Задаци из Алгебре

1. Испитати који од следећих скупова чине групу у односу на операцију множења по модулу 14:
$$\{1,3,5\},\quad \{1,3,5,7\},\quad \{1,7,13\},\quad \{1,9,11,13\}.$$
2. Доказати да подскуп од $\{1,2,\dots,21\}$, који садржи неки паран број и број 11 не може чинити групу у односу на операцију множења бројева по модулу 22.
3. Одредити ред сваког елемента из $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_9$ и $\mathbb{Z}_{14}$.
4. Нека је g елемент групе G. Доказати да је $G = \{gx : x \in G\}$, при чему је $gx \neq gy$ за $x \neq y$.
5. Нека елементи x, y и xy неке групе G имају ред 2. Доказати да је $xy = yx$.
6. Нека је $G = \mathbb{Q} \cap [0,1)$. На скупу G задата је операција $+$ са:
$$x + y = \begin{cases} x+y, & 0 \leqslant x+y < 1 \\ x+y-1, & x+y \geqslant 1. \end{cases}$$
Показати да је G бесконачна Абелова група чији су сви елементи коначног реда.
7. Нека је
$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$
Доказати да је $SL_2(\mathbb{Z})$ група у односу на множење матрица. Ако су матрице $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ задате са:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$
одредити редове елемената A, B, AB и BA.
8. Наћи све подгрупе група $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{D}_4$ и $\mathbb{D}_5$.
9. Одредити подгрупу од $\mathbb{D}_n$ генерисану елементима ρ^2 и $\rho^2\sigma$; посебно дискутовати случај парног, а посебно непарног n.
10. Нека је G Абелова група и H скуп свих елемената коначног реда у G. Доказати да је H подгрупа од G.
11. Доказати да Абелова група $\mathbb{Q}$ НЕМА коначан скуп генератора.
12. Пермутације $(4568)(1245)$ и $(624)(253)(876)(45)$ из $\mathbb{S}_8$ представити као производ дисјунктних циклуса и одредити њихов ред.
13. Показати да је $H = \{\pi \in \mathbb{S}_8 : \pi(2) = 2, \pi(3) = 3, \pi(6) = 6\}$ подгрупа групе $\mathbb{S}_8$ (у односу на композицију пермутација) и одредити ред те подгрупе.
14. Наћи све подгрупе од $\mathbb{S}_4$ које имају 6 елемената.
15. Ако $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_n$, доказати да $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1} \in \mathbb{A}_n$.
16. Ако је n непаран број, доказати да (123) и $(12\cdots n)$ генеришу $\mathbb{A}_n$. Ако је n паран број, доказати да (123) и $(23\cdots n)$ генеришу $\mathbb{A}_n$.
17. Показати да $\mathbb{A}_4$ садржи подгрупу изоморфну групи симетрија правоугаоника који није квадрат.
18. Показати да бројеви 1, 2, 4, 5, 7, 8 чине групу у односу на множење по модулу 9 и да је та група изоморфна групи $\mathbb{Z}_6$
19. Показати да бројеви 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 чине групу у односу на множење по модулу 20 и да та група НИЈЕ изоморфна групи $\mathbb{Z}_8$.
20. Нека је G група. Доказати да је $f : G \to G$, дефинисано са $f(x) = x^{-1}$ изоморфизам ако и само ако је група G Абелова.

21. Доказати да је подгрупа групе $\mathbb{S}_6$, која је генерисана циклусима (1234) и (56) изоморфна групи из 11. задатка.

22. Доказати да је подгрупа од $\mathbb{S}_4$, генерисана елементима (1234) и (24) изоморфна групи $\mathbb{D}_4$.

23. Одредити $Z(\mathbb{S}_n)$, $Z(\mathbb{A}_n)$, $Z(\mathbb{D}_n)$.

24. Ако је група $G \times H$ циклична, доказати да су и G и H цикличне групе.

25. Доказати да група $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ НИЈЕ изоморфна групи $\mathbb{Z}$.

26. Ако је $A \leqslant G$ и $B \leqslant H$, доказати да је $A \times B \leqslant G \times H$. Наћи подгрупу од $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, која није овог облика.

27. Испитати које су од следећих група изоморфне једна другој:

$$\mathbb{Z}_{24} \quad , \mathbb{D}_4 \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{D}_{12}, \quad A_4 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{D}_6, \quad \mathbb{S}_4, \quad \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2.$$

28. Нека су H и K коначне подгрупе неке групе G и нека су редови тих подгрупа узајамно прости бројеви. Доказати да је $H \cap K = \{e\}$.

29. Нека је $H \leqslant \mathbb{S}_n$ и нека $H \nsubseteq \mathbb{A}_n$. Доказати да тачно половину елемената из H чине парне пермутације.

30. Доказати да је свака Абелова група реда pq, где су p и q различити прости бројеви, циклична.

31. Доказати да је свака Абелова група реда $p_1 \cdots p_n$, где су p_i различити прости бројеви, циклична.

32. Испитати да ли у групи $\mathbb{S}_7$ постоји елемент реда 12.

33. Испитати да ли у групи $\mathbb{S}_7$ постоји елемент реда 8.

34. Одредити елемент максималног реда у групи $\mathbb{S}_9$.

35. Нека су H и K подгрупе групе G. Доказати да је HK подгрупа ако и само ако је $HK = KH$.

36. Наћи све нормалне подгрупе у групама $\mathbb{D}_4$ и $\mathbb{D}_5$.

37. Нека је H нормална подгрупа групе G и K нормална подгрупа од H. Примером показати да K не мора бити нормална подгрупа од G.

38. Нека су H и K нормалне подгрупе групе G и нека је $H \cap K = \{e\}$. Доказати: $(\forall x \in H)(\forall y \in K) xy = yx$.

39. Ако је H ЦИКЛИЧНА нормална подгрупа групе G, доказати да је свака подгрупа од H такође нормална подгрупа групе G.

40. Доказати да је сваки елемент количничке групе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ коначног реда, док у количничког групи $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ниједан елемент (сем неутрала) нема коначан ред.

41. Нека је A нормална подгрупа групе G и B нормална подгрупа групе H. Доказати да је $A \times B$ нормална подгрупа групе $G \times H$, као и да је $(G \times H)/(A \times B) \cong (G/A) \times (H/B)$.

42. Доказати да је $f : G \to H$ хомоморфизам ако и само ако је $\{(x, f(x)) : x \in G\}$ подгрупа од $G \times H$.

43. Означимо са $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где је $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ функције задате са $f_{a,b}(x) = ax + b$. Нека је $G = \{f_{a,b} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ и $H = \{f_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$. Показати да је G група у односу на композицију функција, да је H нормална подгрупа групе G, као и да је $G/H \cong (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

44. Нека је G подгрупа групе $\mathbb{S}_8$ генерисана елементима $(123)(45)$ и (78). Нека G дејствује као група пермутација скупа $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Одредити орбиту и стабилизатор сваког елемента из X.

45. Нека је G група и $x \in G$. Показати да је подскуп $C(x) = \{g \in G : xg = gx\}$ чини подгрупу групе G (ова подгрупа се назива централизатор елемента x). Одредити везу те подгрупе и броја елемената у класи коњугованости елемента x. Показати да уколико у G постоји класа коњугованости са тачно два елемента, група G не може бити проста.

46. Нека група G дејствује на скуповима X и Y. Показати да је са $g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y)$ дефинисано једно дејство групе G на скупу $X \times Y$ (ово дејство се назива ДИЈАГОНАЛНО ДЕЈСТВО). Одредити везу између стабилизатора елемената x, y и (x, y).

47. Нека је $X = \{1,2,3,4\}$ и G подгрупа од $\mathbb{S}_4$ генерисана елементима (1234) и (24). Одредити орбите и стабилизаторе за дијагонално дејство G на $X \times X$.

48. Нека је p прост број. Показати да скуп матрица

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

чини некомутативну групу реда p^3 у односу на множење матрица.

49. Рођенданска торта је подељена на 8 једнаких парчића. На колико различитих начина се могу поређати црвене и плаве свећице које се постављају у центар сваког парчета (тако да добијемо истински различито украшене торте).

50. Одредити колико различито обојених правилних тетраедара има уколико бојимо сваку ивицу тог тетраедра са једном од 4 могуће боје.

51. Одредити нормалну форму за Абелове групе задате генераторима x_1, x_2, x_3, x_4 и релацијама

(а)

$$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 11x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0; \end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 12x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 3x_4 &= 0; \end{aligned}$$

(в)

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 9x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

(г)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

52. Одредити инваријантне делитеље за групе

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}; \quad \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42}; \quad \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}.$$

53. Доказати да свака Абелова група реда 100 има елемент реда 10. Одредити инваријантне делитеље у случају да у таквој групи нема елемената реда већег од 10.

54. Класификовати све Абелове групе реда 81, 144 и 216.

55. Нека је p прост број и нека Абелова група реда p^n има $p-1$ елемената реда p. Доказати да је та група циклична.

56. Нека је G коначна Абелова група реда 360, која не садржи елементе реда 12, као ни елементе реда 18. Одредити инваријантне делитеље за G. Одредити број елемената реда 6 у групи G.

57. Доказати да је свака коначно генерисана нетривијална подгрупа групе $(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \cdot)$ изоморфна или групи $\mathbb{Z}_2$, или групи $\mathbb{Z}^s$ или групи $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$, за неко $s \geqslant 1$.

58. Нека је p прост број и $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : p \nmid n\}$. Доказати да је R потпрстен од $\mathbb{Q}$.

59. Нека је R комутативан прстен. За елемент x кажемо да је нилпотентан уколико је за неко $n \geqslant 1$ испуњено $x^n = 0$. Доказати да скуп свих нилпотентних елемената чини идеал.

60. Ако је x нилпотентан елемент комутативног прстена са јединицом R доказати да је елемент $1 - x$ инвертибилан.

61. Нека је $R = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Показати да је R потпрстен од $\mathbb{C}$ у коме је сваки елемент различит од 0 инвертибилан.

62. Нека је $R = I + J$ за неке идеале I, J прстена R. Доказати да је тада и $I^2 + J^2 = R$ ($I^2 = I \cdot I$).

63. Нека је S потпрстен прстена R и I идеал у R. Доказати или оповргнути: $S + I$ је потпрстен од R.

64. Показати да је пресек два потпрстена увек потпрстен, као и да унија не мора бити потпрстен.

65. Одредити идеал $I \triangleleft \mathbb{Z}$ задат са: $I = (\langle 45 \rangle + \langle 36 \rangle) \cap \langle 12 \rangle$.

66. Одредити праве делитеље нуле у прстенима $\mathbb{Z}_{21}$ и $\mathbb{Z}_{16}$.

67. Одредити инвертибилне елементе у прстенима $\mathbb{Z}_{15}$ и $\mathbb{Z}_{36}$ и наћи њихове инверзе.

68. Одредити све идеале у прстенима $\mathbb{Z}_{24}$ и $\mathbb{Z}_{16}$.

69. Испитати да ли је са $f(x) = \rho(x, 9)$ дефинисан један хомоморфизам $f\colon \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_9$ и у потврдном случају наћи $\mathrm{Ker}(f)$.

70. Испитати да ли је са $f(x) = \rho(x, 6)$ дефинисан један хомоморфизам $f\colon \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_6$ и у потврдном случају наћи $\mathrm{Ker}(f)$.

71. Решити системе конгруенција:

    (а) $x \equiv 3 \pmod 7$, $\quad x \equiv 5 \pmod 8$;
    (б) $x \equiv 1 \pmod{11}$, $\quad x \equiv 5 \pmod{15}$;
    (в) $x \equiv -4 \pmod{16}$, $\quad x \equiv 5 \pmod 7$;
    (г) $x \equiv 5 \pmod{13}$, $\quad x \equiv -1 \pmod 8$ $\quad x \equiv 4 \pmod 7$;
    (д) $x \equiv 5 \pmod{23}$, $\quad x \equiv 3 \pmod{18}$ $\quad x \equiv 2 \pmod{17}$;
    (ђ) $x \equiv 3 \pmod 5$, $\quad x \equiv 1 \pmod 8$ $\quad x \equiv -4 \pmod{11}$.

72. Испитати да ли решење постоји и уколико постоји наћи сва решења наведених конгруенција:

    (а) $3x \equiv 4 \pmod 7$;
    (б) $4x \equiv 2 \pmod 6$;
    (в) $15x \equiv 4 \pmod{10}$;
    (г) $12x \equiv 21 \pmod{15}$;

73. Наћи бар један примитивни корен r модуло 11 и помоћу таблице за ind_r одредити све примитивне корене модуло 11. Испитати да ли следеће конгруенције имају решење и у потврдном случају наћи сва решења:

$$4x \equiv 3 \pmod{11}, \quad x^2 \equiv 3 \pmod{11}, \quad x^3 \equiv 2 \pmod{11}, \quad x^4 \equiv -3 \pmod{11}.$$

74. Наћи бар један примитивни корен r модуло 17 и помоћу таблице за ind_r одредити све примитивне корене модуло 17. Испитати да ли следеће конгруенције имају решење и у потврдном случају наћи сва решења:

$$7x \equiv 3 \pmod{17}, \quad x^2 \equiv -2 \pmod{17}, \quad x^3 \equiv 3 \pmod{17}, \quad x^4 \equiv 3 \pmod{17}.$$

75. Наћи бар један примитивни корен r модуло 7 и помоћу таблице за ind_r одредити све примитивне корене модуло 7. Испитати да ли следеће конгруенције имају решење и у потврдном случају наћи сва решења:

$$4x \equiv 3 \pmod 7, \quad x^2 \equiv 2 \pmod 7, \quad x^3 \equiv 2 \pmod 7, \quad x^4 \equiv 3 \pmod 7.$$

76. Доказати да поља $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ нису изоморфна.

77. Конструисати поља са 8 и 9 елемената.

78. Показати да је $\alpha = i + \sqrt{3}$ алгебарски над $\mathbb{Q}$. Наћи минимални полином за α и одредити $\frac{1}{\alpha^2-2}$ у облику $p(\alpha)$, где је $p(X)$ полином из $\mathbb{Q}[X]$.

79. Урадити све из претходног задатка за елемент $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

80. Урадити све из претходног задатка за елемент $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

81. Наћи α тако да је $\mathbb{Q}(i, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

82. Наћи α тако да је $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

83. Наћи коренско поље K полинома $X^4 + 2X^2 - 15 \in \mathbb{Q}[X]$ и одредити елемент α за који је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

84. Наћи коренско поље K полинома $X^4 - 12X^2 + 9$ и одредити елемент α за који је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.