Алгебра 1, пример испита

1. а) (5) Нека је $GL_2(\mathbb{Z}_5) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_5) : \det A \neq 0\}$. Доказати да је $(GL_2(\mathbb{Z}_5), \cdot)$ група.

   б) (5) Доказати да је $G \leq GL_2(\mathbb{Z}_5)$, где је $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_5, a^2 = 1 \right\}$.

   в) (20) Доказати да је $G \cong \mathbb{D}_5$.

2. а) (19) Одредити нормалну форму Абелове групе A задате генераторима x_1, x_2, x_3, x_4 и релацијама

$$\begin{aligned} 4x_1 + 16x_2 + 12x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 49x_2 + 21x_3 + 14x_4 &= 0. \end{aligned}$$

   б) (6) Одредити све елементе реда 3 и све елементе реда 4 у нормалној форми групе A.

3. Нека је $f(X) = X^4 - 8X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$.

   а) (10) Доказати да је $f(X)$ нерастављив над $\mathbb{Q}$.

   б) (10) Наћи бар једно α такво да је коренско поље полинома $f(X)$ баш $\mathbb{Q}(\alpha)$.

   в) (5) Одредити $\frac{1}{\alpha^2+1}$ у облику $p(\alpha)$ за неки полином $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Кратка питања

1. (2) Навести дефиницију левог косета.
2. (2) Како гласи Лагранжова теорема?
3. (2) Навести дефиницију нормалне подгрупе.
4. (2) Навести дефиницију комутативног прстена са јединицом.
5. (2) Навести дефиницију језгра хомоморфизма прстена.

Кратке питалице, обавезно је кратко образложење сваког одговора

1. (3) Да ли постоји нека веза између $\omega(ab)$ и $\omega(ba)$, где су a и b елементи неке групе?
2. (3) Да ли група $\mathbb{D}_6$ садржи подгрупу изоморфну групи $\mathbb{S}_n$ за неко $n > 2$?
3. (3) Ако је G група таква да је $G \times \mathbb{Z}$ циклична, да ли и G мора бити циклична група?
4. (3) Нека је $I \triangleleft A$ и $a \in A$, где је A комутативан прстен са јединицом. Ако $a + a \in I$, да ли је и $a \in I$?
5. (3) Да ли постоји Абелова група A, која није циклична, а има тачно два елемента реда 3?

Доказ

(10) Доказати став о разлагању на директни производ група.