

Алгебра 1, пример испита

1. а) (10) Доказати да је (G, \cdot) група, где је $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}, |a| = 1 \right\}$.
- б) (10) Доказати да је $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$ нормална подгрупа групе G .
- в) (10) Доказати да је $(G/H, \cdot)$ циклична група и одредити јој ред и бар један генератор.
2. (20) Одредити све подгрупе групе \mathbb{D}_5 .
3. а) (9) Одредити све примитивне корене модуло 17.
- б) (8) Решити конгруенцију $x^3 \equiv 3 \pmod{17}$.
- в) (8) Решити конгруенцију $x^2 + x \equiv 6 \pmod{17}$.

Кратка питања

1. (2) Навести дефиницију подгрупе.
2. (2) Како гласи Лагранжова теорема?
3. (2) Навести дефиницију центра групе.
4. (2) Како гласи трећа теорема о изоморфизму за групе?
5. (2) Навести дефиницију делитеља нуле у прстену.

Кратке питалице, обавезно је кратко образложење сваког одговора

1. (3) Ако у некој групи за елементе x , y и z важи да је $xyz = e$, да ли следи да је и $yzx = e$?
2. (3) Да ли је група \mathbb{S}_3 изоморфна директном производу неке две нетривијалне групе?
3. (3) Нека је $n > 1$. Чему је једнак производ свих n -тих корена из јединице?
4. (3) Нека је A ком. прстен са јединицом, $I \triangleleft A$ и $a, b \in A$. Да ли из $a^2 - b^2 \in I$ и $a + b \notin I$ следи $a - b \in I$?
5. (3) Да ли постоји Абелова група A , која садржи тачно четири елемента реда 2?

Доказ

- (10) Доказати Кошијеву теорему.