Почеци теорије скупова 2

Зоран Петровић

15. мај 2023.

Значајан помак у разумевању појма интеграла и у питањима конвергенције Фуријеових редова дао је Риман. Он је имао прилику да у Берлину прати Дирихлеова предавања из теорије бројева, интеграла, као и парцијалних диференцијалних једначина. Веома је ценио Дирихлеа и сматрао га је, уз Гауса, за највећег живог математичара.

Интересантно је да је Риман имао различит приступ комплексним и реалним функцијама. Наиме, у случају функција $f(z)$ комплексне променљиве, он је захтевао обавезно постојање извода $f'(z)$ док је у случају функција реалне променљиве допуштао, по угледу на Дирихлеа, произвољно придруживање. Но, треба имати у виду да је Риман као и Дирихле и Гаус сматрао да се свака реална функција на одсечку $[-\pi,\pi]$ може представити Фуријеовим редом. Заправо је Ди Буа-Рејмон (Паул Давид Густав ди Буа-Рејмон, 1831–1889, немачки математичар) био први математичар који је дао пример да то у општем случају није тачно.

У проблему представљања функција тригонометријским редовима, Риман је најпре истакао да је значајно установити под којим условима интеграл постоји. Као и Коши, он је разматрао интегралне суме и поставио је питање под којим условима те суме имају граничну вредност. Коши јесте показао да је то тачно за (равномерно) непрекидне функције, но Римана су занимали општи услови. Он је истакао да је то тачно ако и само ако сума $\sum_{i=1}^{n} D_i(x_i - x_{i-1})$ тежи нули када параметар поделе (максимална дужина интервала у подели) тежи нули, где је са D_i означена осцилација функције f на одсечку $[x_{i-1}, x_i]$. Осим овог услова разматрао је и следеће. Уколико је σ неки позитиван број, са $s(P,\sigma)$ означимо збир дужина интервала на којима је осцилација већа од σ. Природно се поставља питање да ли можда $s(P,\sigma)$ тежи нули када параметар поделе и σ теже нули. Риман је показао да је тај услов еквивалентан претходно наведеном. То су дакле били услови које је он добио као потребне и довољне услове за постојање граничне вредности интегралних сума, тј. за постојање интеграла.

Риман је наравно истакао да такве услове испуњавају и поједине функције које имају бесконачно много тачака прекида на коначном

одсечку и дао је следећи пример. Са (x) означимо функцију која реалном броју x придружује растојање до најближег целог броја, ако такав постоји и придружује 0 уколико је x полуцео број (тј. број облика $n/2$, где је n непаран број), пошто у том случају не постоји јединствени цео број који је најближи броју x. Јасно је да је функција (x) прекидна у свим полуцелим тачкама и непрекидна у осталим тачкама. Риман затим разматра ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$. Тај ред задаје функцију која је прекидна у свим тачкама облика $\frac{m}{2n}$, где су m и $2n$ узајамно прости. Дакле, функција је прекидна у свуда густом скупу тачака. И поред тога, како је у тачкама $x = \frac{m}{2n}$, $f(x+0) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}$ и $f(x-0) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2}$ то је функција f интеграбилна пошто је „скок“ у свакој таквој тачки једнак $\frac{\pi^2}{8n^2}$, а очигледно да за свако $\sigma > 0$ и сваки ограничени интервал реалне праве, постоји само коначно много тачака у којима је тај скок већи од σ. Стога је други наведени услов испуњен и функција је интеграбилна.

Да би установио потребне и довољне услове да би нека функција била представљена тригонометријским редом

$$\Omega(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

он је урадио следеће. Претпоставио је да низ функција $A_n(x)$ задат са: $A_0(x) = \frac{1}{2}a_0$, $A_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, равномерно конвергира ка нули када $n \to \infty$ и формално је интегрирао тај ред члан по члан те добио функцију F:

$$F(x) = C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x)}{n^2}.$$

Овај ред конвергира за све вредности x и представља непрекидну функцију. Риман је показао да та функција задовољава два важна услова:

$$\mathscr{D}^2 F(x) = \lim_{a,b \to 0} \frac{F(x+a+b) - F(x-a+b) - F(x+a-b) + F(x-a-b)}{4ab} = 0,$$

$$\lim_{a \to 0} \frac{F(x+a) - 2F(x) + F(x-a)}{a} = 0.$$

Коришћењем ових резултата, Риман је добио потребне и довољне услове за представљање дате функције тригонометријским редом у датој тачки. Важно је истаћи да коефицијенти a_n и b_n нису добијени интеграцијом, но су то произвољни низови бројева, који морају да задовољавају горенаведени услов, који се тиче равномерне конвергенције низа функција $A_n(x)$.

Дакле, Риман је проширио појам интеграла на ширу класу функција, а дао је и метод за испитивање могућности представљања функција тригонометријским редом. Као што смо већ рекли, ови Риманови

резултати су објављени тек 1867. године и тек тада је шири круг математичара имао прилику да настави та истраживања.

Георг Кантор је 14. децембра 1866. године званично завршио своје студије у Берлину.

Слика 1: Георг Кантор

Он је највећи део својих студија провео управо у Берлину учећи од водећих математичара тог времена који су се тамо налазили — Кумера (Ернст Едуард Кумер, 1810–1893, немачки математичар), Кронекера (Леополд Кронекер, 1823–1891, немачки математичар) и Вајерштраса (Карл Теодор Виљем Вајерштрас,1815–1897, немачки математичар). Његов примарни интерес је у почетку био везан за теорију бројева, из те области је и његова дисертација, као и каснија хабилитација. Пошто је неко време предавао у локалној школи за девојке и положио пруски државни испит, Кантор је прихватио позицију приватдоцента на универзитету у Халеу. Посао приватдоцента је специфичан за немачки образовни систем и занимљиво је напоменути да приватдоцент нема плату од универзитета, но његов приход зависи од тога колико се студената пријави на његов курс. Звање му само омогућава да предаје на универзитету, но не гарантује приход. Но, Кантор није имао финансијских проблема и та чињеница није утицала на њега.

Слика 2: Кумер, Кронекер и Вајерштрас

Како је у раније наведеним радовима других математичара било доста речи о могућности представљања функције Фуријеовим редом, то се природно поставило питање о јединствености тог приказа. Дакле, ако функцију f прикажемо помоћу два тригонометријска реда, да ли они морају бити једнаки, тј. да ли су сви одговарајући коефицијенти једнаки. Јасно је да се то своди на следеће питање. Ако је $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$, за све $x \in [-\pi, \pi]$, да ли нужно следи да је $a_0 = a_n = b_n = 0$ за све $n \geqslant 1$?

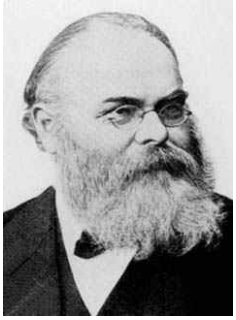
Као што смо већ раније наводили, ако би било допуштена интеграција реда члан по члан, онда би доказ био једноставан. Помножили бисмо дату једнакост са $\cos(mx)$, извршили интеграцију члан по члан на одсечку $[-\pi, \pi]$ и добили да је $a_m = 0$. На сличан начин би се могло показати да су и остали коефицијенти једнаки нули. Но, интеграција на овај начин није увек могућа. Студенти који су учили о појму униформне конвергенције редова знају да она омогућава поступак интеграције члан по члан. У то време је на значај униформне конвергенције стално указивао Вајерштрас.

Инспирисан таквим идејама, Хајне (Хајнрих Едуард Хајне, 1821–1881, немачки математичар), за кога су наши студенти најпре чули због дефиниције граничне вредности функције преко низова, а који је у ово време већ био професор у Халеу, доказао је јединственост Фуријеовог развоја функције под слабијом претпоставком од униформне конвергенције. Наиме, он је доказао јединственост под претпоставком да постоји коначно много тачака у одсечку $[-\pi, \pi]$ тако да је конвергенција униформна на сваком интервалу који не садржи ове тачке.

Јасно је да овакав резултат подстиче на генерализацију и то у два

смера. Најпре се поставља питање да ли се може ослабити услов за униформну конвергенцију, а потом и да ли се може искључити и више тачака од њих коначно много. На тај начин је размишљао и Кантор.

Кантор је 1870. доказао следећи резултат: ако $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ тежи нули када n тежи бесконачности за све вредности x из неког отвореног интервала, онда и низови (a_n), (b_n) конвергирају ка 0. Да би доказао јединственост приказа нула функције тригонометријским редом, Кантор је искористио Риманов метод. Наиме, он је посматрао раније наведени ред (функцију) F која се добија двоструком формалном интеграцијом датог тригонометријског реда члан по члан. Да би показао оно што је желео, било му је битно да добије да је та функција заправо линеарна.



Заправо је баш то у писму од 17. фебруара питао свог колегу Шварца (Херман Амандус Шварц, 1843–1921, немачки математичар). Шварц му је написао да је то заиста тако и послао му је доказ тог тврђења. Одавде је следило да важи следећа једнакост:

$$a_0 \frac{x^2}{2} - Cx - C' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

где је наравно претпостављено да је $0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Како је функција са десне стране добијене једнакости периодична са периодом 2π, то мора бити и полином са леве стране периодичан, а то је могуће једино у случају да је тај полином константан, тј. $a_0 = C = 0$. Ово је омогућило Кантору да покаже да остатак горедобијеног реда равномерно тежи нули, те је могао даље да примени идеју о интеграцији реда члан по члан (не можемо наводити све детаље у доказу) и напокон је добио да су сви коефицијенти једнаки 0. Дакле, на тај начин је доказао јединственост приказа у облику Фуријеовог реда под претпоставком да Фуријеов ред конвергира у *свакој тачки* и да се у *свакој тачки* поклапа са вредношћу функције, али *без претпоставке о униформној конвергенцији* Фуријеовог реда.

Следећи корак који је Кантор предузео је да, пошто се већ „ослободио” претпоставке о униформној конвергенцији Фуријеовог реда, покуша да ослаби и претпоставку о конвергенцији Фуријеовог реда у свакој тачки. То је и успео следеће године. У „ноти” (тако математичари често називају кратке радове) објављеној 1871. године, он наводи поједностављење претходног доказа који му је послао Шварц, али и показује да тврђење важи под слабијом претпоставком да ред не конвергира ка вредности функције у свим тачкама из $[-\pi, \pi]$, но да постоји коначно много тачака $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, у којима се то не дешава.

Идеја доказа састоји се у томе да се најпре примети да, према ранијем, функција F је линеарна на сваком интервалу (x_i, x_{i+1}), тј. да је линеарна функција облика $k_i x + l_i$ на том интервалу, а потом да се покаже да се заправо ради о истој линеарној функцији на свим интервалима и тако се све сведе на претходно доказано. Следећи корак је наравно да се покуша са даљим слабљењем претпоставки, тј. да постоји *бесконачно много* тачака у којима ред не конвергира почетној функцији. Овај корак заправо представља први корак у изградњи теорије бесконачних скупова.

Дакле, претпоставимо да је скуп *изузетих* тачака, тј. оних тачака у којима не ред не конвергира ка 0, бесконачан. Према Болцано-Вајерштрасовом ставу тај скуп има тачку нагомилавања. Размотримо најпре случај да има само једну тачку нагомилавања x' и концентришимо се на конвергенцију тригонометријског реда на ограниченом интервалу (a, b) (свеједно је наравно на ком). Посматрајмо интервале (a, x') и (x', b). Ако је (s, t) било који прави подинтервал од (a, x'), онда у њему има само коначно много изузетих тачака (иначе би у њему постојала тачка нагомилавања скупа свих изузетих тачака, а по претпоставци је то само тачка x'). Но, случај коначно много изузетих тачака је већ обрађен и онда знамо да је Риманова функција F линеарна на (s, t). Но, то је непрекидна функција која је линеарна на сваком правом подинтервалу од (a, x'), па проширивањем тог произвољног подинтервала до целог (a, x') добијамо да је F заправо линеарна на (a, x'). Слично се добија да је F линеарна и на (x', b), а потом, као и раније, да је то заправо линеарна функција на (a, b).

Аналогни доказ пролази и у случају да имамо коначно много тачака нагомилавања скупа изузетих тачака (на коначно много подинтервала је F свуда линеарна, а онда се као и раније покаже да је то једна те иста линеарна функција). Шта се дешава у случају у коме скуп изузетих тачака има бесконачно много тачака нагомилавања? Поступа се као у претходном. Претпостави се најпре да тај скуп тачака нагомилавања има само тачно једну тачку нагомилавања x''. Разматрањем интервала (a, x'') и (x'', b), односно њихових правих подинтервала (s, t) добија се да у њима има само коначно много тачака нагомилавања скупа свих изузетих тачака. Но, то је већ урађено и на таквим подинтервалима је F линеарна. Даље се поступа као и у претходном.

Можемо да закључимо да постоји јасна идеја како се резултат генералише и то је било јасно и Кантору. Но, једно је идеја, а друго је реализација. Да би успешно доказао то што се наслућује као резултат, он је морао да се пре свега мало позабави прецизирањем основних резултата који се тичу теорије реалних бројева. Ма колико то било изненађујуће читаоцу, у то време та теорија није била још добро заснована.

Стога Кантор у свом раду из 1872. године почиње баш са тим. Он полази од скупа A, свих рационалних бројева, као датих и циљ му је

да заснује теорију ирационалних бројева. У ту сврху посматра фундаменталне низове рационалних бројева (студентима је сигурно познатији термин Кошијеви низови, при чему треба имати на уму да се претпоставља да је ε, које се појављује у дефиницији Кошијевог низа обавезно рационалан број) и каже да је сваком таквом низу придружен један симбол. Потом дефинише уређење на тим симболима, као и аритметичке операције (рационалне бројеве види као константне низове) и пошто све то уведе у даљем те новодобијене објекте назива бројевима. Тако је добио скуп бројева B. Следећи корак савременом читаоцу делује збуњујуће. Наиме, Кантор сада посматра фундаменталне низове бројева из B и формира нови домен C (sic!). Он је потпуно свестан да тиме не добија ништа ново, као што и наши читаоци знају, али истиче концептуалну разлику B и C (подсетимо се да је ово ипак рад о јединствености тригонометријског реда и да Кантор има на уму претходно наведене идеје). После λ таквих конструкција долази до домена L. Дакле, у L су фундаментални низови фундаменталних низова ... Наравно да сваком елементу из L одговара број из B, али као што је већ наведено, Кантору је та дистинкција важна.

Следећи корак је успостављање бијекције између тако добијених реалних бројева и геометријског (једнодимензионог) континуума, тј. праве. Јасно је да избором координатног почетка и основне јединице мерења на датој правој имамо у потпуности одређене *рационалне тачке*, тј. тачке са рационалним координатама. Ако се узме нека друга тачка на правој, онда се њој може „прићи" фундаменталним низом рационалних тачака $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Кантор каже да је растојање b те тачке од координатног почетка онај број у B који одговара том фундаменталном низу. Јасно је да Кантор не може да докаже да обратно, сваком ирационалном броју одговара јединствена тачка на правој и стога он то поставља као аксиому, тј. сваком броју из B јединствено одговара тачка на правој чија је координата управо тај број. Коришћењем ове аксиоме, Кантор успоставља обострано једнозначну кореспонденцију између (аритметички) добијених скупова бројева и геометријских тачака на правој.

Долазимо до фундаменталног појма *скупа тачака прве врсте* (Кантор истиче да кад год користи термин „тачка", он заправо има у виду број који одговара тачки на правој). Најпре Кантор дефинише појам изводног скупа: ако је дат неки скуп тачака P, онда је нека тачка тачка нагомилавања тог скупа уколико се у сваком интервалу око ње налази бесконачно много тачака тог скупа. Наравно, тачка нагомилавања може, а не мора припадати почетном скупу P. Скуп свих тачка нагомилавања Кантор је назвао „први изводни скуп скупа тачака P" и означио са P'. Овде је важно истаћи да је скуп P' на тачно одређен начин придружен скупу P. Наиме, за сваку тачку је јасно да она или јесте тачка нагомилавања скупа P, или то није. Дакле, скупу P придружујемо скуп P'. Такво 'баратање' са скуповима није било уо-

бичајено у то време и представљало је новост и омогућавало дубљи продор у проблематику, која се истраживала.

Ако је скуп P бесконачан скуп у неком ограниченом интервалу, онда он има тачке нагомилавања, тј. скуп P' није празан (заправо се у то време празан скуп помало избегавао, па се говорило да P *има* изводни скуп). Уколико је скуп P скуп свих рационалних тачака, онда се наравно добија скуп свих тачака праве. Но, као што се из B конструише $C,\ldots,L$, тако се формирају и виши изведени скупови $P'',\ldots,P^{\lambda}$. Наравно P'' формирамо у случају бесконачности скупа P' на коначном интервалу итд. Скуп P је *скуп тачака прве врсте* уколико је $P^{(\nu)}$ коначан скуп за неки природан број ν.

Када је ове појмове јасно дефинисао и прецизирао, Кантору није било тешко да докаже генерализацију теореме о јединствености тригонометријског реда. Наиме, доказао је да је тригонометријски ред јединствено одређен под условом да је скуп изузетих тачака скуп тачака прве врсте. Доказ се заснива на раније наведеним својствима Риманове функције F. Ево како се он изводи. Како је почетни скуп P такав да је за неки природан број ν одговарајући изводни скуп коначан, то у нашем интервалу (a,b) има само коначно много тачака из $P^{(\nu)}$. Те тачке деле интервал на коначно много подинтервала. Ако посматрамо било који интервал (a_1,b_1), који је прави подинтервал од неког од њих, онда у њему има само коначно много тачака из $P^{(\nu-1)}$. У супротном, у том подинтервалу се налази тачка из $P^{(\nu)}$, а то није могуће, јер су те тачке ван тог скупа као деоне тачке почетног интервала (a,b). Поступак понављамо са свим таквим подинтервалима у којима има само коначно много тачака из $P^{(\nu-1)}$. После коначно много корака добићемо коначан број подпод...интервала у којима је само коначно много тачака из P. На њима је Риманова функција линеарна и онда постепеним повећавањем тих интервала и њиховим „лепљењем", као што је већ наведено, добијамо да је та функција линеарна на целом почетном интервалу. Тиме је доказ сведен на основни случај.

У доказу теореме о јединствености тригонометријског реда, Кантор се концентрисао на скупове тачака прве врсте, дакле на скупове код којих је $P^{(n)}$ празан скуп за неки природан број n. Но, већ је у том раду имплицитно споменуто да се поступак налажења изводних скупова може продужити и *иза коначног* подручја. Кантор пише: „концепт броја, у смислу у коме је уведен овде, носи у себи клицу неопходне и апсолутно бесконачне екстензије". Скупови тачака друге врсте, тј. они код којих $P^{(n)}$ није празан скуп ни за један природан број n експилицитно се помињу тек у Канторовим каснијим радовима. Но, он у напомени уз свој рад из 1880. наводи да је он низ скупова

$$P^{(\infty)}, P^{(n\infty^{\infty})}, P^{(\infty^{\infty+1})}, P^{(\infty^{\infty+n})}, P^{(\infty)n^{\infty}}, P^{(\infty^{\infty^{n}})}, P^{(\infty^{\infty^{\infty}})},$$

где је са ∞ означен најмањи бесконачни број већи од свих природних

бројева, открио још пре десет година. Скуп $P^{(\infty)}$ се природно дефинише као пресек свих $P^{(n)}$ за коначне n, а онда се поставља питање постојања његовог изводног скупа (уколико он има бесконачно много тачака) $(P^{(\infty)})'$ који Кантор означава са $P^{(\infty+1)}$. Сигурно да пажљив читалац, упознат са појмом ординала, не може пропустити да уочи сличност са раније виђеним ($\omega' = \omega + 1$), но концепт трансфинитних бројева (оних које долазе „иза коначних") није одмах формулисан и било је потребно време да ти појмови буду усвојени. Но, јасно је да је клица садржана у овим почетним радовима.

Видљиво је да код генерализације теореме о јединствености тригонометријског реда, сам тригонометријски ред има секундарну улогу. Главна је била манипулација реалним бројевима и потпуно је природно да се Кантор у свом даљем истраживању концентрише управо на својства скупа реалних бројева, тј. на реалну праву. Но, пре него што изложимо Канторове почетне резултате, а с њима у вези и улогу, коју је Дедекинд имао у тим првим испитивањима, као и о утицају Дедекинда на увођење скупа као централног појма у математици, одговорићемо на непостављено питање пажљивог читаоца.

Наиме, ми причамо о изведеним скуповима прве и друге врсте, али да ли постоје такви примери? Не само то, него да ли су такви примери били познати у време о којем говоримо. Одговор је потврдан.

Позабавимо се најпре питањем скупова прве врсте. Ханкел (Херман Ханкел, 1839–1873, немачки математичар) је навео један такав пример. То је скуп свих бројева облика $\frac{1}{2^n}$. Јасно је да тај скуп има једну једину тачку нагомилавања 0, те он јесте скуп прве врсте. Наравно, ово је веома једноставан пример, али то је уз пример скупа свих рационалних бројева (који је наравно скуп друге врсте) био у почетку једини познат пример.

Слика 3: Ханкел

Знатно боље примере дао је Хенри Смит (Хенри Џон Стивен Смит, 1826–1883, британски математичар) из Велике Британије. Он се првенствено бавио теоријом бројева, али је боравио и у Француској те је био упознат са проблемима којима се баве математичари на континенту (као што би рекли прави Британци).

Нажалост његови резултати нису били познати (на континенту), а да јесу сигурно би то убрзало разрешавање неких проблематичних питања, која се тичу својстава скупова реалних бројева. Смит је посматрао генерализацију Хенкеловог примера. Наиме, уочимо скуп

$$P_2 = \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} : n_1, n_2 \geqslant 1 \right\}.$$

Јасно је да је $P_2' = \{0\} \cup \{1/n_1 : n_1 \geqslant 1\}$ и $P_2'' = \{0\}$. Сада се види шта треба радити.

Слика 4: Смит

Скуп

$$P_k = \left\{ \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k} : n_1, \ldots, n_k \geqslant 1 \right\}$$

задовољава услов $P_k^{(k)} = \{0\}$. Дакле, тако добијамо скупове прве врсте (типа n, тј. такве да је n-ти изводни скуп коначан). Како добити пример скупа друге врсте?

Први такав пример дао је Ди Боа Рејмон. Нека је p било који реалан број. Посматрамо два низа тачака (a_n) и (b_n), за које је $a_n < b_n$, а осим тога оба низа конвергирају ка p. На сваком интервалу (a_n, b_n) изаберимо скуп P_n типа n (можемо да узмемо транслацију горе наведеног скупа). Нека је $P = \cup_{n \geqslant 1} P_n$. Није тешко уверити се да је $P^{(\infty)} = \cap_{n \geqslant 1} P^{(n)} = \{p\}$.

Вратимо се сада главном току нашег излагања. Оно што следи је можда и најинтересантнији део ове приче. Наиме, појаснићемо како је Кантор дошао до доказа непребројивости реалних бројева. Овај доказ нам сада не представља проблем, али не смемо заборавити какво је стање са основама анализе тада било (читалац се у то, надамо се, могао до сада уверити). И не, први доказ није био базиран на дијагоналном поступку (дијагонални поступак је тек доста касније откривен). Ево како се то све десило (след догађаја су историчари реконструисали на основу писама и скица писама, које су размењивали Кантор и Дедекинд).

Слика 5: Ди Боа Рејмон

Године 1873, прецизније, 29. новембра те године, Кантор је упутио следеће питање Дедекинду. Да ли постоји узајамно једнозначна кореспонденција (или, како би ми то краће данас рекли, бијекција) између скупа свих позитивних целих бројева и свих позитивних нумеричких величина (то јест позитивних реалних бројева)? Кантор наводи да би неко могао да укаже да је то немогуће пошто су цели бројеви дискретни, а реални нису, али он истиче да се том напоменом ништа не добија и мада он мисли да таква кореспонденција не може постојати, он ипак нема доказ те чињенице.

Дедекинд је одмах одговорио на то писмо и навео да ни он не може да докаже да таква кореспонденција не постоји, али да сматра да тај проблем није од посебног интереса. Но, он је успео да докаже да постоји бијекција између скупа свих алгебарских бројева и скупа позитивних целих бројева и тај доказ је приложио. Овде треба напоменути

да су Дедекиндова писма изгубљена, али да су скице тих писама сачуване, као и то да је Дедекинд био изузетно методичан и организован научник, који је водио веома уредне записе (чак је записивао и дневне температуре!).

Слика 6: Дедекинд

Кантор је у писму од 2. децембра потврдио да је Дедекинд заиста послао доказ тог резултата. Ево како је Дедекинд доказао ту чињеницу. Сваки алгебарски број је нула неког нерастављивог полинома са рационалним коефицијентима. Но, уз помоћ множења одговарајућом константом, можемо претпоставити да се ради о полиному са целобројним коефицијентима код кога је најстарији коефицијент позитиван. Дакле, ако је ω неки алгебарски број, онда постоји полином $p(x)$ (користимо ознаке које су ови математичари користили) такав да је

$$p(\omega) = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Број $N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$ називамо *висином* полинома $p(x)$ (да, могли смо да не пишемо апсолутну вредност уз a_0, пошто смо претпоставили да је то позитиван број). Можемо да приметимо да за сваки позитиван број N постоји највише коначно много полинома са целобројним коефицијентима, који имају висину баш N (обратите пажњу на значај чињенице да се степен полинома n појављује у дефиницији висине полинома). Но, сваки од тих полинома има највише коначно много нула. Дакле, за фиксирано N, постоји коначно много нула полинома са целобројним коефицијентима који имају висину n. Те нуле

можемо да уредимо на произвољан начин и тако добијамо да има пребројиво много алгебарских бројева (најпре узимамо бројеве висине 1, па висине 2, итд.).

Кантор је претходно разматрао постојање бијекције између скупа позитивних целих бројева и скупа ν-торки таквих бројева. Идеја му је била да свакој ν-торци $(n_1,\ldots,n_\nu)$ придружи број $n_1^2+\cdots+n_\nu^2=R$. Идеја је онда слична Дедекиндовој—за сваки R, уредити све n-торке чији је збир квадрата R на произвољан начин и тако показати да n-торки има колико и позитивних целих бројева. Кантору се чинило да је то практично исти доказ као и Дедекиднов, но то није баш тако. Наиме, ако би се у случају полинома поступило по овој идеји, онда бисмо имали проблема са чињеницом да се нигде не појављује степен полинома и да, наравно, неки од коефицијената полинома буду једнаки нули, те бисмо добили бесконачно много полинома за које је збир квадрата коефицијената једнак фиксираном броју. Дакле, без додатка степена, овакав доказ не би могао да „прође". Но, када је видео Дедекиндов доказ, Кантор је сматрао да он у суштини има сличан доказ и није имао проблема да Дедекиндов доказ у потпуности касније наведе у раду без спомињања да је доказ заправо Дедекиндов (иначе Кантор до тада нигде није писао о томе да има доказ пребројивости алгебарских бројева, нити да је тај проблем уопште разматрао). Но, више о томе касније.

Кантор се у писму од 7. децембра поново враћа питању пребројивости реалних бројева и наводи да је успео да докаже непребројивост. Ево како је изгледао тај први доказ.

Претпоставимо да се сви реални бројеви могу поређати у низ

$$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\ldots.$$

Пођимо од ω_1 и потражимо први следећи члан низа ω_α, који је већи од ω_1. Нека је затим ω_β први следећи члан који је већи од ω_α ($\beta>\alpha$) итд. На тај начин добијамо растући подниз $\omega_1^1,\omega_1^2,\ldots,\omega_1^n\ldots$ (после преозначавања) почетног низа. Понављањем поступка добијамо нови подниз итд. Дакле, на овај начин Кантор добија бесконачну матрицу

$$\begin{array}{ll}
(1) & \omega_1^1,\omega_1^2,\ldots,\omega_1^n\ldots \\
(2) & \omega_2^1,\omega_2^2,\ldots,\omega_2^n\ldots \\
\vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\
(k) & \omega_k^1,\omega_k^2,\ldots,\omega_k^n\ldots \\
\vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots
\end{array}$$

Свака врста ове бесконачне матрице је растући низ. Сада посматрамо одсечак $[p,q]$ у коме нема елемената из прве врсте (нпр. било који одсечак садржан у интервалу (ω_1^1,ω_1^2)). Уколико у овом одсечку нема

елемената из преосталих врста, доказ је готов (било који елемент из тог одсечка је тражени реални број који није набројен у почетном низу). У супротном, нека је k најмањи број такав да у том одсечку има чланова низа из k-те врсте. Тада тај одсечак сигурно садржи пододсечак $[p^{(1)}, q^{(1)}]$ у коме нема елемената k-те врсте (k-та врста представља растући низ и довољно је узети пододсечак садржан у интервалу који дефинишу узастопни чланови низа који су у $[p, q]$, а ако је само један члан k-те врсте у $[p, q]$ то је још лакше). Поступак настављамо и добијамо опадајући низ одсечака $[p^{(\nu)}, q^{(\nu)}]$, који, као што добро знамо, мора да има непразан пресек. Ма који елемент тог пресека је тражени реалан број пошто се он не може налазити у почетном набрајању — тада би онда био у некој врсти l, а пододсечак $[p^{(\nu)}, q^{(\nu)}]$ за довољно велико ν не садржи елементе врсте l.

Као што видимо, доказ није баш једноставан и Дедекинд је у писму од 8. децембра навео поједностављење овог доказа, а такође је то одмах урадио и Кантор. Доказ који је објављен доказује да се за сваки низ реалних бројева и сваки интервал (α, β) може наћи елемент η из тог интервала, који није у том низу.

Нека је дат низ $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Означимо са α', β' прва два члана тог низа који се налазе у интервалу (α, β) и за које је $\alpha' < \beta'$. Са α'', β'' означавамо прва два члана наведеног низа у интервалу (α', β') за које је $\alpha'' < \beta''$. Настављамо овај процес и добијамо низ уметнутих одсечака $[\alpha^n, \beta^n]$. Сада се разликују два случаја. Може се десити да је овај низ коначан и уколико је $[\alpha^n, \beta^n]$ последњи одсечак у том низу онда било који елемент у (α^n, β^n) није у датом низу (сем можда једног—може се десити да је у том интервалу један члан низа, али не и два, па зато не можемо наставити процес). Уколико смо добили бесконачан низ уметнутих одсечака, онда заправо имамо два низа бројева — растући и одозго ограничени низ (α^n) и опадајући одоздо ограничени низ (β^n). Дедекинд је у својој верзији доказа навео да сада на основу принципа непрекидности (Дедекинд је сматрао да чињеница да сваки растући одозго ограничени низ има граничну вредност, представља суштину појма непрекидности за реалне бројеве) добијамо да први низ има граничну вредност α^∞, а други β^∞. Кантор у публикованој верзији избацује спомињање принципа непрекидности и само наводи да ове граничне вредности постоје (касније ћемо продискутовати зашто је то урадио). Сада постоје два случаја: у првом је $\alpha^\infty = \beta^\infty$ и тада за η узимамо ту граничну вредност, а у другом је $\alpha^\infty < \beta^\infty$ и за η можемо узети ма коју вредност из интервала $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$. Овим је доказ завршен.

Дакле, видели смо како је Кантор дошао до важног резултата (и какву је улогу ту имао Дедекинд) у коме се показује да не постоји бијекција између скупа природних бројева и скупа реалних бројева, тј. да постоје два бесконачна скупа између којих се не може успоставити бијекција. Тај резултат заправо представља почетак развоја теорије

бесконачних скупова. Но, погледајмо како је тај резултат Кантор представио. Видећемо да је он то урадио на помало необичан начин.

Кантор је 25. децембра 1873. године писао Дедекинду да је написао и послао у *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* рад под насловом *О једном својству колекције свих реалних алгебарских бројева*. Написао је да у почетку није имао намеру да објављује ове резултате, али је у Берлину разговарао са Вајерштрасом и он му је рекао да треба да објави резултате док год су у вези са алгебарским бројевима. Кантор је Дедекинду написао да је искористио његове коментаре и начин изражавања. Дедекинд му је сугерисао да избаци реч „реалних" из наслова, пошто резултат о пребројивости важи за све алгебарске бројеве, но Кантор је ипак задржао првобитни наслов. Интересантно је да је Вајерштрас сматрао да је резултат о пребројивости алгебарских бројева посебно занимљив и да је то заправо главни резултат тог рада (те је стога Кантор рад тако и назвао), а не чињеница да не постоји бијекција између реалних и природних (самим тим и алгебарских бројева). Наиме, Вајерштрас је резултат о пребројивости алгебарских бројева касније искористио да да пример непрекидне функције која има извод у свакој трансцендентној тачки, а ни у једној алгебарској. Осим тога, у то време, Вајерштрас је имао изузетно негативан став по питању поређења бесконачних скупова. Он је у лето 1874. држао курс у коме је навео да две бесконачно велике величине нису упоредиве и да примена појма једнакости на бесконачне величине не даје нове резултате (sic!). Касније се његов став променио, али је у то време био управо такав.

Кантор је рад организовао на следећи начин. У првом делу рада наведен је доказ (како га је дао Дедекинд) пребројивости скупа алгебарских бројева, а у другом је показано да не постоји бијекција између скупа реалних и природних бројева и затим су ови резултати примењени на нови доказ Лиувиловог резултата о постојању трансцендентних бројева. Дедекиндов допринос нигде није наведен.

Видели смо да је под утицајем Вајерштраса истакнута пребројивост алгебарских бројева, док је напомена о непостојању бијекције између скупа природних бројева и скупа реалних бројева само укратко наведена и то при исправљању рада у припреми за штампу (навели смо негативан Вајерштрасов став по питању поређења бесконачних скупова). Разлог за искључивање спомињања Дедекинда, па и неистицање принципа непрекидности у доказу, састоји се у следећем. Кантор је био ученик веома утицајне берлинске школе и знао је да водећи професори у Берлину Кумер и Кронекер имају помало негативан став према Дедекинду због његове алгебарске теорије бројева. Наиме, Кронекер је тврдио да је исту ту теорију он имао још 1858. године, али да је није објавио и они никада нису признали Дедекиндов приоритет у тој области. Кантор је касније, развијајући даље своју теорију бесконач-

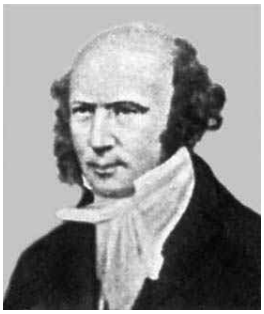
них скупова дошао у сукоб са Кронекером, но у времену о коме говоримо, он је био у добрим односима са берлинском школом и рачунао је да су му они потребни за даљу каријеру (но, испоставило се да он никада прешао из Халеа на неко престижније место). Дедекинд је изразио своје чуђење што је Кантор навео његове доказе без спомињања извора и од тада су њихови односи помало захладнели и на писма која му је Кантор упућивао често није одговарао.

Због ограничености (по обиму) овог прегледа, нећемо се бавити Канторовим даљим радом. Тај рад је изузетно значајан и било би потребно доста простора да би се описао.

Ради комплетније слике почетака теорије скупова и то посебно увођења терминологије скупова и функција у све математичке области посветићемо се мало Дедекиндовом доприносу.

Дедекинд је своју хабилитацију одбранио 1854, само неколико дана после Римана, такође у Гетингену. Наслов теме био је: „О увођењу нових функција у математику“. У оквиру те теме он је говорио о тригонометријским функцијама, интеграцији и елементарној аритметици. Дедекинд је тиме започео један програм, који је заправо следио током целе своје каријере. Наиме, идеја грађења бројева почев од природних бројева је нешто о чему је он писао у више објављених и необјављених радова. На самом почетку је централну улогу дао операцијама (дакле функцијама), тј. идеја конструкције све шире класе бројева била је условљена операцијама које вршимо у постојећој класи, прецизније могућности, односно немогућности извођења инверзних операција. У својим каснијим радовима, саме скупове је поставио у центар интересовања.

Године 1857, Дедекинд је прочитао Хамилтоново (Сер Вилијам Роуен Хамилтон, 1805–1865, британски математичар) дело *Лекције о кватернионима*. Као што се комплексни бројеви добијају као уређени парови реалних бројева са одговарајуће дефинисаним операцијама, на сличан начин се кватерниони добијају из комплексних. Множење кватерниона није комутативно, али сва остала својства су задржана. Дедекинд је очигледно закључио да су те конструкције (комплексних бројева и кватерниона) добро изведене и никада се у својим радовима није бавио питањем конструкције нпр. комплексних бројева. Но, бавио се конструкцијом целих и racionalних бројева, као и реалних бројева. Целе и рационалне бројеве је конструисао попут конструкције коју ми данас користимо — помоћу уређених парова са одговарајућим идентификацијама, а што се тиче конструкције реалних бројева, присетимо



Слика 7: Хамилтон

се Дедекидновог реза из Анализе 1. Нас ће овде највише занимати Дедекиндов поглед на природне бројеве.

Главно Дедекиндово дело, које се бави заснивањем математике је *Was sind und was sollen die Zahlen*, објављено 1888. Најчешћи превод овог наслова је *Шта су и чему служе бројеви*, али, имајући у виду садржај дела, превод могао да буде и *Шта су и чему би требало да служе бројеви.* Ми ћемо се позабавити овим делом, као и рукописима, који су му претходили.

Као што смо већ навели, Дедекинд је био темељан математичар, који није журио са објављивањем радова пре него што би они достигли онај ниво свеобухватности и целовитости који је он желео. Дакле, он је следио Гаусову максиму: *мало, али зрело.* Било је случајева када се то лоше одразило на његову каријеру (недовољан број објављених радова), али он се тог принципа држао целог живота.

У рукописима насталим између 1854. и 1872. године можемо наћи да је Дедекинд природне бројеве градио почевши од броја 1 и формирајући *следбенике* бројева додавањем јединице. Сабирање је дефинисао формулом $a+(b+1)=(a+b)+1$. Занимљиво је да је Дедекинд многе идеје на основу којих су базирани резултати из тог главног његовог рада о заснивању бројева, наводио у писму извесном гимназијском професору Кефeрштајну, а пропустио да их наведе у самом раду и тиме тај рад учинио неразумљивијим и мање схваћеним од стране професионалних математичара. Касније је операцију сабирања дефинисао апстрактније, као функцију φ, која има својства $\varphi(a,d(b))=d\varphi(a,b)$ и $\varphi(a,1)=d(a)$, где је $d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ функција која представља „додавање јединице".

Пређимо сада на само дело. На самом почетку, Дедекинд уводи основну скуповну терминологију: *систем* (скуп), *ствар* (елемент скупа), *део* (подскуп), *прави део* (прави подскуп), *комбинован систем* (унија скупова), *заједница система* (пресек скупова).

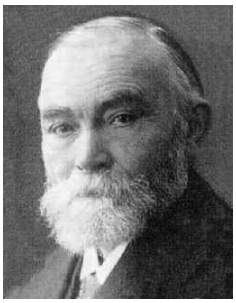
Читаоци који су упознати са Хилбертовим (Давид Хилберт 1862–1943, немачки математичар) делом *Основи геометрије*, сигурно су ову терминологију препознали пошто на почетку овог дела Хилберт наводи: „*Разматраћемо три система ствари. Ствари првог система зваћемо тачке.*" Хилберт је тада користио Дедекиндову терминологију.

Слика 8: Хилберт

Поред појма скупа навео је и појам пресликавања и то практично у смислу у коме се у модерној математици оно и уводи — пресликавање система S је *закон* по коме ствари s из S одговара ствар $\varphi(s)$, која се зове слика од s. Дефинисао је

и композицију пресликавања. Дедекинд је навео
да је овим дао *дефиницију* појма пресликавања, мада са логичке тачке гледишта то се не може назвати дефиницијом (јер, шта је то *закон*?), но само појашњењем.

Као главне недостатке Дедекиндове презентације скупова, истакнути логичар Фреге (Фридрих Лудвиг Готлиб Фреге, 1848–1925, немачки математичар) је навео:



Слика 9: Фреге

1) Нејасно разликовање релације припадности и подскупа.

2) Често неразликовање једночланог скупа и његовог елемента.

3) Избацивање празног скупа.

Наравно, чињеница да постоје овакви проблеми код Дедекинда, не оправдава садашње студенте математике да праве такве грешке! Подсетимо се да је Пеано (Ђузепе Пеано, 1858–1932, италијански математичар) баш у вези са оваквим примедбама увео посебну ознаку, коју и данас користимо, за припадност елемента скупу, док је Дедекинд раније имао појам празног скупа, али га је ипак из публикованог рада избацио.

Слика 10: Пеано

Велики недостатак Дедекиндовог погледа на скупове је и у прихватању постојања универзалног скупа, тј. скупа свих скупова, а знамо да се на тај начин парадокси појављују у теорији скупова, но у тренутку објављивања, то још није било видљиво.

Посветимо се за крај најзанимљивијем појму, са аспекта теорије скупова, који је Дедекинд увео у овом раду, а то је појам *ланца*. Упозоримо одмах да се не ради о појму ланца у вези парцијалног уређења.

Идеја ланца је добијена из идеје математичке индукције, тј. разматрањем доказа помоћу индукције. Ако је дато пресликавање $\varphi : S \to S$, онда подскуп K од S зовемо *ланац* уколико је $\varphi[K] \subseteq K$ (користимо ознаке које смо користили у овој књизи). Дедекинд уводи појам *ланца система* (сетимо се да је тако Дедекинд називао скуп). Наиме, ако је $A \subseteq S$ и $\varphi : S \to S$, онда је *ланац система* A по дефиницији пресек свих ланаца (дакле свих подскупова K скупа S за које је $\varphi[K] \subseteq K$), чији је A подскуп. Ознака коју Дедекинд користи да означи ланац скупа A је A_0 (а понекад користи и ознаку $\varphi_0(A)$). Видећемо ускоро како је ова идеја повезана

са аксиоматиком природних бројева, као и са Кантор-Бернштајновом теоремом.

Дедекинд је имао оригиналну идеју — да заснује коначно (природне бројеве) на бесконачном. Стога му је био потребан појам бесконачног скупа. Ту дефиницију је он формулисао још 1872. године. Наиме, скуп S је бесконачан ако постоји бијекција (користимо савремену терминологију) између S и неког његовог правог подскупа. У супротном је коначан. Оригиналност ове идеје је наравно у чињеници да се овде нешто што уопште није спорно, попут природних бројева заснива на нечем што су многи математичари као што смо видели, избегавали да користе, тј. на појму стварне бесконачности.

Ево како је Дедекинд увео природне бројеве. Основни појам је појам *просто бесконачног* скупа. Скуп N је просто бесконачан уколико постоји „1–1" пресликавање $\varphi : N \to N$ (Дедекинд је „1–1" пресликавања називао *слична* или *истакнута*), тако да је N ланац једног елемента који не припада $\varphi[N]$. Овај истакнути елемент зове се базни елемент и означава са 1. Овде поново имамо проблем са Дедекидновом терминологијом, пошто заправо N не може бити ланац неког елемента, но ланац једночланог скупа са тим елементом као јединим својим чланом, али видимо да се то лако исправља. Дакле имамо четири важна услова:

(α) $\varphi[N] \subseteq N$;
(β) $N = \{1\}_0$;
(γ) $1 \notin \varphi[N]$;
(δ) φ је „1–1".

Да ли је неко споменуо Пеанове аксиоме? Пеано је своје аксиоме објавио 1899. године и навео је да јесте консултовао овај Дедекиднов рад, но сам је пре тога дошао до њих. Но, ево их и овде код Дедекинда.

За крај излагања о Дедекиндовом доприносу теорији скупова, наведимо и горе споменуту везу ланаца и Кантор-Бернштајнове теореме.

Кантор и Дедекинд су се у септембру 1882. године срели у Харцбургу и наравно разговарали о математици. Кантор је тада информисао Дедекинда (а то се види и из писма из новембра те године) да има проблема са доказом следећег тврђења:

Ако је $M'' \subseteq M' \subseteq M$ и ако постоји бијекција између M и M'' онда постоји бијекција између M и M'.

Јасно је да је ово тврђење еквивалентно Кантор-Бернштајновој теореми.

Ево које се тврђење може наћи у наведеном Дедекиндовом раду о бројевима.

Нека је φ дато пресликавање и уведимо ознаку $K' = \varphi[K]$. Претпоставимо да је $K' \subseteq L \subseteq K$. Дакле и K и L су ланци. Дедекинд пише да се при овим условима увек може извршити следећа декомпозиција L и K. Нека је $U = K \backslash L$ и $V = K \backslash U_0$. Тада је

$$K = U_0 \cup V \text{ и } L = U'_0 \cup V.$$

Овај доказ Дедекинд оставља читаоцима (а то ћемо и ми урадити!) и даље га уопште не коментарише. Но, није тешко видети да се у случају да је φ „1–1” добија тражено Канторово тврђење (сугеришемо читаоцу да то сам уради). Подсетимо се да је Дедекинд био врло систематична особа, тако да није могуће да се он није присетио питања које му је поставио Кантор. Пре ће бити да је Дедекинд решио да се мало, да се тако изразимо, нашали са Кантором (а треба имати у виду и ранија искуства која је имао у преписци са њим) и да провери да ли ће он успети да препозна тражено тврђење. Тешко је поверовати, али Кантор не само да је чак и 1895. године сматрао да теорема још није доказана, него се и негативно изразио о овом Дедекиндовом раду, који је описао као вештачки систем од 172 тврђења, који се баве најелементарнијим и понекад најтривијалнијим својствима бројева и који уместо да појасне, само још више замагљују природу бројева! Као поука ове приче може се закључити да треба пажљиво читати дела истакнутих аутора—можда су они доказали баш оно што нам треба, а нису то желели да истакну!