Индијска и кинеска математика

Зоран Петровић

13. март 2023.

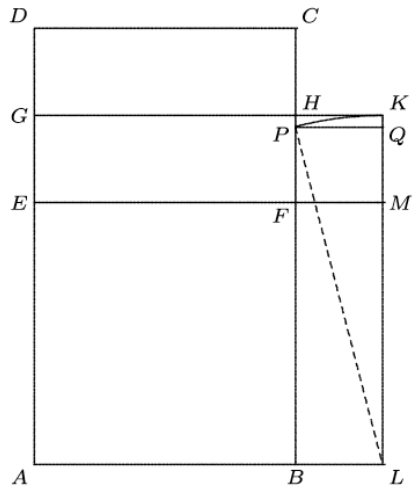
Индијска математика

Археолошка испитивања су показала постојање веома развијене културе у долини Инда око 2650. године п. н. е, дакле у време египатских градитеља пирамида. Но, немамо математичких докумената из тог периода. Значајна кретања народа, велики број различитих језика, од којих су многи још неразјашњени, отежавају покушај процене математичког нивоа из тих ранијих периода.

Сутре

Веде, религиозни документи, писани на санскриту, садрже позивање на велике бројеве и децимални систем. Ту се могу наћи и димензије, облици, пропорције везане за градњу олтара. То је садржано у „шулба (или шулва) сутрама" – „правилима за конопце". Овде се „шулба" односи на конопце за мерење, док „сутра" означава књигу правила. Постоји више преосталих ових 'сутри', писане су у стиху и вероватно потичу из прве половине првог миленијума п. н. е. мада то не знамо са сигурношћу. Ту се могу наћи Питагорине тројке $3,4,5$; $5,12,13$; $8,15,17$; $12,35,37$. Није искључен месопотамски утицај на ове сутре, али није ни потврђен.

Погледајмо метод квадратуре правоугаоника из једне сутре, а који веома подсећа на грчку 'геометријску алгебру'.



Задат је правоугаоник $ABCD$. На дужим страницама AD и BC поставимо тачке E и F тако да добијемо квадрат $ABFE$. Нека су G и H средишта дужи ED и FC. Продужимо GH до GK, тако да је $ALKG$ квадрат. Продужимо и EF до пресека са KL. Јасно је да су правоугаоници $GHCD$ и $FBLM$ подударни, те је површина правоугаоника $ABCD$ једнака површини квадрата $ALKG$ из кога је избачен мањи квадрат $FMKH$. Но, круг са центром у L, полупречника LK, сече BH у тачки P. Тада је $LQ^2 = LP^2 - PQ^2 = LK^2 - KH^2$, те тражени квадрат има страницу LQ.

У другој сутри налазимо опис конструкције квадрата који је тражени умножак датог квадрата. На пример, ако се тражи квадрат који је седмоструки дати квадрат, чија је страница a, онда се каже да се конструише једнакокраки троугао са основицом $6a$ и крацима $4a$. Висина тог једнакокраког троугла је $\sqrt{(4a)^2 - (3a)^2} = a\sqrt{7}$. Дакле, површина квадрата чија је страница једнака висини тог једнакокраког троугла је $7a^2$.

У три сутре налази се апроксимација за $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Ово нам, на 8 децимала, даје број $1{,}41421569$, док је $\sqrt{2}$ на истом броју децимала $1{,}41421356$. Апроксимација заиста јесте добра, али нам није познато како је добијена. Иначе, за разлику од Грка, Индијци нису имали никакав проблем да и ирационалне корене сматрају бројевима. То је свакако и у вези са тим да се у индијским математичким текстовима често не разликује тачан од приближног резултата, као што ћемо видети у даљем.

Сиданте

Сиданте су скоријег датума од шулба сутри. Процена је да су оне настале крајем IV, односно почетком V века. Сиданта означава систем или доктрину и овде се односи на астрономске системе. Велико је питање у којој су мери ова дела била независна од грчких извора, пошто се примећује велика сличност са делима аутора из Египта у то, или раније време. Али постоји нешто што их издваја. Док се код Грка разматрала тетива круга и централни угао који јој одговара, у сидантама се разматра половина тетиве и половина централног угла. То јесте мала разлика, али ту видимо наше тригонометријске функције. Занимљиво је како је настао назив са функцију синус. Наиме, тетива се на санскриту звала 'ђива' или 'џиба'. У преводу Арапа, који није користио самогласнике, појављује се само 'џб'. Што може да одговара и речи 'џаиб' која значи и 'залив' на арапском. Познати преводилац из XII века Ђерардо из Кремоне је стога то превео на латински као sinus, што значи 'залив' на латинском. И тако је дошло до назива те нама добро познате функције.

Аријабата

Аријабата (476–550) је значајан индијски математичар и астроном чије је најпознатије дело *Аријабатија* написано у стиху и завршено 499. године. То дело представља преглед дотадашњих знања, но оно је неуједначено по квалитету. Ту има и тривијалних резултата, као и погрешних, али и резултата велике вредности. Почиње навођењем назива степена броја 10 све до десетог степена и правилима за рачунање квадратних и кубних корена. Потом следе правила за мерење и ту имамо и тачне резултате и погрешне. На пример, наводи се да је површина троугла половина производа дужине једне странице и њој одговарајуће висине, али се тврди да је запремина пирамиде половина производа површине базе и висине. Такође, исправно се наводи да је површина круга једнака производу обима круга и половине полупречника, али и да је запремина сфере (кугле) једнака производу површине великог круга и квадратног корена те површине. Дата је и исправна формула за површину трапеза, али и потпуно произвољно тврђење о површини ма које равне фигуре. Но, резултат на који су индијски аутори посебно поносни је следећи:

Сабери 4 и 100, помножи са 8 и додај 62000. Тако добијаш приближно обим круга пречника 20000.

То нам даје апроксимацију за π:

$$\pi \approx \frac{(4+100)\cdot 8+62000}{20000} = 3,1416.$$

Но, то је заправо вредност за π коју је користио и Птолемеј у Египту. Постоје велике шансе да је Аријабата био под утицајем грчких претходника. Иначе, у Индији се за π често користила и апроксимација $\pi \approx \sqrt{10}$.

У *Аријабатији* налазимо и нека правила за аритметичке низове. На пример, описано је како се налази број чланова аритметичког низа ако је позната његова сума s_n, први члан a_1 и разлика d. Формула коју добијамо из тог описа је следећа:

$$n = \frac{\frac{\sqrt{s_n \cdot 8d + (2a_1 - d)^2} - 2a_1}{d} + 1}{2}.$$

У делу нема ни мотивације ни провере овог резултата. Наравно, ми можемо данас да ово изведемо:

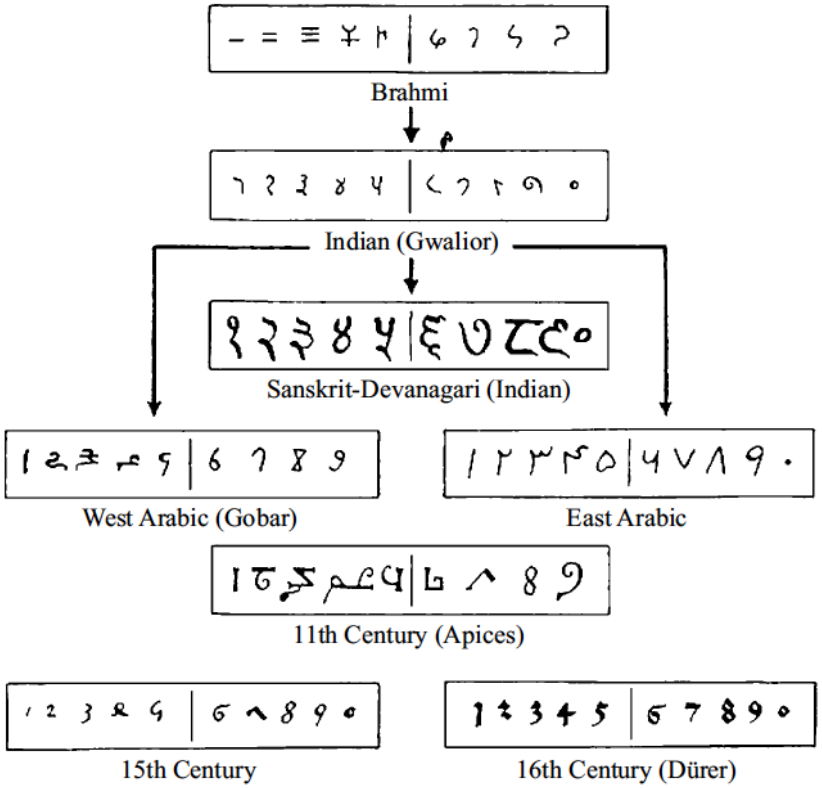
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\ &= na_1 + d(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Добијамо квадратну једначину по непознатој n:

$$dn^2 + (2a_1 - d)n - 2s_n = 0.$$

Из ове једначине се добија горња формула (додуше мало у другом облику, проверите то).

Оно на шта наилазимо у *Аријабатији* је децимални систем. Описује се и рачунање у коме се каже и да „од места до места увек је десет пута веће од претходног”. Да су се цифре за основу 10 појавиле и пре, видимо и из једне таблице из 595. године, када је један датум записан у декадном облику. Дуг је био пут од првих цифара до наших. Следећа таблица нам даје кратак приказ.



Слика 1: Развој цифара

Видимо еволуцију цифара и јасно препознајемо наше цифре у Гобар записима, карактеристичним за западни приказ код Арапа. Но, симбол за нулу није брзо настао. Постојале су свуда разне варијанте решења тог проблема, но по свему судећи прво појављивање нуле у Индији је на једном запису из 876. године. Делује невероватно да је требало више од 250 година, али многе ствари се не развијају у потпуности логично нити равномерно. Занимљиво је навести да се Деванагари запис за цифре и сада користи у Индији.

И у сидантама и у Аријабатији имамо прве таблице синуса. Ево како је то урађено. Ми знамо да је $\sin x \approx x$ када је x мало. Но, овде радимо са радијанима. Ако желимо да радимо са степенима, морамо мало да модификујемо ствари. Заправо, због прецизности је боље радити са минутима. Дакле, идеја је била да имамо исту меру и за синус и за угао. Ако гледамо у минутима, онда је пун круг: $360 \cdot 60' = 21600'$. Сада треба наћи полупречник r тако да је $2\pi r = 21600$. Уколико за π узмемо да је $\pi \approx 3{,}141592$, добијамо да је $r \approx 3437{,}75$.

Стога су Индијци узели да је полупречник круга 3438. То значи да је њихова апроксимација за π овде била приближно $3{,}14136$.

Када је изабран полупречник круга, онда је прављена таблица вредности $\sin x$, тако што је 90° подељен на 24 једнака дела. Најмањи угао је дакле био $3\frac{3}{4}^\circ$, што износи $225'$, те је узето да је $\sin\left(3\frac{3}{4}^\circ\right) = 225$. Добро, сад већ видимо да у таблици немамо баш синус угла, али се синус угла лако добија дељењем са полупречником. По тој рачуници је $\sin\left(3\frac{3}{4}^\circ\right) = 225/3438 \approx 0{,}06545$. А ако проверите, рецимо дигитроном, добијете да је $\sin 3\frac{3}{4}^\circ \approx 0{,}06540$. Дакле, није лоше за почетак. Ако сада са s_n означимо тај n-ти синус и ако је S_n сума првих n таквих синуса, онда је за рачунање коришћена формула:

$$s_{n+1} = s_n + s_1 - \frac{S_n}{s_1}.$$

Како је добијена та формула, не зна се. Али, да проверимо:

$$s_2 = s_1 + s_1 - \frac{s_1}{s_1} = 449,$$

$$s_3 = s_2 + s_1 - \frac{s_1 + s_2}{s_1} = 449 + 225 - \frac{225 + 449}{225} \approx 671,$$

$$s_4 = s_3 + s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{s_1} = 671 + 225 - \frac{225 + 449 + 671}{225} \approx 890,$$

$$s_5 = s_4 + s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{s_1} = 890 + 225 - \frac{225 + 449 + 671 + 890}{225} \approx 1105.$$

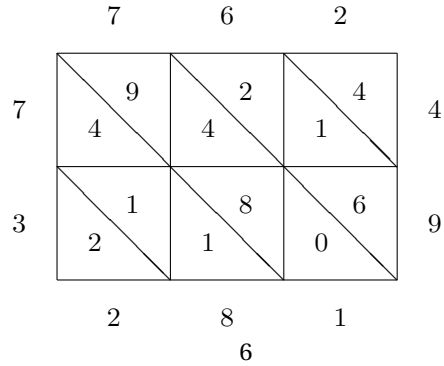
Како s_5 одговара синусу угла од $18\frac{3}{4}^\circ$, по овој таблици бисмо добили да је

$$\sin\left(18\frac{3}{4}^\circ\right) = \frac{1105}{3438} \approx 0{,}32141$$

док нам дигитрон даје приближну вредност $0{,}32144$.

Занимљив начин множења бројева

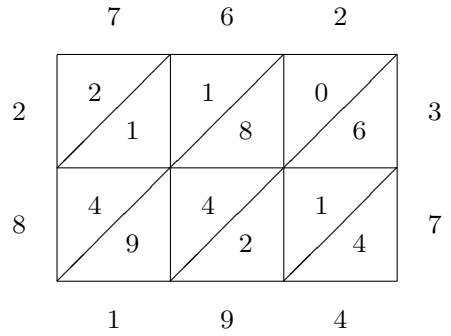
Приказаћемо овде један занимљив начин множења бројева, који се, највероватније најпре појавио у Индији и одатле је пренет у Кину, у Арабију, а потом преко Арабије и у Европу.



Ова таблица показује да је $37 \cdot 762 = 28194$. Како? Видимо да смо формирали производе цифара који се појављују у запису, тако што смо их распоредили у одговарајуће квадрате подељене на два троугла. Број 37 смо исписали одоздо нагоре, а 762 слева удесно. Заправо, таблице се могу и другачије исписивати.

Како су измножене све цифре, онда добијене резултате сабирамо по дијагоналама и исписујемо у наставку. Почињемо од $7 \cdot 2$ (дакле од цифара јединица) и исписујемо цифру 4, пошто се само она налази на тој дијагонали. На следећој дијагонали имамо збир $2+1+6=9$ и 9 смо исписали у наставку. Потом имамо дијагоналу на којој је збир $9+4+8+0=21$ и у наставку исписујемо цифру 1, а 2 пребацујемо за сабирање са бројевима у следећој дијагонали. Дакле, имамо потом $2+4+1+1=8$, исписујемо 8 у наставку. Коначно, последња дијагонала има само 2, без преноса са претходне и ту пишемо 2.

Битно је било да се крене од производа цифара јединица и да се даље иде по дијагонали. Ако бисмо исписали број 37 са десне стране, онда бисмо квадрате делили на другачији начин да бисмо добили резултат:



Брамагупта

Значајни индијски астроном и математичар Брамагупта (око 598–670) живео је око једног века после Аријабате, али се он не наставља на његове резултате. Он је пре свега астроном, али има и довољно занимљивих математичких резултата вредних спомена.

Најпре, код њега први пут наилазимо на експлицитан опис рада са негативним бројевима и нулом. Тако да имамо правила попут тога да производ позитивног и негативног броја даје негативан број, да производ негативног и негативног даје позитиван број, да производ позитивног или негативног броја и нуле даје нулу. Он се не изјашњава око тога шта се добија при дељењу са нулом, сем што наводи да је $0/0=0$. Но, не можемо му то толико замерити.

Оно што је посебно значајно је да је он први који је нашао сва целобројна решења једначине

$$ax = by + c, \tag{1}$$

где су a, b, c дати цели бројеви. Он зна да је потребан услов за постојање решења да $\mathrm{NZD}(a,b) \mid c$. Уколико је то тако, може се поделити највећим заједничким делиоцем и сматрати да су a и b узајамно прости. Он такође зна да, ако има једно решење (x_0, y_0), сва друга су дата са $x = x_0 + mb$, $y = y_0 + ma$, где је m цео број. Метод за налажење једног решења у случају да су a и b узајамно прости називао се „кутака" („дробилица"). Тај метод се појављује, али не експлицитно за решавање овог типа једначина, још код Аријабате, објаснио га је боље Баскара I (око 600–680), а и касније је усавршаван. Идеја је да применом Еуклидовог алгоритма a и b смањујемо („дробимо") док не дођемо до остатака 1(и 0), а да онда, на основу добијених количника и остатака добијемо то партикуларно решење. Ево основне идеје.

Претпоставимо да је $b > a$ (то није губљење општости наравно). Поделимо b са a: $b = q_1 a + r_1$. Но, почетна једначина је тада

$$ax = (q_1 a + r_1)y + c$$

и ако узмемо да је $x = q_1 y + z$, онда добијамо

$$aq_1 y + az = aq_1 y + r_1 y + c,$$

односно

$$r_1 y = az - c.$$

Видимо да су се коефицијенти уз непознате смањили, а слободан члан је остао исти (до на знак). Како је сада $a > r_1$ поступак се може поновити. Поступак се понавља све док не дођемо до последњег остатка који није нула, а пошто је то заправо 1 (јер су a и b узајамно прости по претпоставци), долази се до једначине која се лако решава. Затим се то решење 'подиже' до решења почетне једначине и тај поступак је описан. Ми бисмо то све слично и данас радили, али можемо да користимо матрице и онда нам је знатно лакше.

Овде је можда занимљиво напоменути да је Брамагупта за дељење са остатком користио и неке мале 'трикове'. На пример, ако жели да подели 750 са 22, тј. да разломак $\frac{750}{22}$ изрази као мешовити број, онда (у савременим ознакама, он јесте користио разломке, али без разломачке црте, само је бројилац писао изнад имениоца):

$$\frac{750}{22} = \frac{750}{25} \cdot \frac{25}{22} = 30 \cdot \left(1 + \frac{3}{22}\right) = 30 + \frac{90}{22} = 30 + \frac{45}{11} = 34\frac{1}{11}.$$

Дакле, он би именилац заменио већим бројем који дели бројилац и тако поједноставио даљи рачун.

Постоје озбиљне анализе које показују да је Брамагупта у решавању једначине (1) био мотивисан својим астрономским разматрањима, али се ми њима овде нећемо бавити.

Брамагупта се бавио и решавањем неодређене једначине облика

$$x^2 = 1 + dy^2. \tag{2}$$

Једначине тог типа сада се (неоправдано) називају Пелове једначине, а и сам Архимед је повезан са једначином тог типа. Наиме у делу које нисмо разматрали – *Проблем стоке*, он је поставио проблем као изазов александријским математичарима, како рече „онима који се занимају таквим стварима". У њему се тражи да се одреди број бикова и крава различитих боја (четири боје, дакле има 8 непознатих) који задовољавају разне услове. Сви услови, сем два, су једноставне линеарне везе, но та два захтевају да нека два броја буду троугаони број и потпун квадрат. И то је део који чини проблем изузетно тешким са практичне тачке гледања, јер су решења те једначине уистино веома велики бројеви. Тек у деветнаестом веку имамо нека решења. Наиме, тада је показано да се у решењу појављују бројеви са 206545 цифара! Коначно решење је нађено тек почетком осамдесетих година двадесетог века, наравно уз помоћ компјутера.

У сваком случају, Брамагуптин допринос је у томе што је дао метод како да се од два решења добије ново решење. Наиме, ако су (p,q) и (p',q') нека решења једначине (2) , онда је и

$$(pp' + dqq', pq' + qp')$$

такође једно решење. То нама сада није тешко проверити. Треба рећи да је Брамагуптина алгебра била скраћеничког типа, умањилац је означавао тачком изнад њега, већ смо видели како је писао разломке, а и непознате су означаване одговарајућим скраћеницама.

Брамагупта је имао и резултате из геометрије, мада се и код њега налазе једни поред других тачни и нетачни резултати. Од тачних резултата наведимо да је имао формулу за одређивање пречника круга описаног око датог троугла: ab/h_c, ако су a и b странице датог троугла, а h_c висина која одговара трећој. Но, ова формула је заправо синусна теорема у другом облику (размислите зашто) и она је била позната и Птолемеју. За π је користио вредност $\sqrt{10}$, а понекад чак и само 3 као „практичну вредност". Брамагупта је дао и формулу за површину тетивног четвороугла, која одговара Хероновом обрасцу: ако је s полуобим тетивног четвороугла чије су странице a, b, c и d, онда је површина дата са:

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Видимо се добија баш Херонов образац у случају да се четвороугао деформише у троугао, тј. ако је једна од страница једнака 0. Ова

формула је и сада позната као *Брамагуптина формула* (изведите ову формулу). Једина мана је у томе што Брамагупта није експлицитно навео да она важи само за тетивне четвороугле. У ранијим временима многима није било јасно да за одређивање четвороугла треба више од 4 елемента. На пример, ако посматрате неки квадрат странице a, онда можете да нађете ромб странице a, који има било коју површину између 0 и a^2.

Баскара II

Најзначајније дело математичара и астронома из XII века Баскаре II (1114–1185) било је *Сиданта Сиромани*. Састоји се од четири дела, а прва два *Лилавати* и *Вицаганита* су релевантни за математику.

Лилавати је наводно била Баскарина ћерка којој је он посветио тај део. Ту има више аритметичких проблема који се тичу линеарних и квадратних једначина, аритметичке и геометријске прогресије, Питагориних тројки и сличних тема. Неки од проблема су одређеног типа, неки неодређеног. Наводи и метод за решавање квадратне једначине, а и дискутује када постоје два позитивна решења. Каже још:

Ако се решење не може овако наћи (на пример у случају једначине трећег или четвртог степена) онда се мора наћи вештином самог решавача.

Пошто се речима наведу формуле $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ и $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, те се формуле примењују за налажење 9^3 (као $(4+5)^3$), 27^3 (као $(20+7)^3$) и 125^3 (најпре се нађе 12^3, а потом $125^3 = (12\cdot 10+5)^3$). Но, потом се објашњава инверзни поступак за налажење квадратног и кубног корена базиран на овим формулама и поступном формирању декадног записа тог кубног корена. Наводи баш примере за налажење кубног корена који су претходној рачуници кубови датих бројева. На пример, тражи да се одреди кубни корен из $1953125 (= 125^3)$. На први поглед делује празно, али и није, метод који наводи омогућава да се поступа без обзира који је у питању број, једино се овде добија резултат релативно брзо и као цео број. Занимљиво је ово питање, али се нећемо даље бавити њиме.

Баскара даје и партикуларна решења (Пелове) једначине $x^2 = 1+dy^2$ за $d \in \{8,11,32,61,67\}$. На пример, за $d = 67$ даје решење $x = 1776319049$, $y = 22615390$. Нимало једноставно решење за то време.

Што се геометријских резултата тиче, за π је користио вредност $\frac{22}{7}$, а коректно је навео формуле за површину круга и запремину сфере. У његовом делу налазимо и разматрање пермутација и комбинација, као и опис формула за рачунање $\binom{n}{k}$. Наводи да је количник $a/0$ једнак бесконачности, али потом наводи и да је $a/0\cdot 0 = a$.

Керaлска школа

Индијски астроном и математичар Мадава (1340–1425) рођен је у граду Сангамаграма у области Керал (једна од држава у данашњој Индији носи то име)

Слика 2: Држава Керал у Индији

и он је оснивач једне врло продуктивне школе астрономије и математике која је произвела изузетне резултате. Чланови ове школе су живели, радили и предавали у породичним заједницама које су се звали *илами*. Од самог Мадаве није остало ништа записано од математичких резултата, но његови ученици и њихови ученици су наставили традицију и на основу каснијих записа (из XVI века) знамо до којих су резултата дошли математичари ове школе.

Ево тих резултата.

Развоји тригонометријских функција у степене редове

1. $\theta = \mathrm{tg}\,\theta - \frac{\mathrm{tg}^3\theta}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5\theta}{5} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4;$
2. $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2;$
3. $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2;$
4. $\sin^2\theta = \theta^2 - \frac{\theta^4}{2^2-2/2} + \frac{\theta^6}{(2^2-2/2)(3^2-3/2)} - \frac{\theta^8}{(2^2-2/2)(3^2-3/2)(4^2-4/2)} + \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4.$

Концепт периодичности ових функција развијен је тек касније.

Имамо и развоје који су експлицитно у вези са π.

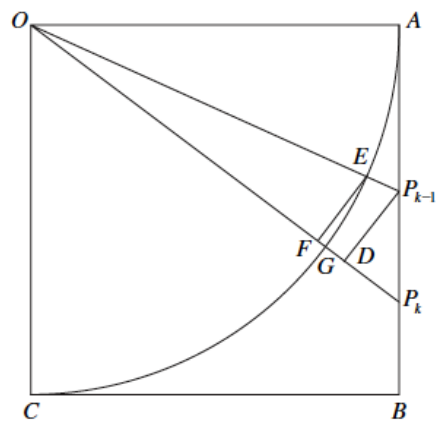
1. $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n} \pm f_i(n+1)$, за $i = 1,2,3$, где је

$$f_1(n) = \frac{1}{2n}, \quad f_2(n) = \frac{n}{2(n^2+1)}, \quad f_3(n) = \frac{n^2+4}{2n(n^2+5)}.$$

2. $\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \cdots$;
3. $\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5+4\cdot 1} - \frac{4}{3^5+4\cdot 3} + \frac{4}{5^5+4\cdot 5} - \cdots$;
4. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{3\cdot 3}{+}\frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots$;
5. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\cdot 2^2-1)-2^2} + \frac{1}{(2\cdot 4^2-1)-4^2} + \frac{1}{(2\cdot 6^2-1)-6^2} + \cdots$;
6. $\frac{\pi-2}{4} \approx \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \cdots \mp \frac{1}{n^2-1} \pm \frac{1}{2((n+1)^2+2)}$.

Сматра се да развоји тригонометријских функција у редове потичу од Мадаве. Занимљиво је и напоменути да су процене грешака у Лајбницовом развоју за $\frac{\pi}{4}$ (први развој у другом списку), остварене помоћу функција f_i, значајне због саме рачунице. Тај алтернирајући ред врло споро конвергира, те додатне функције знатно увећавају апроксимацију. Заправо, то је знатно касније приметио и Њутн у писму Олденбургу из 1676. Он каже да се ту додавањем половине последњег члана или на сличан начин рачунање може извести са великом тачношћу. Читаоци сами могу лако проверити колико то побољшава апроксимацију.

Индијски текстови углавном наводе ове резултате без доказа, али се ипак у неким текстовима могу и наћи докази. На пример, развој функције $\operatorname{arctg} x$ (наш први развој) се, de facto, добија интеграцијом функције $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Наравно да се појам интеграла не спомиње, но формира се заправо интегрална сума за ту функцију (користећи сличности троуглова и апроксимације малих лукова тетивама), та се функција развија у ред, а потом се користи резултат да је $\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} \sim \frac{1}{k+1}$, када је n велико. Ова апроксимација за суму првих k степена се често појављује у оквиру ове школе. Није ту све наравно у потпуности коректно, али се долази до правог резултата. У текстовима ове школе на Санскриту нема извођења, но текст *Јухтибаса* на малајаламском језику (који је близак тамилском, за кога је вероватно више нас чуло) садржи методе којима се добијају ове формуле. Приказаћемо како се долази до формуле за развој функције arctg.



Овде је $OA = 1$, четвороугао $OABC$ је квадрат и имамо лук $\widehat{AC}$, који је четвртина круга. Страница AB је подељена на n једнаких делова, $\measuredangle AOP_k = \theta$, $x = AP_k = \operatorname{tg}\theta$, $P_{k-1}P_k = \frac{1}{n}$ (те је $x = \frac{k}{n}$). Осим тога, дужи EF и $P_{k-1}D$ су ортогоналне на дуж AP_k.

Сличност троуглова $\triangle OEF$ и $\triangle OP_{k-1}D$, даје

$$\frac{EF}{OE} = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}}, \text{ те је } EF = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}}, \text{ јер је } OE = OA = 1.$$

Троуглови $\triangle P_{k-1}P_kD$ и $\triangle OAP_k$ су такође слични:

$$\frac{P_{k-1}P_k}{OP_k} = \frac{P_{k-1}D}{OA}, \text{ те је } P_{k-1}D = \frac{P_{k-1}P_k}{OP_k}.$$

Ако OP_{k-1} апроксимирамо са OP_k, добијамо

$$EF = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}} \approx \frac{P_{k-1}P_k}{OP_k^2} = \frac{P_{k-1}P_k}{1 + AP_k^2} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Ако лук $\widehat{EG}$ апроксимирамо са EF и искористимо претходну апроксимацију, добијамо

$$\widehat{EG} \approx \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Стога можемо да закључимо да се $\operatorname{arctg} x = \theta$ може апроксимирати сумом

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{j^2}{n^2}}$$

за n (стога и k, јер је $k/n = \operatorname{tg}\theta$) довољно велико. За даљу апроксимацију, $\frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}}$ се развија у ред. Ред се добија итеративном процедуром:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x\left(1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) = \ldots = 1 - x + x^2 - \ldots$$

Стога се $\theta = \operatorname{arctg} x$ може апроксимирати са (подсетимо се да је $x = \frac{k}{n}$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{j^2}{n^2}+\frac{j^4}{n^4}-\cdots\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}1-\frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{k}j^2+\frac{1}{n^5}\sum_{j=1}^{k}j^4-\cdots \\ &= \frac{x}{k}\sum_{j=1}^{k}1-\frac{x^3}{k^3}\sum_{j=1}^{k}j^2+\frac{x^5}{k^5}\sum_{j=1}^{k}j^4-\cdots.\end{aligned}$$

Ако се искористи горенаведена апроксимација

$$\frac{1}{k^{s+1}}\sum_{j=1}^{k}j^s \approx \frac{1}{s+1},$$

добијамо ($x = \operatorname{tg}\theta$):

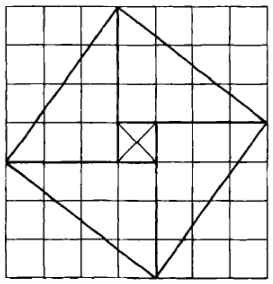
$$\theta = \operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\theta}{5} - \cdots.$$

Индијска математика је интуитивна, посебна, дела су често мешавине погрешних или тривијалних резултата и изузетно вредних. Она су писана у стиховима, нису систематична попут грчких, а не постоји ни континуитет у раду. Но, то је и разумљиво с обзиром на сву сложеност Индије и мноштва нација и језика који ту постоје.

Кинеска математика

Јасно је да је у долинама Жуте реке и реке Јангце, формирана цивилизација у приближно исто време када и цивилизације у Месопотамији и Египту, али хронолошки подаци о математици тих цивилизација су знатно мање поуздани него у наведена два претходна случаја. За најстарији математички класик се сматра „Џоу Би Суан Ђинг”, односно, „Аритметички класик о гномону и кружним небеским путањама”, али се процене о његовој старости разликују и за више од 1000 година. Неки наводе да се ту ради о запису кинеске математике из периода око 1200. г. п. н. е. док други сматрају да се пре ради о документу из првог века п. н. е. Највероватније је да се ту ипак ради о документу скупљеном из више периода. У овој књизи пре свега имамо астрономска израчунавања, али и својства правоуглих троуглова укључујући наравно и Питагорину теорему. Питагорина теорема је у кинеским класицима позната као гоугу теорема. Наиме, гу на кинеском представља вертикални штап на сунчаном сату, док је гоу сенка тог штапа.

У овом делу имамо познату кинеску илустрацију Питагорине теореме за троугао са страницама 3, 4 и 5.



Слика 3: Гоугу или Питагорина теорема

Најзначајнији кинески класик је свакако „Ђиу Џанг Суан Шу”, односно „Девет књига (глава) о математичкој вештини”. Највероватније је уобличен у време Еуклидових „Елемената”, али је уништен у великом паљењу књига 213. г. п. н. е. Заправо оно што данас имамо је коментар на то дело које је 263. године саставио значајни математичар Лиу Хуи.

Он је својим коментарима, у којима имамо и доказе и додатна објашњења знатно проширио то дело. У VII веку је одлучено да то дело буде обавезна литература за образовање државних службеника. То је један од најстаријих штампаних уџбеника, пошто је штампан техником дрвених блокова 1089. године.

Девет књига нису теоријско дело попут *Елемената* него практични приручник са разним формулама за рачунање површина, запремина, али и пореза. Има и прецизних резултата, али и апроксимација. Посебно су занимљиве две теме.

Прва се тиче рачунања квадратних корена методом постепеног формирања цифара у декадном запису. Можете је наћи ако имате неки старији уџбеник или приручник из, рецимо, педесетих година прошлог века. Проблем 12 у четвртој књизи тражи да се нађе страница квадрата чија је површина 55225 (неких јединица, које нама нису битне). Дакле, тражи се $\sqrt{55255}$. Јасно је да је резултат троцифрен број (прецизније, знамо да је његов цео део троцифрен број). У ту сврху се цифре почетног броја групишу у групе од по две цифре почећи од цифара јединица: 5|52|25. Посматрањем прве групе, која се састоји само од цифре 5 може се констатовати да је прва цифра траженог броја 2, јер је $2^2 \leqslant 5 < 3^2$. Сада квадрат те цифре, који је 4, одузимамо од 5 и „спуштамо” наредне две цифре. Посматрамо број 152. Треба нам цифра x тако да је квадрат броја $(2x)_{10} = 20 + x$ најбоља доња апроксимација за 552. Како је $(20+x)^2 = 400+40x+x^2$, а 400 смо већ одузели, питање се своди на налажење највеће цифре x за коју је $(4x)_{10} \cdot (x)_{10} \leqslant 152$.

Јасно је да је то 3. Сада израчунамо $152-43\cdot 3$, добијемо 23 и спустимо преостале две цифре 25, тј. посматрамо број 2325. Добили смо да су прве две цифре траженог корена 23. Стога сада тражимо највећу цифру x за коју је $(46x)_{10}\cdot(x)_{10}\leqslant 2325$. Но, видимо да је $465\cdot 5=2325$, те смо заправо добили да је тражени број 235. Но, и да нисмо добили резултат, могли смо да наставимо даљим тражењем цифара, само бисмо сада додали децимални зарез, „спустили" две нуле и наставили. Дакле, поступак ради без обзира на чињеницу да је овде наведен пример у коме се добија баш цео број. Он се може мало средити, али то је у суштини то. Видимо да је суштина поступка у формули за квадрат бинома: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. За вежбу препоручујемо читаоцима да нађу $\sqrt{25281}$ (проблем 13), $\sqrt{71824}$ (проблем 14), $\sqrt{564752\frac{1}{4}}$ (проблем 15) и, када посебно буду расположени, $\sqrt{3972150625}$ (проблем 16). Наравно, радећи овако велике бројеве лако се можете убедити да метод ради без обзира на чињеницу да су то примери са правилним решењима.

Проблем 19 пак тражи да се израчуна страница коцке чија је запремина 1 860 867 (неких јединица). Дакле, тражи се $\sqrt[3]{1860867}$. Према томе, треба решити једначину

$$x^3=1\,860\,867.$$

Видимо да решење мора бити троцифрени број (као и горе – оно што заиста знамо је да је цео део решења троцифрен број) и видимо да је прва цифра једнака 1. Уведимо смену $x=y+100$. Добијамо

$$y^3+300y^2+30\,000y+1\,000\,000=1\,860\,867,$$

односно

$$y^3+300y^2+30\,000y=860\,867.$$

Наравно сада је y двоцифрени број и видимо да је његова прва цифра једнака 2 (y је свакако мањи од 30, то се лако види). Сада уводимо смену $y=z+20$. Добијамо

$$z^3+60z^2+1200z+8000+300z^2+12\,000z+120\,000+30\,000z+600\,000=860867,$$

тј.

$$z^3+360z^2+43\,200z=132\,867.$$

Број z једноцифрен и видимо да не може бити већи од 3. Но, заправо је

$$3^3+360\cdot 3^2+43\,200\cdot 3=132\,867,$$

те је тражено решење број 123.

За вежбу: $\sqrt[3]{1953\frac{1}{8}}$ (проблем 20), $\sqrt[3]{63\,401\frac{447}{512}}$ (проблем 21) и $\sqrt[3]{1\,937\,541\frac{17}{27}}$ (проблем 22).

Друга тема је заиста посебна. У *Девет књига* по први пут налазимо метод за решавање система линеарних једначина. Заправо је то суштински Гаусов метод, само са другачијим записом. Али се заиста појављује и матрица. Тај метод се илуструје у 18 проблема у осмој књизи. Један од проблема у коме се тражи да се одреде количине снопова жита три различита квалитета, своди се на решавање система линеарних једначина

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 39 \\ 2x+3y+z &= 34 \\ x+2y+3z &= 26. \end{aligned}$$

Наравно да се систем није овако исписивао, али су се штапићи за рачунање постављали на табли за рачунање на следећи начин:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Дакле, ништа друго до матрица система мало другачије написана. Рачунањем уз помоћ штапића ова се матрица свела на матрицу

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

а одговарајући систем

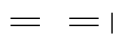
$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 39 \\ 5y+z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

се наравно лако решава.

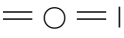
У току рачунања су се могли појављивати и негативни коефицијенти (мада су признавана само позитивна решења, јер су и проблеми тако постављани) и они су се означавали помоћу црних штапића, а позитивни помоћу црвених. Ово је прави тренутак да напишемо и како су се бројеви записивали помоћу система који је одговарао рачунању са штапићима.

Цифре су биле $|, ||, |||, ||||, |||||, \overline{|}, \overline{||}, \overline{|||}, \overline{||||}$, на позицијама јединица, стотина, десет хиљада, док су на позицијама десетица, хиљада коришћене ознаке $—, =, \equiv, \equiv, \equiv, \underline{|}, \underline{|}, \underline{|}, \underline{|}$.

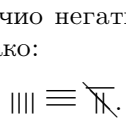
Дуго времена није постојала цифра за нулу, то је место остављано да буде празно. На пример, број 2021 би се овако записао:



Знатно касније је уведен кружић за нулу, те је тада 2021:

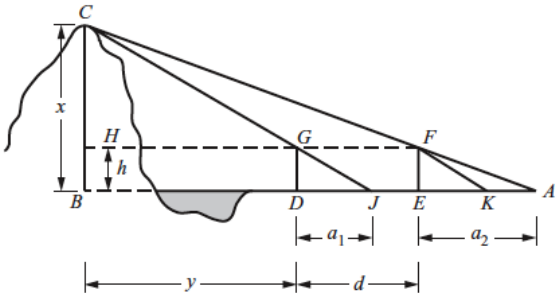


Као што је речено, у почетку су коришћене боје да означе позитивне и негативне коефицијенте, али се у XIII веку прешло на прецртавање цифре јединица да би се означио негативан коефицијент. На пример, број -437 би се записивао овако:



Осим писања коментара на *Девет књига* Лиу Хуи је написао и краће дело, које је вероватно требало да послужи као додатак на девету књигу, која је била посвећена правоуглим троугловима, но ипак је издвојено као посебно дело. Садржи само девет практичних проблема и зове се „Математички приручник за острво на мору”. Бави се одређивањем растојања међу недоступним тачкама коришћењем неколико посматрања. Проблем по коме је и дело добило име је следећи.

Имамо острво на мору које треба да измеримо. Два стуба висине по 30 стопа сваки, подигнута су на истом нивоу, а њихово растојање је 1000 корака (1 корак = 6 стопа) тако да су оба стуба у истој линији са острвом. Ако човек оде 123 корака од ближег стуба, највиша тачка на острву ће му таман постати видљива, а ако се помери 127 корака уназад од даљег стуба, поново ће му та највиша тачка бити таман видљива. Одредити висину највише тачке и растојање до ближег стуба.



Ево како је проблем решен у модерној нотацији. Приметимо да је овде $a_1 = 123$, $a_2 = 127$, $h = 5$ и $d = 1000$. Нека је $EK = DJ$, тако да је FK паралелно са GJ. С обзиром да су троуглови $\triangle CHG$ и $\triangle FEK$ слични, као и троуглови $\triangle CGF$ и $\triangle FKA$, добијамо једнакости

$$\frac{CH}{FE} = \frac{HG}{EK} = \frac{CG}{FK} = \frac{GF}{AK}.$$

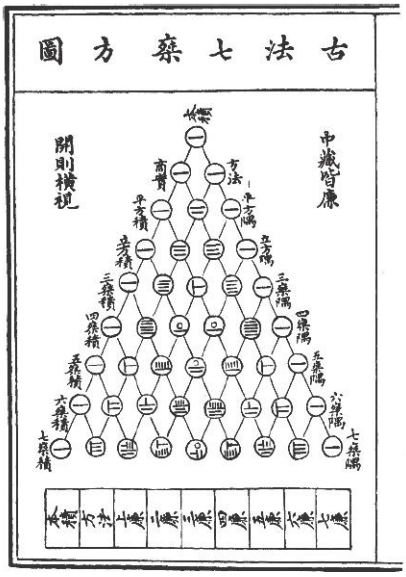
Добијамо

$$\frac{x-5}{5} = \frac{y}{123} = \frac{1000}{127-123},$$

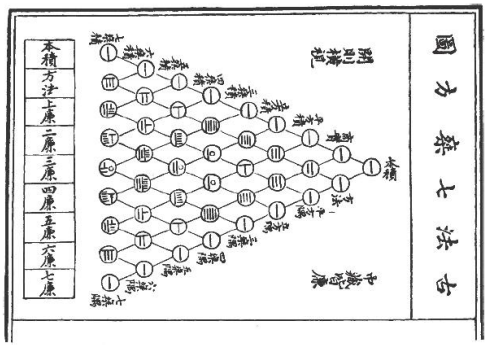
одакле следи да је $x = 1255$ (корака), а $y = 30750$ (корака).

Наравно да не можемо исцрпно да анализирамо сва дела кинеске математике, но морамо споменути и дело „Драгоцено огледало од четири елемента” математичара Џу Шиђеа са краја XIII и почетка XIV века (четири елемента су небо, земља, човек и материја). Ово дело је објављено 1303. године.

Погледајте насловну страну.



Заправо је можда боље видети је ротирану.



Није тешко уверити се да овде имамо познати нам Паскалов троугао (записан коришћењем добро нам познатих цифара уз кружић који означава нулу), значајно пре Паскала. Овде имамо биномне коефицијенте до осмог степена.

У овом делу имамо такође даље развијен метод за нумеричко решавање алгебарских једначина. Док у *Девет књига* имамо само једначине типа $x^2 = c$ и $x^3 = c$, овде имамо значајно сложеније случајеве, а метод је заправо разрада већ наведеног, а налази се и у ранијим делима других кинеских математичара. Енглески математичар Хорнер је 1819. године објавио дело „Нови метод за нумеричко решавање једначина свих редова помоћу непрекидне трансформације". Тај 'нови' метод је заправо већ одавно био познат кинеским математичарима, но на Западу је добио назив *Хорнеров метод*. Добро је позната изрека да је ново све што је добро заборављено. У вези са тим је занимљиво споменути да су се нека дела кинеских математичара изгубила у Кини, али су постала позната у Кореји и Јапану и извршила значајан утицај на развој математике у овим земљама.

Један од кинеских математичара који је описао овај нумерички метод био је и Ћин Ђушао (1202-1261) у свом значајном делу „Математичка расправа у девет одељака" из 1247. године (XIII век је било златно доба кинеске математике). Сваки одељак садржи 9 проблема, дакле укупно је ту 81 проблем.

Оно што је посебно значајно за ово дело је да је ту дат de facto конструктиван доказ за Кинеску теорему о остацима. Прво спомињање ове теореме налази се у „Математичком класику Сун Цуа" чије се порекло процењује на IV век. Ту се налази овај проблем.

Имамо ствари за које не знамо колико их је; ако их бројимо по три, остатак је 2; ако их бројимо по пет, остатак је 3; ако их бројимо по седам, остатак је 2. Колико има ствари?

Јасно је да се овде тражи да се реши систем конгруенција:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

и дато је решење $x = 23$. Наравно, ово је једноставан проблем. Ћин је заправо описао налажење решења у општем случају, чак и када модули нису узајамно прости (наравно, решење тада не постоји увек, али се установљава и када оно постоји). То је велики скок од тог једног једноставног проблема из давних времена. Сам Ћин свакако није био оличење врлине. Није презао ни од тога да отрује оне који му се нису свиђали, а и позиције администратора је користио за пљачку и лично богаћење. Изузетни резултати у науци не морају бити дела узорних људи.