Алгебра 2, Јун 1, теорија

1.	Магдалина Јелић	13/20	25
2.	Владан Козић	24/20	14
3.	Стефан Миленковић	27/20	24,5
4.	Антоније Суботић	7/20	13
5.	Ирина Шевић	9/20	21

Само теорија:

1.	Вера Поповић	320/20	11

Јавите ми да ли да уписујем ове поене, или ћете поново излазити да поправите. Наравно, можете излазити само на теорију као што знате и тада радите 60 минута. У прилогу су коментари на нека теоријска питања.

У Београду,
9. јула 2022.

Зоран Петровић

Алгебра 2, 30. јун 2022, коментари

Кратка питања

1. (2) Навести дефиницију стабилизатора елемента $x \in X$ при дејству групе G на скупу X.
2. (2) Навести дефиницију Силовљеве подгрупе.
3. (2) Навести дефиницију прстена са једнозначном факторизацијом.
4. (2) Навести Ајзенштајнов критеријум за нерастављивост полинома.
5. (2) Навести дефиницију алгебарског елемента.

   Коментар Неки су овде писали да је елемент α из F алгебарски ако постоји полином $p(X)$ из $F[X]$ за који је $p(\alpha) = 0$. То је тачно за сваки елемент из F и свакако не доноси поене.

Кратке питалице, обавезно је кратко образложење сваког одговора

1. (3) Нека група $\mathbb{S}_3$ дејствује на коначном скупу X који има 9 елемената. Да ли могу постојати тачно две орбите при овом дејству?

   Коментар Ова питалица је све некако збунила. Основна ствар је следећа: различите орбите су различити светови. Ви можете да узмете нека два дисјунктна скупа и да на њима на потпуно различите начине дефинишете дејство неке групе и тако добијете дејство групе на скупу који је њихова унија. Овде се тражи да ли постоје две орбите. Јасно да не могу бити било какве величине, оно што се може пробати је да те орбите буду са 6 и са 3 елемента. Ништа простије. Узмете најпре да је $X_1 = S_3$ и да на том скупу група $\mathbb{S}_3$ дејствује простим множењем. Јасно је да је такво дејство транзитивно на овом скупу (дакле, имамо само једну орбиту), а за X_2 узмемо $X_2 = \{(1\,2), (1\,3), (2\,3)\} \times \{1\}$. Узели смо Декартов производ да скуп буде дисјунктан са X_1. На X_2 дејствује група $\mathbb{S}_3$ коњуговањем на првој компоненти. И овде је дејство транзитивно. То значи да је дејство које добијамо на $X = X_1 \cup X_2$ такво да има две орбите: X_1 и X_2.

2. (3) Нека је $p > 3$ прост број. Да ли за неко m постоји група G реда $4p^m$ у којој Силовљева p-подгрупа није нормална?
3. (3) Нека је A комутативан прстен са јединицом, који није поље и $a \in U(A)$. Може ли $a + a^2$ бити нилпотентан елемент у A?

   Коментар Пример је лак и неко га је нашао. Узмемо $-1 \in \mathbb{Z}$. Очигледно је инвертибилан. А $(-1) + (-1)^2 = 0$ и то је нилпотентан елемент. А шта беше нилпотентан елемент? Није тешко ни погодити ако се не сећате. Нил асоцира на нулу, а потент на степен. Дакле, то је елемент чији је неки степен нула.

4. (3) Да ли постоји комутативан прстен са јединицом у коме једначина $x^2 - 8x + 7 = 0$ има бар три различита решења?

   Коментар Одговор је „да” и само треба наћи пример. Наиме, тврђење да полином степена n има највише n нула не важи за произвољне комутативне прстене са јединицом. С обзиром да је $x^2 - 8x + 1 = (x-1)(x-7)$, треба само наћи прстен у коме имамо постоји елемент $a \neq 0$ такав да је $a(a+6) = 0$ и у коме је и $a + 6 \neq 0$. Рецимо прстен $\mathbb{Z}_{55}$ – ту се може узети да је $a = 5$. Тада почетни полином има за нуле $1, 7, 12$, а можда и још нешто.

5. (3) Да ли постоји комутативни прстени са јединицом A и B за које је директан производ $A \times B$ поље?

   Коментар Најпростије је приметити да директан производ увек има нетривијалне делитеље нуле: $(1_A, 0_B) \cdot (0_A, 1_B) = (0_A, 0_B)$, а знамо да поље нема нетривијалне делитеље нуле.

Доказ

(10) Доказати да је број Силовљевих p-подгрупа групе G конгруентан са 1 по модулу p и да тај број дели ред групе G. (Напомена: пажљиво дефинишите све скупове које користите и дејства група која користите.)

Коментар Овде се добијало 3 поена ако се покаже да број Силовљевих подгрупа дели ред групе. То непосредно следи из чињенице да је тај број једнак индексу нормализатора неке од њих. Доказ да је тај број конгруентан са 1 по модулу p је ипак захтевнији и ту има нешто и да се ради.