Алгебра 2, Сеп 1, теорија

1.	Марија Богавац	128/19	7
2.	Милош Јованов	50/20	5
3.	Василије Костић	19/20	3,5
4.	Матеја Милетић	319/20	1
5.	Драгана Савчић	102/20	2
6.	Милан Стојановић	185/19	7,5
7.	Милош Цветковић	30/20	6

Само теорија:

1.	Антоније Суботић	16/20	23
2.	Милица Тубин	70/19	9

Уколико збир поена задатака и теорије није цео број, заокружује се на следећи цео број. На пример, 50,5 заокружује се на 51 и то је пролаз. Ако неко жели поново да изађе на теорију, наравно да може, али се тада гледа само последњи резултат. Теорија се тада ради 60 минута. Наравно, може се поново изаћи и на задатке и опет се гледа само последњи резултат. У прилогу су коментари на нека теоријска питања. Сачекаћу са уписивањем оцена из овог рока док се не заврши следећи, те не морате да ми јављате да желите поново да изађете.

У Београду,
8. септембра 2022.

Зоран Петровић

Алгебра 2, Септембар 1 – коментари

Кратка питања

1. (2) Навести дефиницију стабилизатора елемента $x \in X$ при дејству групе G на скупу X.
2. (2) Навести дефиницију Силовљеве подгрупе.
3. (2) Навести дефиницију правог делитеља нуле у прстену.
4. (2) Навести Ајзенштајнов критеријум за нерастављивост полинома.

   Неки су овде писали да „кажемо” да је полином нерастављив! Не кажемо него јесте нерастављив.
5. (2) Навести дефиницију алгебарског раширења.

Кратке питалице, обавезно је кратко образложење сваког одговора

1. (3) Нека група $\mathbb{S}_3$ дејствује на коначном скупу X који има 10 елемената. Да ли могу постојати тачно три орбите при овом дејству?

   Као и у претходном року, треба наћи пример, само се за то добијају поени ако је одговор потврдан. Пример се налази као у том року само се још дода један једночлан скуп. Погледајте.
2. (3) Да ли за неко n диједарска група $\mathbb{D}_n$ садржи Силовљеву подгрупу која је такође диједарска група?

   Ово није тешко када се пажљиво промисли. Наиме, ред Силовљеве подгрупе је обавезно степен простог броја. А ред диједарске групе је облика $2m$. Да би $2m$ био степен простог броја, онда m мора сам бити облика 2^s за неко s. Дакле, та диједарска група мора бити реда који је степен двојке. Рецимо, узмимо 8, тј. тражимо неку диједарску групу која као своју подгрупу има групу $\mathbb{D}_4$. То није тешко, група симетрија правилног 12-оугла (сетите се сата) свакако као своју подгрупу има групу симетрија квадрата (формирају га темена 12, 3, 6, 9), тј. $\mathbb{D}_4 \leq \mathbb{D}_{12}$. А $|\mathbb{D}_{12}| = 24 = 8 \cdot 3 = |\mathbb{D}_4| \cdot 3$, те је $\mathbb{D}_4$ Силовљева подгрупа групе $\mathbb{D}_{12}$. Наравно, можемо и чисто алгебарски да видимо да група $\mathbb{D}_{12}$ садржи подгрупу која је диједарска група: ако су генератори за D_{12} σ реда 2 и ρ реда 12, онда посматрамо подгрупу генерисану са σ и ρ^3 и лако је проверити да ти генератори задовољавају релације за диједарску групу.
3. (3) Нека је A комутативан прстен са јединицом, који није поље и $a \in U(A)$. Може ли $a + a^3$ бити прави делитељ нуле у A?

   Овде је било грешака, узимао се елемент a који није био инвертибилан. А није тешко наћи пример. Неко је дао пример прстена $\mathbb{Z}_6$ и елемента 5. То је сасвим у реду, јер 5 јесте инвертибилан, а $5 + 5^3 = 5 + (-1)^3 = 5 - 1 = 4$ што је делитељ нуле у $\mathbb{Z}_6$ јер је $4 \cdot_6 3 = 0$.
4. (3) Да ли постоји комутативан прстен са јединицом у коме једначина $x^2 - 8x + 7 = 0$ има бар четири различита решења?

   Мора пример, не може само анализа. Неко је дао пример прстена $\mathbb{Z}_{55}$. Корени су $1, 7, 12, 51$. А можда је лакши пример $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Овде су корени $(1,1), (1,7), (7,1), (7,7)$ – сетите се да су операције по координатама.
5. (3) Да ли постоји комутативан прстен са јединицом A, који има више од два елемента и у коме су сви елементи сем 1_A делитељи нуле?

   Пример је $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Јединица је овде $(1,1)$ и сви остали елементи $(0,0), (1,0), (0,1)$ су делитељи нуле – $(0,1) \cdot (1,0) = (0,0)$.

Доказ

(10) Нека је D главноидеалски домен. Доказати да је D домен са једнозначном факторизацијом.

Наравно, овде је битан само доказ. Дефиниције не доносе поене.