Ферма; ка Calculusu

Зоран Петровић

3. април 2023. године

Ферма

Пјер (де) Ферма (1601–1665) био је правник по образовању и имао

Слика 1: Пјер (де) Ферма

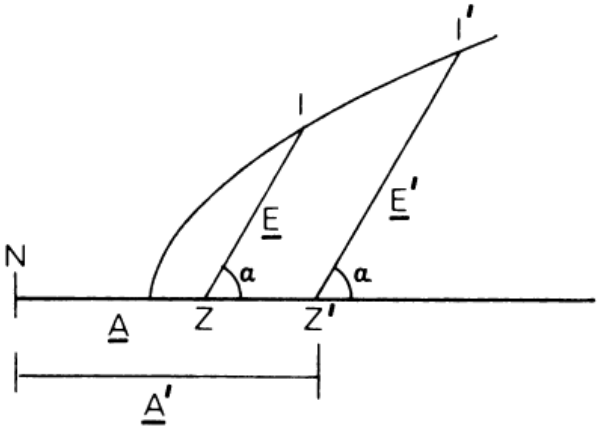
је позицију саветника у Тулузу. По добијању позиције саветника, стекао је право да свом презимену дода „де”. Математиком се бавио уз своју професију. За Декарта је био „хвалисавац”, за Паскала „највећи математичар у целој Европи”, за Мерсена „учени саветник из Тулуза”, а за Валиса „тај проклети Француз”. Практично ништа није објављивао, но водио је интензивну кореспонденцију са многим математичарима, а и бележио своје идеје. Кореспонденција и ти његови записи су објављени касније.

Природно је да после Декарта говоримо о Фермау. Наиме, и Ферма је развио верзију аналитичке геометрије, чак и пре Декарта, но како

знамо да није објављивао, то је имало мањег утицаја. Његове амбиције су биле мање, али је зато то урадио темељније. Посебно је, за разлику од Декарта, истицао да једначине одређују геометријско место тачака:

Сваки пут када се у завршној једначини нађу две непознате величине, имамо locus, чији крајеви описују линију, праву или криву.

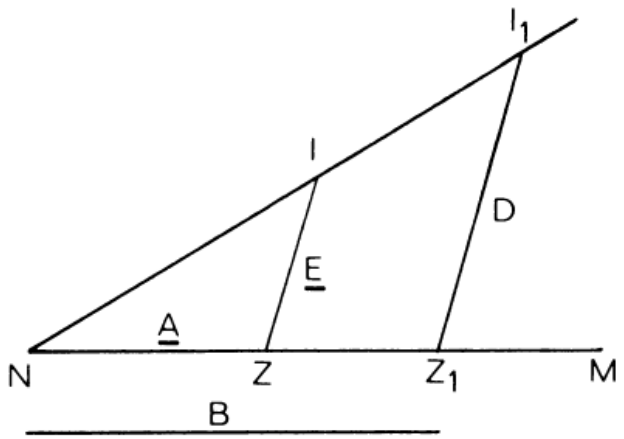
Ферма је ово разматрао са идејом да реконструише шта је то Аполоније могао урадити у свом делу „Раванска геометријска места тачака" на основу коментара Папуса (ово Аполонијево дело није сачувано). Ферма је то презентовао у краткој расправи „Увод у раванске и просторне locuse (геометријска места тачака)". Био је под утицајем Вијета и користио је његову нотацију.



Слика 2: Крива задата једначином

На овој слици је мало модернизована верзија тога што је радио. На њој имамо представљено геометријско место тачака задато једначином $f(A,E)=C$, где је C Вијетова хомогена координата. Дакле, овде можемо N сматрати за координатни почетак, док би дужина дужи NZ ($\underline{A}$) одговарала x координати. Одмах напоменимо да је Ферма разматрао само позитивне координате. Од Z се повлачи дуж до позиције I и дужина дужи ZI ($\underline{E}$) би одговарало y координати. Ферма каже да $\underline{E}$ меримо од те прве фиксиране праве (заправо полуправе) под одређеним углом, за који ћемо најчешће узимати да је прав. Овде тај угао α није прав. Паралелним померањем дужи ZI и продужењем (као што овде имамо $Z'I'$) крајеви дужи I описују ту криву.

Следећа слика представља праву задату једначином, коју Ферма у Вијетовом стилу описује са $D\ in\ A\ ae\ B\ in\ E$ (за нас $Dx = By$, присетимо се да in означава множење, а ae једнакост): Он показује да крајеви



Слика 3: Права задата једначином

дужи ZI заиста описују праву, наравно на основу сличности троуглова, јер је $D : B = E : A$. Locus за општију линеарну једначину (сада ћемо ипак прећи на модерне ознаке) $ax + by = c^2$ скицира у 'првом квадранту' као дуж. Он истиче да је овако решио следећи проблем.

Ако је дат ма који број фиксираних правих у равни, locus тачака таквих да је сума дужина одсечака нацртаних под датим угловима до тачака на тим правама константна, јесте права линија.

Наравно, то нам је једноставно, добија се линеарна једначина и она представља праву линију.

У овој расправи је показао да једначина $xy = k^2$ даје хиперболу, да се једначина облика $xy + a^2 = bx + cy$ може свести на претходну. За њега једначина $x^2 = y^2$ представља једну праву (не узима негативне координате), заправо полуправу (опет — нема негативних координата). Показује да је $a^2 \pm x^2 = by$ парабола, да је $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ круг, $a^2 - x^2 = ky^2$ елипса и да је $a^2 + x^2 = ky^2$ хипербола за коју даје обе гране. После свега, истиче следећи став.

Ако је дат ма који број фиксираних правих у равни, locus тачака таквих да је сума квадрата одсечака нацртаних под датим угловима до тачака на тим правама константна јесте просторни locus.

Просторни locus је, наравно, конусни пресек. И ово наравно директно следи из његових анализа квадратних једначина. Као што

смо и рекли, Ферма се бави једноставним проблемима, у односу на Декарта, који је био мотивисан тежим Аполонијевим проблемом, али више истиче то да једначина са две непознате одређује геометријско место тачака. У додатку свог „Увода” показује да се кубне и једначине четвртог степена (са једном непознатом наравно) могу решавати помоћу конусних пресека, што је добро нам позната тема.

Ово његово дело није објављено за његовог живота и стога је Декартова „Геометрија” била оно дело за које се сматра да је увело аналитичку геометрију. Фермаово дело, мада је објављено тек 1679. у „Varia opera mathematica”, а написано пре Декартовог, ипак је кружило као рукопис. Ферма је био свестан могућности аналитичке геометрије и за више од две димензије. Ево његових мисли о томе.

Постоје извесни проблеми који укључују само једну непознату и који се могу звати одређени, да би се разликовали од проблема locusa. Постоје други који укључују две непознате и који се никада не могу редуковати на једну непознату; то су проблеми locusa. У првим проблемима тражимо тачку, у другим криву. Али, ако предложени проблем укључује три непознате, онда треба наћи не тачку или криву, но целу површ. На тај начин се појављују површински locusi, итд.

У овом „итд.” постоји наговештај вишедимензионалне геометрије, али ако је Ферма заиста на то мислио, није се тиме нигде бавио. Заправо и тродимензиона геометрија је била прерана за то време, тек је озбиљно развијена у XVIII веку.

Неколико година касније, тридесетих година XVII века, Ферма се позабавио проблемом налажења (локалног) максимума, односно минимума. У делу „Метода налажења максимума и минимума”, које је објављено после његове смрти, он образлаже свој метод.

Уколико је x тачка локалног максимума или минимума, онда се вредности $f(x)$ и $f(x+E)$ за E мало, веома мало, разликују, дакле имамо да је $f(x+E) \approx f(x)$. Када скратимо исте чланове са обе стране, поделимо са E, потом поставимо да је $E=0$ и изједначимо леву страну са нулом, добијамо једначину која нам одређује ту тачку x. Овде практично имамо ситуацију да се у

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E},$$

поставља да је $E=0$, тј. да се тражи

$$\lim_{E\to 0}\frac{f(x+E)-f(x)}{E},$$

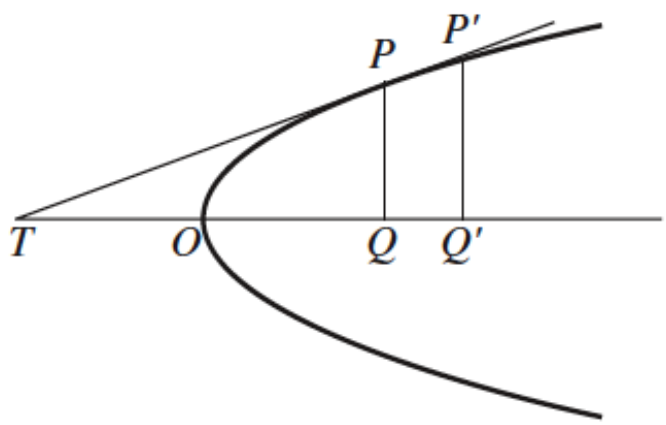
и потом то изједначава са нулом. Дакле, тражи се нула првог извода (подсетите се како гласи Фермаова теорема из Анализе 1). Но, ту ипак треба рећи две ствари. Најпре, наравно да појам лимеса није постојао,

а осим тога, Ферма је говорио да треба онолико пута делити са E док E не нестане бар из једног члана. Дакле, није он баш био сигуран да је дељење само са E довољно. За пример је узео једноставан проблем: наћи тачку на дужи тако да правоугаоник формиран од дужи на које та тачка дели дату дуж има максималну површину. Заправо је посматрао максимум функције $f(x) = x(a-x)$. Дакле,

$$\begin{aligned}
f(x+E) &\approx f(x) \\
(x+E)(a-x-E) &\approx x(a-x) \\
x(a-x)+E(a-x)-xE-E^2 &\approx x(a-x) \\
E(a-x)-xE-E^2 &\approx 0 \\
a-x-x-E &\approx 0 \\
a-2x &= 0,
\end{aligned}$$

те наравно добијамо да је $x = a/2$ и решење је квадрат. Разматрао је и друге примере.

Тесно повезан са овим је и проблем налажења тангенте.



Слика 4: Налажење тангенте на криву

Ако је P тачка на кривој $y = f(x)$ (наравно користимо модерне ознаке) у којој се тражи тангента и ако су њене координате $(a, f(a))$, онда су координате тачке P' на кривој близу овој $(a+E, f(a+E))$ и та тачка је тако близу тангенти да се може сматрати да лежи на њој. Стога се може сматрати да су троуглови $\triangle TQP$ и $\triangle TQ'P'$ слични те је (овде је $c = TQ$):

$$\frac{f(a)}{c} \approx \frac{f(a+E)}{c+E}.$$

После унакрсног множења, скраћивања истих чланова, дељења са E и изједначавања E са нулом, налазимо c, а тиме и тангенту. На пример, ако имамо функцију $f(x) = -x^2 + 4x + 7$ и тражимо тангенту у тачки са координатама $(1, 10)$, добијамо

$$\frac{10}{c} \approx \frac{-(1+E)^2 + 4(1+E) + 7}{c+E}.$$

После даљег сређивања добијамо

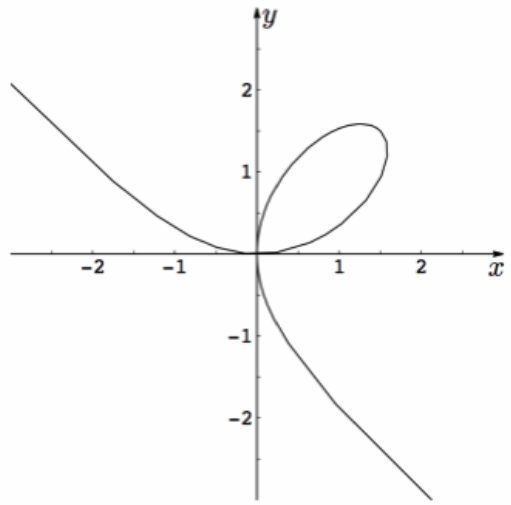
$$\begin{aligned} 10c + 10E &\approx c(-1 - 2E - E^2 + 4 + 4E + 7), \\ 10E &\approx 2cE - cE^2 \\ 10 &\approx 2c - cE \\ 10 &= 2c, \end{aligned}$$

те је $c = 5$.

Декарт је за метод чуо од Мерсена 1638. године

Слика 5: Марин Мерсен

и сматрао је да не функционише за сложеније криве, на пример за криву која сада носи име по њему, а чија је једначина $x^3 + y^3 = 3axy$ („Декартов лист”).



Слика 6: Декартов лист

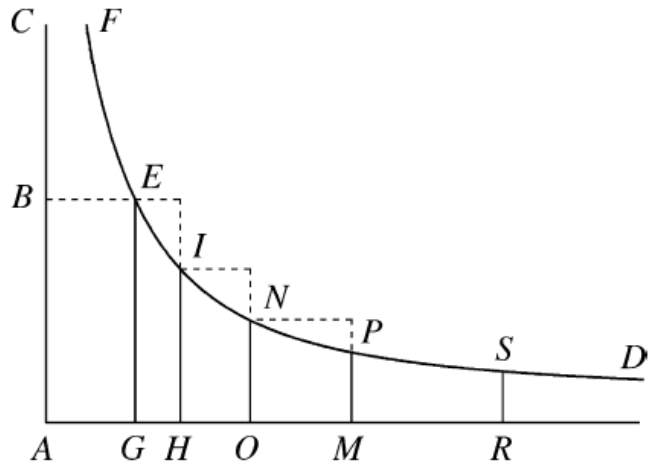
Но, Ферма је успео да и за тај случај покаже како се његовим методом може наћи тангента.

Он се интересовао и за проблем квадратуре, односно за налажење површине одређене неком кривом. На основу посредних доказа, може се закључити да је те резултате имао пре 1650. али их није објавио. Био је мотивисан да крајем педесетих година XVII века напише расправу о томе пошто се 1658. године појавила „Arithmetica infinitorum" Џона Валиса. У њој се може наћи и формула за налажење површине испод криве $y = x^{\frac{p}{q}}$, где је p/q рационалан број различит од -1. Ферма је у својој расправи објаснио како је он дошао до тог резултата и изнео неке критике Валисових резултата.

Ферма на почетку говори о методу који користи.

Архимед је користио геометријски низ само за квадратуру параболе... Ја сам препознао и показао да је оваква врста низа веома корисна за квадратуре и драге воље саопштавам модерним геометрима свој изум, који изводи квадратуре парабола и хипербола на сасвим сличан начин.

Он најпре показује како се може извести квадратура хиперболе $x^2y = 1$ (заправо он ради за било коју константу, ми ћемо, једноставности ради ставити да је то 1), потом параболе $x = y^2$ и коначно објашњава како се то може генералисати за било коју криву одређену једначином $x^m y^n = 1$, где су m, n цели бројеви, различити од 0 и нису оба једнаки 1. Ми ћемо детаљно показати како је он то извео за тај први случај.



Слика 7: Фермаова квадратура хиперболе

Ферма:

Размотримо хиперболу задату својством

$$\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{EG}{HI} \quad \text{и} \quad \frac{AO^2}{AH^2} = \frac{HI}{NO}, \text{ итд.} \tag{1}$$

Тврдим да је бесконачан простор чија је база EG и једна од страна крива ES, а друга је бесконачна асимптота GOR једнак датој правоугаоној површини.

Та дата „правоугаона површина" је површина правоугаоника $AGEB$. Најпре ћемо ово показати савременом нотацијом и ознакама, а онда Фермаову реализацију.

Нека је $a = AG$. Узмимо неки број $r > 1$ и тачке $G, H, O, M, \ldots$ чије су апсцисе, редом, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$. Тада је $GH = ar - a$, $HO = ar^2 - ar$, $OM = ar^3 - ar^2$, $\ldots$, док је

$$EG = \frac{1}{a^2}, \quad HI = \frac{1}{a^2 r^2}, \quad ON = \frac{1}{a^2 r^4}, \quad MP = \frac{1}{a^2 r^6}, \ldots$$

Збир површина означених правоугаоника је тада

$$EG \cdot GH + IH \cdot HO + NO \cdot OM + \cdots,$$

тј.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \cdot a(r-1) + \frac{1}{a^2 r^2} \cdot ar(r-1) + \frac{1}{a^2 r^4} \cdot ar^2(r-1) + \cdots &= \frac{r-1}{a}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{r-1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r}{a}. \end{aligned}$$

Но, када се r све више смањује ка 1, збир тих површина се сви више приближава површини испод криве. Уколико поставимо да је $r = 1$, добијамо да је површина испод криве једнака $1/a$, док је површина правоугаоника $AGEB$ једнака

$$AG \cdot EG = a \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a},$$

тј. оно што је и тврђено.

Ево како је Ферма то заиста урадио. Он бира тачке $G, H, O, M \ldots$ тако да $AG, AH, AO, AM, \ldots$ чине геометријски низ што наводи овако:

$$\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM} = \cdots \tag{2}$$

и каже да је то еквивалентно са

$$\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM} = \cdots$$

(наравно, знамо да је $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ако и само ако је $\frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b}$). Ферма затим пореди односе површина правоугаоника:

$$\frac{EG \cdot GH}{HI \cdot HO} = \frac{EG}{HI} \cdot \frac{GH}{GO} = \frac{EG}{HI} \cdot \frac{AG}{AH}.$$

Но, с обзиром на својства хиперболе (1) и чињеницу да је $AH^2 = AG \cdot AO$ (види (2))

$$\frac{EG}{HI} = \frac{AH^2}{AG^2} = \frac{AO}{AG}.$$

Стога је

$$\frac{EG \cdot GH}{HI \cdot HO} = \frac{AO}{AG} \cdot \frac{AG}{AH} = \frac{AO}{AH} = \frac{AH}{AG}.$$

Зато закључује да површине правоугаоника означених на слици такође представљају геометријски низ са количником $\frac{AH}{AG}$. Уместо да сумира геометријски низ по познатој му формули (познатој и Вијету, чија је дела пажљиво читао), он наводи следеће правило.

Уколико је дат геометријски низ чији чланови бесконачно опадају, разлика два узастопна члана овог низа се односни према мањем од њих исто као што се највећи члан низа односи према суми свих осталих.

Дакле, он каже да, ако је $a_1, a_2, a_3, \ldots$ опадајући геометријски низ, онда је $(a_1 - a_2) : a_2 = a_1 : (a_2 + a_3 + \cdots)$. Проверите ово. Ако суму целог низа површина означимо са S, онда по овом правилу имамо да је

$$\frac{EG \cdot GH - HI \cdot HO}{HI \cdot HO} = \frac{EG \cdot GH}{S - EG \cdot GH}.$$

Но,

$$\frac{EG \cdot GH - HI \cdot HO}{HI \cdot HO} = \frac{EG \cdot GH}{HI \cdot HO} - 1 = \frac{AH}{AG} - 1 = \frac{GH}{AG} = \frac{EG \cdot GH}{EG \cdot AG}.$$

Дакле, добијамо да је

$$S - EG \cdot GH = EG \cdot AG.$$

Но, када се однос $AH : AG$ чини све више близу 1, дакле када правоугаоници постају све ужи, тада се S приближава површини испод криве почев од тачке G, а површина $EG \cdot GH$ постаје све ближа нули (јер је GH све ближе нули). Стога је површина испод криве једнака површини правоугаоника $AGEB$.

Занимљиво је да, упркос чињеници да се бавио и питањем тангенте и питањем квадратуре, Ферма није експлицитно повезао те проблеме, тј. никада није указао на резултат попут Њутн-Лајбницове формуле.

Оно по чему је он сигурно данас познатији је по својим резултатима и хипотезама из теорије бројева. Сви његови резултати из ове области су наведени или на маргинама његовог примерка Диофантове „Аритметике" или у преписци са другим математичарима. Но, како његов примерак наведене књиге није сачуван (највероватније га је уништио његов син припремајући Фермаово дело за објављивање), остаје нам његова преписка по којој можемо проценити развој његових резултата из теорије бројева. Природно је ту преписку поделити у четири периода.

Први период се састоји искључиво од писама у години 1636. и састоји се од 10 писама. Но, разматра се ту само један резултат који заиста припада теорији бројева и наведен је у писму Робервалу. Састоји се у томе да се покаже да ако је x корен једначине $x^2 + 2(a+b)x = a^2 + b^2$, онда је x АПОТОМА(термин из Еуклидових „Елемената"), тј. разлика два броја који су несамерљиви. Видимо да се проблем лако своди (размотрите решење ове квадратне једначине) на питање да ли је неки рационалан број квадрат рационалног броја. Наравно, тога су били свесни и Ферма и Робервал. Дакле, можемо да закључимо да се око године 1636. Ферма интересовао за врло елементарне проблеме у вези теорије бројева.

Други период односи се на године 1638–1644. Ово је, без сумње, био најплодоноснији период. Састоји се од 28 писама. Почиње писмом упућеном Мерсену, а намењеном заправо Сен-Кроау. У овом писму су наведени следећи ставови

1. Површина правоуглог троугла не може бити квадрат.

2. Једначине $x^4 + y^4 = z^4$ и $x^3 + y^3 = z^3$ су немогуће за рационалне бројеве, као ни систем $x^2 + y^2 = z^2$, $z^2 + y^2 = l^2$.

3. Сваки број је сума три троугаона броја, четири квадрата, пет петоугаоних бројева, итд.

4. Ниједан број облика $8k-1$ није квадрат, нити је сума два квадрата или три квадрата.

Кратак коментар је на месту. Наравно, у случају првог проблема мисли се на правоугли троугао чије су странице рационални (заправо можемо сматрати да су и цели) бројеви. За други проблем заправо Ферма не тврди експлицитно да су то нерешиве једначине, него их више поставља као изазов Сен-Кроау.

Видимо огромну разлику у нивоу проблема у размаку од само 18 месеци (од краја 1636. године). По свему судећи је Ферма до 1638. године открио метод бесконачног спуштања. Та идеја је постојала и раније, али ју је он довео да озбиљног метода. Укратко, она се састоји у томе да се покаже да не постоји природан број са неким својством тако што се из претпоставке да он постоји, закључује да онда мора постојати и мањи од њега са тим истим својством. Како не можемо имати бесконачан опадајући низ природних бројева, добијамо контрадикцију.

Илуструјмо то на једном једноставном примеру — покажимо да $\sqrt{3}$ није рационалан број (наравно да нам тај метод за ово свакако није потребан). Претпоставимо да је

$$\sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1},$$

где су a_1 и b_1 позитивни и узајамно прости природни бројеви. Приметимо да важи једнакост

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Добијамо

$$\frac{1}{\frac{a_1}{b_1}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

те је

$$\sqrt{3} = \frac{2}{\frac{a_1}{b_1}-1} - 1 = \frac{2b_1}{a_1-b_1} - 1 = \frac{3b_1-a_1}{a_1-b_1}.$$

Нека је $a_2 = 3b_1 - a_1$, а $b_2 = a_1 - b_1$. Како је свакако $a_1 > b_1$ и $a_1 < 2b_1$, то су и a_2 и b_2 природни бројеви. Приметимо да је

$$a_2 < a_1 \text{ акко } 3b_1 - a_1 < a_1 \text{ акко } 3b_1 < 2a_1 \text{ акко } \frac{a_1}{b_1} > \frac{3}{2} \text{ акко } 3 > \frac{9}{4} \text{ акко } 12 > 9,$$

а

$$b_2 < b_1 \text{ акко } a_1 - b_1 < b_1 \text{ акко } a_1 < 2b_1,$$

те је $a_2 < a_1$ и $b_2 < b_1$. Тако добијамо опадајуће низове природних бројева и закључујемо да $\sqrt{3}$ није рационалан број.

У писму нумерисаном под бројем XL, упућеном Мерсену највероватније у јуну 1640. године налазимо формулацију (у специјалном облику)

става, који данас знамо као Мала Фермаова теорема. Наиме, Ферма наводи да је открио три лепа резултат (не без труда). Најпре да је 2^n-1 сложен број уколико је n сложен, да је 2^n-1 конгшруентан са 1 по модулу $2n$ уколико је n прост и да су у том случају прости делитељи броја 2^n-1 облика $2nk+1$. На пример, $2^{11}-1=2047$ и $89\mid 2047$, при чему је 89 прост број облика $2\cdot 11\cdot 4+1$. Такође је навео да је открио да је број $2^{37}-1=137\,438\,953\,471$ дељив простим бројем $223=2\cdot 37\cdot 3+1$.

Његов почетак бављења квадратним формама може се приметити такође у писмима Робервалу и Мерсену исте године. Он ту наводи да је показао да ако је $n=p^2+q^2$, где су p и q природни бројеви, онда n нема прости делилац облика $4k-1$.

У писму XLIII намењеном Френиклу, највероватније из августа 1640. пише:

Готово сам уверен да је $2^{2^n}+1$ прост број за сваки број n. Још немам доказ за то, али сам искључио велики број делилаца ...

Ојлер је касније показао да $641\mid 2^{2^5}+1$, тако да ова Фермаова слутња није била добра. Прости бројеви овог облика се називају Фермаови прости бројеви, но сем оних који се добијају за $n=0,1,2,3,4$, други нису познати. Они се појављују у разматрању проблема конструкције правилних n-тоуглова помоћу лењира и шестара.

Уследио је период од 10 година без размене резултата из теорије бројева. Трећи период се односи само на август и септембар 1654. године (није лоше споменути да је 1653. године Ферма преживео кугу, да је чак погрешно јављано и о његовој смрти) и два писма Паскалу. Поново истиче да је уверен да су бројеви облика $2^{2^n}+1$ прости, но у другом писму најављује и следеће резултате/проблеме.

1. Сваки број је састављен од три троугаона, четири квадратна, пет петоугаоних и шест шестоугаоних бројева (ово је теорема из 1638. године).

2. Да би се добила претходна теорема, треба показати да је сваки прост број облика $4k+1$ збир два квадрата.

3. За дати број наведеног облика, наћи квадрате на које се раставља.

4. Сваки прост број облика $3k+1$ је облика x^2+3y^2.

5. Сваки прост број облика $8k-1$ или $8k+3$ је облика x^2+2y^2.

6. Не постоји троугао чије су странице цели бројеви, а чија је површина потпун квадрат.

Четврти период почиње писмом од 3. јануара 1657. године. Оно је упућено једном париском математичару, али је намењено да се упути другим математичарима и у другим земљама. Састоји се од два проблема.

1. Наћи такав куб који додат збиру свих својих правих делилаца даје потпун квадрат. На пример, $343 = 7^3$, сви прави делиоци од 343 су 1, 7 и 49, а $343 + 1 + 7 + 49 = 400 = 20^2$. Наћи остале кубове који ово задовољавају.

2. Наћи све квадрате који додати свим својим правим делиоцима чине куб.

Посебно је изазов упућен Џону Валису у Енглеску, али он није показао интерес за то. Сматрао је да се ради о појединачном проблему иза кога не стоји нека озбиљна теорија.

Најзначајније писмо из овог периода је упућено Каравију у августу 1659, а заправо је намењено Хајгенсу. У њему се наводе неки проблеми од раније, али и нова два.

1. Показати да једначина $y^2+2 = x^3$ нема других решења до $x = 3, y = 5$.

2. Показати да једначина $y^2+4 = x^3$ нема других решења до $x = 2, y = 3$ и $x = 5, y = 11$.

У овом писму Ферма поново говори о проблему да се покаже да се сваки прост број облика $4k+1$ може приказати као збир два квадрата. Говори да је то показао методом бесконачног спуштања — да је из претпоставке да постоји неки прост број који је тог облика, а није сума два квадрата, он успео да нађе мањи такав, те се на крају то своди да најмањи такав број, тј. 5 није сума два квадрата, што он очигледно јесте. Но, није дао никакву назнаку о томе како се конструише такав мањи прост број.

Прегледом Фермаове кореспонденције може се констатовати да ни у једном писму он није споменуо да има решење проблема, који је постао познат као Фермаов последњи проблем, или Велика Фермаова теорема: не постоје позитивни цели бројеви x, y, z такви да је $x^n + y^n = z^n$ ни за једно $n \geqslant 5$. Навео је на више места да ти бројеви не постоје за $n = 3$ и $n = 4$, али никада, сем на маргинама свог примерка Диофантове „Аритметике” није писао о том општем проблему. На маргинама је написао да има изванредно решење, али да су маргине мале да га испише. Тако да се може са великом сигурношћу констатовати да није имао решење овог проблема ни за једно $n > 4$.

Главни метод који је Ферма користио у свом раду на проблемима из теорије бројева је био метод бесконачног спуштања. Покажимо како

је он тај метод применио да покаже да једначина

$$x^4 + y^4 = z^2$$

нема решење у природним бројевима (из чега следи и Велика Фермаова теорема за $n = 4$).

Претпоставимо да решење постоји и да је z најмањи број чији се квадрат разлаже на суму два четврта степена. Јасно је да су тада x, y, z пар по пар узајамно прости бројеви. Од старих времена је познато правило за Питагорине тројке. Сигурно је један од бројева x, y паран. Наиме, ако би оба били непарни, онда би број $x^4 + y^4$ био паран број који није дељив са 4, а такав број не може бити потпун квадрат. Уколико претпоставимо да је y паран, добијамо да је, за неке бројеве A, B:

$$x^2 = A^2 - B^2, \quad y^2 = 2AB, \quad z = A^2 + B^2.$$

Како су x и y узајамно прости, то су и A и B узајамно прости. Претпоставимо да је B паран. Тада мора бити $A = a^2, B = 2b^2$ за неке a, b. Добијамо

$$x^2 + (2b^2)^2 = A^2 - B^2 + B^2 = A^2 = a^4.$$

Ако сада на Питагорину тројку $(x, 2b^2, a^2)$ применимо горенаведени резултат, добијамо да постоје узајамно прости C и D такви да је

$$2b^2 = 2CD, \quad a^2 = C^2 + D^2.$$

Из чињенице да је CD потпун квадрат и да су C и D узајамно прости, следи да је $C = c^2$ и $D = d^2$ за неке c, d. Тада је

$$c^4 + d^4 = a^2.$$

Но, јасно је да је $a < z$:

$$z = a^4 + (2b^2)^2 > a^4 \geqslant a.$$

На основу принципа бесконачног спуштања резултат следи.

Ферма свакако није био професионални математичар, а ни његови манири нису били такви. Јесте желео признање, али није желео да објављује радове, није желео да их сређује да буду до краја прецизни и да се могу објавити и издржати критику. Но, и поред тога, за његове резултате се не може рећи да су аматерски ако под тим подразумевамо да су произвољни, слаби и нејасни. Имао је и грешака, али то је нормално. Свакако је утицао у значајној мери на развој математике. Сам Фермаов последњи проблем је био велики мотив за развој теорије бројева. Ендрју Вајлс га је решио 1994. године и доказао да је Фермаова претпоставка била тачна.

Инфинитезимални методи до Њутна и Лајбница

Мертоновско правило, ширина форме

У средњем веку можемо да истакнемо идеје „ширине форме” као претечу и координатног система и Calculusa. Схоластички филозофи су дискутовали могућност квантификације форми, што је Аристотелов концепт, који практично одговара појму функције. Наиме, то је квалитет (нечега) који је променљив, као што су то брзина, температура, густина. Разматрано је питање повећавања и смањивања (intensio и remissio) интензитета форми. Интензитет форме се разликује од њене екстензије: брзина, температура, густина су интензитети, док су пређени пут, топлота, маса — екстензије.

Група филозофа схоластичара у XIV веку на Мертон Колеџу у Оксфорду

Слика 8: Мертон Колеџ

разматрала је степен промене, као и степен промене степена промене форми, наравно без формула, вербално, уз дозу не само филозофије, него и мистицизма. Сва кретања се деле на (равномерна) униформна

у којима се у сваком делу времена исто растојање пређе

и неравномерна („диформна”)

Неравномерно кретање је оно у коме се више растојања пређе у неком делу времена, а мање у неком другом.

Осим тога, неравномерна кретања су класификована у равномерно неравномерна и неравномерно неравномерна, а наравно тако се може и даље ићи.

Неко кретање је равномерно убрзано уколико у истим деловима времена постиже исто повећање брзине.

Установљено је „мертоновско правило”:

Кад год постоји равномеран раст локалног кретања, локално кретање је равномерно неравномерно кретање. Како оно по свом резултату одговара средњој вредности, очигледно је да се исти пут може прећи равномерним кретањем у средњој вредности као и равномерно неравномерним кретањем.

Наравно, ово нам каже да, ако је v_p почетна, а v_z завршна брзина, онда се исти пут прелази уколико се све време иде средњом брзином $v_s = \frac{v_p+v_z}{2}$. Навођено је више доказа, неки су укључивали и рад са бесконачним редовима!

У Паризу се овим питањима бавио Никола Орезм (око 1323–1382).

Слика 9: Никола Орезм

Графички приказ функције се први пут појављује у делу Ђованија ди Касала 1346, али Орезм је то значајно озбиљније урадио. Ево шта

он говори.

(а) У вези квалитета се две ствари могу представити, наиме *intensio per gradum* и *extensio per subjectum* и стога се квалитет може видети у две димензије.

Из ових разлога се понекад каже да квалитет има дужину и ширину уместо интензитет и екстензију.

(б) Квалитет се може замислити да припада тачки или недељивом субјекту, као што је душа, али такође и линији и чак и површи и телу.

Закључак 1: Квалитет тачке или недељивог објекта може се представити линијом, пошто има само једну димензију, наиме интензитет. Одавде следи да такав квалитет као што је знање или врлина, не може бити униформно или диформно, као што се и за линију не каже да је униформна или диформна. Такође следи да се не може позивати на ширину знања или врлине, пошто јој се не може придружити дужина, јер свака ширина претпоставља и дужину.

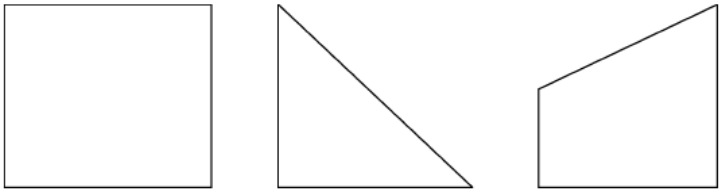
Закључак 2: Квалитет линије се може представити помоћу површи, чија је дужина праволинијска екстензија субјекта, а ширина је интензитет, који је представљен нормалама подигнутим на линију субјекта.

Закључак 3: Слично се квалитет површи може представити телом ...

Но, некоме може бити сумњиво: ако се квалитет линије овде представља помоћу површи, а квалитет површи помоћу тела које има три димензије, квалитет тела ће, без сумње, бити представљен нечим што има четири димензије...

Он затим тврди како није потребно уводити четири димензије, позивајући се на неке Аристотелове расправе. У сваком случају, видимо идеју графика функције једне и две променљиве, и назнаку графика функције и три променљиве. Видимо да је постојао велики отпор разматрању више од три димензије и то је потрајало још вековима.

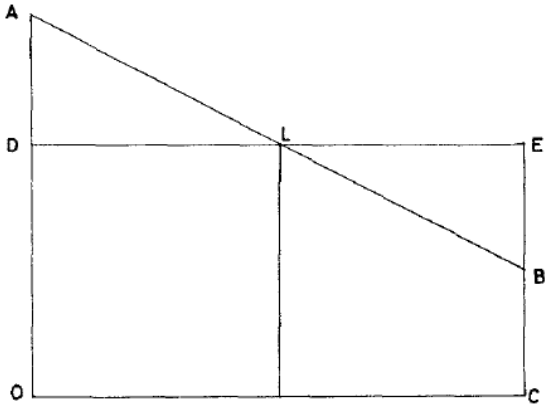
Орезм графички показује разлику између униформних форми, које су представљене правоугаоницима и униформно диформних форми које су представљене правоуглим троугловима (ако се, на пример, представља равномерно убрзано кретање почев од мировања или које представља равномерно успорено кретање до заустављања) или трапезима.



Слика 10: Униформне и униформно диформне форме

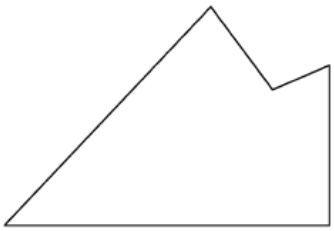
Његов *Закључак* 5 је заправо мертоновско правило.

Закључак 5: На основу претходног се може доказати да је униформно диформан квалитет једнак средњем степену, тј. подједнако је велики као што би униформан квалитет био у средњој тачки и ово се може овако показати.



Слика 11: Мертоновско правило код Орезма

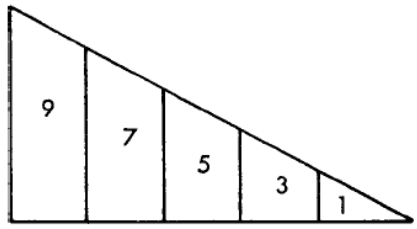
Илуструје и диформно диформне квалитете:



У делу „Питања о Еуклидовој геометрије”, у којима се могу наћи и претходна разматрања, у оквиру 14. питања, он заправо показује да је пређени пут при равномерно убрзаном кретању пропорционалан квадрату времена (дакле, пре Галилеја). Он ту говори о ’квалитетима’, али се то наравно може пренети на закључак који смо навели.

. . . сваки униформно диформни квалитет . . . за чији субјект замислимо да је подељен на неки број делова треба означити квадратом броја који представља број делова на који је субјект подељен.

И илуструје то овако (примећује да је збир $1+3+5+7+9=5^2$, а лако се можемо уверити, рецимо дељењем на троуглове подударне најмањем троуглу, да је однос ових површина заиста као на слици):



Слика 12: Пређени пут по равномерно убрзаном кретању је пропорционалан квадрату протеклог времена

Орезм се бавио и сумирањем редова. На пример, у делу „Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum” геометријски је показао да је

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n+\cdots=4.$$

На другом месту је показао да хармонијски ред

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

нема коначну суму. Наиме, груписао је чланове на погодан начин: трећи и четврти су у збиру $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, а то је веће од $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Збир следећа четири је такође већи од $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$. Тим груписањем се показује неограниченост суме. Заправо такав доказ и данас користимо.

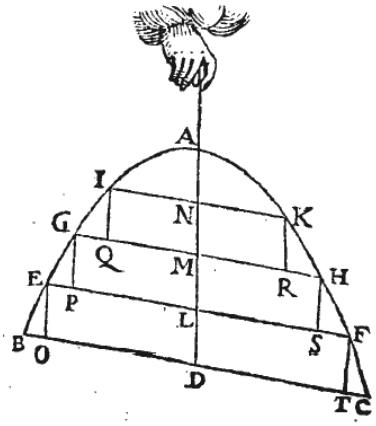
Стевин

Слика 13: Статуа Симона Стевина у Брижу

Са Симоном Стевином (1548–1620) заиста почињу примене метода које су водиле ка Calculusu и које су представљале напредак од Архимедових резултата. То се постигло и тако што се мање инсистирало на строгости. По свему судећи, то је био једини начин да се некако крене даље и то је на крају и довело до значајних резултата који су најзад добро засновани тек крајем XIX veka.

Стевин је био фламански инжењер и математичар из Брижа. Путовао је по Европи, а радио је и у другим градовима садашње Белгије и Холандије. Овде ћемо приказати како је показао да се тежиште параболе налази на дијаметру параболе (који садржи тачку у којој је

тангента паралелна тетиви – подсетите се квадратуре параболе код Архимеда).



Слика 14: Стевиново одређивање тежишта параболе

Најпре да наведемо да је раније констатовао да је, ако фигура има центар симетрије, то уједно и њено тежиште. Стога зна где се налази тежиште једнакостраничног троугла, паралелограма. Касније је показао за било који троугао, а доказ је врло сличан овоме који следи.

Дакле, он најпре подели AD на четири једнака дела AN, NM, ML, LD. Постави паралеле тетиви BC кроз тачке N, M, L и онда кроз добијене пресеке са параболом постави паралеле дијаметру AD. Тако добије фигуру коју чине три паралелограма са слике: $EFTO$, $GHSP$ и $IKRQ$. Како зна да тежиште паралелограма $EFTO$ лежи на LD, тежиште $GHSP$ на ML и тежиште $IKRQ$ на NM, констатује да тежиште те фигуре лежи на AD. Потом примећује да може даље да дели AD, тако да сваки од већ постојећих дужи дели на пола и формира нову фигуру од нових паралелограма. Но, види се да се та фигура све више и више поклапа са одсечком параболе, односно да се остатак може учинити произвољно малим ако се процес настави. Резонује на следећи начин.

А. Поред ма којих различитих тежина може се ставити тежина мања од њихове разлике.

О. Поред наведених тежина ADC и ADB не може се ставити тежина мања од њихове разлике.

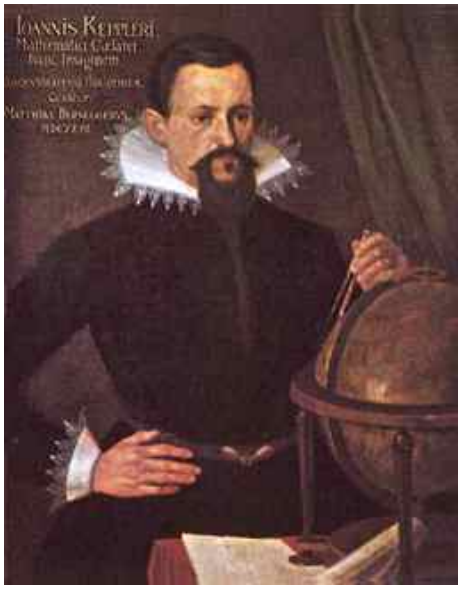
О. Стога се ове тежине ADC и ADB не разликују.

Видимо да је закључивање формирао у облику силогизма. Дакле, уместо да иде на доказ свођењем на апсурд као код Архимеда, он овако

закључује. Дакле, пошто делови ADC и ADB имају исту тежину, закључује да је AD вертикална дуж ако се фигура „окачи” о A, те је тежиште негде на AD. Даље он установљава и где се налази тежиште (оно дели AD у односу $3:2$). Овде се нисмо бавили неким додатним разматрањима у његовом доказивању, само смо се фокусирали на главну идеју. Овај метод он примењује у низу извођења. Свакако је желео да истакне да је оно што ради ваљано са логичке тачке гледишта, мада није као код Архимеда. Присетимо се да Архимедов „Метод” у коме је он показивао како је користио механичке аргументе за доказ геометријских чињеница, у то време није био доступан.

Кеплер

Јохан Кеплер (1571–1630)



Слика 15: Јохан Кеплер

нам је, наравно, највише познат као астроном. Но, питања којима се бавио у астрономији захтевала су и математику. Имао је занимљиву идеју у вези конусних пресека. Он је сматрао да има пет врста коника, које су све припадале истом роду. У свом раду из оптике из 1604. истакао је принцип непрекидности. Наиме, од конусног пресека који се састоји од две праве које се секу и у којој се жиже поклапају у тачки пресека, постепено, преко бесконачно много хипербола у којима се жиже

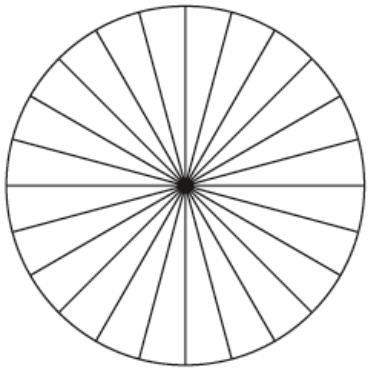
све више и више раздвајају, долазимо до параболе за коју је такође сматрао да има две жиже, али једну од њих у бесконачности. Потом се жиже преко фамилије елипси поново приближавају једна другој док се на крају не идентификују када се добије круг. Та његова идеја о тачки у бесконачности касније је боље реализована у Дезарговој геометрији.

Кеплер је нашао и примене за бесконачно мале у својој астрономији. У делу „Нова астрономија" навео је своја прва два закона.

1. Планете се крећу око Сунца по орбити која је елипса и у којој се Сунце налази у једној од жижа.

2. Радијус вектор који спаја Сунце и планету пребрише једнаке површине за једнако време.

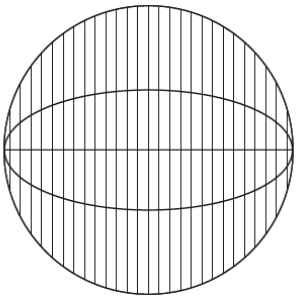
Дакле, овде му је било потребно разматрање површина и о њима је мислио као о бесконачном броју троуглова чије је једно теме у жижи, а друга два су бесконачно блиска на елипси. Тако он изводи и површину круга.



Слика 16: Површина круга по Кеплеру

Ако рачунамо површину малих криволинијских троуглова као $\frac{1}{2}r \cdot l_i$, где је l_i дужина тих малих лукова, онда када саберемо све површине, уз констатацију да је збир тих лукова једнак обиму круга, добијамо да је површина $\frac{1}{2}rO$, где је O обим круга.

Да би показао да је површина елипсе једнака πab, где су a и b полуосе, он, у духу Орезма, посматра круг као унију вертикалних дужи, сабирањем чијих се дужина добија површина. Но, елипса се добија 'сабијањем' круга дуж ординате у односу $b : a$



Слика 17: Површина елипсе по Кеплеру

те се тако добија да је површина елипсе чије су полуосе a и b једнака πab (површина круга је πaa, а онда имамо промену једне осе). Јасно да су ова размишљања далеко од коректних, али већ смо рекли да је то било неопходно да би развој математике пошао даље.

Кеплер се, осим посла дворског астронома, бавио и другим пословима. Наравно да је састављао и хороскоп, а године 1615. је издао дело у коме се бавио запреминама разних тела (мотивисан питањима запремине винских бачви). То су била тела која су настајала разним ротацијама око разних оса конусних пресека, чак 92 тела су ту разматрана. Назив дела је био „Нова стереометрија винских бачви". Разматрања су била попут претходних и те идеје су систематски унапређене 1635. у значајној књизи „Геометрија недељивих" Галилејевог ученика Бонавентуре Кавалијерија.

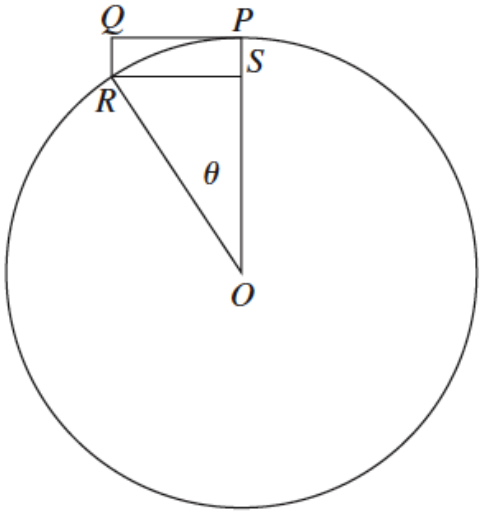
Галилеј

Галилео Галилеј (1564–1642) није био математичар per se, али је у својим делима користио математику, па и идеје бесконачно малог и бесконачно великог. Прво његово значајно дело „Два главна система" објављено је 1632. на италијанском и посвећено је астрономији. Написано је у форми разговора три човека – Салвијатија (научник, практично представља Галилеја), Сагреда (образовани аматер) и Симплиција (или Симпликија, што је правилнији изговор) (филозоф који је чврсто бранио Аристотелов поглед на свет), а бавило се Птолемајевим и Коперниковим погледом на Сунчев систем. Друго дело, „Две нове науке" објављено је 1638. такође на италијанском и оно је било посвећено физици, конкретно динамици и јачини материјала. Исти ликови су се и овде појавили и разговарали о тим темама.

Галилеј је показао да је путања пројектила парабола, растављајући његово кретање на две компоненте – хоризонталну и вертикалну, узроковану гравитацијом. Но, Галилеј је мислио да је и ланчаница (крива коју

обликује ланац или канап када се окачи о две тачке) такође парабола (касније је утврђено да се ради о функцији косинус хиперболички). Бавио се и проблемом одређивања површине испод једног лука циклоиде, али није успео да дође до резултата.

У делу „Два главна система” појављује се дискусија о бесконачно малим величинама различитих редова. Наиме, Симпликије је као аргумент који се противи Земљиној ротацији тврдио да ће тела у том случају бити избачена са Земље у правцу тангенте на ротациону путању, а Салвијати је објашњавао да се ту ради о бесконачно малим величинама различитог реда.



Слика 18: Бесконачно мале величине код ротације Земље

Наиме, када се изврши ротација за (бесконачно) мали угао θ, онда је потребно да тело „падне” за QR да би остало на Земљи, а то је бесконачно мала величина вишег реда у односу на лук $\widehat{PR}$ (или на PQ).

У делу „Две нове науке” појављује се и резултат који говори да постоји бијекција између свих природних бројева и свих бројева који су потпуни квадрати. Нажалост, Салвијати (што значи Галилеј) није у стању да савлада проблем у коме се чини да је део једнак целини, но разрешава проблем тако што каже да појмови ’веће’, ’мање’, ’једнако’ немају смисла за бесконачне скупове. Чак не дозвољава да се они упоређују са коначним скуповима. Требало је више векова да се ово ваљано разреши у оквиру теорије скупова.