Calculus 3.
Ка модерној алгебри

Зоран Петровић

24. април 2023. године

Лајбниц

Готфрид Вилхелм Лајбниц (1646–1716) рођен је у Лајпцигу у протестантској породици међу чијим је даљим прецима сигурно било и Словена. Да ли је баш био лужички Србин или не, нећемо овде расправљати. ☺

Слика 1: Лајбниц

Његов отац, Фридрих Лајбниц (1597–1652), био је професор филозофије морала на универзитету у Лајпцигу и имао је богату библиотеку где је млади Лајбниц рано могао да почне са својим образовањем. Студирао је филозофију и право на универзитетима у Лајпцигу, Јени и Алтдорфу. Што се математичких знања тиче, ту је имао само

елементарно образовање. Но, рано је замислио пројекат конструкције математичког језика помоћу кога би се дедуктивно закључивање могло изводити. Те његове идеје су антиципирале каснији развој алгебре логике у XIX веку. Тај програм он никада није ни напустио, те и на његова каснија математичка истраживања треба гледати у том светлу. Пошто је 1666. докторирао на универзитету у Алтдорфу, ушао је у службу надбискупа у Мајнцу. Положај надбискупа у Мајнцу је био изузетно важан у Светом римском царству. Наиме, надбискуп у Мајнцу је био један од седам људи који су бирали цара.

Лајбниц је године 1672–1676. провео у дипломатској мисији у Француској. Наиме, немачке државе су биле прилично ослабљене после тридесетогодишњег рата (1618–1648) и заправо је Царство постојало само на папиру. Било је много држава и територија које су могле да одржавају своју војску. Стога је постојала опасност од уједињене Француске и агресивне политика краља Луја XIV („Краљ Сунце"). Лајбницова идеја, коју је изложио у *Consilium Aegyptiacum*, је била да се пажња Француске са Немачке и Холандије скрене на турски Египат, да је то оно што би требало да интересује једног хришћанског краља. Но, када је стигао у Париз, није му био дозвољен пријем код краља, а један од краљевих министара му је рекао да крсташки ратови нису више интересантни. Заправо је већ тада Луј XIV решио да изврши инвазију на Холандију, на націју „продавачица риба и трговаца" по његовим речима.

Но, Лајбницов долазак у Париз му је омогућио да упозна многе значајне научнике, а посебно холандског научника Хајгенса, који је живео у Паризу од 1666. до 1681.

Слика 2: Кристијан Хајгенс (1629–1695)

Хајгенс је баш у то време припремао своје значајно дело *Holorogium Oscillatorium*, које је било посвећено разним физичким и математичким аспектима кретања клатна. Он је видео да Лајбниц има талента, али да је слабо математички образован, те га је упутио у то шта да учи. Године 1673. нова дипломатска мисија одвела је Лајбница у Енглеску. Радило се о сугестији надбискупа Мајнца да енглески краљ посредује у сукобу Француске и Холандије. У сваком случају, Лајбниц је упознао Немца Олденбурга (кога смо већ споменули) и уз његову помоћ многе значајне научнике Енглеске. Заправо, он је у Краљевском друштву добио прилику да прикаже рад своје машине за рачунање, која је била унапређење у односу на Паскалову по томе што је могла да врши и множење и дељење. Мало због те машине, а више због веза које је Олденбург имао, Лајбниц је успео да постане члан Краљевског друштва. Од 1676. године Лајбниц је у служби Куће Хановер, самим тим, на самом крају, и у служби енглеског краља Џорџа I.

У периоду 1672–1673. Лајбниц се бавио редовима. Посебно му је било занимљиво да разматра нумеричке низове разлика, тј. низове (b_n) за које је

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_2 - a_3, \quad b_3 = a_3 - a_4, \ldots$$

за неки низ (a_n). Наравно, тада је лако могао да нађе суму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Ова једноставна идеја му је касније помогла и у развоју диференцијалног рачуна, по његовим сопственим речима. Први пример на коме је применио овај поступак је, добро нам познати ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}.$$

Наиме, $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$, те се лако добија да је сума реда једнака 2. Дакле ове, како их сада зовемо „телескопске суме” су му биле посебно значајне. С тим у вези, формирао је ’хармонијски троугао’ (Паскалов троугао се зове и аритметички троугао):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \boxed{\frac{1}{4}} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \boxed{\frac{1}{20}} & & \boxed{\frac{1}{5}} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \boxed{\frac{1}{30}} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \boxed{\frac{1}{42}} & & \boxed{\frac{1}{105}} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

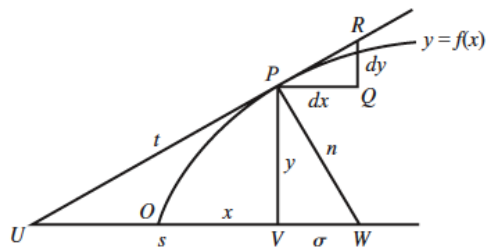
Овај се троугао формира помоћу разлика. Наиме $n+1$-ва 'дијагонала' има чланове који су разлике одговарајућих чланова n-те 'дијагонале'. На пример: $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{42} = \frac{1}{30} - \frac{1}{105}$. Стога је сума бројева у n-тој дијагонали заправо телескопска сума помоћу добијена од бројева у претходној, те је та сума једнака броју на почетку претходне дијагонале. На пример,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \cdots = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{105} + \cdots = \frac{1}{4}, \qquad \text{итд.}$$

Године 1673. Лајбниц се срео са идејом такозваног карактеристичног троугла читајући Паскалова *Lettres de 'A. Detonville* из 1659. године. У овим писмима је Паскал

Слика 3: Блез Паскал (1623–1662)

приказао разне резултате о квадратурама. Amos Detonville је заправо анаграм од Louis de Montalte (уз изједначавање v и u), псеудоним који је



Паскал користио у својим „Писмима из провинције”. Паскал је у том конкретном проблему разматрао инфинитезимални троугао придружен тачки на кругу, али је Лајбниц ту идеју генерализовао.

У произвољној тачки P на кривој $y = f(x)$ постављена је тангента и формиран је тај 'карактеристични (криволинијски) троугао' који чине бесконачно мали померај дуж x-осе, тј. dx, бесконачно мали померај дуж y-осе, тј. dy и бесконачно мали померај дуж саме криве ds. Са t је означен део тангенте од те тачке до пресека са x-осом, а са n део нормале од те тачке такође до пресека са x-осом. Са s, односно σ је означена пројекција тангенте t на x-осу (подтангента), односно нормале n на x-осу (поднормала).

Пошто се ради о инфинитезималном троуглу, може се сматрати да се крива у том бесконачно малом делу поклапа са тангентом те можемо сматрати да се троугао са страницама dx, dy, ds поклапа са троуглом PQR, који је сличан и троуглу UVP и троуглу PVW. Стога је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma}{y} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{n}{y}.$$

Лајбниц је, да би имао конкретан проблем, претпоставио да је поднормала (σ) обрнуто пропорционална ординати, тј. претпоставио је да је $\sigma = a^2/y$. Тада из прве релације добија

$$\int y^2 dy = \int a^2 dx,$$

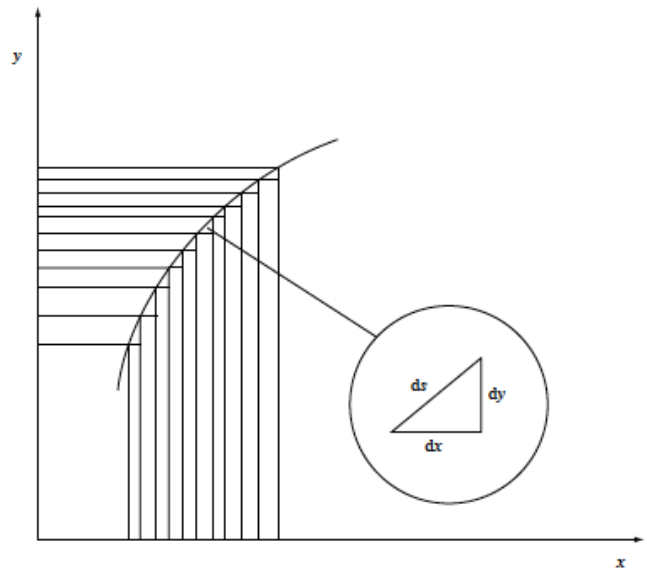
чиме добија да крива има једначину $y^3/3 = a^2 x$ те констатује да је крива са наведеном особином кубна парабола.

Из друге релације добија

$$\int y ds = \int n dx,$$

што даје формулу за површину тела које се добија обртањем криве око x-осе.

Током 1675. Лајбниц је направио суштинске кораке који су га довели до формулације метода који се, у нешто промењеној форми и сада користи. У ту сврху су му посебно били значајни карактеристични троугао и посматрање површине испод криве као суме бесконачних трака.



Лајбниц је замислио дељење x-осе испод задате криве на бесконачно много бесконачно малих интервала чији су крајеви $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Диференцијал је дефинисао као $dx = x_{n+1} - x_n$. На самој кривој имамо одговарајуће тачке $s_1, s_2, s_3, \ldots$, као и ординате $y_1, y_2, y_3, \ldots$ на y-оси, као и диференцијале $ds = s_{n+1} - s_n$, $dy = y_{n+1} - y_n$. Карактеристични троугао је издвојен на слици и има стране dx, dy, ds, а видели смо већ да можемо сматрати да је сличан троуглу који формирају s, y, t (ознаке са претходне слике). Стога је $tg\gamma = \frac{dy}{dx}$, где је са γ означен угао који тангента у датој тачки заклапа са x-осом. Површина испод криве је унија трака ydx. Лајбниц је у почетку користио Кавалијеријев симбол omn. али је касније, вероватно на сугестију Јохана Бернулија (од кога потиче и назив интегрални рачун), прешао на ознаку $\int$ као издужену варијанту слова s, а наравно од речи сума. Прво Лајбницово публиковано појављивање ознаке диференцијала је било 1684, а интеграла 1686. године.

Симболи d и $\int$ могу се примењивати више пута те се тако може посматрати и, на пример, ddx, које је бесконачно мало у односу на dx. За d поновљено n пута користио се симбол d^n, па је n-ти диференцијал од x био $d^n x$. Израз $\frac{dy}{dx}$ код Лајбница не треба сматрати изводом

функције, него просто односом диференцијалних величина dy и dx. То олакшава алгебарске манипулације диференцијалима. На пример „ланчасто правило”, тј. извод сложене функције се може видети као проста манипулација разломцима:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ако се y посматра као зависна променљива од x у којој се узима да су x_n еквидистантне, тада је dx константно, па је $d^2x = ddx = 0$ и сви остали диференцијали од x вишег реда нестају. За рачунање $d(xy)$ користио је формулу

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy,$$

а потом је, без даљег образложења, изоставио $dxdy$ као бесконачно малу вишег реда. Наравно, итерацијом овог поступка, ако је $y = x$ може се добити и $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. За рационалне изложиоце, тј. за случај $y = x^{a/b}$, посматрао је изведену једнакост $y^b = x^a$, применио претходно правило, те добио $by^{b-1}dy = ax^{a-1}dx$, те је одатле извео да је $d(x^{a/b}) = \frac{a}{b}x^{\frac{a-b}{b}}dx$. Лајбниц је своја правила за диференцијални рачун објавио у раду у часопису *Acta Eroditorum*, чији је он био и један од уредника, 1684. године, са дугачким насловом у коме се de facto описује шта се све може урадити његовим коришћењем: *Nova methodus pro maximis i minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.* Лајбниц се веома трудио да рекламира своје идеје, комуницирао је са многим математичарима ван Британије и то је, уз једноставнији и бољи запис од Њутновог, свакако допринело великом ширењу његовог приступа ван Британије.

Деведесетих година XVII века, као и у првим декадама XVIII једна од главних области истраживања у Лајбницовом калкулусу састојала се у развоју правила за диференцирање и интеграцију трансцендентних функција – тригонометријских, логаритма и експоненцијалне функције. Јохан Бернули је ту био посебно активан. Дошао је до правила за, како га је називао, ’експоненцијални калкулус’:

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}, \quad d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u dv.$$

Лајбниц је $\int ydx$ видео као ’суму’ бесконачног низа трака (правоугаоника) ydx. Из рада са редовима знао је да се сума реда може добити помоћу низова разлика. Да би редуковао $\int ydx$ на суму разлика, треба да нађе z тако да је $dz = ydx$ (сетите се низова (b_n) и (a_n): треба сумирати b_n а зна се да је $b_n = a_n - a_{n+1}$). Тако да закључује да је

$$\int ydx = \int dz = z.$$

Када је открио тако инверзну природу диференцирања и интеграције, одмах је могао да нађе и правило за парцијалну интеграцију. Наиме, из $d(xy) = xdy + ydx$ следи

$$xy = \int d(xy) = \int xdy + \int ydx.$$

Ојлер

Слика 4: Леонард Ојлер

Леонард Ојлер (1707–1783) је био ученик Јохана Бернулија и сигурно је најпознатији швајцарски математичар, а можда и најплоднији математичар у историји математике. Како је он највећи део свог радног века провео у Русији, можемо га сматрати и руским математичаром. Математику је учио од Јохана Бернулија и дружио се са његовим синовима Николом и Данијелом. Уз подршку Бернулијевих, добио је позицију у Петрограду 1727. године. Ојлер је био свестрано

образован и заправо је добио место на медицини и физиологији, касније на природној филозофији. Но, Никола Бернули је умро 1726, а Данијел се 1733. из Петрограда преселио у Базел и Ојлер тако остаје, у својој 26-ој години најзначајнији математичар у Петрограду.

Започнимо најпре Ојлеровим доприносом математичкој нотацији. Он је увео и промовисао коришћење слова e за базу природног логаритма. Симбол π јесте коришћен и раније, али га је Ојлер значајно промовисао. Пред крај живота је увео и симбол i за корен из -1. Занимљиво је да га је раније користио за ознаку бесконачности, па је тако писао и $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$, где је i бесконачни број. У елементарној геометрији је такође имао значајан допринос у нотацији. Странице троугла је означавао са a,b,c, а одговарајуће углове са A,B,C, док је са R,r,s означавао полупречнике описаног и уписаног круга и полуобим троугла. Од других ознака треба навести да је Σ користио за суму, а да је са $f(x)$ је означавао функцију.

У свом делу „Introductio in Analysin Infinitorum" из 1748, које даје основе математичке анализе, увео је функцију од променљиве величине као 'било који аналитички израз сачињен од те променљиве величине и бројева или константних величина'. Јасно је да таква дефиниција није прецизна, но послужила је Ојлеровој сврси — форсирао је аналитички приступ, па и у раду са тригонометријским функцијама; синус је задат преко реда $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \cdots$. На пример, још је у писму Јохану Бернулију из 1740. навео формулу $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$.

Покажимо сада како је Ојлер нашао суму реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Пођимо од следеће чињенице: ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуле полинома $p(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, онда је

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Није се тешко уверити да је ово тачно. Наиме, ако је

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

дељењем са x^n добијамо

$$\frac{1}{x^n} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_2 \frac{1}{x^{n-2}} + \cdots + a_n = 0.$$

Ако је $y = \frac{1}{x}$, онда из

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

и Вијетових формула добијамо

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -a_1,$$

тј.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=-a_1.$$

Ојлер сада ово екстраполира на функцију синус. Наиме, на основу развоја у ред:

$$\sin z=0 \text{ и } z>0 \text{ акко } 0=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots.$$

Сменом $w=z^2$ добија се

$$0=1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\frac{w^3}{7!}+\cdots$$

По аналогији са коначним случајем, ако су нуле овог реда $w_1,w_2,\ldots$ (што су заправо квадрати нула синуса), онда је

$$\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_3}+\cdots=-(-\frac{1}{3!})=\frac{1}{6}.$$

Но, знамо да су позитивне нуле синуса $\pi,2\pi,3\pi,\ldots$, па су ове нуле заправо $\pi^2,(2\pi)^2,(3\pi)^2,\ldots$. Стога добијамо

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\cdots=\frac{1}{6},$$

односно

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ојлер је нашао суме $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2l}}$ за све $l\in\{1,2,\ldots,13\}$. На пример, добио је

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{26}}=\frac{2^{24}\cdot 76977927\cdot\pi^{26}}{27!}.$$

Наведимо и Ојлеров доказ бесконачности скупа простих бројева коришћењем дивергенције хармонијског реда.

Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и нека су то $p_1,p_2,\ldots,p_k$. Нека је n неки природан број. Тада је

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

за неке $\alpha_i\geqslant 0$. Узмимо $\alpha=\max\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$. Посматрамо производ

$$P=\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right).$$

Јасно је да се у развоју овог производа у збир појављују сви бројеви од 1 до $\frac{1}{n}$, те је $P > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Но,

$$\begin{aligned} P &< \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1}. \end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < \frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1},$$

но, како израз на десној страни не зависи од n добијамо да је сума $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ограничена, а знамо да то није тачно. Стога мора постојати бесконачно много простих бројева. Ојлер је много експериментисао са бесконачним редовима, али о томе нећемо сада писати.

У писму Голдбаху из 1746. Ојлер је навео следећи занимљив резултат: $i^i = e^{-\pi/2}$. Наиме, из Ојлерове формуле $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ за $\theta = \pi/2$ добија се да је $e^{i\pi/2} = i$. Стога је

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}.$$

Заправо, Ојлер је 1749. показао да се сваки комплексан степен комплексног броја, тј. $(a+bi)^{c+di}$ може изразити у облику $p+qi$. Овај аспект Ојлеровог рада је занемарен и прича о реалним вредностима i^i се озбиљније разматрала тек у XIX веку.

Немогуће је и приближно навести све Ојлерове идеје и резултате из теорије обичних и парцијалних диференцијалних једначина, рачуна коначних разлика, елиптичких интеграла, специјалних функција и других области. У вези нотације наведимо још његову ознаку

$$\left[\frac{p}{q}\right] = \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdots q},$$

која је, евидентно претеча модерне ознаке $\binom{p}{q}$.

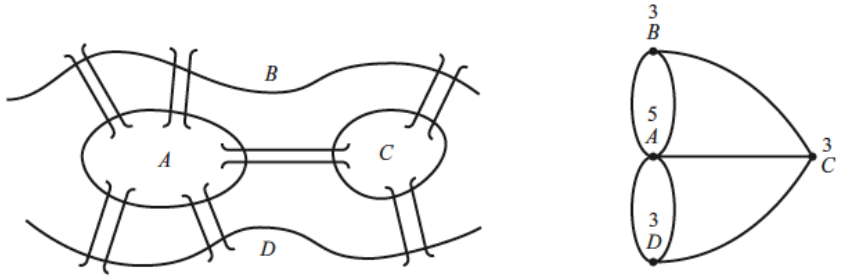
За крај наведимо и Ојлеров доказ мале Фермаове теореме, која каже да је, ако је p прост број, који не дели цео број a, онда p дели $a^{p-1}-1$.

Он је заправо доказао да $p \mid (a^p - a)$ за све a , индукцијом по a. Наравно да је тврђење тачно за $a = 1$. И, ако претпоставимо да је тачно за a, лако се покаже за $(a+1)^p - (a+1)$ (наравно користимо модерне ознаке у доказу ради краћег записа):

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k + 1 - a - 1 = a^p - a + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k.$$

Како $p \mid \binom{p}{k}$ за све $1 \leqslant k \leqslant p-1$, резултат следи из индуктивне хипотезе.

Године 1736. Ојлер је објавио рад за који се сматра да је први рад из области теорије графова. У том раду је он дао решење Проблема о кенигзбершким мостовима. Наиме, у граду Кенигзбергу који је био значајан универзитетски град у Источној Пруској, а у коме је дуги низ година живео и Имануел Кант, на реци Прегал било је седам мостова који су спајали два острва са копном, а и између себе.



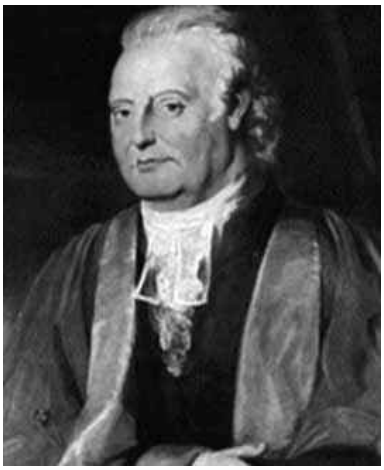
Слика 5: Кенигзбершки мостови и придружен граф

Проблем се састојао у томе да се установи да ли се може прећи преко сваког моста али тачно једном. Ојлер је проблем поједноставио тако што је и острва и обе обале заменио тачкицама, а мостове луковима који их повезују. Тако је добио граф са слике. Ако желите да прођете ивицом сваког графа тачно једном. онда у свако теме улазите и излазите паран број пута сем у случају почетног и завршног темена. Но, видимо да у сваком темену има по три лука (степен сваког темена је 3). Стога је немогуће проћи свим мостовима тачно једном, било да је захтев да се вратите у почетну тачку или не. Пут у графу који пролази сваком ивицом тачно једном, данас се назива Ојлеров пут. А Кенигсберг се данас зове Калињинград и налази се у Русији.

Ка модерној алгебри

Као што смо видели, проблем налажења решења алгебарских једначина трећег и четвртог степена, која се изражавају као рационалне функције корена израза добијених од коефицијената једначине, решен је у ренесансној Италији. Но, питање за једначине вишег степена остало је неразрешено. У овом делу ћемо се позабавити тим питањем, тј. како је разматрање овог проблема довело до резултата Еваристе Галоа са којим се може рећи да почиње развој модерне алгебре, дакле области која проучава алгебарске структуре попут група, прстена, поља.

Варинг



Слика 6: Едвард Варинг

Едвард Варинг (1736–1798) био је енглески математичар који је у два своја значајна дела *Miscellanea analytica* (Кембриџ 1762) и *Meditationes algebricae* (Оксфорд 1770) (при чему је заправо друго дело, упркос новом називу, било друго, проширено издање првог) дао прве резултате на том путу. Наиме, ако се посматра општа једначина степена n:

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots + \cdots = 0,$$

и њени корени $x_1, \ldots, x_n$, онда нам је познато да су коефицијенти a_i заправо елементарне симетричне функције ових корена:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + \cdots + x_n, \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n, \quad \text{итд.} \end{aligned}$$

Варинг је у свом првом делу показао да се свака рационална симетрична функција корена ове једначине може изразити као рационална функција коефицијената тако што је то најпре показао за суму степена

$$s_m = x_1^m + \cdots + x_n^m,$$

а потом за све остале симетричне функције. У другом делу је разматрао решења циклотомичне једначине (једначине „деобе круга" пошто се налажење правилног n-тоугла уписаног у дати круг своди на решавање ове једначине):

$$x^n - 1 = 0.$$

Разматрао је и проблем да се нађу једначине које се могу решити сумама облика

$$x = \sqrt[m]{\alpha_1} + \sqrt[m]{\alpha_2} + \cdots + \sqrt[m]{\alpha_n}.$$

Вандермонд

Слика 7: Вандермонд

Александар-Теофил Вандермонд (1735–1796) био је француски математичар, који је 1770. године представио париској Академији наука рад под насловом „О решавању једначина". Он почиње од добро познатих решења квадратне и кубне једначине са жељом да нађе општи принцип за решавање алгебарских једначина. Најпре решења квадратне једначине x_1, x_2 напише у облику

$$\frac{1}{2}\left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}\right].$$

Овај се израз може написати и у облику

$$\frac{1}{2}\left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right]$$

и видимо да се овде појављују симетричне функције корена.

Вандермонд се потом пита да ли се општа једначина степена n може решити помоћу аналогног израза

$$\frac{1}{n}\left[(x_1+\cdots+x_n)+\sqrt[n]{(\rho_1 x_1+\cdots\rho_n x_n)^n}+\sqrt[n]{(\rho_1^2 x_1+\cdots\rho_n^2 x_n)^n}+\cdots+\sqrt[n]{(\rho_1^{n-1} x_1+\cdots\rho_n^{n-1} x_n)^n}\right],$$

где су $\rho_1,\ldots,\rho_n$ n-ти корени из јединице. Данас изразе облика

$$\rho_1 x_1+\cdots+\rho_n x_n$$

називамо Лагранжовим решавачима, пошто их је Лагранж увео у раду приложеном берлинској Академији 1771. Наиме, Вандермондов рад јесте предат раније, али је објављен тек 1774.

Вандермондов метод у случају кубне једначине фино 'ради'. Наиме, ако је $\zeta^3=1$, а $\zeta\neq 1$, те су и ζ и ζ^2 примитивни корени из јединице, а x_1,x_2,x_3 решења кубне једначине, онда имамо једнакост

$$\left(x_1+\zeta x_2+\zeta^2 x_3\right)^3 = S+3\zeta X+3\zeta^2 Y, \tag{1}$$

где је

$$\begin{aligned} S &= x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3\\ X &= x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1\\ Y &= x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2. \end{aligned}$$

Видимо да S јесте симетрична функција корена, док X и Y нису, но $X+Y$ и XY јесу симетричне функције, па тиме изразиве преко коефицијената, а и корени су квадратне једначине. Стога се може добити колики је израз на десној страни једначине (1) те се могу добити и корени једначине. За једначину степена 4, Вандермонд је нешто модификовао свој метод, док за једначине вишег степена тај метод јесте успешан само у специјалним случајевима. На пример, он је решио једначину

$$x^{11}-1=0.$$

Најпре ју је редуковао на једначину степена 5 чији су корени

$$\rho+\rho^{-1},\quad \rho^2+\rho^{-2},\quad \rho^3+\rho^{-3},\quad \rho^4+\rho^{-4},$$

где је ρ примитивни једанаести корен из јединице. Затим је, за решавање те једначине петог степена користио раније наведене решаваче у облику

$$x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3+\alpha^3 x_4+\alpha^4 x_5,$$

где је α примитивни пети корен из јединице. Но, овде се мора пажљиво изабрати редослед корена x_i да би се L^5 могао фино одредити и за

овај случај се то може разрешити пробањем, али за општи случај је потребан доказ да се то може увек урадити. То је извео тек Гаус. Вандермонд је тврдио да се решења опште једначине $x^n - 1 = 0$, његовим методом увек могу лако наћи, те се чини да није био свестан проблема избора редоследа корена.

Лагранж

Слика 8: Жозеф Луј Лагранж

Жозеф Луј Лагранж (1736-1813) рођен је у Торину и крштен је као Ђузепе Лодовико Лагранђа. Данас је познат као француски математичар, мада га Италијали 'воде' као италијанског математичара. У сваком случају, његова породица је имала веза са Француском. Он сам је дуго времена радио у Берлину и у Паризу, мада је започео каријеру у Италији. Био је свестран математичар, овде наводимо само његове резултате о решавању алгебарских једначина.

Веома занимљив (и обиман) рад од преко 200 страница, Лагранж је приложио берлинској Академији. Наслов тог рада је био „Размишљање о алгебарском решавању једначина".

Ту најпре разматра кубну једначину у облику

$$x^3 + nx + p = 0.$$

Наравно, решење нам је познато из Карданове књиге где се оно тражи у облику $x = u + v$, где су u^3 и v^3 корени квадратне једначине. Лагранж показује да се u и v могу изразити као функције корена a, b, c почетне кубне једначине:

$$u = \frac{1}{3}(a + \alpha b + \alpha^2 c), \quad v = \frac{1}{3}(a + \alpha^2 b + \alpha c),$$

где је наравно α примитивни трећи корен из јединице.

Лагранж каже да се овакав резултат може добити и директним методом. Наиме, он полази од произвољне линеарне функције по a, b, c:

$$y = Aa + Bb + Cc.$$

Пермутовањем корена a, b, c добија се 6 израза који су стога корени једначине шестог степена. Ако желимо да то буде једначина у којој ће се појављивати само степени од y^3 (можда можемо да је зовемо бикубна једначина), онда се може показати да су A, B, C пропорционални са $1, \alpha, \alpha^2$, или са $1, \alpha^2, \alpha$. Тако да се добијају ипак раније наведени изрази. Дакле, занимљиво је да он разматра понашање израза при пермутацији корена.

Потом разматра једначину четвртог степена у облику

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0.$$

Ферари је показао да се решења добијају помоћу решења кубне једначине („разрешавајућа кубика”):

$$y^3 - \frac{1}{2}ny^2 - qy + \frac{1}{8}(4nq - p^2) = 0.$$

Лагранж показује да се корени u, v, w ове једначине добијају као симетричне функције корена a, b, c, d почетне једначине четвртог степена:

$$u = \frac{1}{2}(ab + cd), \quad v = \frac{1}{2}(ac + bd), \quad w = \frac{1}{2}(ad + bc).$$

У одељку под бројем 100, Лагранж разматра рационалне функције $f(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ корена опште једначине степена n. Ти корени се разматрају као неодређене. За две функције t и y ових корена каже да су сличне ако свака пермутација ових корена која оставља t инваријантним, оставља и y инваријантним и обратно. Лагранж доказује следећу теорему.

Ако све пермутације које остављају t инваријантним остављају и y инваријантним, онда се y може изразити као рационална функција од t и коефицијената дате једначине.

Он ову теорему примењује на једначине степена 2, 3 и 4, а каже да је примена на једначине вишег степена још увек превише компликована. Такође је разматрао и неке специјалне случајеве већ навођене циклотомичне једначине $x^n - 1 = 0$.

Малфати

Слика 9: Малфати

Ђанфраческо Малфати (1731–1807) био је италијански математичар који се бавио геометријом, механиком и вероватноћом, али нас занима његов допринос у решавању алгебарских једначина. Он је 1770. поднео Академији наука у Сијени интересантну расправу о једначинама петог степена и она је објављена од стране те Академије 1771.

Он најпре разматра кубну једначину

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{2}$$

Следећи Ојлеров метод за решавање ове једначине (о коме истина нисмо причали, али ево сада је прилика да се спомене), он посматра корен x који задовољава линеарну једначину

$$x + m\sqrt[3]{f^2} + n\sqrt[3]{f} = 0. \tag{3}$$

Да би елиминисао треће корене, користи метод Габријела Манфредија (Манфреди, 1681–1761, био је италијански математичар који се највише бавио диференцијалним једначинама). Наиме, уместо $\sqrt[3]{f}$ посматра $\alpha\sqrt[3]{f}$ и $\alpha^2\sqrt[3]{f}$, где је α примитивни трећи корен из јединице, замени то у (3) и помножи та три израза те добије једначину трећег степена

$$x^3 - 3mnfx + m^3f^2 + n^3f = 0. \tag{4}$$

Потом постави $f=1$ и добије

$$x^3-3mnx+m^3+n^3=0. \tag{5}$$

Ова је једначина еквивалентна једначини (2) акко је

$$mn=-a, \quad m^3+n^3=b. \tag{6}$$

Одавде се наравно могу наћи m^3 и n^3, а онда наравно и m и n (видели смо већ овако нешто код решавања једначина трећег степена).

Но, Малфати сада ово жели да примени на једначину петог степена

$$x^5+5ax^3+5bx^2+5cx+d=0. \tag{7}$$

Жели наравно да добије корен x из

$$x+m\sqrt[5]{f^4}+p\sqrt[5]{f^3}+q\sqrt[5]{f^2}+n\sqrt[5]{f}=0. \tag{8}$$

Наравно, сада уместо $\sqrt[5]{f}$ посматра $\alpha^k\sqrt[5]{f}$ за $k=\overline{1,4}$, где је α пети примитивни корен из јединице, формира одговарајуће изразе, множи их и тако добија 'канонску' једначину петог степена. Поставља $f=1$ и изједначава коефицијенте те канонске једначине с почетном једначином (7) те добија услове за m,p,q,n. Поставља затим $mn=y$, $pq=u$, $25uy-5a^2+5c/3=z$ и после доста рачунања добија једначину шестог степена по z. У општем случају, ова једначина нема рационалан фактор степена 1, 2, или 3, а ако би имала онда би једначина (7) била решива преко радикала.

Независно од Малфатија и Лагранж је конструисао 'решавач' z који је функција корена и који има шест вредности при пермутацији корена. И један и други решавач су инваријантни у односу на подгрупу групе пермутација од пет корена $x_1,\ldots,x_5$, која је реда 20 за коју се $k\in\{1,\ldots,5\}$ слика у $k'=ak+b \pmod 5$ (при чему уместо 0 узимамо 5), где је $a\in\{1,2,3,4\}$, а $b\in\{0,1,2,3,4\}$. Занимљиво је, али не и неочекивано да ова подгрупа има значајну улогу и у Галоаовој теорији (наравно, она је решива).

Руфини

Слика 10: Руфини

Паоло Руфини (1765–1822) објавио је неколико радова у раздобљу од 1798. до 1813. (одговарајући на критике и поправљајући доказе) у којима је тврдио да је показао да једначине степена већег од четири не могу бити решене у радикалима.

Он ради слично Лагранжу. Посматра рационалне функције корена опште једначине степена n. Ако је p број пермутација које фиксирају такву функцију, онда је p делитељ од $n!$ и број различитих вредности које функција може узети при пермутовању корена је $n!/p$ (ако се сетимо дејства групе, орбита и стабилизатора, биће нам јасније зашто је ово тачно). Руфини је ово детаљно изучавао и показао је да у случају да је $n=5$ тај број $5!/p$ може бити 2, 5 или 6, али не може бити ни 3 ни 4. То значи да Лагранжов решавач не може задовољавати једначину степена 3 или 4. Ако $5!/p$ није 2, он мора бити дељив са 5, а ако је $5!/p=5$, онда заиста постоји решавач који задовољава једначину степена 5, али се не може свести на биномну једначину $z^5-m=0$.

Руфинијев доказ генерално није био добро прихваћен, њему је недостајало коришћење и корена из јединице у решавању и то је комплетирао Абел.

Коши

Слика 11: Коши

Огистен Луј Коши (1789–1857) је наравно био свестрани француски математичар који је дао велики допринос у више области математике, посебно у математичкој анализи, али овде ће нас занимати да укратко наведемо његове резултате за тему коју обрађујемо.

Коши је проширио резултате Руфинија на функције од n променљивих. Наиме, доказао је да ако је p највећи прост број који дели n, онда број различитих вредности коју несиметрична рационална функција од n променљивих може имати не може бити мањи од p сем ако је једнак 2. Он је увео и разлику између пермутација и супституција. Наиме, он је под пермутацијом подразумевао ређање n променљивих (или слова) у неком поретку (дакле отприлике онако како се о пермутацијама прича у средњој школи), док су супституције функције којима се од једне пермутације прелази до друге. Галоа је такође користио ту терминологију, а и требало је извесно време да се пређе на назив „пермутације" за Кошијеве „супституције". Коши је разматрао производе супституција. Ако су S и T супституције он је њихов производ означаао са ST и овде се прво примењивало S, а потом T (дакле, овде супституције „вуку" променљиве, не „гурају" их како се популарно каже).

У периоду од 1844. до 1846. године, Коши је написао низ радова о супституцијама. За две супституције каже да су „сличне" уколико

имају исту поделу на циклусе. Показује да су P и Q сличне ако постоји R тако да је $Q = R^{-1}PR$ (видимо да је користио појам сличности, на који смо навикли изучавајући матрице; појам конјугације је касније уведен). Такође је доказао да је ред групе супституција дељив редом сваке супституције из те групе, као и да је ред ма које групе супституција n променљивих делилац броја $n!$. Овај резултат је већ доказао Лагранж. И код Кошија се у доказу појављује партиција групе на косете подгрупе. Општи резултат, који данас знамо као Лагранжова теорема дао је касније Жордан, али је приписао тај резултат Лагранжу. Иста прича важи и за Кошијеву теорему.

Абел

Слика 12: Абел

Нилс Хенрик Абел (1802–1829) био је норвешки математичар који је осим резултата везаних за решавање алгебарских једначина имао значајне резултате у области теорије елиптичких интеграла и данас многи математички објекти носе име по њему.

Он је 1824. о личном трошку објавио на француском дело о решавању алгебарских једначина, а 1826. је у Креловом Журналу објавио нешто проширену верзију. У тим радовима је дат јасан доказ да се једначине степена већег од 4 не могу решити у радикалима.

Он користи резултате осталих математичара који су се бавили овим проблемом, али ради и нешто есенцијално ново што комплетира овај доказ. Полази од једначине

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0, \tag{9}$$

са „општим” коефицијентима – коефицијенти су независне променљиве. Претпостављајући да се y може изразити као функција коефицијената преко радикала, Абел каже да се y може написати у облику

$$y = p + p_1 R^{1/m} + p_2 R^{2/m} + \cdots + p_{m-1} R^{(m-1)/m} \tag{10}$$

где је m прост број. Величине $R, p, p_1, \ldots, p_{m-1}$ су све истог облика као и y, тј. укључују нове радикале, итд. све док се не дође до рационалних функција коефицијената почетне једначине. Он увек међу коефицијенте укључује и све m-те корене из јединице, за све просте m који се појављују као експоненти. $R^{1/m}$ је, да тако кажемо, последњи радикал који смо увели.

Наравно, он каже да се може претпоставити да се $R^{1/m}$ не може изразити као рационална функција од $a, b, \ldots, p, p_1, \ldots$ пошто би иначе додавање те величине било непотребно. Слично искључује могућност да $p_1, p_2, \ldots$ сви буду једнаки 0.

У првом раду претпоставља да $p_1 \neq 0$ (у другом показује да то ограничење није суштинско). Заменом R са R/p_1^m може да претпостави да је $p_1 = 1$. Означимо $R^{1/m}$ са z. Тада је

$$y = p + z + p_2 z^2 + \cdots + p_{m-1} z^{m-1}. \tag{11}$$

Заменом у (9) добија се да је

$$q + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0, \tag{12}$$

где су $q, q_1, \ldots, q_{m-1}$ полиноми по $a, b, \ldots, p, p_2, \ldots$ и R (сетимо се да је $z^m = R$, те се тако уклањају виши степени од z). Абел сада тврди да је неопходно да сви ови q_i буду једнаки 0. Наиме, ако се претпостави да то није тако и посматра (12) и

$$z^m - R = 0, \tag{13}$$

видимо да је z заједнички корен две алгебарске једначине. Тада ће z бити корен и највећег заједничког делиоца одговарајућих полинома. Ако тај делилац није нерастављив, онда је z корен и неког његовог нерастављивог фактора за који можемо да претпоставимо да је степена бар 2 (јер би z иначе био већ рационална функција од постојећих величина). Дакле,

$$t_0 + t_1 z + \cdots + t_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0, \tag{14}$$

при чему је одговарајући полином нерастављив. То је једначина најнижег степена коју z задовољава. Но, она има k корена заједничких са (13), а ова једначина има корене облика αz где је α нетривијалан m-ти корен из јединице. Дакле, имали бисмо

$$t_0 + t_1 z + \cdots + t_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0 \quad \text{и} \quad t_0 + t_1 \alpha z + \cdots + t_{k-1} \alpha^{k-1} z^{k-1} + \alpha^k z^k = 0. \tag{15}$$

Множењем прве од ових са α^k и одузимањем од друге, добили бисмо једначину нижег степена који z задовољава, те то води до контрадикције. Стога сви коефицијенти $q, q_1, \ldots, q_{m-1}$ морају бити једнаки 0.

Користећи сада чињеницу да су решења једначине (13), сем z и αz, $\alpha^2 z, \ldots \alpha^{m-1} z$, заменом $R^{1/m}$ у (10) са $\alpha^i R^{1/m}$ такође се добијају корени почетне једначине (9). Ови корени су сви различити, m не може бити веће од 5. Ако су $y_1, \ldots, y_m$ тако добијени корени, онда имамо

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & p + z + p_2 z^2 + \cdots + p_{m-1} z^{m-1} \\ y_2 & = & p + \alpha z + \alpha^2 p_2 z^2 + \cdots + \alpha^{m-1} p_{m-1} z^{m-1} \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ y_m & = & p + \alpha^{m-1} z + \alpha^{m-2} p_2 z^2 + \cdots + \alpha p_{m-1} z^{m-1}. \end{array}$$

Ако се ово посматра као систем линеарних једначина по непознатим $p, z, p_2 z^2, \ldots, p_{m-1} z^{m-1}$, видимо да имамо систем од m једначина са m непознатих и то такав да има једнозначно решење (уочите која је матрица система). Стога се ове „непознате” све могу изразити као рационалне функције по $y_1, \ldots, y_m$ а тиме су и $p, p_2, \ldots, p_{m-1}$, $z = R^{1/m}$ (па онда наравно и $R = z^m$) рационалне функције корена.

Сама величина R је можда рационална функција неког раније уведеног радикала $v^{1/n}$. Понављањем претходног поступка добијамо да су све ирационалне величине које се појављују у изразу за корене y_i заправо неки радикали рационалних функција корена, укључујући свакако и одговарајуће корене из јединице. Руфини је пошао од те претпоставке, испуштајући корене из јединице и Абел је то оправдао. После овога он наставља користећи претходне резултате других математичара које смо навели и закључује да се општа једначина степена 5 не може решити преко радикала.

Два месеца пре смрти је објавио рад о једној класи решивих алгебарских једначина. У класу коју је разматрао спада и циклотомична једначина. Он ту доказује следећу општу теорему.

Ако су корени једначине такви да се сви корени могу изразити као рационалне функције једног од њих, на пример x, и ако су ма која два корена $\theta(x)$ и $\theta_1(x)$ (где су θ и θ_1 рационалне функције), тако повезана да је $\theta(\theta_1(x)) = \theta_1(\theta(x))$ онда се једначина може решити у радикалима.

Данас наравно групе у којима је множење комутативно називамо Абелове групе. Овде је доказан специјални случај општег резултата који је дао Галуа. Наиме, знамо да је свака Абелова група решива и стога се одговарајућа једначина може решити преко радикала.