Алгебра 3 - вежбе

Далибор Даниловић

22. април 2024.

1. Решити једначину $x^3 - 6x + 9 = 0$ над пољем реалних бројева.
2. Решити једначину $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ над пољем реалних бројева.
3. Решити једначину $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$ над пољем реалних бројева.
4. Решити једначину $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ над пољем реалних бројева.
5. Нека је
$$\alpha = \sqrt[3]{4 + \sqrt{8}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{8}}.$$
    1) Одредити кубну једначину са рационалним коефицијентима чије је α једно решење.
    2) Одредити остала решења те једначине.
6. Нека је
$$\alpha = \sqrt[5]{2 + \sqrt{3}} - \sqrt[5]{2 - \sqrt{3}}.$$
    1) Одредити једначину петог степена са рационалним коефицијентима чије је α једно решење.
    2) Одредити остала решења те једначине.
7. Одредити сва решења једначине $x^n - a = 0$ где $a \in \mathbb{C}$.
8. Изразити број $a = \cos(15^\circ)$ алгебарски помоћу корена.
9. Пронаћи полином четвртог степена чија је једна нула $e^{\frac{2\pi i}{10}}$. Изразити затим $\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)$ помоћу корена па закључити да је правилан петоугао конструктибилан.
10. Испитати да ли је могуће конструисати угао од $3'$.
11. Нека су m, n узајамно прости природни бројеви. Ако су конструктибилни правилан m-угао и правилан n-угао, показати да је и правилан mn-угао конструктибилан. Закључити да је правилан 15-угао конструктибилан.
12. Нека је α угао за који је $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}$. Показати да се угао α лењиром и шестаром не може поделити на пет једнаких делова.
13. Показати да не могу све нуле полинома $p(X) = X^4 + 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ бити конструктибилне.
14. Нека је K поље такво да је $a^4 = a$ за све $a \in K$. Одредити карактеристику тог поља.
15. Нека је K поље карактеристике p. Показати да је
$$K^p = \{x^p \mid x \in K\}$$
потпоље поља K.
16. Нека је K поље чија карактеристика није два. Показати да је свако квадратно раширење облика $K(\sqrt{a})$ за $a \in K$. Ако су још $a, b \in K$ такви да $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ не припадају K, показати да је $K\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right) = K\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$.

17. Одредити примитивни елемент раширења $K = \mathbb{Z}_7\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\right)$ поља $\mathbb{Z}_7$.

18. Испитати која су од следећих раширења нормална и за она која нису, одредити им нормално затворење.

    1) $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right)$, $F = \mathbb{Q}$;
    2) $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right)$, $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$;
    3) $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, i\right)$, $F = \mathbb{Q}$;
    4) $E = \mathbb{F}_3\left(X\right)$, $F = \mathbb{F}_3\left(X^2\right)$;
    5) $E = \mathbb{Q}\left(X\right)$, $F = \mathbb{Q}\left(X^3\right)$;
    6) $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}\right)$, $F = \mathbb{Q}$.

19. Ако су раширења L/E и E/F нормална, испитати да ли је нормално и раширење L/F.

20. Нека је L/F раширење поља и нека су $F \subseteq E_1, E_2 \subseteq L$ међураширења. Ако су раширења E_1/F и E_2/F нормална, показати да су то и раширења $E_1 \cap E_2/F$ и E_1E_2/F.

21. Показати да полином $p\left(X\right) = X^6 - 2tX^3 + t \in \mathbb{F}_3\left(t\right)\left[X\right]$ није сепарабилан.

22. Нека је F поље коначне карактеристике p и E/F коначно раширење. Показати да је $\alpha \in E$ сепарабилан над F ако и само ако је $K\left(\alpha\right) = K\left(\alpha^p\right)$.

23. Нека је E/F раширење. Показати да је скуп E_s сепарабилних елемената над F једно поље.

24. Нека је L/F раширење поља и нека су $F \subseteq E_1, E_2 \subseteq L$ међураширења. Ако су раширења E_1/F и E_2/F сепарабилна, показати да су то и раширења $E_1 \cap E_2/F$ и E_1E_2/F.

25. Одредити примитивни елемент раширења $E = \mathbb{R}\left(X, Y\right)$ над $F = \mathbb{R}\left(X^2, Y^2\right)$.

26. Показати да раширење $E = \mathbb{F}_2\left(X, Y\right)$ поља $F = \mathbb{F}_2\left(X^2, Y^2\right)$ нема примитивни елемент.

27. Нека је E раширење поља F карактеристике p. Показати да за сваки елемент $\alpha \in E$ постоји неки број r такав да је елемент α^{p^r} сепарабилан над F.

28. Нека је E коренско поље полинома $f\left(X\right) = \left(X^4 - 1\right)\left(X^2 - 5\right)$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}\left(E/F\right)$ и потпуну Галуаову коресподенцију.

29. Нека је $E = \mathbb{R}\left(X\right)$ и $F = \mathbb{R}\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right)$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}\left(E/F\right)$ и потпуну Галуаову коресподенцију.

30. Нека је E коренско поље полинома $f\left(X\right) = X^3 - 2$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}\left(E/F\right)$ и потпуну Галуаову коресподенцију.

31. Нека је E коренско поље полинома $f\left(X\right) = X^7 - 1$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}\left(E/F\right)$ и потпуну Галуаову коресподенцију.

32. Нека је E коренско поље полинома $f\left(X\right) = X^5 - 2$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}\left(E/F\right)$ и потпуну Галуаову коресподенцију.

33. Нека је E коренско поље полинома $f\left(X\right) = X^6 + 3$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово и одредити Галуаову групу $\mathcal{G}\left(E/F\right)$.

34. Нека је E коренско поље полинома $f\left(X\right) = X^7 - 2$ над $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-7}\right)$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}\left(E/F\right)$ и потпуну Галуаову коресподенцију.

35. Нека је E коренско поље полинома $f\left(X\right) = X^7 - 2$ над $F = \mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}\left(E/F\right)$ и потпуну Галуаову коресподенцију.

36. Показати да је раширење $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}\right)$ Галуаово над $\mathbb{Q}$ и показати да је Галуаова група $\mathcal{G}\left(E/\mathbb{Q}\right)$ изоморфна кватернионској групи.

37. Нека је $f\left(X\right) = X^p - X + k \in \mathbb{F}_{p^n}$ за прост број p. Показати да је f нерастављив ако и само ако нема нулу у $\mathbb{F}_{p^n}$. Показати затим да је полином $f\left(X\right) = X^p - X + 1 \in \mathbb{Q}\left[X\right]$ нерастављив.

38. Посматрајмо полином $f\left(X\right) = X^p - a \in \mathbb{Q}\left[X\right]$ који нема нулу у $\mathbb{Q}$. Нека је E коренско поље полинома f. Показати да је $\left[E : \mathbb{Q}\right] = p\left(p-1\right)$. Потом показати да је Галуаова група $\mathcal{G}\left(E/\mathbb{Q}\right)$ изоморфна афиној групи

$$\mathrm{Aff}_2\left(\mathbb{F}_p\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

39. Показати да је полином $f\left(X\right) = X^4 + 1$ нерастављив над $\mathbb{Z}\left[X\right]$ али да је растављив над коначним пољем $\mathbb{F}_p$ за сваки прост број p.

40. Одредити Галуаову групу коренског поља полинома $f\left(X\right) = X^8 - 3 \in \mathbb{Q}\left[X\right]$.

41. Нека је $f \in \mathbb{Q}\left[X\right]$ нерастављив полином. Ако f има једну реалну и једну чисто комплексну нулу, показати да Галуаова група $\mathcal{G}\left(E/\mathbb{Q}\right)$ његовог коренског поља E није Абелова група.

42. Нека је $\Phi_n\left(X\right) \in \mathbb{Q}\left[X\right]$ n-ти циклотимични полином. Показати наредна тврђења.

    1) Ако је $n = p$ прост број и $r \geqslant 1$, тада је
    $$\Phi_{p^r}\left(X\right) = \Phi_p\left(X^{p^{r-1}}\right).$$

    2) Ако је n непаран број, тада је
    $$\Phi_{2n}\left(X\right) = \Phi_n\left(-X\right).$$

    3) Ако је p прост број који не дели n, тада је
    $$\Phi_n\left(X^p\right) = \Phi_{pn}\left(X\right)\Phi_n\left(X\right).$$

    4) Ако је p прост број који дели n, тада је
    $$\Phi_{pn}\left(X\right) = \Phi_n\left(X^p\right).$$

    5) За број $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ задат простом факторизацијом, дефинишемо $r\left(n\right) = p_1 \cdots p_r$. Ако је $n > 1$, тада је
    $$\Phi_n\left(X\right) = \Phi_{r(n)}\left(X^{\frac{n}{r(n)}}\right)$$
    па закључити да је
    $$\Phi_n\left(X\right) = \Phi_{r(n)}\left(X^{p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1}}\right).$$

    6) Ако су $r, s > 1$ узајамно прости бројеви, тада је
    $$\Phi_{rs}\left(X\right) = \prod_{d \mid rs} \left(\Phi_s\left(X^d\right)\right)^{\mu\left(\frac{rs}{d}\right)}.$$

43. Нека је $p > 2$ прост број. Означимо са $\xi \in \mathbb{C}$ примитивни p-ти корен из јединице. Галуаово раширење $E = \mathbb{Q}\left(\xi\right)$ има Галуаову групу $G = \mathcal{G}\left(E/\mathbb{Q}\right)$ изоморфну цикличној групи $\mathbb{Z}_{p-1}$. Означимо са H јединствену подгрупу индекса два групе G. Одредити фиксно поље $K = E^H$.

44. Показати да је свако квадратно раширење поља $\mathbb{Q}$ садржано у неком циклотомичном раширењу.

45. Посматрајмо елемент $\alpha = \xi + \xi^2 \in \mathbb{Q}\left(\xi\right)$ где је ξ примитивни тринаести корен из јединице. Одредити степен минималног полинома елемента α над $\mathbb{Q}$.

46. Нека су $E_1/F, E_2/F$ коначна Галуаова раширења. Показати да су тада и раширења E_1E_2/F и $E_1 \cap E_2/F$ Галуаова. Ако је додатно група $\mathcal{G}(E_1 \cap E_2/F)$ Абелова, показати да је наредни низ кратак тачан низ група и хомоморфизама

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(E_1E_2/F) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{G}(E_1/F) \times \mathcal{G}(E_2/F) \xrightarrow{D} \mathcal{G}(E_1 \cap E_2/F) \longrightarrow 0$$

где су $\Delta(\phi) = (\phi|_{E_1}, \phi|_{E_2})$ дијагонала и $D(\phi,\psi) = \phi|_{E_1\cap E_2} \circ (\psi|_{E_1\cap E_2})^{-1}$ разлика.

47. Нека су за бројеве $m, n > 1$ означени $d =$НЗД(m,n) и $s =$НЗС(m,n). Показати да важи $\mathbb{Q}(\xi_m, \xi_n) = \mathbb{Q}(\xi_s)$ и $\mathbb{Q}(\xi_m) \cap \mathbb{Q}(\xi_n) = \mathbb{Q}(\xi_d)$.

48. 1) Нека су d, n позитивни цели такви да $d \mid n$. Ако је p прост број такав да $p \mid \Phi_n(x)$ и $p \mid \Phi_d(x)$ за цео број x, показати да тада $p \mid n$.
    2) Показати да је $\Phi_n(0) = 1$ за $n > 1$.
    3) Нека је p прост број такав да $p \mid \Phi_n(x)$ за цео број x. Показати да тада важи $p \mid n$ или $p \equiv 1 \pmod{n}$.
    4) Нека је $n > 1$ цео број. Показати да постоји бесконачно много простих бројева p за које је $p \equiv 1 \pmod{n}$.

49. 1) Показати да за коначну Абелову групу G постоји број n такав да постоји сурјективни хомоморфизам $(\mathbb{Z}_n)^* \to G$.
    2) Показати да за коначну Абелову групу G постоји Галуаово раширење $L/\mathbb{Q}$ за које је $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong G$.

50. Нека је p прост број и $\xi = \xi_p \in \mathbb{C}$. Означимо $L = \mathbb{Q}(\xi)$ и $G = \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$. Нека је $G = \langle\phi\rangle$ генератор групе G која је реда $p-1$ који је јединствено одређен са $\phi(\xi) = \xi^k$. За делилац $d \mid p-1$ нека је $p-1 = dm$. Подгрупа $G_d = \langle\phi^m\rangle$ је јединствена подгрупа реда d групе G. Ако је

$$\theta_d = \sum_{\psi \in G_d} \psi(\xi) = \xi + \phi^m(\xi) + \cdots + \phi^{(d-1)m}$$

показати да важи $L^{G_d} = \mathbb{Q}(\theta_d)$.