Алгебра 2 И смер - вежбе

Далибор Даниловић

17. април 2024.

1. Показати да је
$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
комутативан прстен са јединицом у односу на стандардне операције сабирања и множења матрица.

2. Показати да је
$$R = \left\{ a + b\frac{1+\sqrt{13}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$
комутативан прстен са јединицом у односу на стандардне операције сабирања и множења бројева.

3. Показати да је
$$R = \{x \cdot 2^y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$
потпрстен прстена $\mathbb{R}$.

4. Показати да је
$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
комутативан прстен са јединицом. Потом показати да је
$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$
идеал прстена R.

5. Показати да је
$$R = \left\{ a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$
комутативан прстен са јединицом. Потом показати да је
$$I = \left\{ 2a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$
идеал прстена R.

6. Показати да је
$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$
комутативан прстен са јединицом. Потом показати да је
$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{Z} \right\}$$
идеал прстена R. Испитати да ли је идеал I прост односно максималан.

7. Показати да скуп нилпотентних елемената прстена R чини идеал у R.

8. Ако је x нилпотентан елемент прстена R, показати да је $1+x$ инвертибилан елемент. Показати да је збир инвертибилног и нилпотентног елемента инвертибилан елемент.

9. У прстену $R = \mathbb{Z}_{15}$ одредити инвертибилне и нилпотентне елементе, као и делитеље нуле.

10. У прстену $R = \mathbb{Z}_{13}$ одредити инвертибилне и нилпотентне елементе, као и делитеље нуле.

11. У прстену $R = \mathbb{Z}_{18}$ одредити инвертибилне и нилпотентне елементе, као и делитеље нуле.

12. У прстену $R = \mathbb{Z}_{24}$ одредити инвертибилне и нилпотентне елементе, као и делитеље нуле.

13. Одредити све идеале прстена $R = \mathbb{Z}_{16}$.

14. Одредити све идеале прстена $R = \mathbb{Z}_{30}$.

15. Одредити нуле полинома $p(X) = X^2$ у прстену $\mathbb{Z}_{36}[X]$. Потом наћи полином степена два у $\mathbb{Z}_{36}[X]$ који има тачно четири нуле.

16. Посматрајмо прстен
$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
Гаусових целих бројева. Показати да је он Еуклидски прстен. Одредити НЗД $(1+3i, 5+i)$ као и НЗС $(1+3i, 5+i)$.

17. Показати да су полиноми $p(X) = X^3 - X^2 + 2X + 3$ и $q(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ узајамно прости.

18. Одредити НЗД(p, q) где су $p(X) = X^4 + 1$ и $q(X) = X^3 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

19. Наћи полином $f \in \mathbb{R}[X]$ такав да је $\langle f \rangle = \langle p, q \rangle$ где су $p(X) = X^6 - 1$ и $q(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 2X - 3$. Наћи полиноме $u(X), v(X)$ такве да је $up + vq =$ НЗД (p, q).

20. Одредити полиноме $f, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{Z}_3[X]$ такве да важи $\langle p, q, r \rangle = \langle f \rangle$ и $pu_1 + qu_2 + ru_3 = f$ где су $p(X) = X^3 + 2X$, $q(X) = X^4 + 2X^3 + X + 2$ и $r(X) = 2X^5 + X^4 + 2X^3$.

21. Нека је $I = \{p \in \mathbb{Z}[X] \mid 7 \mid p(0)\}$ идеал прстена $R = \mathbb{Z}[X]$. Показати да I није главни идеал. Испитати да ли је I прост односно максималан идеал прстена R.

22. Нека је дат прстен
$$R = \{p \in \mathbb{Z}[X] \mid p'(3) = 0\}.$$
Показати да је $I = \{p \in R \mid p(3) = 0\}$ главни идеал прстена R и испитати да ли је прост односно максималан.

23. Показати да је $I = \langle X, Y \rangle$ максималан идеал прстена $R = \mathbb{C}[X, Y]$. Потом испитати да ли је идеал $J = \langle X + Y^2, Y + X^2 + 2XY^2 + Y^4 \rangle$ максималан идеал прстена R.

24. Одредити све максималне идеале прстена $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

25. Одредити све максималне идеале прстена $R = \mathbb{R}[X] / \langle X^2 \rangle$.

26. Одредити све максималне идеале прстена $R = \mathbb{R}[X] / \langle X^2 + X \rangle$.

27. Показати да је прстен $R = \mathbb{R}[X] / \langle X^2 - X \rangle$ изоморфан производу два поља.

28. Показати да је прстен $R = \mathbb{R}[X] / \langle X^3 - 1 \rangle$ изоморфан производу два поља.

29. Написати елементе $5, 13, 6 + 9i, 30, 70 \in \mathbb{Z}[i]$ као производе нерастављивих елемената.

30. Написати елементе $14, 30 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ као производе нерастављивих елемената.

31. Испитати да ли је елемент $f(X) = X^4 + X^2 + 1$ нерастављив елемент прстена $R = \mathbb{Q}[X]$.

32. Одредити две факторизације на нерастављиве елементе броја 21 у прстену $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

33. Написати идеал $\langle 21 \rangle$ као производ простих идеала у прстену $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

34. Показати да елементи 6 и $2+2\sqrt{-5}$ немају НЗД у прстену $R=\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

35. Одредити НЗД полинома $f(X)=48X^4-84X^2+48X-36$ и $g(X)=-4X^3-10X^2+44X-30$ из $\mathbb{Z}[X]$.

36. Одредити НЗД полинома $f(X)=4X^4+13X^3+15X^2+7X+1$ и $g(X)=2X^3+X^2-4X-3$ из $\mathbb{Z}[X]$.

37. Одредити НЗД полинома $f(X,Y)=X^3-Y^3$ и $g(X,Y)=Y^2-X^2$ из $\mathbb{Z}[X,Y]$.

38. Одредити НЗД полинома $f(X,Y)=-30X^3Y+30X^2Y^2+15XY$ и $g(X,Y)=10X^2Y-60X^2-20XY^2+40Y^3$ из $\mathbb{Z}[X,Y]$.

39. Одредити НЗД полинома $f(X,Y)=15XY-21X-15Y^2+21Y$ и $g(X,Y)=6X^2-3XY-3Y^2$ из $\mathbb{Z}[X,Y]$.

40. Испитати да ли је следећи израз једнак нули :

$$\frac{X-Y}{X^5+X^4Y+X^3Y^2+X^2Y^3+XY^4+Y^5}-\frac{X^2-XY+Y^2}{X^6-Y^6}.$$

41. Нека су на скупу $F=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ дефинисане операције

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$$

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2+b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2).$$

Показати да је $(F,+,\cdot)$ поље.

42. 1) Одредити све нерастављиве моничне полиноме степена 2 над пољем $\mathbb{Z}_5$.
    2) Конструисати поље L са 25 елемената.
    3) Одредити елемент α такав да је $L=\mathbb{Z}_5(\alpha)$.
    4) Одредити формулу множења на $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$ у односу на коју је $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$ поље, при чему је сабирање одређено сабирањем по координатама.
    5) Написати елемент $\frac{1}{\alpha+2}$ као $p(\alpha)$ где је $p\in\mathbb{Z}_5[X]$.
    6) Решити следећи систем једначина над пољем L.

$$\begin{aligned}2x+y-\alpha z&=1\\3x-(2+3\alpha)y+3z&=2\end{aligned}$$

43. 1) Одредити све нерастављиве моничне полиноме степена 4 над пољем $\mathbb{Z}_2$.
    2) Конструисати поље L са 16 елемената.
    3) Одредити елемент α за који је $L=\mathbb{Z}_2(\alpha)$.
    4) Одредити формулу множења на $\mathbb{Z}_2^4$ у односу на коју је $\mathbb{Z}_2^4$ поље, при чему је сабирање одређено сабирањем по координатама.
    5) Написати елемент $\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}$ у облику $p(\alpha)$ где је $p\in\mathbb{Z}_2[X]$.
    6) Решити следећи систем једначина над пољем L.

$$\begin{aligned}2x+y+(1-\alpha)z&=1\\3x-(2+\alpha)y+3z&=2\\-x+\left(1+\alpha+\alpha^2\right)y+\left(\alpha+\alpha^3\right)z&=-1\end{aligned}$$

44. Одредити све нерастављиве моничне полиноме степена 3 над пољем $\mathbb{Z}_3$. Потом конструисати поље L са 27 елемената и одредити елемент α за који је $L=\mathbb{Z}_3(\alpha)$.

45. Одредити број елемената поља $L = \mathbb{Z}_{11}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}\right)$.

46. Одредити број елемената поља $L = \mathbb{Z}_{7}\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)$.

47. Одредити број елемената коренског поља полинома $f(X) = X^4 - 10X^2 - 1 \in \mathbb{Z}_{13}[X]$.

48. Помоћу Берлекамповог алгоритма факторисати на нерастављиве над $\mathbb{Z}_{13}$ полином

$$f(X) = X^7 + 2X^6 + X^5 + 2X^4 + 2X^2 + 2.$$

49. Помоћу Берлекамповог алгоритма факторисати на нерастављиве над $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$ полином

$$f(X) = X^4 + 1.$$

50. Помоћу Берлекамповог алгоритма факторисати на нерастављиве над $\mathbb{Z}_2$ полином

$$f(X) = X^{10} + X^6 + X^5 + X^3 + X^2 + 1.$$

51. Помоћу Берлекамповог алгоритма факторисати на нерастављиве над $\mathbb{Z}_2$ полином

$$f(X) = X^{15} - 1.$$