

Грчка математика 1

Зоран Петровић

26. фебруар 2024.

Почеци грчке математике

Прве Олимпијске игре одржане су 776. године п. н. е. и у то време је већ постојала значајна грчка литература, но о грчкој математици из тог доба не знамо ништа. Јасно је да је литература могла да се у великој мери преноси усменим предањем и то је сигурно један од разлога што је ситуација била таква. Заправо све до VI века п. н. е. немамо никаквих података о грчкој математици. Тек од тада имамо неке податке, али нема докумената све до IV века п. н. е. Чак и у том веку има мало преосталих оригиналних докумената. Информације које имамо о почецима грчке математике су базиране на каснијим изворима.

Зна се да је Аристотелов студент Еудем, који је пореклом био са Родоса, око 320. године п. н. е. написао Историју математике (он је писао и друге књиге на пример Историју астрономије), но она није сачувана. Касније је неко саставио скраћени запис ове Историје, но ни оригинал тог записа није сачуван. Информација коју имамо о тој Историји садржана је у Прокловим (Прокло је био значајан неоплатонистички филозоф из V века н. е.) *Коментарима о првој кљизи Еуклидових Елемената*.

Дакле, информације које имамо о почецима грчке математике нису базиране на оригиналним изворима, него на каснијим документима, односно на историјској традицији. Прва два математичара који се експлицитно спомињу по имени били су Талес из Милета (оквирне године живота: 624–548 п. н. е.) и Питагора са Самоса (око 570–490 п. н. е.).

Талес

Мало се тога са сигурношћу зна о Талесу. Но, традиција га описује као изузетно паметног и сналажљивог човека и сматран је за првог филозофа – он је први од Седам мудраца. Краљ Крез, владар суседне Лидије, унајмио га је да пронађе начин да његова војска пређе реку Халис, али да не гради мост. Талес је решио проблем тако што је на обали реке улогорио војску, а затим је опкопан ров око логора те је тако скренут део речног тога. Река је текла са обе стране тabora, али је била плитка и могла је да се прегази.

Он је дosta путовао и по Египту и по Месопотамији и тамо је имао прилику да се упозна са математиком тих цивилизација. Сматра се да је Талес у Месопотамији могао да види тамошње астрономске таблице. Постоји легенда о томе да је Талес 585. године п. н. е. предвидео помрачење Сунца, али то заиста није потврђена чињеница. Математички резултати који се приписују Талесу су следећи:

- Угао над пречником круга је прав.
- Пречник дели круг на два једнака дела.
- Углови на основи једнакокраког троугла су једнаки.
- Унакрсни углови су једнаки.
- Став УСУ за подударност троуглова.

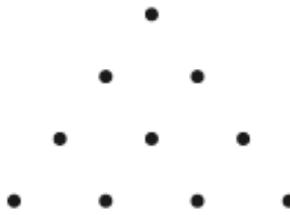
Сада је универзално прихваћена чињеница да су Грци били ти који су дали елементе логичке структуре геометрији, но ипак се не зна да ли је Талес био тај који је то урадио, или је до тога дошло знатно касније, можда чак два века касније.

Питагора и Питагорејци

За име Питагора везују се разне легенде. Његово место рођења је било близу места рођења Талеса, но животни путеви су им били значајно различити. Док је Талес био познат по својим практичним активностима, Питагора је био пророк и мистик. И он је дosta путовао, сигурно и по Египту и Месопотамији, али можда је ишао чак и до Индије. Није небитно навести да је он био савременик и Буде, Конфучија, као и Лао Цеа. По повратку са тих путовања насељио се у јужном делу Италије у Кротону, што се у то време сматрало делом Велике Грчке. Основао је тајно друштво, које називамо Питагорејци или Питагоровци. Резултате који се приписују Питагори, исправније је приписати Питагорејцима. Тако ћемо и овде радити, сем у случају када је позната особа којој се приписује конкретан резултат.

Питагорејци су веровали у прочишћење кроз бављење филозофијом и математиком. Сматра се да је сам Питагора смислио речи „филозофија“ („љубав ка мудрости“) и „математика“ („оно што се учи“). Веровали су у сеобу душе после смрти у друго тело, људско или животињско. Били су вегетаријанци, али су имали и друге специфичне забране.

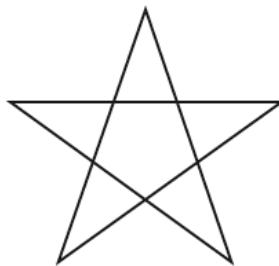
Основни мото Питагорејца је, поједностављено говорећи, био: „Све је број“. Наравно, овде је број био позитиван цео број, оно што ми данас зовемо природни број. Та фасцинираност бројевима нам сада изгледа наивно, али она ипак лежи у основи покушаја да се свет објасни помоћу бројева, математички. Појединим бројевима су придавана посебна својства, нећемо се наравно тиме бавити, али наведимо да је за њих био посебно важан симбол тетрактис:



Слика 1: Тетрактис

Он представља најсветији, за Питагорејце, број 10. Он је најсветији јер представља збир свих димензија, при чему димензију нула представља једна тачка, димензију један представљају две тачке итд. Занимљиво је да број 10 није Питагорејцима био значајан због чињенице да имамо десет прстију на рукама.

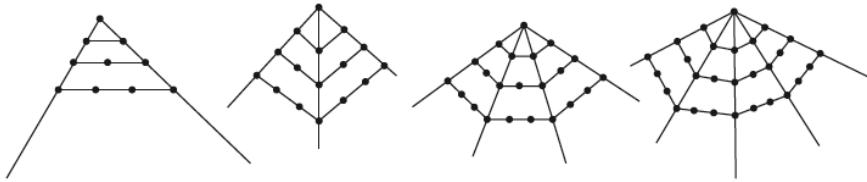
Други значајан симбол био је пентаграм:



Слика 2: Пентаграм

Њега формирају дијагонале правилног петоугла и о њему ће бити речи касније.

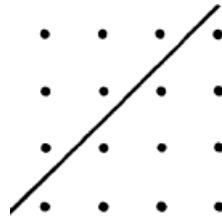
Придруживање бројева објектима, посебно је било видљиво у тре-тирању фигурних, прецизније многоугаоних бројева. Дакле, питање је који бројеви могу бити придруженi којим фигурама.



Слика 3: Многоугаони бројеви

Праве и дужи које се појављују нису део приказа, само су ту ради прегледности, многоугаони бројеви су представљани каменчићима. На претходној слици видимо троугаоне, квадратне, петоугаоне и шестоугаоне бројеве.

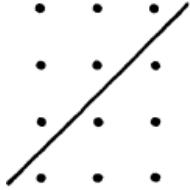
Питагорејцима је била занимљива подела многоугаоних бројева на троугаоне, а с тим у вези, јасно, и подела многоуглова на троуглове.



Слика 4: Подела квадратног броја

Ова слика нам приказује поделу квадратног броја на два троугаона чије се странице, разликују за 1, а следећа слика нам приказује поделу ‘издуженог’ броја (заправо броја облика $n(n+1)$, где је n природан број) на два једнака троугаона:

Питагорејци откривају и везу између односа малих природних бројева и музике. Најпре су открили да ако имамо две жице од којих је једна двоструке дужине, онда оне при трзању емитују исте ноте, које се разликују за октаву – пошто је таласна дужина код дуже жице већа, фреквенција је нижа и стога је тон дубљи, за једну октаву. До хармоније у звуку долази када се односи дужина две жице налазе у једнос-



Слика 5: Подела правоугаоног броја

тавним размерама попут 2:3 или 3:4. Разлика у тоновима се види у једноставним односима дужина жица. Ту имамо прве законе акустике, а познато је да нису експериментисали само са жицама, него и са другим објектима. На пример, Хипас из Метапонта је имао четири метална диска исте основе, али различитих дебљина – односи дебљина су били $1:1\frac{1}{3}:1\frac{1}{2}:2$ и показао је да они производе исту хармонију као и жице са одговарајућим односима дужина. Неки му приписују и експерименте са различито напуњеним чашама са сличним ефектом.

Наравно, Питагорејци су, последично, имали и веома смеле разраде ове идеје – да се небеска тела крећу по сферама са таквим односима да производе хармонијске тонове: „хармонија сфера“. Наравно, то нам сада делује врло наивно, али идеја да је свемир правилно уређен јесте једна значајна тековина Питагорејаца.

Прокло, на основу Еудема, говори о развоју теорије пропорција код Питагорејаца. Свакако се Питагора у Месопотамији упознао са аритметичком, геометријском и хармонијском средином и односом између њих:

$$a : A(a, b) = H(a, b) : b.$$

где смо са $A(a, b)$ означили аритметичку, а са $H(a, b)$ хармонијску средину бројева a и b . Но, они су касније додали још седам ‘средина’ и тиме комплетирали до укупно 10 (знатно да им је тај број био посебно значајан). Наведимо их. ’Средина’ b од a и c , задата је једном од следећих пропорција (које ћемо писати као разломке).

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a} & (6) \frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b} \\ (2) \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b} & (7) \frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a} \\ (3) \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c} & (8) \frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a} \\ (4) \frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a} & (9) \frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a} \\ (5) \frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a} & (8) \frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a} \end{array}$$

Заправо, може се проверити да су то једине могућности у којима поредимо односе разлика тих величина и односе самих величина, при чему су све различите и b је између a и c . Није тешко проверити да прве три једнакости дају за b редом аритметичку, геометријску и хармонијску средину. Остале ... Забаве ради, можемо да приметимо да, на пример, четврта даје $b = \frac{a^2+c^2}{a+c}$.

Записивање бројева

Направимо сада кратку паузу у разматрањима о теоријским аспектима грчке математике и позабавимо се питањем како су Грци записивали бројеве. Постојала су два начина записивања бројева – атички и јонски.

Атички систем бројева је био сличан каснијем римском систему, мада је имао и неке своје предности. Ево кратке табеле:

број	ознака
1	I
2	II
3	III
4	III
5	Π или Γ
10	Δ
100	Η
1000	X
10000	M

Називи: ПЕНТА за 5, ДЕКА за 10, ХЕКАТОН за 100, ХИЛИОЈ за 1000 и МИРИОЈ за 10000. Предност у односу на каснији римски систем записивања састојао се у томе што се за бројеве 50 и 500 нису користили посебни симболи, него комбинације већ постојећих:

$$50 = \Gamma_{\Delta}, \quad 500 = \Gamma_{\mathrm{H}}, \quad 5000 = \Gamma_{\mathrm{X}}, \quad 50000 = \Gamma_{\mathrm{M}},$$

Тако бисмо, на пример, број 45628 записивали овако

$$\text{ММММ } \Gamma_{\Delta} \Gamma_{\mathrm{H}} \text{ H } \Delta \Delta \Gamma_{\mathrm{M}}.$$

Јонски систем је био базиран на алфабету. Грчки алфабет потиче од феничанског писма (у коме није било ознака за самогласнике, који су додати) и имао је 24 знака. А Грцима је било потребно 27 знакова. Наиме, систем јесте био формиран тако да се број 10 истицао, али то није био позициони систем. За ознаку јединица користило се 9 слова, за ознаку десетица других девет слова и за ознаку стотица других 9 слова. Дакле, на грчки алфабет додата су још три стара симбола Φ, ϕ

(„копа”, које је и претеча латиничног q), ζ , ς („стигма”, или „дигама”) и \beth , \beth („сампи”). Најпре су се користила велика слова, мала су уведена тек знатно касније. Ево табеле:

A	B	G	D	E	ζ	Z	H	Θ
α	β	γ	δ	ϵ	ζ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

I	K	Λ	M	N	Ξ	O	P	\varnothing
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	\o	π	φ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

R	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω	\beth
ρ	σ	τ	v	ϕ	χ	ψ	ω	\beth
100	200	300	400	500	600	700	800	900

На пример, број 967 би се записао овако: $\beth\zeta\zeta$. За хиљаде су коришћени знаци за јединице испред којих би се писала доња цртица: $\alpha = 1000$. На пример $\iota\beta\kappa = 2020$. Тако се без проблема могу записсвати природни бројеви мањи од 10000. За веће бројеве користио се симбол M, који је означавао 10000 и онда би се, на пример, број 1345879 записивао овако: $M\rho\lambda\delta \cdot \iota\varepsilon\omega\theta$. Дакле, то би заправо било $134 \times 10000 + 5879$, а · је био симбол за раздвајање.

Код писања разломака поново наилазимо на египатску склоност ка јединичним разломцима, тј. разломцима облика $\frac{1}{n}$. Они би се писали тако што би се после именоца стављао апостроф („прим“): разломак $\frac{1}{27}$ би се записивао као $\kappa\zeta'$. Наравно да би ту могло доћи до конфузије: да није то можда $20\frac{1}{7}$? Но, из контекста би се закључивало о ком броју се ради.

Како се рачунало са сигурношћу не можемо да кажемо. Јасно је да су биле коришћене неке рачунаљке, неке табле за рачунање помоћу каменчића, али ниједан такав предмет није сачуван. Постоји слика на једној вази где се види табла за рачунање, а Херодот је записао да је у рачунању са каменчићима Грк радио слева на десно, а Египћанин здесна на лево.

На kraју овог дела о записивању бројева наведимо да се и код нас, током средњег века користила оваква варијанта записивања бројева, наравно базирана на ћирилици:



Слика 6: Староћирилски систем бројева

Три конструктивна проблема антике

V век п. н. е. био је период значајног напретка Атине. Започео је успешном одбраном од Персијанаца, а завршен поразом Спарте од Атине. Велики напредак Атине у ово Периклово доба утицао је на прилив значајног броја учених људи у Атину. Један од њих је био и Анаксагора, који је рођен у Јонији у Малој Азији у време док је она била под влашћу Персије. Он је био први значајнији филозоф који је направио каријеру у Атини. У Атину је дошао 480. године п. н. е. у години поморске битке код Саламине, у којој су грчки савезници под командом Темистокла задали пресудан ударац Персијанцима под Ксерком те на тај начин одбрањили грчки свет од њихове инвазије. Био је учитељ и пријатељ Перикла и човек слободног мишљења. Вероватно су оба ова разлога (Перикле је имао и јаке политичке противнике у Атини) утицала на то да буде оптужен за безбожност – тврдио је да ни Сунце ни Месец нису божанства. Сунце је само ужарени камен величине Пелопонеза, док је Месец био истог састава као и Земља, а светлост је добијао од Сунца и рефлектовао га на Земљу. Неко време је и провео у затвору из кога га је избавио Перикле, али је ипак морао да оде у изгнанство у коме је и умро 428. године п. н. е. – годину дана пре рођења Платона и годину дана после смрти Перикла.

Како је Плутарх писао, Анаксагора се у затвору у Атини бавио и проблемом квадратуре круга – како наћи квадрат који има исту површину као и дати круг. Ту први пут наилазимо на спомињање овог проблема. Није било јасно шта је дозвољено користити у ту сврху, али је касније (највероватније и доста касније, под утицајем Платона) било искристалисано да је за ту сврху дозвољено користити само лењир и

шестар. То је у вези са тим да су савршене линије права и круг.

Перикле је умро од куге која је харала Атином. Сматра се да је тада од куге умрла скоро четвртина становника Атине. За епидемију куге се везује и прича о другом конструктивном проблему антике. Наводно су Атињани послали делегацију у храм Аполона у Делфима да питају шта би требало да ураде да зауставе епидемију куге. Дошли су одговор од пророчишта да морају да удвоструче олтар у облику коцке који је био посвећен Аполону. Атињани су удвостричили дужину странице, но куга није престала. Јасно је да тиме нису решили проблем, јер су тако добили осам пута већу запремину олтара. Ово је прво спомињање проблема удвостручавања коцке.

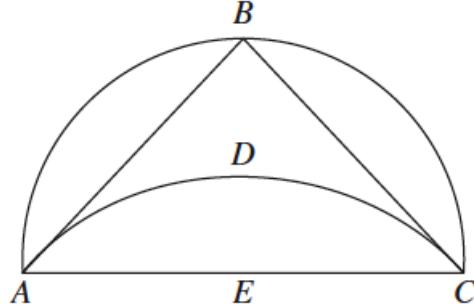
Такође је у ово време у Атини ‘циркулисао’ проблем трисекције угла: како дати угао поделити на три једнака дела. Ови проблеми, посебно каснији захтеви за њихово решавање, где се конструкција морала извршити искључиво помоћу лењира и шестара, утицали су значајно на развој математике и дуго векова нису били разрешени. Но, већ је у античко доба било неких решења која, додуше, нису била при тим рестриктивним условима, али и поред тога су била занимљива.

Хипократова квадратура „месеца”

Хипократ са Хиоса (то није лекар Хипократ који је био са Коса) је био нешто млађи од Анаксагоре и у Атину је дошао око 430. године п. н. е. да се бави трговином. Но, сву имовину је изгубио, да ли због неке преваре или због напада гусара, не знамо, али знамо да га то није обесхрабрило. Окренуо се студијама геометрије. Написао је и прве „Елементе геометрије”, неких сто година пре Еуклидових *Елемената*, али то дело, нажалост, није сачувано, али да је постојало знамо преко Аристотела. Податке о Хипократовој математици имамо од Симпликија који је око 520. године наше ере, ископирао, по својим речима, делове Еудемове „Историје математике”.

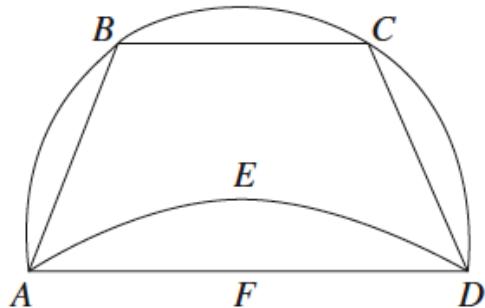
По тим подацима, Хипократ је извршио квадратуру „месеца”. Под „месецом” се подразумевала криволинијска фигура коју ограничавају два лука кругова различитог полупречника. Најпре се код Еудема наводи да је Хипократ доказао следећу теорему: Површине два слична одсечка два круга се односе као квадрати њихових тетива (одсечци су слични ако одговарају истом централном углу). Заправо Еудем тврди да је Хипократ до овог резултата дошао тако што је показао да се површине кругова односе као квадрати њихових полупречника. Тешко је поверовати да је Хипократ имао доказ овог резултата. Вероватно је имао неки аргумент којим је оправдавао валидност те теореме, али доказ скоро сигурно није имао. Ми ћемо касније приказати значајно каснији доказ те чињенице. Тај доказ је базиран на знатно суптилнијим методама него оним које су биле доступне Хипократу.

Ево како је, базирано на претходним резултатима, Хипократ извео квадратуре неких „месеца”. Као први пример посматрајмо једнакокраки правоугли троугао и одговарајући полукург.



Конструишимо и лук над AC тако да је новодобијени одсечак AEC сличан одсечцима над тетивама AB и BC . Како је $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (због једноставности записа, нисмо писали $|AB|$ као дужину странице AB , тако ћемо радити и даље), а према наведеном резултату површине сличних одсечака се односе као квадрати одговарајућих тетива, добијамо да је површина одсечка AEC једнака збиру површина одсечака над AB и BC . „Месец” $ADCB$ који образују полукуружница и лук AC састоји се од та два одсечка и ‘криволинијског’ троугла у коме је основа лук \widehat{AC} . Но, збир површина та два одсечка, једнак је површини одсечка AEC , који заједно са тим ‘криволинијским’ троуглом чини троугао ACB . Стога је површина тог „месеца” једнака површини троугла ACB . А лако је наћи квадрат чија је површина једнака површини троугла ACB : то је квадрат над половином странице AC . Тако је извршена и квадратура „месеца” $ADCB$.

Други пример квадратуре „месеца” добија се помоћу једнакокраког трапеза $ABCD$ у коме је $AB = BC = CD$ и $AD^2 = DC^2 + CB^2 + BA^2$.



Као и у претходном примеру, на основу ове везе међу квадратима над

одговарајим дужима и резултата о површини одсечака, добијамо да је површина месеца $AEDCB$ једнака површини трапеза $ABCD$. Наравно да се без већих проблема може наћи и квадрат који има исту површину као и овај трапез те је тиме извршена квадратура још једног „месеца”. Један од коментатора Аристотела наводи још неке примере квадратура „месеца”, но ова два примера су нам довољна.

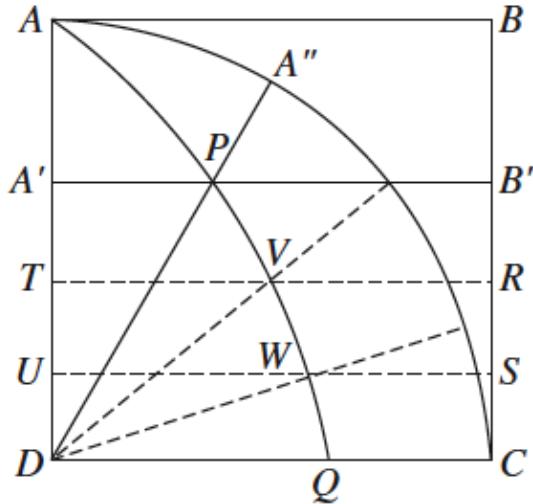
Видимо да су математичари у Атини крајем V века п. н. е. са успехом баратали трансформацијама површина разних фигура. Посебно, они су знали како да изврше квадратуру правоугаоника, што се своди на налажење x из пропорције $a:x = x:b$. Стога је природно да су се они занимали и проблемом продужене пропорције, тј. налажењем x и y за које је $a:x = x:y = y:b$. Заправо, наводи се да је Хипократ препознао да се овај проблем у случају када је $b = 2a$ своди на проблем удвостручавања коцке – из $a:x = x:y = y:2a$, добија се да је $x^3 = 2a^3$. Дакле, Хипократ је разматрао и проблем удвостручавања коцке. Нема никаквих записа о томе да ли се он бавио и трећим величким проблемом – проблемом трисекције угла. Но, познато је који се математичар бавио овим проблемом.

Хипијина трисектриса

У V веку п. н. е. са развојем грчког друштва, појавила се и потреба за другачијим и ширим образовањем слободних људи. Ту су софисти били посебно значајни. Софисти су били свестрано образовани људи, са великим и разноврсним искуством и фокус њиховог интересовања није било утврђивање великих истине о природи него подучавање вештини живљења и управљања животом. Можда и главни фокус њиховог образовања је било образовање у реторици, али баш ту се и крије један од разлога што су многи софисти изашли на лош глас. Јер, да ли је циљ говорништва да непристрасно изнесе ставове, или да, у ко зна које сврхе, убеди саговорника у нешто? Ми се наравно нећемо детаљно бавити софистима, разлог због којих су они споменути овде је што је један од истакнутих софиста био и Хипија из Елиде.

Хипија је био свестрано образован, али је важио и за хвалисавог човека. Приписује му се изјава да је зарађивао вишег од ма која друга два софиста заједно. Много тога је писао, али ниједно дело није остало до наших дана. Но, оно што је нама занимљиво је да је он био први који је у математику увео криву која није ни права ни круг. Крива коју је он увео спада у, такозване, механичке криве: она је формирана као скуп тачака при неком кретању. Погледајмо следећу слику.

Замислите да истовремено равномерно ‘спуштате’ ивицу AB квадрата $ABCD$ паралелно надоле и ротирате ивицу DA око тачке D ка ивици DC . Дакле, оба кретања су равномерна и врше се тако да се у истом тренутку транслирана ивица AB поклопи са ивицом DC , када и ротирана ивица DA са истом ивицом. Ако је $A'B'$ тренутни положај ивице



AB , а DA'' тренутни положај ивице DA , у пресеку добијамо тачку P . Геометријско место тачака које се тако добијају и формира ту криву. Обратимо пажњу на чињеницу да тачка Q није добијена у пресеку ових ивица јер су се оне преклопиле у том тренутку. Она је ту додата као гранична тачка.

Ова крива је позната и под именом Хипијина трисектриса. Зашто трисектриса? Једноставан је разлог — ако имамо ову криву, онда можемо да извршимо трисекцију (поделу на три једнака дела) сваког оштрог угла (а то је и доволјно, јер се онда сигурно може извести трисекција и ма ког угла). Рецимо да је угао који желимо да поделимо $\angle CDA''$. Тачка P је пресек дужи DA'' и трисектрисе. Позиција дужи AB коју спуштамо надоле, а која одговара тачки P је $A'B'$. С обзиром да исто времена треба дужи $A'B'$ да се спусти до дужи DC , колико и дужи DA'' да се спусти до исте дужи, онда се за трећину тог времена дуж DA'' ротирала за трећину угла $\angle CDA''$. Дакле, само је потребно поделити дуж DA' на три једнака дела тачкама T и U и исцртати две паралелне дужи TR и US . У пресеку се добијају тачке V и W и пошто је $A'T = TU = UD$, онда је и $\angle PDV = \angle VDW = \angle WDQ$. Тако смо дакле почетни угао поделили на три једнака дела. Трисектриса нам је проблем трисекције угла свела на проблем трисекције дужи, а то је лак проблем. Наравно, ова крива се не може конструисати помоћу лењира и шестара, те није решење проблема у каснијој, рестриктивној, његовој варијанти.

Несамерљивост

Као што смо видели, идеја Питагорејаца је била да се сваком објекту придржи неки природан број. Дакле, однос ма која два објекта, ма које две величине мора бити описан као однос два природна броја. Проблем је у томе што то ипак није тако и до тог открића је дошло половином V века п. н. е. Традиција ово откриће приписује већ раније споменутом Хипасусу из Метапонта.

Прво спомињање проблема несамерљивости појављује се у Платоновом дијалогу *Теетет*, који је Платон написао 368. или 367. године п. н. е, а догађаји описани у том дијалогу се фиктивно приписују години 399. У том дијалогу наводи се да је стари математичар Теодор из Кирене (грчка колонија у данашњој Либији) доказивао групи младића, међу којима је и Теетет, који је описан као седамнаестогодишњак, да су квадратни корени бројева $3, 5, \dots, 17$ (сем наравно 9) ирационални бројеви. Занимљиво је да се овде не наводи доказ да је $\sqrt{2}$ ирационалан број. Очигледно је да се сматрало да је у то време ово била добро позната чињеница, коју није требало образлагати.

Доказ ирационалности броја $\sqrt{2}$ који смо учили у средњој школи је мало поједностављен доказ који наводи још Аристотел. Он се везује за чињеницу да су дијагонала и страница квадрата несамерљиви. Шта то значи? Ако са d обележимо дијагоналу квадрата, а са a страницу квадрата, то значи да не постоји дуж l таква да је $d = ml$, а $a = nl$ за неке природне бројеве m и n .

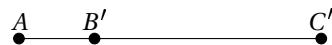
Како се уопште испитује да ли таква дуж постоји? Другим речима, пошто су Питагорејци свакако веровали да су ма које две величине, па ето и дужи, самерљиве, како се налази та дуж којом се обе могу премерити — њихова заједничка мера. Користи се прастари занатски трик. Замислимо да имамо две траке и желимо да нађемо њихову заједничку меру. Њих ћемо наравно приказати помоћу дужи. Дакле, имамо дужи AB и BC :



Сада краћу траку преклопимо преко дуже (мањом покушавамо да премеримо дужу)



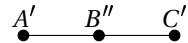
Поступак поновимо:



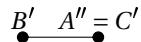
Нисмо успели, но сада оним што је остало покушавамо да премеримо мању ($B'C' = BC$):



Понављамо:



И још једном:



Успели смо да добијемо заједничку меру — то је дуж $B'A' = AB'$. Ако се овај поступак никада не би завршио почетне дужи (траке) би биле несамерљиве.

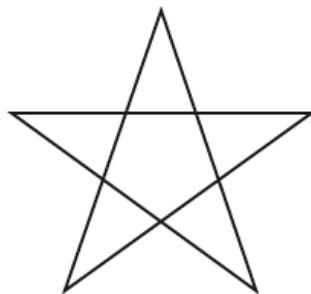
Погледајмо како ‘иде’ тај стари доказ несамерљивости дијагонале и странице квадрата (овај доказ се може наћи у неким издањима Еуклидових *Елемената* при kraју X књиге, но опште је мишљење да он није ту био у оригиналу и да је то касније додато).

Нека је $ABCD$ квадрат и AC његова дијагонала. Показујемо да су дијагонала AC и страница AB несамерљиве по дужини. Претпоставимо да оне јесу самерљиве. Показаћемо да је тада један број истовремено и паран и непаран. Јасно је да је квадрат над AC једнак двоструком квадрату над AB . Како су по претпоставци дијагонала и страница самерљиве, оне су у пропорцији као два цела броја. Нека је то пропорција $DE:F$, где су DE и F најмањи бројеви који остварују ту пропорцију. DE не може бити јединица пошто би у том случају, како је $AC > AB$ добили да је F цео број који је мањи од 1, што није могуће. Дакле, DE није јединица, него неки цео број (већи од 1). Како је $AC:AB = DE:F$, следи да је такође $AC^2:AB^2 = DE^2:F^2$. Но, $AC^2 = 2AB^2$ и стога је $DE^2 = 2F^2$. Дакле, DE^2 је паран број, па стога и DE мора бити паран број. Јер, ако би био непаран број, његов квадрат би такође био непаран број. Наиме, ако се неки број непарних бројева сабере и ако у том збиру има непарно много бројева, онда је и тај збир непаран. Стога је DE такође паран број. Нека је онда DE подељено на два једнака броја у тачки G . Како су DE и F најмањи бројеви који су у наведеној пропорцији, они су узајамно прости. Стога, како је DE паран број, F мора бити непаран. Јер, ако би он био паран број, онда би број 2 мерио и DE и F , а то је немогуће јер су они узајамно прости. Стога F није паран него је непаран. Како је $ED = 2EG$ следи да је $ED^2 = 4EG^2$. Но, $ED^2 = 2F^2$ и стога је $F^2 = 2EG^2$. Стога F^2 мора бити паран број те је F такође паран број. Но, такође је показано да F мора бити непаран број, што је немогуће. Стога следи да AC не може бити самерљиво са AB што је и требало показати.

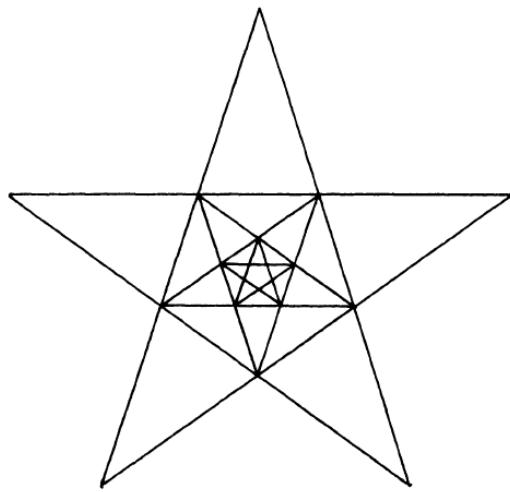
Ако се занемаре неке специфичности, које продужавају доказ, попут тога да се инсистира да се посебно докаже да DE не може бити 1, као и мало развученог доказа чињенице да је квадрат непарног броја непаран број, а и асиметрије у ознакама, где се користи, с једне стране

DE , а с друге само F (а види се и зашто је то тако – DE се дели на два половине, а F не), то је доказ који смо имали у средњој школи. Јасно је да је овај доказ прилично софистициран, користи се ту свођење на апсурд у више корака и, као што се каже, ради се о ‘слегнутом’ доказу, који сигурно као такав није могао да се појави у петом веку пре нове ере. Дакле, није то доказ у коме се први пут показала несамерљивост дужи.

Први доказ несамерљивости се везује, као што смо већ навели, за Хипаса из Метапонта и сматра се да је он пронађен средином V века п. н. е. Присетимо се пентаграма.

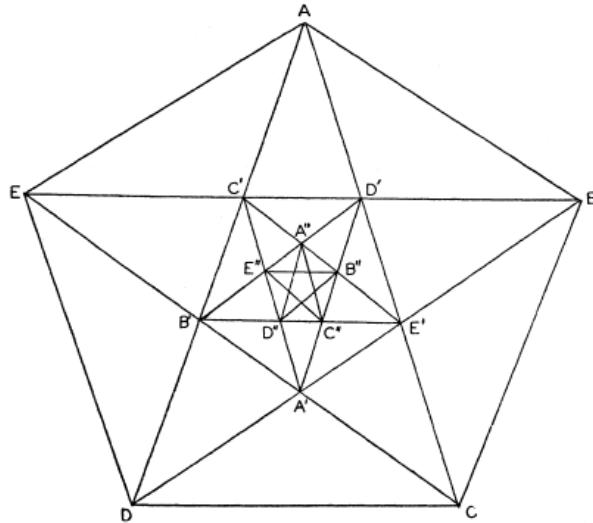


Већ смо рекли да је то био важан симбол за Питагорејце. Њега формирају дијагонале правилног петоугла, но јасно је да се у центру ове звезде налази још један правилни петоугао (и не само један...):



Видимо опадајући низ правилних петоуглова. Доцртajmo почетни

правилни петоугао и означимо темена ових петоуглова.



Већ смо навели да је Талесу била позната чињеница о једнакости углова на основици једнакокраког троугла, наравно да је и Питагорејцима то било познато. Као и обратно тврђење – да наспрам једнаких углова имамо и једнаке странице. Вероватно им није био познат доказ који би ‘прошао’ садашњу логичку проверу, но било им је јасно да то важи. Еудем у својој историји наводи да су знали да је збир углова у троуглу био једнак двоструком правом углу. Одавде, поделом петоугла на троуглове, а знамо да су их такве поделе занимале, лако се добија колики је збир унутрашњих углова у петоуглу, па и чињеница да је збир спољашњих углова једнак четвороструком правом углу. Наравно, као што је већ наведено раније, била је позната и једнакост унакрсних углова.

Све ово је било доволно да Хипас може да закључи да је $AE = AB'$ и $B'D = B'E'$ те је $AD - AE = B'E'$. Дакле, разлика дужина дијагонале и странице великог петоугла једнака је дужини дијагонале мањег. Док је слично $AE = ED' = EA'$ и $B'E' = B'D = B'E$ те стога и $AE - B'E' = B'A'$, те је разлика дужине странице већег и дијагонале мањег једнака дужини странице мањег петоугла. Наравно да се овај поступак наставља. Ако са d_n означимо дужину дијагонале n -тог правилног петоугла, а са a_n дужину његове странице, онда имамо да је

$$d_{n+1} = d_n - a_n, \quad a_{n+1} = a_n - d_{n+1}, \quad \text{за све } n.$$

Но, поступак налажења заједничке мере d_1 и a_1 , који смо раније описали се управо у томе и састоји: налазимо $d_1 - a_1$ и пошто је то мање од a_1 ,

онда од a_1 одузимамо тај резултат и тако настављамо. Дакле, добијамо низ $d_1, a_1, d_2, a_2, \dots$. Према томе, овај процес се никада не завршава те дијагонала и страница правилног петоугла нису самерљиве. Уосталом, ако би l била заједничка мера за d_1 и a_1 , онда би она мерила све ове странице и дијагонале, а то није могуће јер је јасно да се оне све више и више смањују и заовољно мали петоугао сви ови елементи ће бити краћи од l .

Дакле, видимо да је прилично очигледно да дијагонала и страница правилног петоугла нису самерљиве и да се, што би се рекло, „све види са слике“. Слике која је била изузетно значајна Питагорејцима. Наравно да се нешто слично може извести и за дијагоналу и страницу квадрата, али ту немамо тако природно формирану слику, нити је доказ који смо навели за ирационалност $\sqrt{2}$ таквог карактера. Стога се са великим сигурношћу може закључити да се несамерљивост, која је била велики шок за Питагорејце, а имала и врло озбиљне последице по каснији развој грчке математике, први пут установила у случају дијагонале и странице правилног петоугла.

Зенонови парадокси

За оснивача Елејске школе сматра се Парменид. Основна идеја његовог учења била је: јединственост и непроменљивост. Свако кретање је илузија – разликујемо оно што је суштинско, стварно, од онога што је чулно. Ово гледиште су критиковали, па и исмевали Питагорејци. Стога је Зенон (око 450. године п. н. е.), Парменидов ученик, смислио више логичких парадокса који су имали за циљ да покажу да је и питагорејско учење о променама и вишеструкостима такође проблематично:

Моји списи су помоћ Парменидовој тези против оних који су се усудили да је изложе подсмеху, тврдећи да ако Једно постоји, из те тезе произлази много смешног и њој самој противречног. Мој спис побија оне који тврде да множина постоји, враћа им удар за ударом, и још више, настојећи да учини јасним да би, још смешнија него претпоставка да Једно постоји, изгледала њихова претпоставка о множини која постоји.

Зенон је смислио око четрдесет парадокса, од којих је познато десет. Аристотелова *Физика* је главни извор за Зенонове доказе против кретања. Ми ћемо навести четири парадокса. Прва два парадокса тичу се дискретности/континуиранисти простора.

1. Дихотомија Да би било ко прешао неко растојање, он најпре мора да пређе половину тог растојања, а да би прешао ту половину, мора најпре четвртину итд. Стога би он морао да пређе бесконачно много делова у коначно време.

2. Ахил и корњача Ахил је наравно бржи од корњаче. Стога јој он у трци да неку предност. Но, док Ахил стигне до места где је

била корњача, она је отишла мало даље. Док стигне до тог следећег места, она је опет мало одмакла. Стога Ахил никада не може да стигне корњачу.

Одговоре на ове парадоксе је понудио сам Аристотел. Зенонови докази претпостављају да је немогуће прећи бесконачан број тачака за коначно време. Али то значи не увидети разлику између **бесконачне дељивости и бесконачне протежности**. Свакако је немогуће прећи бесконачну удаљеност за ограничено време, али **јесте** могуће прећи **бесконачно дељив простор**, јер је и само време **бесконачно дељиво** тако да је заправо посреди прелажење бесконачно дељивог простора за неко бесконачно дељиво време.

Друга два посвећена су времену.

3. Стрела Стрела која путује у сваком тренутку заузима одређену позицију у простору. То значи да се у било ком тренутку она не креће. Ако се не креће у било ком тренутку, она се уопште и не креће.

4. Стадион Нека постоји најкраћи временски интервал. И нека је то интервал у коме одређени објекат који се креће прође једно место (видети слику):

A_1	A_2	A_3	A_4
-------	-------	-------	-------

B_1	B_2	B_3	B_4
-------	-------	-------	-------

C_1	C_2	C_3	C_4
-------	-------	-------	-------

Посматрамо три објекта – један је непокретан (A – трибине на стадиону), а други се крећу, али у супротним смеровима – B слева удесно, а C здесна улево. Проблем је у томе што када B прође непокретни A за једно место, а C исто A за једно место, добијамо:

A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	B_2	B_3	B_4
C_1	C_2	C_3	C_4

Видимо да је B у односу на C прошло за два места. Тако да тај тренутак не може бити најкраћи.

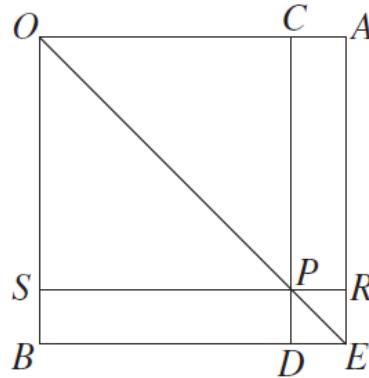
Последице парадокса и несамерљивости по даљи развој грчке математике

По свему судећи, Зенонови аргументи, као и откриће несамерљивих величина су имали веома дубок утицај на развој грчке математике. У раније време су се величине код Питагорејаца представљале каменчићима, но код Еуклида ћемо већ видети да се све величине, па чак и природни бројеви представљају дужима. Геометрија је преузела примат у односу на бројеве.

Утицај је био толико велики да се код једначина почела захтевати хомогеност – код система једначина које су у Месопотамији без проблема, а и без брига, решавали:

$$xy = A, \quad x + y = b,$$

код Грка се захтевало да A буде површина, а b дуж. Ово је остало, под утицајем Грка, веома дugo у математици. Чак се пропорција избегавала и код решавања линеарних једначина: $ax = bc$ се посматрало као једнакост површина, а не као једнакост $a:b = c:x$. За решавање се, дакле, није користила сличност, већ једнакост површина.



Конструисао би се правоугаоник $OCDB$ чије су странице $b = OB$ и $c = OC$ и онда би се дуж OC поставила дуж $OA = a$. Затим би се комплетирао правоугаоник $OAEB$ у коме дијагонала OE сече CD у тачки P . Како је $P(\Delta AOE) = P(\Delta BOE)$, $P(\Delta RPE) = P(\Delta DPE)$ и $P(\Delta OSP) = P(\Delta COP)$ (одговарајући троуглови су наравно подударни, стога и имају исте површине), то је $P(SBDP) = P(ACPR)$ и, коначно, $P(COBD) = P(OSRA)$, тј. $bc = aCP$, те тако добијамо да је $x = CP$.

Питагорејци су имали још утицаја. Архита из Тарента (југ данашње Италије) је увео КВАДРИВИЈУМ: аритметика, геометрија, музика, астрономија (знатно да је музика била значајна Питагорејцима). Уз касније додавање ТРИВИЈУМА: граматика, реторика и логика, имамо основу за образовање на Западу у току наредних скоро 2000 година.

Осим овога, Платон је учио из књиге Питагорејца Филолаја и та књига је на њега извршила велики утицај. Без обзира на то што се за Питагорејце не би могло рећи да су били идеалисти у филозофији, испоставило се да су они имали велики утицај на идеалисту Платону. Не би се могло рећи да је сам Платон имао неких математичких резултата, али је математика имала врло важно место у његовој Академији. Што је сигурно под утицајем Филолаја, јер оно мало што се о математици може наћи у изрекама Сократа је више негативно него позитивно. У сваком случају, на вратима Платонове Академије у Атини стајале су речи: „Нека овде не улази нико ко не зна геометрију.” Значајни математичари су похађали Платонову Академију.

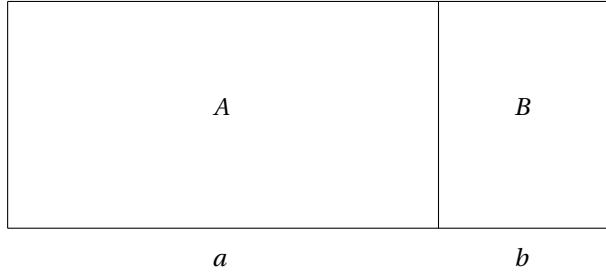
Еудокс и метод исцрпљивања

Како упоређивати несамерљиве величине? Рано решење овог проблема је изузетно занимљиво. Наиме сматрало се да су величине a, b, c, d у пропорцији

$$a:b = c:d,$$

ако се у поступку у коме се за a и b тражи заједничка мера добијају исти бројеви као у поступку за c и d . Ово ‘ради’ и у случају када су a и b (односно c и d) самерљиви, а и када нису. Само се мора десити да алгоритам даје исте бројеве.

Добра је илустрација то да су правоугаоници истих висина у истој пропорцији као и њихове основе. Наиме,



јасно је да се у покушају налажења заједничке мере за a и b исти број пута врши одузимање у сваком кораку, као и у налажењу заједничке мере за A и B , без обзира на то да ли ће се поступак завршити после коначно много корака или не. На овај начин се, дакле, могу поредити и односи несамерљивих величине.

Но, била је потребна боља формулација. Она потиче од Еудокса, који је био студент у Платоновој Академији. Налазимо је у V књизи Еуклидових *Елемената* (дефиниција 5). Наравно, тамо је наведена речима, ми же можемо краће и јасније овако исказати.

Величине a, b, c, d су у пропорцији $a:b = c:d$ ако и само ако је за све позитивне целе бројеве m и n тачно: уколико је $ma < nb$, онда је и $mc < nd$, а ако је $ma = nb$, онда је и $mc = nd$, а ако је $ma > nb$, онда је $mc > nd$.

Како налазити површину криволинијских фигура? Чини се да је и раније постојала идеја да се у и око неке криволинијске фигуре упишују, односно описују праволинијске фигуре и да се тако повећавањем броја страница приближимо површини криволинијске фигуре. Но, наравно да је појам лимеса био непознат, а тиме и решење проблема није било лако доступно. На основу онога што је писао Архимед, Еудокс је

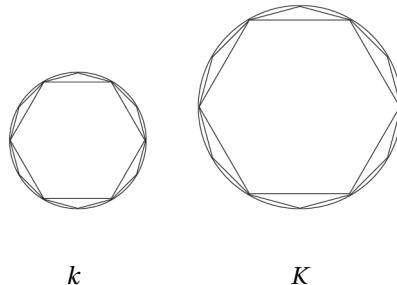
био тај који је дао аксиому, коју данас знамо под именом Архимеда, аксиому непрекидности. Она каже да ако неке две величине имају однос (што значи да ниједна није једнака нули и да су оне упоредиве), онда се увек може наћи умножак једне који је већи од оне друге. То решава и проблем који је занимао математичаре – који је то угао који тангента на криву заклапа са самом кривом. Чини се да то није нула, а опет ... Тај криволинијски угао просто не задовољава Еудоксову аксиому у односу на праволинијске углове.

Изведена из овог метода је и грчка МЕТОДА ИСЦРПЉИВАЊА (израз који Грци уопште нису користили, али се одомаћио у савременој математици):

Ако се од неке величине одузме бар њена половина, па се од остатка одузме бар његова половина и ако се тај поступак настави, онда се може доћи до величине која је мања од ма које унапред задате величине.

Сада ћемо показати како је, сматра се, баш Еудокс, доказао да се површине кругова односе као квадрати њихових полуупречника.

Нека су то кругови k и K , њихове површине p и P , њихови полуупречници r и R .



Желимо да докажемо да је

$$p/P = r^2/R^2.$$

Претпоставимо да је $p/P > r^2/R^2$. Тада постоји величина p' мања од p таква да је $p'/P = r^2/R^2$. Нека је $\varepsilon = p - p'$. Унутар кругова k и K можемо уписивати правилне многоуглове који имају исти број страница n и површине p_n и P_n .

Није тешко уверити се да се разлика између површина круга и површине уписаног многоугла смањује бар за пола њене вредности ако удвоstrучавамо број страница. То значи да ћемо после извесног времена добити многоугао са m страница за који је $p - p_m$ мање од ε . Тако добијамо да је $p_m > p'$. Познато је да је $p_m/P_m = r^2/R^2$. Стога је $p_m/P_m = p'/P$. Како је $p_m > p'$ добија се да је и $P_m > P$, што је бесмислено јер је P_m површина многоугла који је уписан у круг K . На исти начин се долази до контрадикције ако се претпостави да је $p/P < r^2/R^2$. Закључујемо да мора бити $p/P = r^2/R^2$.