Грчка математика 3; Индијска математика

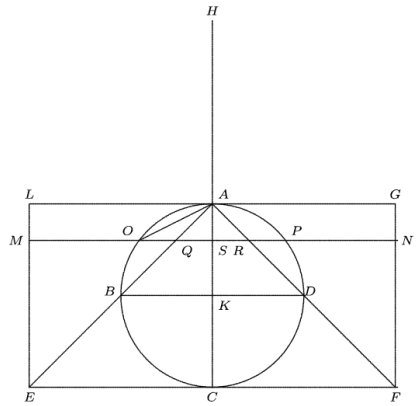
Зоран Петровић

11. март 2024.

Метод

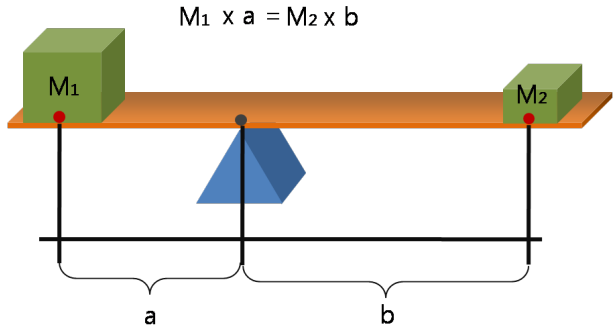
Од посебног је значаја кратко Архимедово дело *Метод*. То дело је било изгубљено дуго времена, мада се знало да је постојало на основу напомена у другим изворима. Нађено је тек 1906. године. Наиме, дански научник Хајберг је сазнао да се у Константинопољу (званичан назив Истанбула је био Константинопољ све до 1923. године, када је формирана Република Турска, а главни град постала Анкара) налази један палимпсест са математичким садржајем. Радило се о пергаменту на коме је избрисан, али не у потпуности, првобитан текст, да би се записао молитвеник који је коришћен у Православној цркви. Хајберг је успео да фотографише листове и открио је да су ту дела Архимеда: *О сфери и цилиндру*, већи део рада *О спиралама*, део рада *Мерење круга* и *О равнотежи равни*, затим *О плутајућим телима* и, најважније од свега, ту је био једини примерак *Метода*. Овај палимпсест је поново изгубљен после Првог светског рата и поново се појавио када је предат на аукцију деведесетих година. Купљен је од стране анонимног дародавца за два милиона долара и касније је модерна технологија искоришћена да се открије оригинални текст у њему.

Шта је заправо *Метод*? Реч је о математичком тексту који је Архимед послао као писмо Ератостену, који је тада био управник александријске библиотеке. Архимед ту објашњава како је он долазио до својих резултата користећи не сасвим математички коректно, 'механичко' расуђивање. Како он ту пише, лакше је наћи доказ теореме када се зна о чему се ту заправо ради. Навео је као мотивацију како је Еудокс дошао до својих резултата о купи и пирамиди користећи нека претходна размишљања Демокрита у којима није било доказа. Први резултат до кога је Архимед дошао на овај начин је резултат о квадратури параболе. Но, Архимедов омиљени резултат који повезује запремину и површину сфере (пажљив читалац је можда незадовољан разматрањем запремине сфере, сфера је површ, гледа се њена површина, док кугла има запремину, али то је детаљ који нам овде није битан, причамо и о обиму круга, а не кружнице...) и цилиндра чија је висина једнака пречнику сфере, а основа великом кругу те сфере.

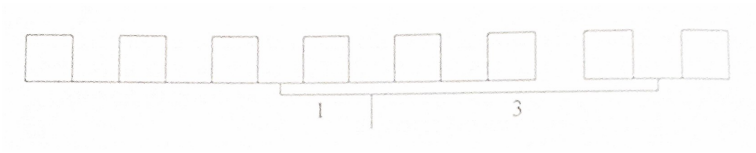


Ротирањем око осе HC добијамо цилиндар, сферу и купу, дакле ова слика нам даје попречни пресек ових тела. Обратите пажњу на чињеницу да је $AGFC$ квадрат, те да је $\triangle ACF$ (а такође и $\triangle ASR$) једнакокраки правоугли троугао.

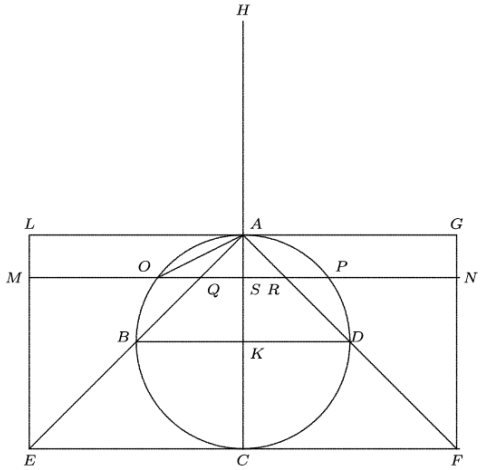
Архимед жели да нађе везу између запремина ових тела користећи закон полуге.



Архимед је извео овај закон пажљивим разматрањем, полазећи најпре од случаја да је $M_1 = M_2$ и да је тада очигледно да се равнотежа постиже када је ослонац на средини, тј. када је $a = b$. Затим је разматрао шта се дешава када су M_1 и M_2 различити, али ипак самерљиви. На пример, ако је $M_1 = 2r\mathrm{m}$, а $M_2 = 2s\mathrm{m}$. Тада се распореди укупно оптерећење дуж целе даске подељене на $2r + 2s$ једнаких делова и у сваком од тих делова постави се оптерећење m. Првих $2r$ тегова представља M_1 и ако посматрамо само тај део, јасно је да је центар масе у средини. Слично и за преосталих $2s$ тегова. А центар масе система је наравно на средини. Доња слика представља случај када је $r = 3$ и $s = 1$.



Распоредили смо 8 малих тегова на подједнаком растојању и онда посматрали центар масе првих 6 и последња 2. Види се да је однос растојања до ослонца $1:3$, те је $a=1$ и $b=3$ овде. Архимед је потом разматрао случај да су M_1 и M_2 несамерљиви и претпоставио да не важи наведени однос. У том случају, ако би се тела поставила тако да растојања буду одговарајућа, једно би претегло и он би га заменио лакшим. Рецимо да је заменио M_1 са M_1'. Тада би потражио ново тело M_1'' тако да је $M_1' < M_1'' < M_1$, а које је САМЕРЉИВО са M_2! Сада је случај свео на самерљиве и даљом анализом добија контрадикцију. У модерној терминологији, овде је Архимед користио чињеницу да се између свака два реална броја налази рационалан број и помоћу рационалних апроксимација добио резултат. Но, ово је он урадио у другим радовима, да се ми посветимо сфери, цилиндру и купи.



Поставимо произвољну раван која је нормална на осу HC и нека је она сече у тачки S. Она сече купу, сферу и цилиндар по круговима полупречника SR, SP и SN редом. Означимо их са k_1, k_2 и k_3. Архимед је приметио да ако кругове k_1 и k_2 поставимо у тачку H, они ће бити у равнотежи са кругом k_3 који остављамо на својој позицији, а тачка ослонца је A. То значи да треба проверити да је

$$(P(k_1)+P(k_2))\cdot AH = P(k_3)\cdot AS.$$

Ако је $x = AS$, а $AK = r$, онда је $SR = AS = x$,

$$SP^2 = KP^2 - SK^2 = r^2 - (r-x)^2 = 2rx - x^2,$$

а $SN = 2r$, док је $AH = AC = 2r$. Тада је

$$(P(k_1) + P(k_2)) \cdot AH = \pi(x^2 + 2rx - x^2) \cdot 2r = 4r^2\pi x, \text{ а } P(k_3) \cdot AS = \pi(2r)^2 \cdot x = 4r^2\pi x.$$

Архимед онда закључује да ако купу и сферу поставимо у тачку H, тј. ако је у тој тачки концентрисана сва њихова запремина, то ће тачно бити у равнотежи ако цео цилиндар концентришемо у његово тежиште, које је у тачки K. Ако са V_1 означимо запремину купе, са V_2 сфере, а са V_3 цилиндра, добија се $(V_1 + V_2) \cdot AH = V_3 \cdot AK$. С обзиром да је $AH = 2AK$, добијамо

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2} V_3.$$

Но, познато је да је $V_1 = \frac{1}{3} V_3$, те мора бити $V_2 = \frac{1}{6} V_3$. Запремина цилиндра је од раније позната: $V_3 = (2r)^2\pi \cdot 2r = 8r^3\pi$, те се тако добија запремина сфере $V_2 = \frac{1}{6} 8r^3\pi = \frac{4}{3} r^3\pi$.

На аналогни начин, разматрајући друга тела, Архимед је добио запремине одсечака елипсоида, хиперболоида, параболоида, а и друге сличне резултате.

Архимед је у делу *О сфери и цилиндру* строго извео доказ формуле за запремину сфере (кугле), али видимо да је први пут до ње дошао оваквим разматрањима. У истом делу је извео и формулу за површину сфере: површина сфере је четворострука површина великог круга те сфере ($4r^2\pi$). Због немогућности квадратуре круга, Грци су имали, да тако кажемо, две основне површине – квадрата и круга, помоћу којих су изражавали остале. Тако је и Архимед површину сфере изразио помоћу површине круга.

Како је имао формуле за запремину и површину сфере, а такође те формуле за цилиндар, могао је да дође до резултата који му је био посебно драг. Наиме, ако посматрамо цилиндар описан око сфере, његова висина једнака је пречнику сфере, а база великом кругу сфере. Ако са r означимо полупречник сфере, тада је њена површина $4r^2\pi$, а запремина $\frac{4}{3} r^3\pi$. Но, површина цилиндра описаног око сфере је $2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = 6r^2\pi$. Запремина цилиндра је $r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$. Имамо да је

$$V(S) : V(C) = \frac{4}{3} r^3\pi : 2r^3\pi = 2:3, \quad P(S) : P(C) = 4r^2\pi : 6r^2\pi = 2:3.$$

Према легенди, Архимед је изразио жељу да му ови односи стоје на надгробној плочи.

На крају наводимо конкретну илустрацију чињенице колико је Архимед цењен као математичар.

Као што је добро познато, не постоји Нобелова награда за математику, но постоји престижна Филдсова медаља која се додељује сваке четири године математичарима млађим од 40 година за изузетан допринос у математици на Свецком математичком конгресу. На предњој страни саме медаље је Архимед и цитат на латинском једног песника из I века: „Надмашити разумевање и овладати светом". На задњој страни је натпис на латинском: „Математичари сакупљени из целог света додељују за изузетне списе". У позадини је приказ Архимедове гробнице са резбаријом која илуструје његову теорему о сфери и цилиндру иза маслинове гранчице.

Завршавамо преглед грчке математике кратком дискусијом о Диофанту и његовом делу.

Диофант

О Диофантовом животу практично ништа није познато. Претпоставља се да је живео и радио у Александрији око 250. године н. е. Сачуван је задатак, који нам открива колико дуго је живео:

Детињство Диофанта је потрајало шестину његовог живота, после још дванаестине му је порасла брада, оженио се после још једне седмине. Пет година после тога му се родио син, који је проживео половину животног века оца, а отац је, скрхан, умро после четири године.

Дакле, једначина која се ту појављује је:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x.$$

Лако налазимо да је $x=84$, тј. Диофант је проживео 84 године.

Од његових дела остао је део његове *Аритметике* и фрагмент дела *О многоугаоним бројевима.* Ми ћемо се овде позабавити *Аритметиком.* Од тринаест књига сматрало се да је сачувано само првих шест, но седамдесетих година XX века откривено је да су сачуване још четири књиге у арапском преводу и анализом је установљено да су то књиге од четврте до седме.

Аритметика се бави решавањем одређених и неодређених једначина са ЦЕЛОБРОЈНИМ коефицијентима у којима се траже ПОЗИТИВНА РАЦИОНАЛНА РЕШЕЊА. Оно што је важно да одмах напоменемо је да једначине нису ни формулисане ни решаване у геометријском руху, као што је била дуга традиција код Грка после открића несамерљивости, но се њима баратало алгебарски. Но, видећемо да се ту могу открити нека дубока геометријска значења (о којима Диофант експлицитно ништа није писао).

Развој алгебре се, у врло грубим цртама, дели на три периода. Најпре имамо период *реторичке* алгебре. Ту се и проблеми и решења формулишу речима, без икакве симболике. Други период је период *синкопатске* (или *скраћеничке*, ако нам се допусти такав термин) алгебре у којој се користе одређене скраћенице. Диофантово дело припада том периоду. Ту још није права *симболичка* алгебра која представља трећи период, који настаје знатно касније са Вијетом.

Диофант, пре свега, има ознаку за непознату (али само за једну!) и за њене степене до шестог, а користи и негативне степене исто до шестог. Постоји и ознака за јединице, за одузимање и за једнакост. Непознату ћемо означавати са s, пошто је и Диофант користио исту ознаку. Ево листе главних ознака.

1	$\mathring{M}$	*Μόνας*	јединица
s	ς	*'Αριθμός*	број
s^2	Δ^Y	*Δύναμις*	квадрат (степен)
s^3	K^Y	*Κύβος*	куб
s^4	$\Delta^Y\Delta$	*Δύναμοδύναμις*	квадрат × квадрат
s^5	ΔK^Y	*δυναμόκυβος*	квадрат × куб
s^6	$K^Y K$	*Κύβόκυβος*	куб × куб

Као што видимо, за ознаку непознате, Диофант је користио последње слово речи 'аритмос', што значи број (иначе ς је сигма, али се овако пише на крају речи, тзв. 'завршна сигма'). Као што смо раније навели, разломак $\frac{1}{n}$ би се писао као n', па је и Диофант користио ту ознаку: $\frac{1}{s} = \varsigma'$, али се може наћи и ознака ς^{χ}, у зависности од издања *Аритметике*. Ознака за једнакост је била ι (што је почетак речи '*ισότητα*' која значи 'једнако'), док је за одузимање коришћен симбол λ. За сабирање није постојао посебан симбол, просто су се низали симболи. Део тога је био да је на свакој страни једнакости био израз облика $A-B$, где су у A и B били нанизани симболи, дакле то су биле суме позитивних израза. На пример, једнакост

$$3s^2 + 12 = 4s,$$

би била записана овако:

$$\Delta^Y \gamma \mathring{M} \iota \beta \iota \varsigma \delta.$$

Подсетите се како су писани бројеви (словима, као што је наведено раније). Да ли је Диофант 'признавао' негативне бројеве? Већи део

аутора сматра да није. Наиме, он јесте описивао како се врше операције, али то је више био опис како баратати изразима облика $A-B$, како их сабирати, која су правила за множење. Дакле, знао је да је $(A-B)(C-F)=(AC+BF)-(AF+BC)$, али није експлицитно радио са негативним бројевима. Чини се да је то необично, али математика се не развија онако како је представљена у уџбеницима.

Диофант је објашњавао и сређивање израза на супротним странама једнакости, како су се на обе стране додавали једнаки изрази да би нестали негативни делови и како су се после скраћивали 'вишкови'. То тачно одговара правилима *ал-џабр* и *ал-мукабала* које је касније користио ел Хорезми. На пример, ако имамо једначину

$$3s^3+4s-15=15s+3-5s^2,$$

онда најпре додајемо $5s^2+15$ на обе стране и добијамо

$$3s^3+5s^2+4s=15s+18,$$

(ал-џабр), а потом скраћујемо (ал-мукабала):

$$3s^3+5s^2=11s+18.$$

Занимљиво је рећи да се симбол за непознату који је Диофант користио, може наћи и у грчком папирусу, који је познат као Мичиген 620, а који највероватније потиче из II века н. е. Заправо, методе које Диофант примењује за решавање одређених једначина (које имају јединствено позитивно рационално решење) нису суштински нове, познате су из месопотамске математике. Но, Диофант даје образложења онога што ради.

Формулација проблема и поступак решавања код Диофанта типично изгледају овако. Он формулише проблем, који укључује више бројева који се траже (дакле, проблем у старту има више непознатих). Потом, уколико је неопходно, наводи потребне услове који морају да важе да би постојала позитивна рационална решења. За само решавање проблема, Диофант бира конкретне бројеве, а потом тражи решења у облику у коме се сва могу изразити преко једне непознате и то у облику да су неки услови обавезно задовољени, док се други користе да се нађе решење.

Почнимо од једноставнијих (из прве књиге).

27. Наћи два броја за које су њихова сума и њихов производ задати бројеви.

Потребан услов: квадрат половине суме мора бити већи од производа за број који је квадрат.

Дакле, проблем је да се реши систем једначина

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ xy &= b, \end{aligned}$$

где су a и b задати бројеви при чему се тражи да је $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = c^2$, где је c неки (рационалан) број.

Видимо да се проблем своди на решавање квадратне једначине $z^2 - az + b = 0$. Дискриманта је $a^2 - 4b = 4c^2 = (2c)^2$ и видимо да се добијају рационална решења.

28. Наћи два броја за које су њихова сума и збир њихових квадрата задати бројеви.

Потребан услов: Двострука сума њихових квадрата мора премашити квадрат њихове суме за квадрат.

Било би добро да се читаоци увере да потребан услов обезбеђује постојање рационалног решења.

Чести су задаци код Диофанта где је дата сума или разлика два тражена броја. Он поступа као у Месопотамији: ако је задато да је $x + y = a$, он поставља $x = \frac{1}{2}a - s, y = \frac{1}{2}a + s$ и даље то убацује у преостали услов. У случају да је дато $x - y = a$, онда је $x = s + \frac{1}{2}a, y = s - \frac{1}{2}a$ и то се поставља у преостали услов.

На пример, у проблему 28, Диофант конкретно тражи да се реши систем

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x^2 + y^2 &= 208. \end{aligned}$$

Ево како он то решава.

Нека је разлика тих бројева $2s$. Дакле, већи број је $10 + s$, а мањи $10 - s$. Остаје да се учини сума њихових квадрата једнаком 208. Но, сума њихових квадрата је $2s^2 + 200$. Како то мора бити једнако 208, добијамо да s мора бити једнако 2. То значи да је већи број 12, а мањих број 8.

Позабавимо се сада сложенијим типом проблема и методом његовог решавања.

20. (из друге књиге) Наћи два броја тако да квадрат сваког од њих када се дода другом даје квадрат.

Ево решења:

Нека је први број s, други $2s + 1$. Тада квадрат првог сабран са другим даје квадрат. Квадрат другог сабран са првим даје $4s^2 + 5s + 1$. Ово мора бити једнако квадрату. Формирам квадрат од $2s - 2$, који је $4s^2 + 4 - 8s$ и s је $3/13$. Први број је $3/13$, други $19/13$.

Овде на делу видимо оно о чему смо причали. Диофант има две непознате и обе изражава преко једне тако да је један од услова задовољен за све вредности непознате. Потом задовољава други услов

на одређени начин. Проблем који му се појављује је следећи: наћи рационалне бројеве s и t тако да је

$$as^2 + bs + c = t^2, \tag{1}$$

где су a, b и c задати, наравно рационални, бројеви. Једначином (1) задата је једна крива другог реда. Проблем који Диофант разматра састоји се заправо у налажењу РАЦИОНАЛНИХ ТАЧАКА на овој кривој.

Наводимо четири метода које Диофант користи при разматрању једначине (1).

ПРВИ МЕТОД. Ако је a квадрат (рационалног броја), $a = e^2$, Диофант поставља $t = es + m$, где се m бира да даје позитивно решење. Видимо да се једначина (1) своди на ($e^2 = a$):

$$\cancel{as^2} + bs + c = \cancel{e^2s^2} + 2esm + m^2,$$

тј. добија се линеарна једначина по s. Ово је случај који се појављује у горенаведеном проблему.

ДРУГИ МЕТОД. Ако је c квадрат, $c = f^2$, онда Диофант поставља $t = ms + f$ и добија једначину

$$as^2 + bs + \cancel{c} = m^2s^2 + 2msf + \cancel{f^2},$$

што после сређивања даје рационално решење за s.

ТРЕЋИ МЕТОД. Он се примењује у случају да немамо линеарни члан у (1), тј. да је у питању једначина облика $as^2+c = t^2$ и да је $a+c$ квадрат. Диофант овај метод објашњава у леми која претходи проблему 12 у десетој књизи.

За дата два броја чија је сума квадрат, бесконачан број квадрата се може наћи тако да када се квадрат помножи једним од тих бројева и производ дода другом, резултат је квадрат.

Другим речима, Диофант тврди да ако су a и c такви да је $a + c$ квадрат (рационалног броја, да се подсетимо), онда постоји бесконачно много (рационалних бројева) x таквих да је ax^2+c квадрат (рационалног броја). Заправо, он ради следеће: поставља $x = s+1$ и добија једначину

$$as^2 + 2as + (a + c) = y^2,$$

која се сада може решити другом методом, јер је слободни коефицијент $a+c$ квадрат. Он овај метод оправдава доказом за конкретан случај $a = 3$, $c = 6$, али није тешко видети да идеја 'пролази' и у општем случају.

ЧЕТВРТИ МЕТОД. Овај метод Диофант објашњава у леми која је везана за проблем 15 у десетој књизи. Он разматра једначину

$$ax^2 - c = y^2 \tag{2}$$

и тврди да, ако имамо једно решење ове једначине, на пример, $x = d$, $y = e$, онда се увек може наћи још неко решење. Он то показује тако што постави

$$x = d + s, \quad y = e + ms. \tag{3}$$

Заменом у (2) добија се

$$ad^2 + 2ads + as^2 - c = e^2 + 2ems + m^2 s^2,$$

и кад се искористи да је $ad^2 - c = e^2$ добија се

$$2ads + s^2 = 2ems + m^2 s^2,$$

што после скраћивања са s даје

$$2ad + s = 2em + m^2 s,$$

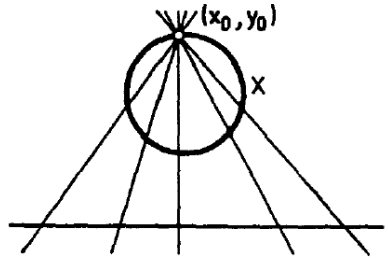
одакле се лако добија s.

Једначина (2) је једначина хиперболе. Једначине (3) заправо задају параметарску једначину праве која пролази кроз једну тачку (d, e) ове хиперболе и потом је сече у још једној тачки.

Пажљив читалац, који је, уз то, био врло вредан када је спремао Анализу 1, приметио је везу претходно наведених метода и Ојлерових смена које се примењују за рачунање интеграла облика

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

где је $R(x, y)$ рационална функција (погледајте неку од збирки или уџбеника за Анализу 1). Ово није необично, заправо суштина је у дискусији о четвртом методу. Наиме, права и недегенерисана крива другог реда су бирационално еквивалентне – могуће је наћи 'скоро' бијекцију између њих, бијекцију која се остварује рационалним функцијама када се избаци коначно много тачака. На пример, баш постављањем праве кроз задату тачку на криву и налажењем, за различите коефицијенте правца, друге пресечне тачке праве и криве.



На цртежу можемо видети како пројектујемо криву другог реда на праву (са криве смо избацили једну тачку). Ова еквиваленција између праве и криве другог реда је 'одговорна' и за чињеницу да је смена променљиве $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$ корисна код рачунања интеграла облика

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

где је $R(x, y)$ рационална функција, но то је друга прича.

У петој књизи, Диофант разматра једначине вишег степена. И ту се могу наћи сличне и занимљиве идеје. Но, како за криве трећег реда не важи претходно наведено својство, заправо је структура рационалних тачака само у неким ситуацијама правилна, не могу се резултати добијати на исти начин. Ипак, неки аутори у Диофантовим методама препознају имплицитно налажење тангенти на такве криве, а и налажење треће пресечне тачке кроз две дате. Но, ми се нећемо овде тиме дубље бавити.

Десета књига је у потпуности посвећена Питагориним тројкама рационалних бројева, тј. рационалним решењима једначине $x^2 + y^2 = z^2$. Заправо се ту говори о правоуглим троугловима са рационалним странама, а задаци укључују везе између површина, дужина катета и слично. Ова књига је занимљива, јер је у својој копији издања из 1621. године Пјер де Ферма исписивао коментаре о резултатима Диофанта и ту налазимо његову напомену (после задатка о разлагању на два начина датог квадрата у облику суме два квадрата):

Напротив, немогуће је разложити куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и, уопште, ма који степен већи од два на збир два таква степена. Нашао сам чудесан доказ овога, али су маргине сувише уске за њега.

Ретко ко заправо верује да је Ферма уистину имао овакав доказ. Ово тврђење је познато као Велика Фермаова теорема (или Фермаова последња теорема) и доказ је тек деведесетих година прошлог века дао енглески математичар Ендрју Вајлс.

Диофант има још неке занимљиве методе за решавање једначина, но ми немамо времена да се и њима бавимо у овом прегледу. У случају одређених једначина (дакле оних које имају највише коначно много рационалних решења) Диофант се углавном ослања на старију традицију. Но, у случају неодређених једначина, тј. оних које имају бесконачно много рационалних решења, његов допринос је изузетан. Његово дело је извршило значајан утицај на математичаре каснијих епоха и довело до појављивања изузетних проблема, као и нових математичких области (попут диофантовске анализе).

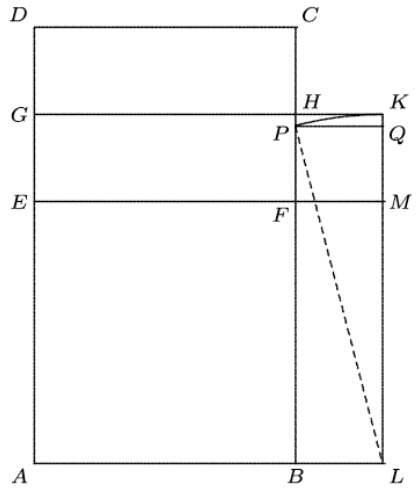
Индијска математика

Археолошка испитивања су показала постојање веома развијене културе у долини Инда око 2650. године п. н. е, дакле у време египатских градитеља пирамида. Но, немамо математичких докумената из тог периода. Значајна кретања народа, велики број различитих језика, од којих су многи још неразјашњени, отежавају покушај процене математичког нивоа из тих ранијих периода.

Сутре

Веде, религиозни документи, писани на санскриту, садрже позивање на велике бројеве и децимални систем. Ту се могу наћи и димензије, облици, пропорције везане за градњу олтара. То је садржано у „шулба (или шулва) сутрама" – „правилима за конопце". Овде се „шулба" односи на конопце за мерење, док „сутра" означава књигу правила. Постоји више преосталих ових 'сутри', писане су у стиху и вероватно потичу из прве половине првог миленијума п. н. е. мада то не знамо са сигурношћу. Ту се могу наћи Питагорине тројке $3,4,5$; $5,12,13$; $8,15,17$; $12,35,37$. Није искључен месопотамски утицај на ове сутре, али није ни потврђен.

Погледајмо метод квадратуре правоугаоника из једне сутре, а који веома подсећа на грчку 'геометријску алгебру'.



Задат је правоугаоник $ABCD$. На дужим страницама AD и BC поставимо тачке E и F тако да добијемо квадрат $ABFE$. Нека су G и H средишта

дужи ED и FC. Продужимо GH до GK, тако да је $ALKG$ квадрат. Продужимо и EF до пресека са KL. Јасно је да су правоугаоници $GHCD$ и $FBLM$ подударни, те је површина правоугаоника $ABCD$ једнака површини квадрата $ALKG$ из кога је избачен мањи квадрат $FMKH$. Но, круг са центром у L, полупречника LK, сече BH у тачки P. Тада је $LQ^2 = LP^2 - PQ^2 = LK^2 - KH^2$, те тражени квадрат има страницу LQ.

У другој сутри налазимо опис конструкције квадрата који је тражени умножак датог квадрата. На пример, ако се тражи квадрат који је седмоструки дати квадрат, чија је страница a, онда се каже да се конструише једнакокраки троугао са основицом $6a$ и крацима $4a$. Висина тог једнакокраког троугла је $\sqrt{(4a)^2 - (3a)^2} = a\sqrt{7}$. Дакле, површина квадрата чија је страница једнака висини тог једнакокраког троугла је $7a^2$.

У три сутре налази се апроксимација за $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Ово нам, на 8 децимала, даје број $1{,}41421569$, док је $\sqrt{2}$ на истом броју децимала $1{,}41421356$. Апроксимација заиста јесте добра, али нам није познато како је добијена. Иначе, за разлику од Грка, Индијци нису имали никакав проблем да и ирационалне корене сматрају бројевима. То је свакако и у вези са тим да се у индијским математичким текстовима често не разликује тачан од приближног резултата, као што ћемо видети у даљем.

Сиданте

Сиданте су скоријег датума од шулба сутри. Процена је да су оне настале крајем IV, односно почетком V века. Сиданта означава систем или доктрину и овде се односи на астрономске системе. Велико је питање у којој су мери ова дела била независна од грчких извора, пошто се примећује велика сличност са делима аутора из Египта у то, или раније време. Али постоји нешто што их издваја. Док се код Грка разматрала тетива круга и централни угао који јој одговара, у сидантама се разматра половина тетиве и половина централног угла. То јесте мала разлика, али ту видимо наше тригонометријске функције. Занимљиво је како је настао назив са функцију синус. Наиме, тетива се на санскриту звала 'ђива' или 'џиба'. У преводу Арапа, који није користио самогласнике, појављује се само 'џб'. Што може да одговара и речи 'џаиб' која значи и 'залив' на арапском. Познати преводилац из XII века Ђерардо из Кремоне је стога то превео на латински као sinus, што значи 'залив' на латинском. И тако је дошло до назива те нама добро познате функције.

Аријабата

Аријабата (476–550) је значајан индијски математичар и астроном чије је најпознатије дело *Аријабатија* написано у стиху и завршено 499. године. То дело представља преглед дотадашњих знања, но оно је неуједначено по квалитету. Ту има и тривијалних резултата, као и погрешних, али и резултата велике вредности. Почиње навођењем назива степена броја 10 све до десетог степена и правилима за рачунање квадратних и кубних корена. Потом следе правила за мерење и ту имамо и тачне резултате и погрешне. На пример, наводи се да је површина троугла половина производа дужине једне странице и њој одговарајуће висине, али се тврди да је запремина пирамиде половина производа површине базе и висине. Такође, исправно се наводи да је површина круга једнака производу обима круга и половине полупречника, али и да је запремина сфере (кугле) једнака производу површине великог круга и квадратног корена те површине. Дата је и исправна формула за површину трапеза, али и потпуно произвољно тврђење о површини ма које равне фигуре. Но, резултат на који су индијски аутори посебно поносни је следећи:

Сабери 4 и 100, помножи са 8 и додај 62000. Тако добијаш приближно обим круга пречника 20000.

То нам даје апроксимацију за π:

$$\pi \approx \frac{(4+100)\cdot 8+62000}{20000} = 3,1416.$$

Но, то је заправо вредност за π коју је користио и Птолемеј у Египту. Постоје велике шансе да је Аријабата био под утицајем грчких претходника. Иначе, у Индији се за π често користила и апроксимација $\pi \approx \sqrt{10}$.

У *Аријабатији* налазимо и нека правила за аритметичке низове. На пример, описано је како се налази број чланова аритметичког низа ако је позната његова сума s_n, први члан a_1 и разлика d. Формула коју добијамо из тог описа је следећа:

$$n = \frac{\frac{\sqrt{s_n\cdot 8d+(2a_1-d)^2}-2a_1}{d}+1}{2}.$$

У делу нема ни мотивације ни провере овог резултата. Наравно, ми можемо данас да ово изведемо:

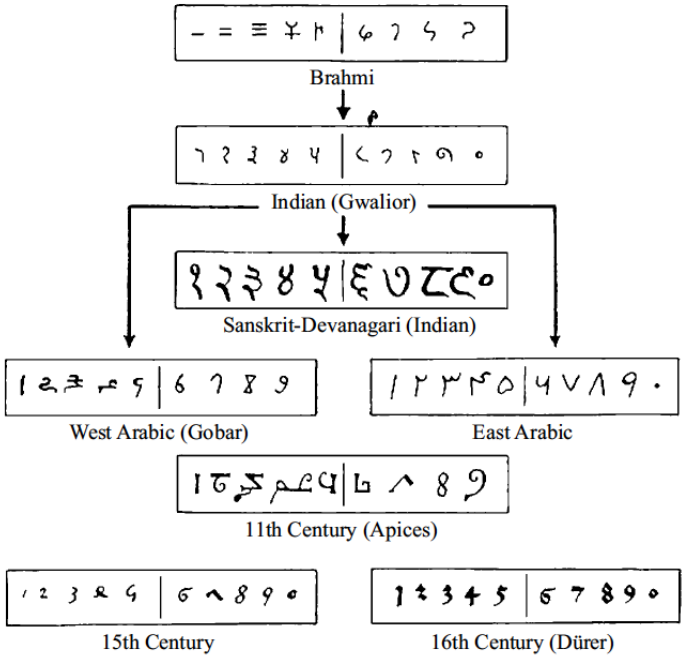
$$\begin{aligned} s_n &= a_1+(a_1+d)+\cdots+(a_1+(n-1)d) \\ &= na_1+d(1+2+\cdots+(n-1)) \\ &= na_1+d\frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Добијамо квадратну једначину по непознатој n:

$$dn^2 + (2a_1 - d)n - 2s_n = 0.$$

Из ове једначине се добија горња формула (додуше мало у другом облику, проверите то).

У *Аријабатији* имамо и децимални систем. Описује се и рачунање у коме се каже и да „од места до места увек је десет пута веће од претходног". Да су се цифре за основу 10 појавиле и пре, видимо и из једне таблице из 595. године, када је један датум записан у декадном облику. Дуг је био пут од првих цифара до наших. Таблица на следећој страници нам даје кратак приказ.



Слика 1: Развој цифара

Видимо еволуцију цифара и јасно препознајемо наше цифре у Гобар записима, карактеристичним за западни приказ код Арапа. Но, симбол за нулу није брзо настао. Постојале су свуда разне варијанте решења тог проблема, но по свему судећи прво појављивање нуле у Индији је на једном запису из 876. године. Делује невероватно да је требало више од 250 година, али многе ствари се не развијају у потпуности логично нити равномерно. Занимљиво је навести да се Деванагари запис за цифре и сада користи у Индији.

И у сидантама и у Аријабатији имамо прве таблице синуса. Ево како је то урађено. Ми знамо да је $\sin x \approx x$ када је x мало. Но, овде радимо са радијанима. Ако желимо да радимо са степенима, морамо мало да модификујемо ствари. Заправо, због прецизности је боље радити са минутима. Дакле, идеја је била да имамо исту меру и за синус и за угао. Ако гледамо у минутима, онда је пун круг: $360 \cdot 60' = 21600'$. Сада треба наћи полупречник r тако да је $2\pi r = 21600$. Уколико за π узмемо да је $\pi \approx 3{,}141592$, добијамо да је $r \approx 3437{,}75$. Стога су Индијци узели да је полупречник круга 3438. То значи да је њихова апроксимација за π овде била приближно $3{,}14136$.

Када је изабран полупречник круга, онда је прављена таблица вредности $\sin x$, тако што је 90° подељен на 24 једнака дела. Најмањи угао је дакле био $3\frac{3}{4}^\circ$, што износи $225'$, те је узето да је $\sin\left(3\frac{3}{4}^\circ\right) = 225$. Добро, сад већ видимо да у таблици немамо баш синус угла, али се синус угла лако добија дељењем са полупречником. По тој рачуници је $\sin\left(3\frac{3}{4}^\circ\right) = 225/3438 \approx 0{,}06545$. А ако проверите, рецимо дигитроном, добијете да је $\sin 3\frac{3}{4}^\circ \approx 0{,}06540$. Дакле, није лоше за почетак. Ако сада са s_n означимо тај n-ти синус и ако је S_n сума првих n таквих синуса, онда је за рачунање коришћена формула:

$$s_{n+1} = s_n + s_1 - \frac{S_n}{s_1}.$$

Како је добијена та формула, не зна се. Али, да проверимо:

$$s_2 = s_1 + s_1 - \frac{s_1}{s_1} = 449,$$

$$s_3 = s_2 + s_1 - \frac{s_1 + s_2}{s_1} = 449 + 225 - \frac{225 + 449}{225} \approx 671,$$

$$s_4 = s_3 + s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{s_1} = 671 + 225 - \frac{225 + 449 + 671}{225} \approx 890,$$

$$s_5 = s_4 + s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{s_1} = 890 + 225 - \frac{225 + 449 + 671 + 890}{225} \approx 1105.$$

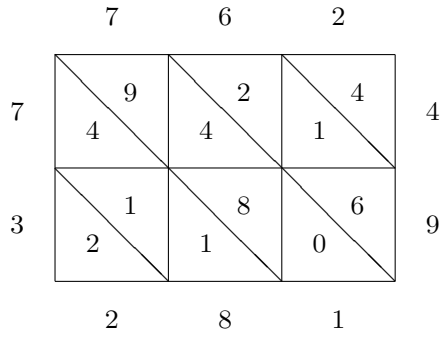
Како s_5 одговара синусу угла од $18\frac{3}{4}^\circ$, по овој таблици бисмо добили да је

$$\sin\left(18\frac{3}{4}^\circ\right) = \frac{1105}{3438} \approx 0{,}32141$$

док нам дигитрон даје приближну вредност $0{,}32144$.

Занимљив начин множења бројева

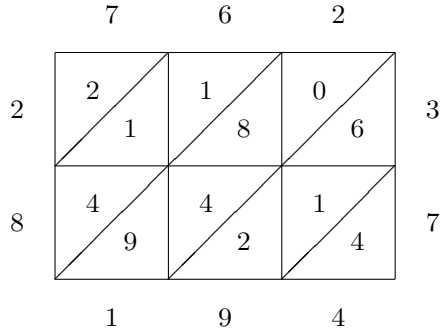
Приказаћемо овде један занимљив начин множења бројева, који се, највероватније најпре појавио у Индији и одатле је пренет у Кину, у Арабију, а потом преко Арабије и у Европу.



Ова таблица показује да је $37 \cdot 762 = 28194$. Како? Видимо да смо формирали производе цифара који се појављују у запису, тако што смо их распоредили у одговарајуће квадрате подељене на два троугла. Број 37 смо исписали одоздо нагоре, а 762 слева удесно. Заправо, таблице се могу и другачије исписивати.

Како су измножене све цифре, онда добијене резултате сабирамо по дијагоналама и исписујемо у наставку. Почињемо од $7 \cdot 2$ (дакле од цифара јединица) и исписујемо цифру 4, пошто се само она налази на тој дијагонали. На следећој дијагонали имамо збир $2+1+6=9$ и 9 смо исписали у наставку. Потом имамо дијагоналу на којој је збир $9+4+8+0=21$ и у наставку исписујемо цифру 1, а 2 пребацујемо за сабирање са бројевима у следећој дијагонали. Дакле, имамо потом $2+4+1+1=8$, исписујемо 8 у наставку. Коначно, последња дијагонала има само 2, без преноса са претходне и ту пишемо 2.

Битно је било да се крене од производа цифара јединица и да се даље иде по дијагонали. Ако бисмо исписали број 37 са десне стране, онда бисмо квадрате делили на другачији начин да бисмо добили резултат:



Брамагупта

Значајни индијски астроном и математичар Брамагупта (око 598–670) живео је око једног века после Аријабате, али се он не наставља на његове резултате. Он је пре свега астроном, али има и довољно занимљивих математичких резултата вредних спомена.

Најпре, код њега први пут наилазимо на експлицитан опис рада са негативним бројевима и нулом. Тако да имамо правила попут тога да производ позитивног и негативног броја даје негативан број, да производ негативног и негативног даје позитиван број, да производ позитивног или негативног броја и нуле даје нулу. Он се не изјашњава око тога шта се добија при дељењу са нулом, сем што наводи да је $0/0 = 0$. Но, не можемо му то толико замерити.

Оно што је посебно значајно је да је он први који је нашао сва целобројна решења једначине

$$ax = by + c, \tag{4}$$

где су a, b, c дати цели бројеви. Он зна да је потребан услов за постојање решења да $\mathrm{NZD}(a, b) \mid c$. Уколико је то тако, може се поделити највећим заједничким делиоцем и сматрати да су a и b узајамно прости. Он такође зна да, ако има једно решење (x_0, y_0), сва друга су дата са $x = x_0 + mb$, $y = y_0 + ma$, где је m цео број. Метод за налажење једног решења у случају да су a и b узајамно прости називао се „кутака" („дробилица"). Тај метод се појављује, али не експлицитно за решавање овог типа једначина, још код Аријабате, објаснио га је боље Баскара I (око 600–680), а и касније је усавршаван. Идеја је да применом Еуклидовог алгоритма a и b смањујемо („дробимо") док не дођемо до остатака 1(и 0), а да онда, на основу добијених количника и остатака добијемо то партикуларно решење. Ево основне идеје.

Претпоставимо да је $b > a$ (то није губљење општости наравно). Поделимо b са a: $b = q_1 a + r_1$. Но, почетна једначина је тада

$$ax = (q_1 a + r_1) y + c$$

и ако узмемо да је $x = q_1 y + z$, онда добијамо

$$aq_1 y + az = aq_1 y + r_1 y + c,$$

односно

$$r_1 y = az - c.$$

Видимо да су се коефицијенти уз непознате смањили, а слободан члан је остао исти (до на знак). Како је сада $a > r_1$ поступак се може поновити. Поступак се понавља све док не дођемо до последњег остатка који није нула, а пошто је то заправо 1 (јер су a и b узајамно прости по претпоставци), долази се до једначине која се лако решава.

Затим се то решење 'подиже' до решења почетне једначине и тај поступак је описан. Ми бисмо то све слично и данас радили, али можемо да користимо матрице и онда нам је знатно лакше.

Овде је можда занимљиво напоменути да је Брамагупта за дељење са остатком користио и неке мале 'трикове'. На пример, ако жели да подели 750 са 22, тј. да разломак $\frac{750}{22}$ изрази као мешовити број, онда (у савременим ознакама, он јесте користио разломке, али без разломачке црте, само је бројилац писао изнад имениоца):

$$\frac{750}{22} = \frac{750}{25} \cdot \frac{25}{22} = 30 \cdot \left(1 + \frac{3}{22}\right) = 30 + \frac{90}{22} = 30 + \frac{45}{11} = 34\frac{1}{11}.$$

Дакле, он би именилац заменио већим бројем који дели бројилац и тако поједноставио даљи рачун.

Постоје озбиљне анализе које показују да је Брамагупта у решавању једначине (4) био мотивисан својим астрономским разматрањима, али се ми њима овде нећемо бавити.

Брамагупта се бавио и решавањем неодређене једначине облика

$$x^2 = 1 + dy^2. \tag{5}$$

Једначине тог типа сада се (неоправдано) називају Пелове једначине, а и сам Архимед је повезан са једначином тог типа. Наиме у делу које нисмо разматрали – *Проблем стоке*, он је поставио проблем као изазов александријским математичарима, како рече „онима који се занимају таквим стварима". У њему се тражи да се одреди број бикова и крава различитих боја (четири боје, дакле има 8 непознатих) који задовољавају разне услове. Сви услови, сем два, су једноставне линеарне везе, но та два захтевају да нека два броја буду троугаони број и потпун квадрат. И то је део који чини проблем изузетно тешким са практичне тачке гледања, јер су решења те једначине уистино веома велики бројеви. Тек у деветнаестом веку имамо нека решења. Наиме, тада је показано да се у решењу појављују бројеви са 206545 цифара! Коначно решење је нађено тек почетком осамдесетих година двадесетог века, наравно уз помоћ компјутера.

У сваком случају, Брамагуптин допринос је у томе што је дао метод како да се од два решења добије ново решење. Наиме, ако су (p, q) и (p', q') нека решења једначине (5) , онда је и

$$(pp' + dqq', pq' + qp')$$

такође једно решење. То нама сада није тешко проверити. Треба рећи да је Брамагуптина алгебра била скраћеничког типа, умањилац је означавао тачком изнад њега, већ смо видели како је писао разломке, а и непознате су означаване одговарајућим скраћеницама.

Брамагупта је имао и резултате из геометрије, мада се и код њега налазе једни поред других тачни и нетачни резултати. Од тачних

резултата наведимо да је имао формулу за одређивање пречника круга описаног око датог троугла: ab/h_c, ако су a и b странице датог троугла, а h_c висина која одговара трећој. Но, ова формула је заправо синусна теорема у другом облику (размислите зашто) и она је била позната и Птолемеју. За π је користио вредност $\sqrt{10}$, а понекад чак и само 3 као „практичну вредност". Брамагупта је дао и формулу за површину тетивног четвороугла, која одговара Хероновом обрасцу: ако је s полуобим тетивног четвороугла чије су странице a, b, c и d, онда је површина дата са:

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Видимо се добија баш Херонов образац у случају да се четвороугао деформише у троугао, тј. ако је једна од страница једнака 0. Ова формула је и сада позната као *Брамагуптина формула* (изведите ову формулу). Једина мана је у томе што Брамагупта није експлицитно навео да она важи само за тетивне четвороугле. У ранијим временима многима није било јасно да за одређивање четвороугла треба више од 4 елемента. На пример, ако посматрате неки квадрат странице a, онда можете да нађете ромб странице a, који има било коју површину између 0 и a^2.

Баскара II

Најзначајније дело математичара и астронома из XII века Баскаре II (1114–1185) било је *Сиданта Сиромани*. Састоји се од четири дела, а прва два *Лилавати* и *Вицаганита* су релевантни за математику.

Лилавати је наводно била Баскарина ћерка којој је он посветио тај део. Ту има више аритметичких проблема који се тичу линеарних и квадратних једначина, аритметичке и геометријске прогресије, Питагориних тројки и сличних тема. Неки од проблема су одређеног типа, неки неодређеног. Наводи и метод за решавање квадратне једначине, а и дискутује када постоје два позитивна решења. Каже још:

Ако се решење не може овако наћи (на пример у случају једначине трећег или четвртог степена) онда се мора наћи вештином самог решавача.

Пошто се речима наведу формуле $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ и $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, те се формуле примењују за налажење 9^3 (као $(4+5)^3$), 27^3 (као $(20+7)^3$) и 125^3 (најпре се нађе 12^3, а потом $125^3 = (12\cdot 10+5)^3$). Но, потом се објашњава инверзни поступак за налажење квадратног и кубног корена базиран на овим формулама и поступном формирању декадног записа тог кубног корена. Наводи баш примере за налажење кубног корена који су претходној рачуници кубови датих бројева. На пример, тражи да се одреди кубни корен из $1953125 (= 125^3)$. На први поглед делује празно, али и није, метод који наводи омогућава да се поступа без обзира који је у питању број, једино се овде добија

резултат релативно брзо и као цео број. Занимљиво је ово питање, али се нећемо даље бавити њиме.

Баскара даје и партикуларна решења (Пелове) једначине $x^2 = 1 + dy^2$ за $d \in \{8, 11, 32, 61, 67\}$. На пример, за $d = 67$ даје решење $x = 1776319049$, $y = 22615390$. Нимало једноставно решење за то време.

Што се геометријских резултата тиче, за π је користио вредност $\frac{22}{7}$, а коректно је навео формуле за површину круга и запремину сфере. У његовом делу налазимо и разматрање пермутација и комбинација, као и опис формула за рачунање $\binom{n}{k}$. Наводи да је количник $a/0$ једнак бесконачности, али потом наводи и да је $a/0 \cdot 0 = a$.

Кералска школа

Индијски астроном и математичар Мадава (1340–1425) рођен је у граду Сангамаграма у области Керал (једна од држава у данашњој Индији носи то име)

Слика 2: Држава Керал у Индији

и он је оснивач једне врло продуктивне школе астрономије и математике која је произвела изузетне резултате. Чланови ове школе су живели, радили и предавали у породичним заједницама које су се звали *илами*. Од самог Мадаве није остало ништа записано од математичких резултата, но његови ученици и њихови ученици су наставили традицију и на основу каснијих записа (из XVI века) знамо до којих су резултата дошли математичари ове школе.

Ево тих резултата.

Развоји тригонометријских функција у степене редове

1. $\theta = \operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\theta}{5} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4;$

2. $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2;$

3. $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2;$

4. $\sin^2\theta = \theta^2 - \frac{\theta^4}{2^2-2/2} + \frac{\theta^6}{(2^2-2/2)(3^2-3/2)} - \frac{\theta^8}{(2^2-2/2)(3^2-3/2)(4^2-4/2)} + \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4.$

Концепт периодичности ових функција развијен је тек касније.

Имамо и развоје који су експлицитно у вези са π.

1. $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n} \pm f_i(n+1)$, за $i = 1,2,3$, где је

$$f_1(n) = \frac{1}{2n}, \quad f_2(n) = \frac{n}{2(n^2+1)}, \quad f_3(n) = \frac{n^2+4}{2n(n^2+5)}.$$

2. $\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \cdots;$

3. $\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5+4\cdot 1} - \frac{4}{3^5+4\cdot 3} + \frac{4}{5^5+4\cdot 5} - \cdots;$

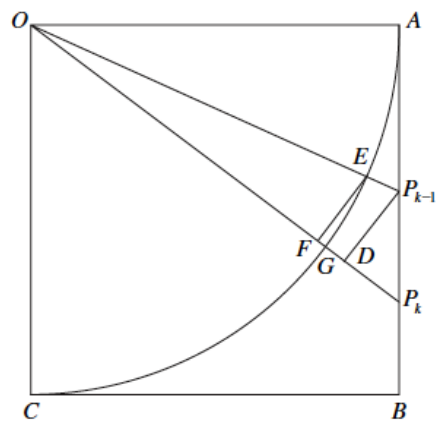
4. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{3\cdot 3}{+}\frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots;$

5. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\cdot 2^2-1)-2^2} + \frac{1}{(2\cdot 4^2-1)-4^2} + \frac{1}{(2\cdot 6^2-1)-6^2} + \cdots;$

6. $\frac{\pi-2}{4} \approx \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \cdots \mp \frac{1}{n^2-1} \pm \frac{1}{2((n+1)^2+2)}.$

Сматра се да развоји тригонометријских функција у редове потичу од Мадаве. Занимљиво је и напоменути да су процене грешака у Лајбницовом развоју за $\frac{\pi}{4}$ (први развој у другом списку), остварене помоћу функција f_i, значајне због саме рачунице. Тај алтернирајући ред врло споро конвергира, те додатне функције знатно увећавају апроксимацију. Заправо, то је знатно касније приметио и Њутн у писму Олденбургу из 1676. Он каже да се ту додавањем половине последњег члана или на сличан начин рачунање може извести са великом тачношћу. Читаоци сами могу лако проверити колико то побољшава апроксимацију.

Индијски текстови углавном наводе ове резултате без доказа, али се ипак у неким текстовима могу и наћи докази. На пример, развој функције $\operatorname{arctg} x$ (наш први развој) се, de facto, добија интеграцијом функције $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Наравно да се појам интеграла не спомиње, но формира се заправо интегрална сума за ту функцију (користећи сличности троуглова и апроксимације малих лукова тетивама), та се функција развија у ред, а потом се користи резултат да је $\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} \sim \frac{1}{k+1}$, када је n велико. Ова апроксимација за суму првих k степена се често појављује у оквиру ове школе. Није ту све наравно у потпуности коректно, али се долази до правог резултата. У текстовима ове школе на Санскриту нема извођења, но текст *Јухтибаса* на малајаламском језику (који је близак тамилском, за кога је вероватно више нас чуло) садржи методе којима се добијају ове формуле. Приказаћемо како се долази до формуле за развој функције arctg.



Овде је $OA = 1$, четвороугао $OABC$ је квадрат и имамо лук $\widehat{AC}$, који је четвртина круга. Страница AB је подељена на n једнаких делова, $\measuredangle AOP_k = \theta$, $x = AP_k = \operatorname{tg}\theta$, $P_{k-1}P_k = \frac{1}{n}$ (те је $x = \frac{k}{n}$). Осим тога, дужи EF и $P_{k-1}D$ су ортогоналне на дуж AP_k.

Сличност троуглова $\triangle OEF$ и $\triangle OP_{k-1}D$, даје

$$\frac{EF}{OE} = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}}, \text{ те је } EF = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}}, \text{ јер је } OE = OA = 1.$$

Троуглови $\triangle P_{k-1}P_kD$ и $\triangle OAP_k$ су такође слични:

$$\frac{P_{k-1}P_k}{OP_k} = \frac{P_{k-1}D}{OA}, \text{ те је } P_{k-1}D = \frac{P_{k-1}P_k}{OP_k}.$$

Ако OP_{k-1} апроксимирамо са OP_k, добијамо

$$EF = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}} \approx \frac{P_{k-1}P_k}{OP_k^2} = \frac{P_{k-1}P_k}{1 + AP_k^2} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Ако лук $\widehat{EG}$ апроксимирамо са EF и искористимо претходну апроксимацију, добијамо

$$\widehat{EG} \approx \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Стога можемо да закључимо да се $\operatorname{arctg} x = \theta$ може апроксимирати сумом

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{j^2}{n^2}}$$

за n (стога и k, јер је $k/n = \operatorname{tg}\theta$) довољно велико. За даљу апроксимацију, $\frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}}$ се развија у ред. Ред се добија итеративном процедуром:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x\left(1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) = \ldots = 1 - x + x^2 - \ldots$$

Стога се $\theta = \operatorname{arctg} x$ може апроксимирати са (подсетимо се да је $x = \frac{k}{n}$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{j^2}{n^2}+\frac{j^4}{n^4}-\cdots\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}1-\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{k}j^2+\frac{1}{n^5}\sum_{j=1}^{k}j^4-\cdots \\ &= \frac{x}{k}\sum_{j=1}^{k}1-\frac{x^3}{k^3}\sum_{j=1}^{k}j^2+\frac{x^5}{k^5}\sum_{j=1}^{k}j^4-\cdots.\end{aligned}$$

Ако се искористи горенаведена апроксимација

$$\frac{1}{k^{s+1}}\sum_{j=1}^{k}j^s \approx \frac{1}{s+1},$$

добијамо ($x = \operatorname{tg}\theta$):

$$\theta = \operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\theta}{5} - \cdots.$$

Индијска математика је интуитивна, посебна, дела су често мешавине погрешних или тривијалних резултата и изузетно вредних. Она су писана у стиховима, нису систематична попут грчких, а не постоји ни континуитет у раду. Но, то је и разумљиво с обзиром на сву сложеност Индије и мноштва нација и језика који ту постоје.