Кратак преглед филозофије математике XX века

Зоран Петровић

мај 2023. године

Ако се математика сматра науком, онда се филозофија математике може сматрати за грану филозофије науке уз, на пример, филозофију физике или филозофију биологије. Но, због свог предмета истраживања, филозофија математика заузима посебно место у филозофији науке. Док природне науке истражују ентитете који су лоцирани у простору и времену, никако није очигледно да је то тако са објектима који се изучавају у математици. Не само то, методи истраживања се у математици значајно разликују од метода истраживања у природним наукама. Док се у природним наукама општа знања стичу индуктивним методама, за математичка знања се чини да се добијају на другачији начин: дедукцијом из основних принципа. Статус математичког знања такође изгледа различито од статуса знања у природним наукама. Теорије у природним наукама делује много мање сигурно и много су отвореније за ревизије него што је то случај са математичким теоријама. Због ових разлога математика пред филозофију поставља проблеме сасвим другачије врсте. Стога су филозофи посветили посебну пажњу онтолошким и епистемолошким питањима у вези математике.

1 Филозофија математике, логика и заснивање математике

Са једне стране, филозофија математике се бави проблемима који су блиско повезани са централним проблемима метафизике и епистемологије. На први поглед, чини се да математика истражује апстрактне ентитете. Поставља се питање шта је природа математичких ентитета и како можемо имати знања о њима. Ако се ови проблеми сматрају за претешке, можда треба покушати да се види да ли математички објекти ипак некако припадању конкретном свету.

С друге стране, показало се да је до неке мере могуће математичке методе искористити за филозофска питања која се тичу математике. Окружење у коме је то урађено представља математичка логика која у себи укључује теорију доказа, теорију модела, теорију скупова и

теорију израчунљивости као своје подобласти. Дакле, у XX веку су започела математичка истраживања у суштини филозофских теорија, која се тичу природе математике.

Када се професионални математичари баве основима свог предмета истраживања, за њих се каже да се баве истраживањем заснивања математике. Када професионални филозофи истражују филозофски питања о математици, за њих се каже да доприносе филозофији математике. Наравно, разлика између филозофије математике и основа математике је суптилна и што више има интеракције међу филозофима и математичарима о питањима која се тичу природе математике, тим боље.

2 Четири школе

Општи филозофски и научни поглед у XIX веку био је усмерен ка емпиријском: платонистички аспекти рационалистичких теорија о математици се убрзано губили подршку. Посебно је на, некад високо хваљену, способност рационалне интуиције гледано са сумњом. Тако да се поставио изазов да се формулише филозофска теорија математике која би била слободна од платонистичких елемената. У првим деценијама XX века, четири неплатонистичка приступа математици су развијена: ЛОГИЦИЗАМ, ФОРМАЛИЗАМ, ИНТУИЦИОНИЗАМ и ПРЕДИКАТИВИЗАМ. Због случајних историјских услова, овај последњи није развио свој пуни потенцијал до шездесетих година, али ипак заслужује своје место поред три прве традиционалне школе.

2.1 Логицизам

Програм логицизма састоји се у покушају да се математика редукује на логику. Како би логика требало да је неутрална у погледу онтолошких питања, изгледало је да је овај пројекат у складу са антиплатонистичком атмосфером тог времена.

Идеја да је математика прерушена логика била је, као што смо навели, присутна још код Лајбница. Али јак покушај да се у потпуности спроведе програм логицизма био је могућ једино када су се у XIX веку основни принципи централних математичких теорија јасно формулисали, а принципи логике разоткрили од стране Фрегеа.

Фреге је посветио значајан део своје каријере покушавајући да покаже како се математика може свести на логику. Успео је да изведе принципе Пеанове аритметике другог реда из основних закона система логике другог реда. То извођење није имало грешку. Но, он се ослањао на један принцип за који се испоставило да ипак није био логички принцип. Радило се о његовом Основном закону V:

$$\{x : Fx\} = \{x : Gx\} \text{ акко } \forall x(Fx \iff Gx).$$

У чувеном писму Фрегеу из 1902, Расел је показао да овај закон укључује контрадикцију. То нам је данас познато као Раселов парадокс.

Сам Расел је потом покушао да редукује математику на логику на други начин. Фрегеов Основни закон V је укључивао у себи да за сваку особину математичких ентитета постоји класа математичких ентитета који задовољавају ту особину. То је евидентно било сувише јако пошто је баш то довело до Раселовог парадокса. Стога је Расел постулирао да само својства математичких објеката, за која је већ показано да постоје, одређују класе. Предикати који имплицитно упућују на класе за које тек треба да буде утврђено да ли постоје, не одређују класу. Тако је добијена структура својстава по типовима: својства основних објеката, својства основних објеката и класе основних објеката, итд. Ова структура својстава по типовима одређује слојевит универзум математичких објеката полазећи од основних објеката за којима следе класе основних објеката, потом класе основних објеката и класа основних објеката, итд.

Нажалост, Расел је открио да принципи његове логике типова нису били довољни чак ни да изведу основне законе аритметике. Било му је неопходно, између осталог, да постави као основни принцип постојање бесконачне колекције основних објеката. То би се тешко могло сматрати логичким принципом. Тако да ни други покушај свођења математике на логику није успео.

И тако су ствари стајале више од педесет година. Године 1983, појавила се књига Криспина Врајта о Фрегеовој теорији природних бројева. У њој је аутор „удахнуо" нови живот логицистичком пројекту. Приметио је да се Фрегеово извођење Пеанове аритметике другог реда може поделити у две етапе. У првој етапи, Фреге користи неконзистентан Основни закон V да изведе оно што је постало познато као Хјумов принцип:

$$\text{број } F\text{-ова} = \text{броју } G\text{-ова акко је } F \approx G,$$

где $F \approx G$ значи да су F-ови и G-ови у „1–1" кореспонденцији један са другим (ове се релација може изразити у логици другог реда). Потом се, у другој етапи, принципи Пеанове аритметике другог реда изводе из Хјумовог принципа и прихваћених принципа логике другог реда. Посебно, Основни закон V није потребан у другом делу извођења. Штавише, Врајт је поставио хипотезу да је, за разлику од Фрегеовог Основног закона V, Хјумов принцип конзистентан. Касније су други аутори показали да је то заиста тако.

Врајт је отишао чак дотле да тврди да се Хјумов принцип може сматрати за логичку истину. Ако је то тако, онда се бар Пеанова аритметика другог реда може редуковати на логику. Тако је рођена нова форма логицизма. Данас је тај поглед познат као нео-логицизам. Већина данашњих филозофа математике сумња у то да је Хјумов принцип логички принцип. Ипак, већина осећа да је увођење природних

бројева преко Хјумовог принципа привлачно и са онтолошке и са епистемолошке тачке гледања. Неки сматрају да није много потребно да би се Хјумов принцип прихватио. Из ових разлога за природне бројеве и математичке објекте који се овако могу увести користе назив лаки математички објекти.

Врајтов рад је скренуо пажњу филозофа математике на врсту принципа попут Основног закона V и Хјумовог принципа. Они се називају ПРИНЦИПИ АПСТРАКЦИЈЕ. Тренутно, филозофи математике покушавају да конструишу опште теорије принципа апстракције које би објасниле који су од ових принципа прихватљиви, а који не и зашто је то тако. Осим тога, показало се да је у контексту ослабљених верзија логике другог реда, Фрегеов Основни закон V конзистентан. Но, те ослабљене теорије омогућавају извођење веома слабих аритметичких теорија из Основног закона V.

2.2 Интуиционизам

Интуиционизам потиче од рада холандског математичара Брауера и инспирисан је Кантовим ставовима о природи објеката. По интуиционизму, математика је суштински активност конструисања. Природни бројеви су менталне конструкције, реални бројеви су менталне конструкције, докази и теореме су менталне конструкције, математичко значење је ментална конструкција... Математичке конструкције производи *идеални* математичар, тј. изводи се апстракција из физичких ограничења стварних математичара. Али, чак и идеални математичар остаје коначно биће. Ни идеални математичар не може извести бесконачну конструкцију, мада може довршити произвољно велике почетне делове те конструкције. То показује да интуиционизам оштро одбија постојање стварне (или заокружене) бесконачности. Само су потенцијално бесконачне колекције дате при активности конструкције. Основни пример је сукцесивна конструкција у времену, појединачних природних бројева.

Из ових општих разматрања о природи математике, базираних на стању људског ума, интуиционисти изводе ревизионистички став у логици и математици. Они не прихватају неконструктивне егзистенцијалне доказе. Такви докази тврде да показују постојање математичких ентитета са одређеним својством без, чак и имплицитно, давања метода да се генерише пример таквог ентитета. Интуиционисти одбацију неконструктивне доказе егзистенције као 'теолошке' и 'метафизичке'. Карактеристично своство неконструктивних доказа егзистенције је да они суштински користе принцип искључења трећег

$$\phi \vee \neg\phi$$

или неки од његових еквивалената, као што је принцип двоструке негације

$$\neg\neg\phi \Rightarrow \phi.$$

У класичној логици, ови принципи су валидни. Логика интуиционистичке математике се добија одстрањивањем принципа искључења трећег (и његових еквивалената) из класичне логике. То наравно доводи до ревизије математичког знања. На пример, класична теорија елементарне аритметике више није прихватљива. Уместо тога, предлаже се интуиционистичка теорија аритметике (која се назива *Хејтингова аритметика*), која не садржи принцип искључења трећег. Мада је интуиционистичка елементарна аритметика слабија од класичне елементарне аритметике, разлика није велика. Постоји прост синтаксни превод који преводи све класичне теореме аритметике у теореме које су интуиционистички доказиве.

У првим деценијама XX века, делови математичке заједнице су имали симпатија према интуиционистичкој критици класичне математике и алтернативама које је предлагала. То се променило када је постало јасно да је у напредној математици интуиционистичка алтернатива драстично различита од класичне теорије. На пример, интуиционистичка математичка анализа је веома компликована теорија и веома је различита од класичне математичке анализе. Ово је пригушило ентузијазам математичке заједнице ка интуиционистичком пројекту. Без обзира на то, следбеници Брауера су наставили да развијају интуиционистичку математику и до данашњих дана.

2.3 Формализам

Давид Хилберт се слагао са интуиционистима да су у одређеном смислу природни бројеви основни у математици. Но, за разлику од интуициониста, Хилберт није сматрао да су природни бројеви менталне конструкције. Његов аргумент је био да се природни бројеви могу узети као *симболи*. Симболи су, стриктно говорећи, апстрактни објекти. Но, есенцијално за симболе је то што они могу бити остварени конкретним објектима, тако да их можемо називати *квази-конкретним* објектима. Можда физички објекти могу играти улогу природних бројева? На пример, можемо узети конкретан траг мастила облика | да буде број 0, конкретно реализован траг мастила ‖ да буде број 1, итд. Хилберт је сматрао да је сумњиво да би се напредна математика могла интерпретирати на сличан директан или чак можда конкретан начин.

За разлику од интуициониста, Хилберт није био спреман да заузме ревизионистички став ка постојећем математичком знању. Уместо тога је заузео инструменталистички став у односу на напредну математику. Сматрао је да је напредна математика ништа друго до формална игра. Тврђења математике вишег реда су неинтерпретирани низови симбола.

Доказивање тих тврђења није ништа друго до игра у којој се симболима манипулише у складу са фиксираним правилима. Поента 'игре више математике' састоји се, по Хилбертовом гледишту, у доказивању тврђења елементарне аритметике која *имају* директну интерпретацију.

Хилберт је сматрао да не постоји основана сумња у исправност класичне Пеанове аритметике — или бар у исправност њеног подсистема који се назива ПРИМИТИВНА РЕКУРЗИВНА АРИТМЕТИКА. И сматрао је да се свако аритметичко тврђење, које се може доказати коришћењем напредне математике, може такође директно доказати у Пеановој аритметици. Наравно, решавање аритметичких проблема у аритметици је у неким случајевима практично немогуће. Историја математике нам је показала да 'скретање' у вишу математику може понекад водити до доказа аритметичког тврђења који је много краћи и који нам даје дубљи увид, него што је то чисто аритметички доказ тог тврђења.

Хилберт је, не баш најјасније, схватио да се за нека од његових убеђења може сматрати да су заправо математичке хипотезе. Наиме, доказ је, у формалном систему напредније математике, или и елементарне аритметике, коначан комбинаторни објекат који се може кодирати као природан број. Но, двадесетих година XX века детаљи кодирања доказа као природних бројева нису још били потпуно схваћени.

За формалистичко гледиште, минимални захтев за формални систем напредније математике је да мора бити бар конзистентан. Иначе би се свако тврђење у њему могло доказати. Хилберт је такође, не сасвим јасно, видео да конзистентност таквог система укључује да је он бар делимично аритметички исправан. Стога су Хилберт и његови студенти почели да доказују тврђења попут конзистентности стандардних постулата математичке анализе. Наравно, таква тврђења морају бити доказана у „безбедном" делу математике, као што је елементарна аритметика. Иначе доказ не би увећао наше уверење у конзистентност математичке анализе. И, срећом, изгледало је да је у принципу то могуће урадити, пошто су у коначној анализи, тврђења о конзистентности, поново до на кодирање, аритметичка тврђања. Тако, ради прецизности, Хилберт и његови студенти су започели доказивање конзистентности, на пример, аксиома математичке анализе у класичној Пеановој аритметици. Овај пројекат је постао познат као *Хилбертов програм*. Испоставило се да је много тежи него што су они очекивали. Заправо, нису чак успели да докажу конзистентност аксиома Пеанове аритиметике у Пеановој аритметици.

Тада је Курт Гедел доказао 1931. године, да постоје аритметичка тврђења која су неодлучива у Пеановој аритметици. Овај резултат је постао познат као Геделова *прва теорема о некомплетности*. Ово није било добро за Хилбертов програм, али је остављало отвореном могућност да конзистентност више математике НИЈЕ једно од тих неодлучивих тврђења. Нажалост, Гедел је брзо схватио да, ако је Пеанова

аритметика конзистентна, сама њена конзистентност се не може доказати у оквиру ње саме. То је Геделова *друга теорема о некомплетности.* Испоставило се да се Геделове теореме о некомплетности генерално могу применити на довољно јаке, али конзистентне рекурзивно аксиматизабилне теорије. Све заједно ово доводи до пропасти Хилбертовог програма. Испоставља се да се виша математика не може интерпретирати на чисто инструменталан начин. Виша математика може доказати аритметичка тврђења, попут ставова о конзистентности, који су ван домашаја Пеанове аритметике.

Све ово не значи крај формализма. Чак и ако се узму у обзир теореме о некомплетности, кохерентно је сматрати да је математика наука о формалним системима.

Једну верзију овог приступа предложио је Кари крајем педесетих година XX века. У овом приступу се математика састоји од колекције формалних система који немају интерпретацију или предмет изучавања, сем што се то не примењује на метаматематику, која проучава саму математику. У односу на формални систем, каже се да је тврђење тачно ако и само ако се може извести унутар система. Али, на фундаменталном нивоу, сви математички системи су равноправни. Могу евентуално постојати неки практични разлози за преферирање једног система у односу на други. У неконзистентним системима се могу доказати сва тврђења, те су они бескорисни. Тако да ако се за систем установи да је неконзистентан, он мора бити модификован. Просто, лекција коју добијамо од Геделових теорема о некомплетности је да довољно јаки конзистентни системи не могу доказати сопствену конзистентност.

Постоји стандардна примедба против Каријеве формалистичке позиције. У стварности математичари не третирају наизглед конзистентне системе као равноправне. Многи од њих нису спремни да признају да се преференца ка аритметичким системима у којима су аритметичка тврђења која изражавају конзистентност Пеанове аритметике изводива, у односу на оне у којима је њена негација изводива, може заправо објаснити у чисто прагматичким терминима. Многи математичари желе да тврде да је уочена коректност (некорекност) неких формалних система ипак објашњива чињеницом да они коректно (некоректно) описују неку област истраживања.

Детлефсен (1986) је истакао да теореме о некомплектности НЕ искључују да се конзистетност делова више математике која се у пракси користи за решавање аритметичких проблема за које су математичари заинтересовани, може аритметички установити. На овај начин, нешто се можда може „спасти” чак и ако је Хилбертов инструменталистички став у односу на сву вишу математику напослетку неодржив.

Ајзаксон (1987) је учинио другачији покушај да спасе део Хилбертовог програма. Он брани став да, у неком смислу, Пеанова арит-

метика ипак може бити комплетна. Његов аргумент је да се истините реченице које су неодлучиве у Пеановој аритметици могу доказати помоћу концепата вишег реда. На пример, конзистентност Пеанове аритметике може се доказати индукцијом до бесконачног ординала (Генцен, 1938). Али појам ординала је теоретско-скуповни и стога неаритметички концепт. Ако једини начини да се докаже конзистентност аритметике суштински користе појмове који свакако припадају математици вишег реда, онда је конзистетности аритметике, мада се може изразити језиком Пеанове аритметике, неаритметички проблем. И, генералишући ово, можемо се запитати да ли је Хилбертова претпоставка да се сваки аритметички проблем може разрешити помоћу аксиома Пеанове аритметике, ипак тачна.

2.4 Предикативизам

Као што је раније напоменуто, предикативизам се обично не сматра за једну од школа. Но, то је само због стицаја околности да се пре Другог светског рата предикативизам није уздигао до нивоа других школа.

Почетак предикативизма је заправо у Раселовом раду. На инсистирање од стране Поенкареа, Расел је дошао до следеће дијагнозе Раселовог парадокса. Резоновање у Раселовом парадоксу дефинише колекцију C свих математичких објеката x који задовољавају $\neg(x \in x)$. Затим се проверава да ли сам C задовољава овај услов и долази се до контрадикције.

Поенкаре-Раселова дијагноза указује на то да ова дефиниција не истиче уопште неку колекцију: немогуће је дефинисати колекцију S условом којим се имплицитно позива на сам S. То се назива *принципом зачараног круга.* Дефиниције које крше овај принцип називају се *импредикативним.* Здрава дефиниција неке колекције се позива само на ентитете који постоје независно од колекције која се дефинише. Такве дефиниције називају се *предикативним.* Као што је Гедел касније истакао, Платониста би сматрао да је овај начин размишљања неубедљив. Ако математичке колекције постоје независно од чина дефинисања, тада није одмах јасно зашто не би постојале и колекције које се могу дефинисати само импредикативно.

Све ово је довело Расела да развије просту и разгранату теорију типова, у коју су уграђене синтаксне рестрикције које чине импредикативне дефиниције лоше формираним. У простој теорији типова, слободне променљиве у дефинишућим формулама могу пролазити кроз ентитете којима колекција која се дефинише не припада. У разгранатој теорији типова, захтева се додатно да област ограничених променљивих у дефинишућим формулама не укључује колекцију која се дефинише. Раселова теорија типова се не може видети као редукција математике на логику. Али, чак и ако то оставимо по страни, рано је

примећено да је, посебно у разгранатој теорији типова, прилично компликовано формализовати обичне математичке аргументе.

Када се Расел окренуо другим областима аналитичке филозофије, Херман Вајл је преузео на себе да подржава предикативизам у свом раду из 1918. године. Као и Поенкаре, Вајл није делио Раселову жељу да математику сведе на логику. И одмах од почетка је увидео да би у пракси било немогуће радити у разгранатој теорији типова. Вајл је развио филозофски став који је у суштини између интуиционизма и платонизма. Сматрао је да је колекција природних бројева без проблема задата. Али концепт произвољног подскупа скупа природних бројева није био непосредно прихватљив за математичку интуицију. Само они подскупови који су задати аритметичким (тј. оним првога реда) предикатима су сматрани за предикатски прихватљиве.

Са једне стране показало се да су многе дефиниције у математичкој анализи импредикативне. На пример, минимално затварање операције на скупу се обично задаје као пресек свих скупова који су затворени у односу на примене те операције. Али само минимално затворење је један од скупова који је затворен у односу на примене те операције. Стога је таква дефиниција импредикативна. На овај начин, пажња се постепено пребацивала са бриге о теоретско-скуповним парадоксима на улогу импредикативности у математици коју већина математичара развија. Са друге стране, Вајл је показао да је често могуће заобићи импредикативне појмове. Чак се показало да је највећи део математичке анализе XIX века потврђен на предикативној основи.

Двадесетих година XX века, дошло је до промене. Вајл се прикључио Брауеровом радикалнијем интуиционистичком пројекту. У међувремену, математичари су постали убеђени у то да је високо импредикативна теорија бесконачних скупова коју су развијали Кантор и Цермело много мање угрожена Раселовим парадоксом него што се пре сумњало. Ови фактори су утицали на то да се предикативизам пребаци у стање мировања током више деценија.

Коришћењем опште теорије рекурзије, Соломон Феферман је шездесетих година XX века поново обновио пројекат предикативизма проширивши га на ординале. Његови, али и радови других, показали су да је највећи део анализе XX века прихватљив са становишта предикативизма. Но, наравно да није све што данашња савремена математика прихвата, прихватљиво и са те тачке гледишта.

3 Платонизам

У годинама пред Други светски рат, постало је јасно да су многе озбиљне примедбе биле постављене против сваког од три главна антиплатонистичка програма у филозофији математике. Предикативизам је можда изузетак, али је у то време то био програм без оних који га

могу бранити. Стога је створен простор за поновно интересовање за платонистичке погледе о природи математике. У платонистичкој концепцији, предмет истраживања у математици састоји се од *апстрактних ентитета*.

3.1 Геделов платонизам

Гедел је био платониста у односу на математичке објекте и у односу на математичке концепте, али је ипак његов платонистички поглед био софистициранији него онај обичног математичара.

Гедел је сматрао да постоји јак паралелизам између уверљивих теорија математичких објеката и појмова са једне стране и уверљивих теорија физичких објеката и својстава са друге стране. Као и физички објекти и својства, математички објекти и појмови нису конструисани од стране људи. Као и физички објекти и својства, математички објекти и појмови се не могу свести на менталне ентитете. Математички објекти и појмови су исто онолико објективни као што су то физички објекти и својства. Математички објекти и појмови су, као и физички објекти и својства, постулирани да би се добија добра задовољавајућа теорија нашег искуства. Заиста, на начин који је аналоган нашем односу перцепције физичких објеката и својстава, кроз *математичку интуицију* ми смо у односу квази-перцепције математичких објеката и појмова. Наша перцепција физичких објеката и појмова је подложна грешкама и може се кориговати. На исти начин, математичка интуиција није имуна на грешке, али се може увежбати и поправити. За разлику од физичких објеката и својстава, математички објекти не постоје у простору и времену и они нису реализовани у простору нити у времену.

Наша математичка интуиција нам даје *унутрашњу потврду* математичких принципа. Практично се сво наше математичко знање може извести из аксиома *Цермело-Френкелове теорије скупова* са додатком аксиоме избора (кратко ZFC). По Геделовом мишљењу, ми имамо убедљиву унутрашњу потврду истинитости ових аксиома. Али, он се такође бринуо да ли је математичка интуиција довољно јака да омогући уверљиву потврду аксиома које значајно проширују снагу ZFC.

Осим унутрашње потврде, по Геделу је такође могуће добити екстерну потврду математичких принципа. Ако су математички принципи успешни, тада, чак и ако не можемо да добијемо унутрашњу потврду за њих, они се могу сматрати вероватно тачним. Гедел (1947) каже:

> ... успех овде значи плодност последицама, посебно 'проверивим' последицама, тј. последицама које се могу проверити без нове аксиоме, чији је доказ уз помоћ нове аксиоме значајно једноставнији и лакши за налажење, што омогућава да се у један доказ контрахују многи различити докази... Можда постоје

аксиоме толико богате проверивим последицама, које бацају толико светла на цело поље, дајући моћне методе за решавање проблема ... тако да, без обзира на то да ли јесу или нису унутрашње неопходни, били би прихваћени бар онолико колико су то добро установљене физичке теорије.

Ово је инспирисало Гедела да трага за новим аксиомама које могу бити мотивисане споља и које могу одлучити питања као што су Хипотеза континуума, а које су веома независне од ZFC.

Гедел је делио Хилбертово уверење да сва математичка питања имају потпуно одређен одговор. Али, платонизам у филозофији математике не би сам по себи требало да значи да је посвећен томе да тврди да сва теоретско-скуповна тврђења имају одређену истинитосну вредност. Постоје верзије платонизма које сматрају, на пример, да су све теореме ZFC тачне по одређеним теоретско-скуповним чињеницама, али да нема теоретско-скуповних чињеница које чине нека тврђења, која су веома независна од ZFC, таквим да им се може одредити истинитосна вредност. Чини се да је и Пол Коен делио то гледиште.

3.2 Натурализам и неизоставност

Квајн (1969) је формулисао методолошку критику традиционалне филозофије. Предложио је другачију филозофску методологију, која је постала позната као *натурализам*. По натурализму, наше најбоље теорије су наше најбоље научне теорије. Ако желимо да добијемо најбољи одговор, који можемо да добијемо, на филозофска питања као што су „Шта знамо?" или „Какве врсте ентитета постоје?", не треба да се окрећемо ка традиционалним епистемолошким или метафизичким теоријама. Такође треба се уздржимо од започињања фундаменталног епистемолошког или метафизичког истраживања од првих принципа. Оно што треба да радимо је да консултујемо и анализирамо наше најбоље научне теорије. Оне садрже, додуше често само имплицитно, наша најбоља тренутна знања о томе шта постоји, шта знамо и како то знамо.

Патнам је применио Квајнов натуралистички став на математичку онтологију. Бар од Галилеја, наше најбоље теорије у природним наукама су математички изражене. Њутнова теорија гравитације је базирана на диференцијалном и интегралном рачуну. Тако да се чини да је онтолошка посвећеност математичким ентитетима инхерентна нашим најбољим научним теоријама. Овај начин размишљања може бити даље ојачан позивањем на Квајнову тезу о потврђујућем холизму. Емпиријски доказ не даје своју потврдну моћ било којој појединачној хипотези. Радије, искуство глобално потврђује теорију у коју је појединачна хипотеза уметнута. Како су математичке теорије битан састојак научних теорија, оне се такође потврђују искуством. Стога имамо емпиријско потврђивање за математичке теорије. И више од тога је тачно. Чини се да је математика неизоставна за наше најбоље

научне теорије: није уопште јасно како бисмо их изразили без математичког речника. Стога нас натуралистички став присиљава да прихватимо математичке ентитете као део наше филозофске онтологије. Овај начин размишљања назива се *аргумент неизоставности*.

Ако прихватимо математику која је укључена у наше најбоље научне теорије здраво за готово, онда се чини да смо се обавезали некој форми платонизма. Али је то ипак доста скромнија форма платонизма него што је Геделов платонизам. Пошто се чини да природне науке 'могу да прођу' са (грубо говорећи) просторима функција на реалним бројевима. Напредније области теорије бесконачних скупова се чини поприлично ирелевантним за чак и најнапредније теорије у природним наукама. Ипак, Квајн је у неком тренутку сматрао да су скупови који су постулирани помоћу ZFC прихватљиви са натуралистичке тачке гледишта; они се могу гледати као адекватно заокруживање математике која је укључена у наше научне теорије. Ова Квајнова оцена није универзално прихваћена. Феферман, на пример, тврди да су све математичке теорије које се суштински користе у нашим тренутно најбољим научним теоријама предикативно сведиве, што није случај са теоријом скупова.

У Квајновој филозофији су природне науке крајњи судија који пресуђује о математичком постојању и математичкој истини. Ово је довело до примедби да таква слика чини очигледност елементарне математике помално мистериозном. На пример, питање да ли сваки природни број има следбеника, по Квајновом гледишту, напослетку зависи од наших најбољих емпиријских теорија; но, наравно да се тај факт чини знатно непосреднијим од тога. Мади је приметила да се математичари не сматрају на било који начин ограниченим у ономе што раде, од стране природних наука. Заиста, можемо се запитати да ли се и математика може сматрати и сама науком и да ли је онтолошку посвећеност математици боље оцењивати на бази рационалних метода које су имплицитне у математичкој пракси.

3.3 Редукција платонизма

Бернајз (1935) је указао на то да када математичар ради, он „наивно" третира објекте са којима ради на платонистички начин. Сваки активни математичар је, како он каже, платониста. Али када математичар није на свом радном месту, да се тако изразимо, и када га филозоф пита у вези његових онтолошких размишљања, спреман је да се промени и да се повуче на нејасно неплатонистичку позицију. Ово доводи до тога да неки указују на то да је нешто погрешно у вези филозофских питања о математичким објектима и математичком знању.

Карнап (1950) је увео дистинкцију између питања која су интерна за оквир рада и питања која су екстерна у односу на тај оквир. Аргументовано је да Карнапова дистинкција на неки начин преживљава

пропаст логичког емпиристичког оквира у оквиру којег је најпре формулисана. Тејт (2005) је покушао детаљно да разради како се та дистинкција може применити на математику и то је резултовало нечим што би се могла назвати редукованом верзијом платонизма.

По Тејту, питања постојања математичких објеката се једино разумно могу поставити и на њих се разумно може одговорити једино унутар (аксиоматског) математичког оквира. Ако се неко бави теоријом бројева, на пример, онда он може поставити питање да ли постоје прости бројеви са датим својством. Таква питања се тада разрешавају на чисто математичким основама. Филозофи имају тенденцију да закораче изван математичког оквира и питају „са стране" да ли математички објекти заиста постоје и да ли су математичка тврђења заиста тачна. У овом случају они постављају питања са метафизичке основе о математичкој истини и постојању. Тејт аргументује да се тешко може наћи неки смисао таквим екстерним питањима. Покушава да их редукује и да их доведе тамо где она и припадају: у саму математичку праксу. Наравно да се неће свако сложити са њим око овога. Други су развили системски начин за одговоре баш на врсту екстерних питања којима је Тејт приступио са презиром.

Није изненађујуће да Тејта нимало није занимало Геделово позивање на математичку интуицију у филозофији математике, ни за филозофску тезу да математички објекти постоје „ван простора и времена". Штавише, Тејт верује да математици није потребна филозофска основа; он жели да математика говори сама за себе. У овом смислу његова позиција подсећа на природни онтолошки став за који се залаже Артур Фајн у дебати о реализму у филозофији наука.

3.4 Бенасерафов епистемолошки проблем

Пол Бенасераф је формулисао епистемолошки проблем за разне платонистичке позиције у филозофији наука у свом раду „Математичка истина" из 1973. године. Аргумент је посебно упућен против приказа математичке интуиције попут Геделовог. Бенасерафов аргумент полази од премисе да је наша најбоља теорија о сазнању, каузална теорија о сазнању. Потом се истиче да, по платонизму, апстрактни објекти нису просторно и временски локализовани, док математичари од крви и меса то јесу. Наша најбоља епистемолошка теорија нам потом каже да знање о математичким објектима резултира из каузалне интеракције ових ентитета. Али је тешко замислити како се то може десити.

Данас мало епистемолога сматра да је каузална теорија о сазнању наша најбоља теорија о сазнању. Али се показало да је Бенасерафов проблем изненађујуће отпоран при промени епистемолошке теорије. На пример, претпоставимо, чисто дискусије ради, да је поузданост наша најбоља теорија о сазнању. Тада се појављује проблем како об-

јаснити како успевамо да добијемо поуздана веровања о математичким ентитетима.

Формулисана је и семантичка варијанта Бенасерафовог епистемолошког проблема. По тренутно најбољој семантичкој теорији, узрочно-историјске везе међу људима и светом конкретних објеката омогућавају нашим речима да се позивају на физичке ентитета и својства. По платонизму, математика се позива на апстрактне ентитете. Стога нам је платонист дужан уверљивог објашњења како ми (људи са физичким телима) можемо да се позивамо на њих. Како ствари стоје, чини се да каузална теорија позивања не може да нам обезбеди тражено објашњење 'микроструктуре позивања' у математичкој расправи.

3.5 Обилни платонизам

Верзија платонизма је развијена са циљем да омогући решење Бенасерафовог епистемолошког проблема. Ова позиција је позната као *обилни платонизам*. Централна теза ове теорије је да се свака логички конзистентна математичка теорија обавезно односи на апстрактан ентитет. Да ли је математичар који је формулисао ту теорију тога свестан или није, практично је без значаја. Развијајући конзистентну математичку теорију, математичар аутоматски добија знања о области истраживања те теорије. Тако да, при овом погледу, не постоји епистемолошки проблем који треба решити.

У једној верзији, обилни платонизам постулира више математичких универзума од којих сваки одговара конзистентној математичкој теорији. Тако да, на пример, проблем континуума не добија јединствен одговор: у једном теоретско-скуповном универзуму континуум хипотеза важи, у другом не. Но, не слажу се сви да је таква слика одржива. Постоји аргументација која показује да се вишеструки универзуми могу у великој мери „акумулирати" у један.

У другој верзији обилног платонизма, математички ентитет који постулира конзистентна математичка теорија, има *тачно она* математичка својства, која му теорија додељује. На пример, апстрактан ентитет који одговара ZFC је посебан у том смислу што не чини континуум хипотезу ни тачном ни лажном. Разлог је у томе што ZFC не повлачи ни континуум хипотезу ни њену негацију. Ово не значи да су сви начини конзистентног проширења ZFC равноправни. Неки начини могу бити плодоносни и моћни, неки су мање такви. Али овај поглед забрањује да неки конзистентни начини проширења ZFC буду пожељнији зато што садрже истините принципи док други садрже лажне принципе.

4 Структурализам и номинализам

Бенасерафов рад је мотивисао филозофе да развију и структуралис-

тичке и номиналистичке теорије у филозофији математике. А од краја осамдесетих година, комбинација структурализма и номинализма се такође развија.

4.1 Шта бројеви не могу бити

У раду из 1965. „Шта бројеви не могу бити” Бенасераф је формулисао изазов теоретско-скуповном платонизму. Ево о чему се ради. Постоји бесконачно много начина да се природни бројеви идентификују са скуповима. На пример, Цермело је то урадио овако:

$$0 := \varnothing, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{1\}, \quad 3 := \{2\}, \quad \ldots$$

док је фон Нојман предложио:

$$0 := \varnothing, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0,1\}, \quad 3 := \{0,1,2\}, \quad \ldots$$

Једноставно питање које Бенасераф поставља је:

Која је од могућих идентификација природних бројева и скупова истинска?

Јасно је да је веома тешко одговорити на ово питање. Није тешко видети како се може дефинисати функција следбеника, као и сабирање и множење, у оба наведена случаја, тако да сва аритметичка тврдјења за која узимамо да су тачна 'испадну' тачна. Заиста, ако се то уради на природан начин, добијамо изоморфне структуре (у теоретско-скуповном смислу речи), а у изоморфним структурама су исте реченице истините (оне су елементарно еквивалентне). Једино када поставимо питања која нису чисто аритметичка, попут „Да ли $1 \in 3$?” ова два приступа природним бројевима дају различите одговоре. Тако да не могу оба приступа бити коректна.

Да резимирамо, долазимо до следеће ситуације. С једне стране не види да се да постоји разлог зашто би један приступ био супериоран у односу на други. С друге стране, не могу оба приступа бити коректна. Ова неприлика се понекад зове Бенасерафов *проблем идентификације*.

Исправан закључак који се може извести из ове загонетке изгледа да је да ниједан од ова два приступа није коректан. Како би се слична разматрања појавила ако бисмо поредили друге разумне покушаје да се природни бројеви редукују на скупове, чини се да природни бројеви ипак нису скупови. Јасно је да се сличан аргумент може формулисати и са рационалне бројеве, реалне бројеве... Бенасераф закључује да ни они уопште нису скупови.

Није уопште јасно да ли је, на пример, Гедел, био посвећен редукцији природних бројева на скупове. Платониста може подржавати тврдњу да се природни бројеви могу утопити у теоретско-скуповни универзум истовремено задржавајући став да на утапање не треба гледати као на онтолошку редукцију. Заиста, као што смо видели

код приступа у обилном платонизму, природни бројеви немају никаква друга својства осим оних које им придружује наша теорија природних бројева (Пеанова аритметика). Али се онда чини да би платонисти морали да заузму исти став у односу на рационалне бројеве, комплексне бројеве... Мада задржавање става да су природни бројеви sui generis (јединствени) свакако има извесну привлачност, чини се да је мање природно сматрати да су и комплексни бројеви, на пример, sui generis. И, било како било, чак и ако се природни бројеви, комплексни бројеви... у неком смислу не могу редуковати на нешто друго, ипак је природно запитати се да ли постоји неки други начин да се разјасни њихова природа.

4.2 Ante rem структурализам

Шапиро (1997) истиче корисну дистинкцију између алгебарских и неалгебарских теорија. Грубо говорећи, неалгебарске теорије су теорије, које су, на први поглед, теорије о јединственом моделу: циљани модел за теорију. Знамо за примере таквих теорија: аритметика, математичка анализа... Алгебарске теорије, пак, *нису* о јединственом моделу. Примери су теорија група, топологија, теорија графова...

Бенасерафов изазов се може поставити објектима за које се чини да неалгебарске теорије описују. Али се тај изазов не може поставити алгебарским теоријама. Алгебарске теорије се не занимају самим математичким објектима; оне се занимају структурним аспектима математичких објеката. То је навело Бенасерафа да се пита да ли то може бити тачно такође и за неалгебарске теорије. Можда се из Бенасерафовог проблема идентификације може закључити да чак ни аритметика не описује специфичне математичке објекте, него само описује структурне везе?

Шапиро и Резник (1997) имају став да све математичке теорије, чак и неалгебарске, описују структуре. Ова позиција је позната као *структурализам.* Структуре се састоје од *места (позиција)*, која стоје у структурним односима једно према другом. Стога математичке теорије описују места (позиције) у структурама. Али оне не описују објекте. Број 3, на пример, при овом гледишту неће бити објекат, него место у структури природних бројева.

Системи су примери структура. Системи који дају пример структуре која је описана неалгебарском теоријом су изоморфни један другом и стога, што се теорије тиче, подједнако добри. Системи наведени у претходном одељку могу се видети као примери структуре природних бројева. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ и $\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ су подједнако погодни да играју улогу броја три. Али ниједан од њих *није* број три, пошто је број три слободно место у структури природних бројева и то слободно место нема никакву унутрашњу структуру. Системи типично садрже

структурна својства осим оних која су релевантна за структуре за које се узимају као примери.

Разумна питања идентитета су она која могу бити постављена унутар стуктуре. То су питања на која је могуће одговорити на основу структурних аспеката структуре. Питања идентитета која иду изван структуре немају смисла. Може се поставити питање да ли $3 \in 4$, али не убедљиво: ово питање укључује категорну грешку. Оно меша две различите структуре: $\in$ је теоретско-скуповни појам, док су 3 и 4 места у структури природних бројева. Чини се да је то задовољавајући одговор на Бенасерафов изазов.

По Шапировом гледишту, структуре нису онтолошки зависне од постојања система који представљају примере за њих. Чак и ако не би било бесконачних система у Природи, структура природних бројева би постојала. Тако да су структуре, како их Шапиро схвата, апстрактни платонски ентитети. Шапирова врста структурализма се често назива *ante rem* (*пре ствари*) структурализам.

У уџбеницима теорије скупова ми такође налазимо појам структуре. Теоретско-скуповна дефиниција нам, као што добро знамо, каже да је структура $(n+1)$-торка која се састоји од скупа, више операција на том скупу, више релација на њему и више истакнутих елемената тог скупа. Али то не може бити појам структуре који структурализам у филозофији математике има на уму. Наиме, теоретско-скуповни појам структуре претпоставља појам скупа, који се по структурализму и сам мора објаснити у структурним терминима. Или, да то кажемо другачије, теоретско-скуповна структура је само систем који је пример структуре која му онтолошки претходи.

Без обзира на ово, мотивација за проширивање ante rem структурализма чак до теорије скупова није потпуно очигледна. Присетимо се да главна мотивација за примену структуралистичког схватања математичке области лежи у Бенасерафовом проблему идентификације. За теорију скупова је тешко поставити изазов идентификације: скупови се обично не дефинишу помоћу једноставнијих појмова.

Чини се да ante rem структурализам описује појам структуре на помало кружни начин. Структура се описује као места која стоје у односу једно према другом, али се место не може описати независно од структуре којој припада. Но, то није обавезно проблем. За ante rem структуралисту, појам структуре је примитивни концепт, који се не може дефинисати преко основнијих термина. У најбољем случају, можемо конструисати аксиоматску теорију математичких структура.

Али, Бенасерафов епистемолошки проблем ипак се и даље чини ургентним. Структуре и места у структурама можда нису објекти, али јесу апстрактне. Тако да је природно да се питамо како успевамо да

дођемо до знања о њима. Овај проблем је био неким филозофима разлог да развију номиналистичку теорију математике и да потом помире ту теорију са основним начелима структурализма.

4.3 Математика без апстрактних ентитета

Гудман и Квајн (1947) су започели пројекат преформулација теорија из природних наука без коришћења апстрактних ентитета. Номиналистичка реконструкција научних теорија се показала као тежак задатак. Квајн га је одмах, после почетних покушаја, напустио. У протеклим деценијама многе теорије су предложене које наводно дају номиналистичку реконструкцију математике.

У номиналистичкој реконструкцији математике, конкретни ентитети морају да играју улогу, коју апстрактни ентитети играју у платонистичкој визији математике, а конкретне релације треба да буду коришћене за симулирање математичких релација међу математичким објектима. Али, ту се појављују проблеми. Најпре, још је Хилберт 1925. приметио да, имајући у виду дискретизацију природе у квантној механици, природне науке могу напослетку да тврде да има само коначно много конкретних ентитета. Но, чини се да би нам требало бесконачно много њих који би играли улогу природних бројева — заборавимо на реалне бројеве на тренутак. Где номиналиста налази тражену колекцију конкретних ентитета? Друго, чак и ако се претпостави егзистенција бесконачно много конкретних објеката, није уопште јасно да се чак и елементарне математичке теорије могу симулирати помоћу номиналистичких релација.

Филд (1980) је учинио озбиљан покушај да изведе номиналистичку реконструкцију Њутнове механике. Основа идеја је ова. Филд је желео да користи конкретне сурогате за реалне бројеве и функције на њима. Заузео је реалистички став ка просторном континууму и сматрао области простора за физички реалне као што су то столице и столови. И узео је да те области буду конкретне (уосталом, оне су лоциране у простору). Ако рачунамо и веома неповезане, онда имамо онолико области Њутновог простора као што има подскупова скупа реалних бројева. И онда има довољно конкретних ентитета да играју улогу природних бројева, реалних бројева и функција на реалним бројевима. А то је довољно за формулацију Њутнове механике. Наравно, било би још више интересантно имати номиналистичку реконструкцију још савременије научне теорије попут квантне механике. Али, с обзиром да се пројекат може извести за Њутнову механику, одређени степен почетног оптимизма је оправдан.

Јасно је да овај пројекат има своја ограничења. Може бити могуће номиналистички интерпретирати просторе функција на реалним бројевима, али је превише очекивати да ће се на тај начин наћи номиналистичка интерпретација теорије скупова. Ипак, ако је успешан уну-

тар својих ограничења, онда Филдов програм ипак нешто постиже. Пошто би то значило да су, бар у неком обиму, (апстрактни) математички ентитети необавезни. То би био значајан корак ка подривању аргумента неизоставности за Квајнов скромни платонизам у математици.

Филдова стратегија има шансе само ако Хилбертов страх да у фундаменталном смислу наше најбоље научне теорије имплицирају да постоји само коначно много конкретних ентитета, није основан. Ако неко има разумевања за Хилбертову забринутост, али не верује у постојање апстрактних ентитета, онда може тврдити да има само коначно много математичких ентитета, дакле оповргавајући основне принципе елементарне аритметике. Ово доводи до позиције која је позната као *ултра-финитизам*.

У већини приказа, ултра-финитизам доводи, као и интуиционизам, до ревизионизма у математици. Пошто се чини да би онда морало бити прихваћено, на пример, постојање највећег природног броја.

Гледано са стране, теорија која постулира само коначан математички универзум чини се теоријски слабом са аспекта налажења доказа и стога је вероватно конзистентна. Али Вудин (2011) је развио аргумент који наводно показује да, из ултра-финитистичке перспективе, нема основа да се тврди да је ова теорија вероватно конзистентна.

Без обзира на Вудинов аргумент, многима је већ тврдња да постоји највећи број претешка да је 'прогутају'.

4.4 In re структурализам

Филдова физикална интерпретација аритметике и анализе не само да подрива Квајн-Патнамов аргумент неизоставности него и делимично даје одговор на Бенасерафов епистемолошки изазов. Наравно, није лак задатак објаснити како људи добијају сазнања о просторно-временским регионима. Али су ипак, по мишљењу већине филозофа ти региони реални. Тако да не морамо више да објашњавамо како математичари од крви и меса остају у контакту са нефизичким ентитетима. Али Бенасерафов проблем идентификације остаје. Можемо се запитати зашто баш нека тачка простор-времена или његов регион, а не неки други, играју улогу броја π, на пример.

Чини се да је привлачно у одговору на проблем идентификације комбиновати структуралистички приступ са Филдовим номинализмом. То води ка верзији *номиналистичког структурализма* који се може овако скицирати. Фокусирајмо се на математичку анализу. Номиналистички структуралист одриче да је неки конкретан физички систем јединствена планирана интерпретација анализе. Сви конкретни физички системи који задовољавају основне принципе реалне анализе

(RA) би исто тако добро могли да се искористе. Тако да је садржај реченице ϕ језика анализе грубо дат са:

У сваком конкретном систему S у коме је RA тачно, тачно је и ϕ.

Ово повлачи да су, као и у ante rem структурализму, само структурни аспекти релеватни за истину или лажност математичких тврђења. Али, за разлику од anti rem структурализма, ниједна апстрактна структура није постулирана изнад и изван конкретних система.

По *in rebus* (краће: in re) (*у ствари*) структурализму, нема апстрактних структура изнад система који су их остварују; структуре постоје само у системима који их остварују. Због овог разлога, in re структурализам се понекад описује и као „структурализам без структура". Номиналистички структурализам је облик in re структурализма, али то није његов једини облик. Чак се и верзије платонизма које сматрају да се математика заправо бави стуктурама у теоретско-скуповном смислу речи, могу видети као облици in re структурализма.

У математичком разговору на неалгебарске објекте (као што су природни бројеви) и математичке објекте (као што је број 1) позивамо се помоћу тачно одређених описа. То јако сугерише да математички симболи ($\mathbb{N}$, 1) имају јединствену референцу а не „подељену" као што би то желео in re структурализам. Али in re структуралисти аргементују да такви математички симболи функционишу као посвећене променљиве као што се у обичном говору користи неко одређено име за слоган који се користи у општој ситуацији.

Ако је Хилбертова брига основана, у смислу да нема конкретних физичких система, који чине постулате математичке анализе тачним, онда горње преношење садржаја реченице језика анализе од стране номиналистичког структуралисте погрешно даје услове иститиности таквих реченица. Наиме, тада би за *сваку* универзално квантификовану реченицу ϕ њена парафраза била празно (безсадржајно) истинита. Тако да је егзистенцијална претпоставка у смислу да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за RA потребна да би се подржала горња анализа садржаја математичких тврђења. Можда би у ту сврху могло да послужи нешто попут Филдове конструкције.

Патнам је рано (1967) приметио да ако се горње објашњење садржаја математичких реченица донекле измени, суштински слабија основна претпоставка је довољна за добијање коректних истинитосних услова. Он је предложио следећу условну изведбу садржаја реченице у језику анализе:

Обавезно, у сваком конкретном систему S у коме је RA тачно, тачно је и ϕ.

Ово је јаче тврђење него што је претходна неусловна изведба била. Али чини се да је подједнако уверљива. И предност ове интерпретације

је да је следећа условна егзистенцијална основна претпоставка довољна да учини истинитосне услове за математичка тврђења исправним:

Могуће је да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за *RA*.

(„Могуће је" овде значи „Јесте, или је био случај да је".) Чини се да је тако Хилбертовој забринутости адекватно посвећена пажња. Пошто по Патнамовом приступу, истинитост математичких реченица не зависи више од физичких претпоставки о стварном свету.

Наравно, није лако дати задољавајућу причу како знамо да је ова условна егзистенцијална претпоставка испуњена. Али, можемо се надати да је задатак ипак лакши од задатка да се објасни како успевамо да сазнајемо чињенице о апстрактним ентитетима. И не треба заборавити да структуралистички аспект ове (условне) номиналистичке позиције, успева да контролише Бенасерафов проблем идентификације.

Путнамова стратегија такође има своја ограничења. У случају примене те стратегије на теорију скупова, груба верзија условне претпоставке је:

Могуће је да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за ZFC.

Парсонс (1990) је приметио да када су потребни светови који садрже колекције физичких ентитета који имају велике бесконачне кардиналности или су чак толико велики да уопште имају кардинални број, постаје тешко да се они виде као могући конкретни физички системи. Не чини се да има разлога да верујемо да постоји физички светови који садрже „веома бесконачно много" ентитета.

4.5 Фикционализам

На основу претходних предлога, тврђења обичне математике су истинита када се погодно интерпретирају. Номиналистички приказ математике, који ће сада бити дискутован сматра да су сва егзистенцијална математичка тврђења лажна просто зато што не постоје математички ентитети (из истих разлога ће сва универзална математичка тврђења бити тачна).

Фикционализам сматра да се математичке теорије као измишљене приче попут бајки и романа. Математичке теорије описују измишљене ентитете, на исти начин на који литература описује измишљене ликове. Ова позиција је најпре уобличена 1989. и последњих година добија на популарности.

Овај груби опис фикционалистичке позиције непосредно отвара питање каква су врста ентитета измишљени ентитети. Чини се да је то

дубоко метафизички онтолошки проблем. Један начин да се ово питање у потпуности избегне је да се тврди да не постоје измишљени ентитети. Математичке теорије треба да буду виђене као позиви за учешће у играма у којима се правимо да неки математички ентитети постоје.

У сваком случају, као што је речено, по фикционалистичком гледишту, математичка теорија није буквално истинита. Без обзира на то, математика се користи да се дође до истина. Тако да морамо да одузмемо нешто из онога што је буквално речено када говоримо о физичкој теорији која укључује математику, ако желимо да дођемо до истине. Али то захтева теорију о томе како то одузимање садржаја функционише. Таква теорија је развијена од стране Јабла 2014.

Ако је фикционалистичка теза исправна, тада је један од захтева који се мора поставити на математичке теорије, сигурно тај да оне морају бити конзистентне. Филд додаје и други захтев: математика мора бити конзервативна у односу на природне науке. То, грубо говорећи, значи да кад год се тврђење емпиријске теорије може извести из математике, мора, у принципу, бити могуће извести га без коришћења ма које математичке теорије. Ако то не би био случај, тада би аргумент неизоставности могао бити искоришћен против фикционализма. Да ли је математика заиста конзервативна у односу на физику је тренутно контроверзно питање. Шапиро је 1983. формулисао аргумент некомплетности који би требало да оспори Филдову тврдњу.

Ако заисте не постоје математички (измишљени) ентитети, као што тврди једна форма фикционализма, онда се Бенасерафов епистемолошки проблем и не појављује. Фикционализам стога дели предност над већином варијанти платонизма са номиналистичком реконструкцијом математике. Али позивање на претварања повлачи то да се логичка форма математичких реченица разликује понешто од њеног површног облика. Ако постоје измишљени објекти, онда се за ту форму може узети да је истог облика како и изгледа. Али, ако постоје апстрактни ентитети, Бенасерафов епистемолошки проблем се појављује.

Да ли је Бенасерафов проблем идентификације решен или није, није сасвим јасно. Генерално, фикционализам је нередукционистички приказ математике. Да ли је ентитет у једној математичкој теорији идентичан ентитету који се појављује у другој теорији се обично оставља неодређеним. Но, Бургес је 2014. исправно истакао да се математика ипак разликује од литературе у томе што су литерарни ликови обично ограничени на једно дело, док се исти математички ентитети појављују у различитим математичким теоријама. Уосталом, ентитети са истим именом (попут π) појављују се у различитим теоријама. Можда фикционалиста може да сматра да када математичар развија нову теорију у којој се „старији” математички ентитет појављује, онда ће

тај ентитет бити више прецизиран. Одређенија својства му се придају него раније и то је у реду док се задржава пуна конзистентност.

Стандардна примедба формализму је такође погодна и за фикционализам. Фикционалисти морају да нађу неко објашњење чињенице да се проширивање математичке теорије на један начин, често сматра више задовољавајућим него на други начин, који је неспојив са првим. Често постоји бар привид да постоји прави начин да се математичка теорија прошири.