

# АЛГЕБРА 1

## Групе

### Нормалне подгрупе и количничке групе

Зоран Петровић

4. децембар 2012.

У случају да је  $H \leq G$  разматрали смо скуп  $G/H$ , скуп свих левих косета подгрупе  $H$  у групи  $G$ . Испоставља се да се у неким случајевима на овом скупу може задати структура групе. Уведимо најпре следећу дефиницију.

**Дефиниција 1** Подгрупа  $H$  групе  $G$  је нормална уколико је  $H$  унија неких класа конјугације. Ако је  $H$  нормална подгрупа од  $G$  онда пишемо:

$$H \triangleleft G.$$

**Став 2** Нека је  $H \leq G$ . Следећи услови су еквивалентни:

1.  $H \triangleleft G$ ;
2. за све  $g \in G$ :  $gHg^{-1} \subseteq H$ ;
3. за све  $g \in G$ :  $gH = Hg$ .

**Доказ.**

$1 \implies 2$ . Нека су  $g \in G$  и  $h \in H$  произвољни. Елемент  $ghg^{-1}$  је конјугат елемента  $h \in H$ . Како је  $H$  нормална подгрупа, она је унија класа конјугације, па самим тим мора да садржи целу класу конјугације елемента  $h$ . Стога је и  $ghg^{-1} \in H$ .

$2 \implies 3$ . Нека је  $g \in G$  произвољан елемент. Докажимо да је  $gH \subseteq Hg$ . Посматрајмо елемент  $h \in H$ . На основу 2,  $ghg^{-1} \in H$ , па је  $ghg^{-1} = h'$  за неко  $h' \in H$ . Но, тада је и  $gh = h'g \in Hg$ , па закључујемо да је  $gH \subseteq Hg$ . Обратно, уочимо елемент  $hg \in Hg$ . Елемент  $g^{-1}h(g^{-1})^{-1}$  на основу 2 припада  $H$ , па је  $g^{-1}h(g^{-1})^{-1} = h_1$  за неко  $h_1 \in H$ . Стога је  $hg = gh_1 \in gH$ , те је  $Hg \subseteq gH$ .

$3 \implies 1$ . Претпоставимо да је  $C$  нека класа конјугације за коју је  $C \cap H \neq \emptyset$ . Треба доказати да је  $C \subseteq H$ . Узмимо елемент  $h \in C \cap H$ . Тада је сваки елемент из  $C$  облика  $ghg^{-1}$  за неки  $g \in G$ . Но, како је

---

по 3,  $gH = Hg$ , то је  $gh = h'g$  за неко  $h' \in H$ , па је  $ghg^{-1} = h'gg^{-1} = h'$ . Закључујемо да  $ghg^{-1} \in H$ . Дакле, заиста је  $C \subseteq H$ .  $\square$

Приметимо да, у случају да је  $H \triangleleft G$ , важи једнакост  $gHg^{-1} = H$ .

**Став 3** Свака подгрупа индекса 2 је нормална.

**Доказ.** Нека је  $H \leq G$  и  $[G : H] = 2$ . То значи да је за сваки елемент  $a \notin H$  из  $G$  испуњено:

$$G = H \sqcup aH.$$

Но, такође је и

$$G = H \sqcup Ha.$$

Како је  $aH \cap H = \emptyset$ , мора бити  $aH \subseteq Ha$ . Но, из истих разлога је  $Ha \subseteq aH$ . Закључујемо да је  $aH = Ha$  за све  $a \in G \setminus H$ . Ако пак  $a \in H$ , онда је  $aH = H$  ( $H$  је подгрупа, па је производ ма која два елемента из  $H$  у  $H$ ; осим тога, ако је  $h \in H$  произвољан елемент, онда је  $h = a(a^{-1}h) \in aH$ ), а такође је и  $Ha = H$ . Дакле, и у овом случају важи једнакост  $aH = Ha$ , па је  $H \triangleleft G$ .  $\square$

**Пример 4** Важи следеће:

1. за све  $n \geq 2$ :  $A_n \triangleleft S_n$ ;
2. за сваку групу  $G$ :  $\{e\} \triangleleft G$ ;
3. за сваку групу  $G$ :  $G \triangleleft G$ ;
4. за сваку групу  $G$ :  $Z(G) \triangleleft G$ ;
5. за све  $n \geq 3$ :  $\langle \rho \rangle \triangleleft \mathbb{D}_n$ .

У случају да су  $X$  и  $Y$  подскупови од  $G$ , дефинишемо  $X \cdot Y$  са:

$$X \cdot Y := \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}.$$

**Став 5** Скуп свих левих косета нормалне подгрупе  $H$  групе  $G$  чини једну групу у односу на управо дефинисано множење подсупова од  $G$ .

**Доказ.** Нека су  $aH$  и  $bH$  произвољни косети. Докажимо да је, при услову да је  $H \triangleleft G$ ,

$$(aH) \cdot (bH) = (ab)H.$$

Ово није тешко доказати. Наиме, приметимо да је  $HH = H$ . Јасно је да је  $HH \subseteq H$  (производ два елемента из  $H$  такође је у  $H$  пошто је  $H$  подгрупа од  $G$ ). Осим тога, како  $e \in H$ , добијамо  $H = eH \subseteq HH$ . Добијамо:

$$(aH) \cdot (bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = (ab)H.$$

Овде смо користили чињеницу да је  $H \triangleleft G$  и асоцијативност множења.

---

Сада није тешко показати да је  $(G/H, \cdot)$  група. Наиме,

$$\begin{aligned} ((aH) \cdot (bH)) \cdot (cH) &= ((ab)H) \cdot (cH) = \\ &= ((ab)c)H = (a(bc))H = (aH) \cdot ((bc)H) = (aH) \cdot ((bH) \cdot (cH)). \end{aligned}$$

Јасно је да је  $H = eH$  неутрал:

$$(aH) \cdot H = (aH) \cdot (eH) = (ae)H = aH,$$

као и

$$H \cdot (aH) = (eH) \cdot (aH) = (ea)H = aH.$$

Инверз елемента  $aH$  је  $a^{-1}H$ :

$$(aH) \cdot (a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H;$$

$$(a^{-1}H) \cdot (aH) = (a^{-1}a)H = eH = H.$$

□

Овако добијена група зове се количничка група групе  $G$  по нормалној подгрупи  $H$ . Убудуће, када говоримо о групи  $G/H$  подразумевамо да је  $H$  нормална подгрупа од  $G$  и да је множење косета дефинисано на наведени начин. Наравно, често нећемо писати неке непотребне заграде и знак множења.

**Дефиниција 6** Група  $G$  је проста уколико су њене једине нормалне подгрупе  $G$  и  $\{e\}$ .

Уколико група  $G$  није комутативна, то не мора бити ни њена количничка група. Ипак има случајева у којима количничка група јесте комутативна, а сама група то није.

**Дефиниција 7** Ако су  $x, y \in G$ , дефинишемо комутатор елемената  $x$  и  $y$ , у ознаци  $[x, y]$  са:

$$[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy.$$

Приметимо да је  $xy = yx$  ако  $[x, y] = e$ . Подгрупу групе  $G$  генерисану комутаторима означавамо са  $[G, G]$  и зовемо комутаторска подгрупа од  $G$ . Осим ове ознаке, појављује се и ознака  $G'$  (те се за ту подгрупу каже и да је извод групе  $G$ ).

**Став 8** а) Комутаторска подгрупа је нормална подгрупа.

б) Ако је  $H \triangleleft G$ , онда је  $G/H$  комутативна ако и само ако је  $[G, G] \subseteq H$ .

**Доказ.** а) Производ два комутатора не мора бити комутатор, али инверз ма ког комутатора јесте комутатор:

$$[x, y]^{-1} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}(y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx = [y, x].$$

У сваком случају, ми посматрамо подгрупу генерисану комутаторима и треба да покажемо да је она нормална. Сваки елемент подгрупе генерисане неким скупом  $X$  је скуп свих могућих производа елемената из  $X$  и њихових инверза. Како је инверз комутатора и сам комутатор, то је сваки елемент из комутаторске групе производ комутатора. Стога, нека су  $g, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  произвољни елементи групе  $G$ . Тада је

$$g[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n]g^{-1} = (g[x_1, y_1]g^{-1})(g[x_2, y_2]g^{-1}) \cdots (g[x_n, y_n]g^{-1})$$

Но,

$$\begin{aligned} g[x, y]g^{-1} &= gx^{-1}y^{-1}xyg^{-1} = (gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1})(gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \\ &= (gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1}(gxg^{-1})(gyg^{-1}) = [gxg^{-1}, gyg^{-1}], \end{aligned}$$

те добијамо

$$g[x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n]g^{-1} = [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}] \cdots [gx_ng^{-1}, gy_ng^{-1}] \in [G, G].$$

б)  $\Rightarrow$ : Претпоставимо да је група  $G/H$  комутативна. То значи да је за све  $x, y \in G$  испуњено:

$$xH \cdot yH = yH \cdot xH.$$

Другим речима,

$$xyH = yxH,$$

па мора бити

$$(yx)^{-1}(xy) \in H,$$

те

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \in H.$$

Дакле, комутатор ма која два елемента је у  $H$ , па закључујемо да је  $[G, G] \subseteq H$ .

$\Leftarrow$ : Претпоставимо да је  $[G, G] \subseteq H$ . Треба показати да је група  $G/H$  комутативна. Нека су  $x, y \in G$  произвољни елементи. По претпоставци  $[x, y] \in H$ , тј.  $x^{-1}y^{-1}xy \in H$ . То значи да је  $(yx)^{-1}(xy) \in H$ , па мора бити  $(yx)H = (xy)H$ , тј.  $(yH) \cdot (xH) = (xH) \cdot (yH)$ . Закључујемо да је  $G/H$  комутативна група.  $\square$

Група  $G/[G, G]$  назива се Абелизација групе  $G$  и означава са  $G^{\text{Ab}}$  (комутативне групе називају се и Абелове групе). Понеки пут је погодно за испитивање да ли су две групе изоморфне прећи на њихове Абелизације, зато што важи следећи став.

**Став 9** Ако је  $G \cong H$  онда је и  $G^{\text{Ab}} \cong H^{\text{Ab}}$ .

---

Нека је  $f: G \rightarrow H$  изоморфизам. Тада је  $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ , што се лако може установити. Одавде следи да

$$f[[G, G]] \subseteq [H, H]. \quad (1)$$

Дефинишимо функцију

$$\tilde{f}: G^{\text{Ab}} \rightarrow H^{\text{Ab}},$$

са:

$$\tilde{f}(x[G, G]) := f(x)[H, H].$$

Показаћемо да је  $\tilde{f}$  добро дефинисана функција, која остварује изоморфизам између  $G/[G, G]$  и  $H/[H, H]$ .

Добра дефинисаност: Нека је

$$x[G, G] = y[G, G].$$

Треба показати да је

$$f(x)[H, H] = f(y)[H, H].$$

Но, како је  $x[G, G] = y[G, G]$ , мора бити  $x^{-1}y \in [G, G]$ , па на основу (1) следи да  $f(x)^{-1}f(y) = f(x^{-1}y) \in [H, H]$ . Дакле, заиста је

$$f(x)[H, H] = f(y)[H, H].$$

$\tilde{f}$  је „на”: Нека је  $z[H, H]$  произвољан елемент из  $H^{\text{Ab}}$ . Како је  $f$  „на”, то постоји  $x \in G$  за који је  $f(x) = z$ . Но, тада је  $\tilde{f}(x[G, G]) = f(x)[H, H] = z[H, H]$ , па је  $\tilde{f}$  заиста „на”.

$\tilde{f}$  је „1-1”: Ако је

$$\tilde{f}(x[G, G]) = \tilde{f}(y[G, G]),$$

то значи да је

$$f(x)[H, H] = f(y)[H, H],$$

па је

$$f(x^{-1}y) \in [H, H].$$

Другим речима, за неке  $z_1, u_1, \dots, z_n, u_n \in H$  је

$$f(x^{-1}y) = [z_1, u_1] \cdots [z_n, u_n].$$

Како је  $f$  „на”, то постоје  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in G$  такви да је

$$f(x_1) = z_1, \dots, f(x_n) = z_n, \quad f(y_1) = u_1, \dots, f(y_n) = u_n.$$

То значи да је

$$f(x^{-1}y) = [f(x_1), f(y_1)] \cdots [f(x_n), f(y_n)] = f([x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n]).$$

Како је  $f$  „1-1”, мора бити

$$x^{-1}y = [x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n].$$

Следи да  $x^{-1}y \in [G, G]$ , па је  $x[G, G] = y[G, G]$  и закључујемо да је и функција  $\tilde{f}$  „1-1”.

$\tilde{f}$  се слаже са операцијама:

$$\begin{aligned} \tilde{f}((x[G, G]) \cdot (y[G, G])) &= \tilde{f}((xy)[G, G]) = f(xy)[H, H] = (f(x)f(y))[H, H] = \\ &= (f(x)[H, H])(f(y)[H, H]) = \tilde{f}(x[G, G])\tilde{f}(y[G, G]). \end{aligned}$$

Закључујемо да је  $\tilde{f}$  заиста изоморфизам.  $\square$

**Пример 10** За све  $n \geq 2$ :  $S_n^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}_2$ .

Показаћемо да је  $[S_n, S_n] = A_n$  за све  $n \geq 2$ . Јасно је да је  $\pi^{-1}\sigma^{-1}\pi\sigma$  парна пермутација за сваке две пермутације  $\pi$  и  $\sigma$  (зашто?). Према томе,  $[S_n, S_n] \subseteq A_n$ .

Случај  $n = 2$  је тривијалан. Претпоставимо стога да је  $n \geq 3$ . Докажимо да сваки цикл дужине 3 припада  $[S_n, S_n]$ . Како ти цикли генеришу  $A_n$ , добићемо да је  $[S_n, S_n] = A_n$ . Но,

$$(abc) = (ab)(bc) = (ab)(ac)(ab)(ac) = (ab)^{-1}(ac)^{-1}(ab)(ac) = [(ab), (ac)].$$

Како је  $[S_n : A_n] = 2$ , то је група  $S_n/A_n$  реда 2 и као таква је изоморфна групи  $\mathbb{Z}_2$ .  $\clubsuit$

**Пример 11** За све  $s \geq 2$ :

1.  $(\mathbb{D}_{2s})^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ;
2.  $(\mathbb{D}_{2s-1})^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}_2$ .

Показаћемо најпре да је  $[\mathbb{D}_n, \mathbb{D}_n] = \langle \rho^2 \rangle$ . Проверимо све случајеве:

1.  $[\rho^k, \rho^l] = \varepsilon$ ;
2.  $[\sigma\rho^k, \rho^l] = (\sigma\rho^k)^{-1}(\rho^l)^{-1}(\sigma\rho^k)\rho^l = \sigma\rho^k\rho^{-l}\sigma\rho^k\rho^l = \rho^{-k}\rho^l\rho^{k+l} = \rho^{2l}$ ;
3.  $[\rho^k, \sigma\rho^l] = (\rho^k)^{-1}(\sigma\rho^l)^{-1}\rho^k(\sigma\rho^l) = \rho^{-k}\sigma\rho^l\rho^k\sigma\rho^l = \rho^{-k}\rho^{-l}\rho^{-k}\rho^l = \rho^{-2k}$ ;
4.  $[\sigma\rho^k, \sigma\rho^l] = (\sigma\rho^k)^{-1}(\sigma\rho^l)^{-1}\sigma\rho^k\sigma\rho^l = \sigma\rho^k\sigma\rho^l\sigma\rho^k\sigma\rho^l = \rho^{-k}\rho^l\rho^{-k}\rho^l = \rho^{2l-2k}$ .

Видимо да је заиста  $[\mathbb{D}_n, \mathbb{D}_n] = \langle \rho^2 \rangle$ . Сада се разликују случајеви када је  $n$  парно, односно непарно. Наиме, ако је  $n = 2s - 1$ , ред елемента  $\rho^2$  је  $n$  (зашто?), па је  $\langle \rho^2 \rangle = \langle \rho \rangle$ . Стога је  $[\mathbb{D}_{2s-1}, \mathbb{D}_{2s-1}] = \langle \rho \rangle$  и заиста је  $(\mathbb{D}_{2s-1})^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}_2$ .

У случају  $n = 2s$ , ред елемента  $\rho^2$  је  $s$  и

$$(\mathbb{D}_{2s})^{\text{Ab}} = \{\langle \rho^2 \rangle, \sigma\langle \rho^2 \rangle, \rho\langle \rho^2 \rangle, \sigma\rho\langle \rho^2 \rangle\}.$$

---

Ово је група са 4 елемента у којој је сваки елемент реда 2 (проверити ово!), па на основу ранијих резултата (а може и директно), добијамо да је  $(\mathbb{D}_{2s})^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . ♣

Докажимо на крају још један став, који нам даје карактеризацију група одређеног реда.

**Став 12** Ако је  $p$  непаран прост број, онда је свака група реда  $2p$  или циклична или је изоморфна групи  $\mathbb{D}_p$ .

**Доказ.** Нека је  $G$  група реда  $2p$ . На основу Кошијеве теореме, у групи  $G$  постоји елемент  $x$  реда  $p$  и елемент  $y$  реда 2. Како ред елемента дели ред групе, то  $y \notin \langle x \rangle$ . Стога је

$$G = \langle x \rangle \sqcup y\langle x \rangle = \{e, x, \dots, x^{p-1}, y, yx, \dots, yx^{p-1}\}.$$

Ред елемента  $yx$  може бити 2,  $p$  или  $2p$  ( $yx \neq e$ ). Уколико је  $\omega(yx) = 2p$ , група  $G$  је циклична.

Покажимо да  $\omega(yx) \neq p$ . Претпоставимо да је  $\omega(yx) = p$ . Тада добијамо (рачунамо у групи  $G/\langle x \rangle$  — подгрупа  $\langle x \rangle$  је нормална пошто је индекса 2):

$$\langle x \rangle = e\langle x \rangle = (yx)^p\langle x \rangle = (yx\langle x \rangle)^p = (y\langle x \rangle)^p = y^p\langle x \rangle.$$

Дакле,  $y^p \in \langle x \rangle$ . Како је  $p$  непаран број, а  $\omega(y) = 2$ , мора бити  $y \in \langle x \rangle$ , што није тачно. Добили смо контрадикцију, те можемо закључити да  $\omega(yx) \neq p$ . Остаје случај  $\omega(yx) = 2$ . Тада добијамо да је  $(yx)^2 = e$ , па је  $yxux = e$  из чега следи да је  $yx = x^{-1}y$ . С обзиром да је  $x^p = e$  и  $y^2 = e$ , видимо да се изоморфизам између  $G$  и  $\mathbb{D}_p$  може остварити придруживањем  $y \mapsto \sigma$ ,  $x \mapsto \rho$ . □