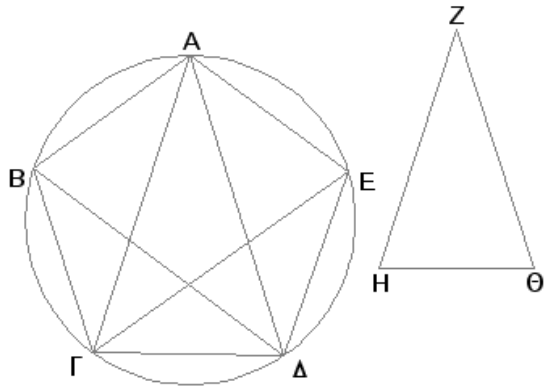
Дакле, овде експлицитна формулација није да се докаже нешто, него да се покаже како се може извести квадратура произвољног многоугла. У одговарајућој слици која илуструје став налази се опис квадратуре неког трапезоида, али је јасно да се то може урадити за било који многоугао. Најпре се заправо, на основу више ставова из прве књиге констатује да постоји правоугаоник чија је површина једнака површини датог многоугла, а суштина става је да правоугаоник сведе на квадрат. Интересантан је тај низ ставова у којима се постепено налази тај тражени правоугаоник, читаоцима препуштамо да их потраже ако им је то занимљиво, но ми то нећемо овде даље показивати.

Генерално се сматра да је материјал који је представљен у прве две књиге углавном резултат рада Питагорејаца. Трећа и четврта књига баве се геометријом круга и сматра се да тај материјал углавном потиче од Хипократа са Хиоса. Први став у трећој књизи говори о конструкцији центра круга, док последњи, став 37 садржи тврђење добро нам познато: $PA^2 = PB \cdot PC$, где је $P$ тачка ван круга, $A$ додирна тачка тангенте на круг која пролази кроз $P$, док су $B$ и $C$ пресечне тачке сечице круга која пролази кроз $P$. У четвртој књизи има 16 ставова и они се углавном баве правилним многоугловима уписаним и описаним око круга.

На пример, 16. став говори описује конструкцију правилног петнаестоугла. Наиме, конструишу се једнакостранични троугао и правил-




ни петоугао који имају једно заједничко теме. И потом се констатује да је само потребно преполовити лук $\widehat{\text{ВГ}}$. Та добијена тачка нам тада даје и страницу траженог правилног петнаестоугла ВЕ. Став 11, пак, описује конструкцију правилног петоугла уписаног у круг




и та је конструкција базирана на конструкцији једнакокраког троугла чији су углови на основици једнаки двоструком углу код врха. Потом се лук $\widehat{\text{АГ}}$ полови и тако се нађе страница правилног петоугла. А конструкција траженог једнакокраког троугла описана је у ставу 10.

Пета књига садржи дубље појмове. Ту се разматра теорија пропорција. Књига је у великој мери базирана на Еудоксовим резултатима.

О дефиницији 5, смо већ писали раније, док је дефиниција 4 оно што нам је сада познато као Архимедова аксиома (а и сам Архимед то приписује Еудоксу):

Каже се да су две величине у односу једна према другој ако неки умножак ма које од њих може бити већи од друге.

И ову дефиницију смо спомињали када смо говорили о Еудоксу. Поента је да се овде говори о упоредивости две величине. На пример, дуж и квадрат нису упоредиви.

Број ставова у књизи је 25 и у њој има више ставова који говоре о својствима пропорција, али и ставова који говоре о својствима бројева попут асоцијативности множења или дистрибутивности множења према сабирању.

У шестој књизи, у којој има 33 става, теорија пропорција се примењује на сличности разних фигура. Но, наведимо и једну важну дефиницију која се овде појављује.

Дефиниција 3. Каже се да је дуж подељена у крајњој и средњој размери (непрекидно) ако цела дуж стоји према већем делу као већи део према мањем.

Ово је чувени 'златни пресек'. Нисмо споменули раније, али ако се страница правилног петоугла постави дуж његове дијагонале, онда имамо ову поделу дужи. У ставу 30 показује се како се дуж дели на овај начин. Термин „непрекидно" у нашој литератури је везан за чињеницу да се овај процес никада не завршава (као што смо видели раније).

Занимљив је став 31 (генерализација Питагорине теореме, сетите се и квадратуре 'месеца'):

Код правоуглих троуглова фигура конструисана на страни наспрам правог угла једнака је збиру сличних и слично конструисаних фигура над странама које образују прав угао.

Седма, осма и девета књига посвећене су теорији бројева, наравно у геометријском руху. Почиње се дефиницијама парних и непарних бројева, простих и сложених бројева, парно-непарних, непарно-непарних, квадратних и кубних бројева. Такође ту налазимо и дефиницију савршеног броја – то је онај број који је једнак збиру својих правих делилаца. Прва два става су посвећена Еуклидовом алгоритму преко узастопних одузимања као што смо већ писали. У првом ставу се заправо говори о томе да ако се добије 1 на крају тог алгоритма, онда су бројеви узајамно прости, а други став тражи да се опише налажење заједничке мере (не заједничког делиоца, терминологија је прилагођена геометрији) за бројеве који нису узајамно прости. У овој књизи има и других познатих својстава бројева. На пример, став 24 каже да ако су $a$ и $c$ узајамно прости и ако су и $b$ и $c$ узајамно прости, онда су то и $ab$ и $c$.

Осма књига није превише занимљива за модерног читаоца, док девета садржи неколико занимљивих резултата. На пример, став 20:

Простих бројева је више од сваке задате множине простих бројева.

Наравно да Еуклид не каже да простих бројева има бесконачно много. Појам бесконачности је још далеко у будућности. Он каже да простих бројева има ВИШЕ ОД МА КОЈЕ КОЛИЧИНЕ простих бројева. Доказ је онај који добро знамо: ако је дата нека количина простих бројева, све их помножимо и додамо јединицу. Анализирајући тај број добија се да мора да постоји још неки прост број сем тих задатих.

Став 35 речима на занимљив начин описује метод за налажење суме геометријске прогресије. Исписано формулом то је следеће:

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+\cdots+a_n}=\frac{a_2-a_1}{a_1}.$$

Одавде није тешко извести формулу:

$$a_1+\cdots+a_n=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

Последњи, 36. став говори о формули за налажење савршених бројева. У модерним терминима то је следеће: ако је збир $1+2+\cdots+2^{n-1}$ прост број, онда је број $(1+2+\cdots+2^{n-1})2^{n-1}$ савршен број. Наравно није тешко приметити да, ако је број $1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ прост, онда и број $n$ мора бити прост. Наиме, уколико је $n=ab$, где су $a,b>1$, онда је

$$2^n-1=2^{ab}-1=\left(2^a\right)^b-1=(2^a-1)\left(\left(2^a\right)^{b-1}+\cdots+2^a+1\right).$$

Грци су знали прва четири савршена броја: 6, 28, 496 и 8128. Ојлер је показао да је сваки паран савршен број управо горенаведеног облика. Оно што се и даље не зна је да ли има бесконачно много парних савршених бројева, као и да ли уопште постоји непаран савршени број.

Десета књига је најобимнија и најкомпликованија. Она садржи чак 115 ставова и посвећена је проблему (не)самерљивости. На самом почетку налазимо неколико ставова који говоре о алгоритму за испитивање самерљивости величина који смо раније спомињали. Ту се истиче да су величине несамерљиве уколико се поступак никада не завршава, а да се тако налази заједничка мера уколико се поступак завршава. Потом следи низ ставова о међусобним односима самерљивих и несамерљивих величина. Разматрају се дужи самерљиве у степену, мислећи притом на други степен, тј. две величине чији су квадрати несамерљиви. И сложеније формиране величине. Заправо ту се разматрају, у савременим ознакама, величине облика $a\pm\sqrt{b}$, $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Ту су и поступци рационализације разломака облика $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$, $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$. Јасно је да разматрање овако формираних величина

без модерне нотације није лако за праћење и стога се ова књига *Елемената* сматрала најнедоступнијом.

Последње три књиге су у највећој мери посвећене стереометрији. Једанаеста књига почиње низом дефиниција, од којих су неке проблематичне са логичког аспекта, попут „Тело је оно што има дужину, ширину и дубину”, „Граница тела је површина”. Последње дефиниције су дефиниције правилних полиедара: коцке, октаедра, икосаедра и додекаедра (пирамида је раније дефинисана, па овде нема дефиниције тетраедра). Ставови који следе се тичу односа правих и равни, на пример:

Став 3. Ако две равни секу једна другу, њихов пресек је права.

Став 14. Равни управне на истој правој паралелне су.

Каснији ставови се односе на рогљеве, запремине паралелепипеда и слично.

Дванаеста књига је кратка и почиње нама добро познатим ставовима:

Став 1. Слични многоуглови, уписани у кругове, односе се један према другом као квадрати над пречницима.

Став 2. Кругови се односе један према другом као квадрати над пречницима.

Потом следе ставови који се тичу запремина тела. На пример,

Став 7. Свака призма са троуглом у основи може се поделити на три међу собом једнаке пирамиде са троугловима у основама.

Став 10. Свака купа је трећина ваљка, ако имају исту основу и једнаке висине.

Последња, тринаеста књига посвећена је правилним полиедрима. Она почиње следећим ставом.

Став 1. Ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат над збиром већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату над том половином.

Нама није тешко да се у то уверимо. Наиме, ако је цела дуж $a$, а $x$ је већи део, онда је $a : x = x : (a - x)$. Добија се квадратна једначина

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Одавде следи да је

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Наравно, одавде није тешко наћи колико је $x$. И следећих пет ставова даје резултате за златни пресек, а и став 9 је у вези са њим. Став 10 је занимљив.

Став 10. Ако је у круг уписан правилни петоугао, биће квадрат стране тог петоугла једнак збиру квадрата стране правилног шестоугла и стране правилног десетоугла уписаних у исти круг.

Пред сам крај *Елемената*, у ставовима 13–17 одређени су односи квадрата ивице и квадрата пречника описане сфере за правилне полиедре:

| тело | однос |
|---|---|
| тетраедар | $\frac{2}{3}$ |
| октаедар | $\frac{1}{2}$ |
| хексаедар | $\frac{1}{3}$ |
| икосаедар | $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ |
| додекаедар | $\frac{3-\sqrt{5}}{6}$ |

У последњем ставу *Елемената* најпре се пореде ивице правилних полиедара, а у другом делу тог става се показује да нема других правилних полиедара сем ових пет.

Значај Еуклидових *Елемената* је огроман. Састављени су око 300. године п. н. е. и копирани су велики број пута. У тим копирањима, додавани су коменари, неке додатне информације, додатни ставови, па чак и додатне две књиге за које се ипак зна да нису део оригиналних *Елемената*. Сматра се да је било око хиљаду издања овог дела.

## Архимед

Архимед је свакако био најзначајнији математичар антике и један од најзначајних математичара икада. Живео у је граду Сиракузи на Сицилији, а школовао се, скоро извесно, у Александрији. Знамо да је погинуо при освајању Сиракузе од стране Римљана 212. г. п. н. е. током Другог пунског рата. Како је, по неким историчарима, у тренутку смрти имао 75 година, процена је да је био рођен 287. године п. н. е.

Плутарх, у својој биографији римског генерала Марцела, који је освојио Сиракузу, пише да је Архимед био централна личност у одбрани Сиракузе због многих својих механичких направа које су задале велике невоље римским освајачима. Ипак, Плутарх каже, Архимеду су били дражи његови чисто математички резултати од тих машина.

Архимедови радови дуго времена нису били толико познати као Еуклидови *Елементи* добрим делом и зато што су *Елементи*, као што је већ речено, заправо уџбеник елементарне математике, док Архимедови радови то свакако нису. Има међу њима и једноставнијих списа, но многи су веома напредни и другачији.

Он је имао значајну преписку са александријским математичарима — Доситејем, који је био студент Архимедовог блиског пријатеља Конона, и Ератостеном који је дуги низ година био управник александријске Библиотеке. У тим препискама налазимо многе Архимедове радове. Ево списка Архимедових радова који су сачувани.

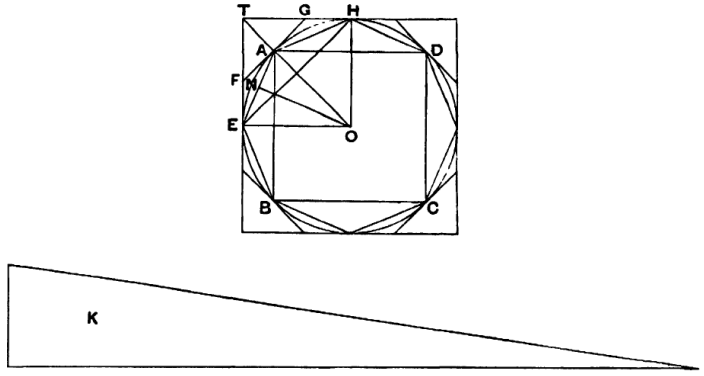
1. О равнотежи равни, Први и Други део
2. Квадратура параболе
3. О сфери и цилиндру, Први и Други део
4. О спиралама
5. О коноидима и сфероидима
6. О плутајућим телима
7. Мерење круга
8. Пребројавање песка
9. Метод
10. Књига лема
11. Проблем о стоци

Преписи ових дела потичу из X века и касније, чак и значајно касније.

Наравно да нема говора о томе да се можемо позабавити свим овим радовима, посебно не детаљно, но направићемо неки избор.

## Мерење круга

То је веома кратак рад и састоји се само од три става. У првом ставу се тврди да је површина круга једнака површини правоуглог троугла чија је једна катета полупречник круга, а друга је једнака обиму круга. Наравно да је то сада нама јасно, но, присетимо се да је питање квадратуре круга било и даље отворено. Присетимо се и Диностратове квадратуре круга помоћу трисектрисе, у којој се заправо налази дуж једнака четвртини обима круга. Те нам трисектриса омогућава да нађемо и овакав троугао, а лако је наћи квадрат исте




Слика 1: Мерење круга

површине као и дати троугао. Но, Архимедов резултат није у вези са причом о трисектриси.

Архимед користи исти метод који смо већ приказали при доказу да се површине кругова односе као квадрати (полу)пречника. Но, ипак га наводимо. Дакле, површина круга може бити једнака, може бити већа, а може бити и мања од површине троугла K. Означимо са $P(k)$ површину круга, а са $P(\mathrm{K})$ површину троугла.

Претпоставимо, најпре да је $P(k) > P(\mathrm{K})$. У круг најпре упишемо квадрат $ABCD$, а потом делимо лукове $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ на пола, те тако добијемо правилни осмоугао. Аналогно настављамо поступак све док не добијемо правилни многоугао чије су странице такве да збир површина одговарајућих одсечака круга не постане мањи од разлике површина круга и троугла, тј. мањи од $P(k) - P(\mathrm{K})$. Стога је површина тог многоугла већа од површине троугла K. Но, ако је $ON$ нормала која полази из $O$ до једне од страница тог многоугла (дакле, то је висина троугла $\triangle AEO$, онда је јасно да је $ON < r$, где је $r$ полупречник круга, а и обим тог многоугла је мањи од обима круга $k$. Према томе, површина тог многоугла, који је растављен на једнакокраке троуглове, и која је заправо једнака површини правоуглог троугла који за катете има $ON$ и дуж једнаке дужине као и обим тог многоугла (просто се саберу површине ових троуглова и то буде јасно), мора бити мања од површине троугла K, што је контрадикција.

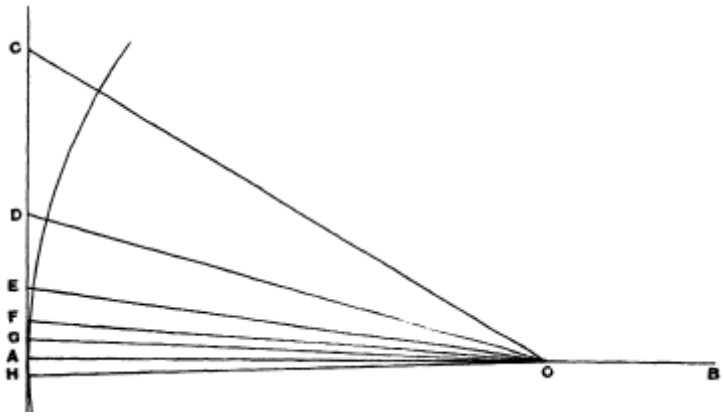
На аналогни начин се, посматрањем овај пут описаних правилних многоуглова долази до контрадикције и уз претпоставку да је $P(k) < P(\mathrm{K})$. Закључује се да мора бити $P(k) = P(\mathrm{K})$.

У ставу 3 се, de facto, доказује процена за $\pi$:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Наравно, ово је формулисано у терминима процене размере обима круга и његовог пречника. Тај количник, који ми данас означавамо са $\pi$, Архимед никако није означавао.

Поступак који је Архимед користио је једноставан.




Он полази од угла који је једнак трећини правог угла, то је на слици угао $\measuredangle AOC$. Зашто од баш тог угла? Разлог је једноставан, када се погледа слика, дуж $AC$ је заправо половина странице правилног шестоугла описаног око датог круга. Архимед потом дели овај угао на пола, (тачка $D$), поново на пола (тачка $E$), поново на пола (тачка $F$) и још једном на пола када добија тачку $G$. Тада је дуж $GH$ заправо једнака страници правилног 96оугла и Архимед користи обим тог 96оугла да апроксимира обим круга одозго. При рачунању користи процене квадратних корена који се појављују у рачуници. Прва процена коју користи је $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ (касније користи процену $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$). Он не даје никакво објашњење како је дошао до те, а и других, доста сложенијих апроксимација. Заправо, много тога он овде не објашњава, но Еутокије (око 480 – око 540. године), математичар из Палестине, допуњавао је његове рачунице да би могле лакше да се прате (коментарисао је и друга његова дела). Постоје разне хипотезе како је дошао до тих апроксимација, једна од њих сугерише да му је било познато следеће:

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}, \text{ ако је } 2a \pm 1 > b.$$

Занимљивости ради, наведимо још неке процене које је Архимед користио у овом делу:

$$\begin{aligned} 3013\frac{3}{4} &> \sqrt{9082321} \\ 591\frac{1}{8} &< \sqrt{349450} \end{aligned}$$

$$2339\frac{1}{4} \quad < \quad \sqrt{5472132\frac{1}{16}}$$

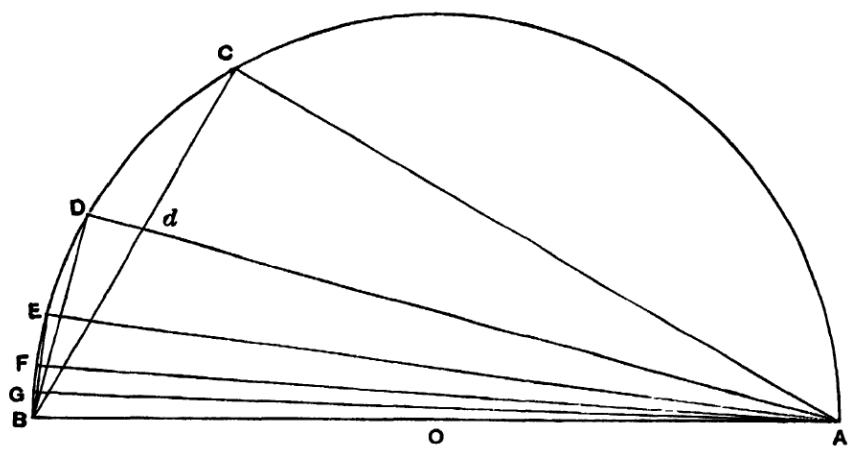
Наравно да не треба памтити ове резултате, али да се ту рачунало, рачунало се. Коначно добија процену за $\pi$:

$$\pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}.$$

Мали трик даје коначну процену:

$$\pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}.$$

За доњу процену користи наравно уписане правилне многоуглове:

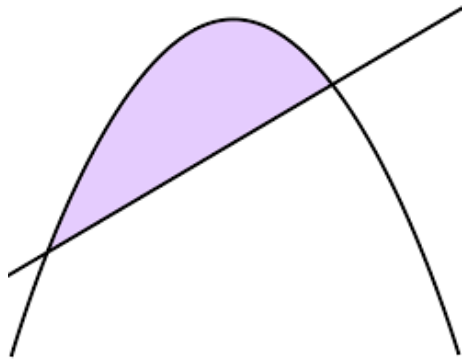



и добија:

$$\pi > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

## Квадратура параболе

Проблем је једноставан: за дати одсечак параболе (област у равни ограничена параболом и једном правом која је сече) наћи квадрат једнаке површине.

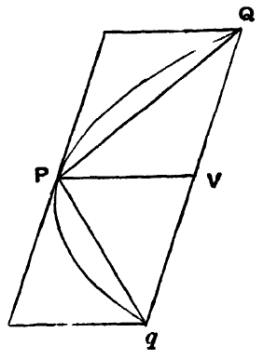


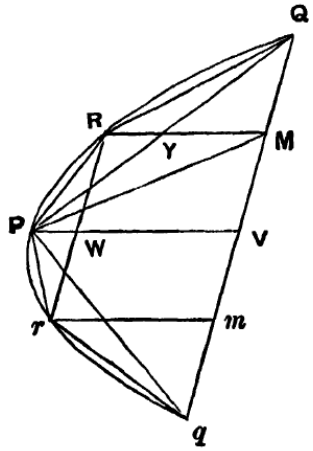
Архимед свој резултат објављује у писму Доситеју и изражава жаљење због смрти Конона, кога је веома поштовао као геометра и који би сигурно могао лепо да процени Архимедов резултат. Занимљиво је овде навести да је Доситеј скоро сигурно био јеврејин. Наиме, име Доситеј је грчка верзија имена Матеј, а не зна се да је ико у Александрији имао то име а да није био јеврејин. Ово је занимљиво зато што је то једина сачувана преписка између Грка и јевреја из тог доба. Архимед наводи да је до резултата прво дошао помоћу механике, а затим га је доказао помоћу геометрије. Он ту презентује оба приступа. Ми ћемо кратко говорити о геометријском приступу.

Основна идеја састоји се у следећем. У дати одсечак параболе уписати троугао максималне површине коме је основица дата тетива. Јасно је да се ради о троуглу чије је теме на параболи, а највише је удаљено од те тетиве. Ми знамо (бар би требало да знамо на основу разматрања из Анализе 1) да је то теме у коме је тангента на параболу паралелна тој тетиви. Наравно, и Архимед је то знао.

Следећа слика је важна.
Овде је $QV = qV$, површине троуглова $\triangle PQV$ и $\triangle qPV$ су једнаке и из паралелограма који се појављују на слици видимо да је површина троугла већа од половине површине тог одсечка (површина нацртаног паралелограма је јасно већа од површине одсечка, а површина троугла је половина површине тог паралелограма). То нам је важно за метод исцрпљивања. У следећем кораку поступак се понавља за два мања одсечка над тетивама $Pq$ и $PQ$.

Архимед је, позивајући се на Еуклидово дело о конусним пресецима (које немамо сачувано, али, као што смо већ спомињали, знамо




за његово постојање), користећи својства параболе на, релативно једноставан начин показао да су површине троуглова $\triangle PRQ$ и $\triangle Prq$ једнаке и да износе једну осмину површине троугла $\triangle QPq$. Дакле, ако са $T$ означимо површину троугла $\triangle QPq$, онда је површина многоугла $QRPrq$ једнака $T + \frac{1}{4}T$. А, као и на почетку, површина додатих троуглова премашује половину површине остатка. Тако да знамо да ће после коначно много корака преостати површина која је мала колико год желимо. Ми бисмо данас просто констатовали да све то значи да је површина одсечка једнака суми реда

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}T = \frac{4}{3}T,$$

но Архимед није сабирао бесконачне редове. Уместо тога, он је доказао следећи став.

Став 23. Ако је дат низ површина $A, B, C, D, \ldots, Z$, од којих је $A$ највећа и свака

је једнака четворострукој следећој, онда је

$$A+B+C+D+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A.$$

Ово му је било довољно да покаже да је површина одсечка једнака $\frac{4}{3}T$.

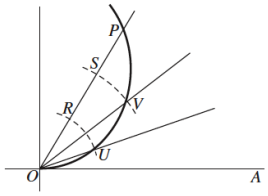
Означимо површину одсечка са Par. Уколико је $\mathsf{Par}>\frac{4}{3}T$, онда би после коначно много корака наведеног поступка добили да нам је остатак површине мањи од $\mathsf{Par}-\frac{4}{3}T$. Како је збир површине добијеног многоугла и тог остатка једнак Par, добили бисмо да је површина тог многоугла већа од $\frac{4}{3}T$. Но, то није могуће јер је површина многоугла једнака $A+B+C+D+\cdots+Z$ (овде наравно узимамо $A=T$), а на основу става 23, $A+B+C+D+\cdots+Z<\frac{4}{3}A$.

Претпоставимо да је $\mathsf{Par}<\frac{4}{3}T$. Полазећи од површине $A=T$ и понављајући поступак долазимо да површине $X$ која је мања од $\frac{4}{3}T-\mathsf{Par}$, а $A+B+C+\cdots+X+\frac{1}{3}X=\frac{4}{3}T$. Дакле, $\frac{4}{3}T$ је веће од $A+B+C+\cdots+X$ за површину која је мања од $X$, а од Par за површину која је већа од $X$. То би значило да је $\mathsf{Par}<A+B+C+\cdots+X$, а то наравно није могуће.

Дакле, на овај начин Архимед искључује две могућности и закључује да мора да важи трећа, тј. $\mathsf{Par}=\frac{4}{3}T$. Видимо да су се овакви резултати доказивали у антици без коришћења граничних процеса.

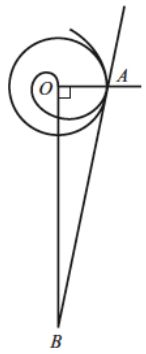
## О спиралама

У раду *О спиралама*, Архимед се бави кривом коју је увео преко кретања – полази се од полуправе и њеног темена. Тачка почиње равномерно да се креће по полуправој, од њеног темена, док се сама полуправа равномерно ротира око свог темена. Крива коју описује ова тачка је спирала, коју данас знамо под именом *Архимедова спирала* и чија је поларна једначина $r=a\theta$. Бављењем овом кривом, Архимед одступа од главног тока грчке геометрије. Можда је један од мотива био и разматрање трисекције угла, као и квадратуре круга које се могу остварити помоћу ове криве.




Да бисмо поделили дати угао на три једнака дела, довољно је поставити угао тако да се један крак поклапа са почетном позицијом полуправе, а потом наћи пресек угла и спирале. То је тачка $P$

на слици. За поделу угла $\measuredangle AOP$ на три једнака дела, довољно је поделити дуж $OP$ на три једнака дела и потом само нацртати одговарајуће лукове круга који у пресеку са спиралом дају тачке $V$ и $U$ и тако и трисекцију угла (уверите се да је ово тако). Није заправо изненађујуће да се помоћу ове спирале добија трисекција угла – и она је крива настала комбинацијом кретања по правој и ротације, као и Хипијина трисектриса. И, као и у том случају, ова крива омогућава и квадратуру круга. Архимед је показао да, ако је $AB$ тангента на




спиралу у тачки $A$, која се добија на крају прве пуне ротације и ако је $\triangle AOB$ правоугли са правим углом у тачки $O$, онда је катета $OB$ заправо једнака кружници (једнаке је дужине) са центром у $O$, полупречника $OA$. Дакле, као што знамо из његовог рада о мерењу круга, површина $\triangle AOB$ једнака површини круга полупречника $OA$. Наравно, тада лако налазимо и квадрат исте површине као и тај круг.

Овде се први пут појављује питање налажења тангенте на криву која није конусни пресек. Архимеду је било јасно да је такав проблем, као што уосталом и видимо, еквивалентан квадратури круга.

## Метод

Од посебног је значаја кратко Архимедово дело *Метод*. То дело је било изгубљено дуго времена, мада се знало да је постојало на основу напомена у другим изворима. Нађено је тек 1906. године. Наиме, дански научник Хајберг је сазнао да се у Константинопољу (званичан назив Истанбула је био Константинопољ све до 1923. године, када је формирана Република Турска, а главни град постала Анкара) налази један палимпсест са математичким садржајем. Радило се о пергаменту на коме је избрисан, али не у потпуности, првобитан текст, да би се записао молитвеник који је коришћен у Православној цркви. Хајберг је успео да фотографише листове и открио је да су ту дела Архимеда:

*О сфери и цилиндру*, већи део рада *О спиралама*, део рада *Мерење круга* и *О равнотежи равни*, затим *О плутајућим телима* и, најважније од свега, ту је био једини примерак *Метода*. Овај палимпсест је поново изгубљен после Првог светског рата и поново се појавио када је предат на аукцију деведесетих година. Купљен је од стране анонимног дародавца за два милиона долара и касније је модерна технологија искоришћена да се открије оригинални текст у њему.