Алгебра 1, пример испита

1. Дате су пермутације $\alpha, \beta \in \mathbb{S}_{10}$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 10 & 1 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \beta = (4\ 5\ 10)(1\ 3\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9)(1\ 3\ 9\ 2).$$

   а) (5) Написати α и β у облику производа дисјуктних циклуса и одредити ред и знак за обе пермутације.

   б) (5) Наћи неку пермутацију $\pi \in \mathbb{S}_{10}$, ако постоји, за коју је $\pi\alpha\pi^{-1} = \beta$.

   в) (5) Одредити једну парну и једну непарну пермутацију реда 10 из $\mathbb{S}_{10}$.

   г) (5) Да ли постоји хомоморфизам $\phi\colon \mathbb{S}_{10} \to \mathbb{S}_{10}$ за који је $\phi(\alpha) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$? Образложити одговор.

   д) (5) Доказати да је свака пермутација реда 20 у $\mathbb{S}_{10}$ непарна.

2. (25) Одредити број различитих начина на који се темена коцке могу обојити помоћу четири боје.

3. а) (15) Одредити све $a \in \mathbb{Z}$ за које је $(\langle a\rangle\langle 5\rangle + \langle 6\rangle\langle 6\rangle) \cap \langle 15\rangle = \langle 60\rangle$.

   б) (10) Одредити све идеале у $\mathbb{Z}_{24}$.

Кратка питања

1. (2) Навести дефиницију десног косета.
2. (2) Како гласи Кошијева теорема?
3. (2) Навести дефиницију комутаторске подгрупе.
4. (2) Навести дефиницију карактеристике поља.
5. (2) Како гласи трећа теорема о изоморфизму за групе?

Кратке питалице, обавезно је кратко образложење сваког одговора

1. (3) Ако је $\omega(a) = 8$, $\omega(b) = 6$ и $ab = ba$, може ли бити $\omega(ab) = 12$?
2. (3) Колики је број елемената реда 8 у цикличној групи реда 32?
3. (3) Нека група G која је реда 6 дејствује на коначном скупу X који има 15 елемената. Уколико постоје три орбите, могу ли њихови редови бити 6, 4 и 5?
4. (3) Ако $1 + a, 1 + b \in U(A)$, где је A комутативни прстен са јединицом, да ли и $1 + ab \in U(A)$?
5. (3) Ако су F и G слободне Абелове групе са коначно много генератора, да ли је и група $F \times G$ слободна Абелова група?

Доказ

(10) Доказати да су прстени $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_k}$ и $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times Z_{m_k}$ изоморфни уколико је $\mathrm{NZD}(m_i, m_j) = 1$, за $i \neq j$.