АЛГЕБРА 1

Групе

Коначно генерисане Абелове групе (наставак)

Зоран Петровић

20. децембар 2012.

Пређимо сада на нашу главну теорему.

Теорема 1 Нека је A коначно генерисана Абелова група. Тада је A изоморфна тачно једној групи облика $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_k} \times \mathbb{Z}^l$, где је $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $d_1 > 1$ и $d_i \mid d_{i+1}$ за $i = \overline{1, k-1}$.

Доказ. Из претходних резултата следи јединственост групе наведеног облика. Докажимо сада егзистенцију.

Изводимо доказ индукцијом по минималном броју генератора. Означимо тај минималан број генератора са n. Наравно, група генерисана празним скупом генератора је тривијална група $\{0\}$. Према томе, $n \geqslant 1$.

$n = 1$. У овом случају је све јасно – ради се о цикличној групи и ми знамо да је свака циклична група изоморфна или групи $\mathbb{Z}$, или групи $\mathbb{Z}_d$ за неко $d > 1$.

Претпоставимо да је $n > 1$ и да је тврђење тачно за све групе са мање од n генератора. Имамо две могућности.
1. Међу n генератора групе A нема нетривијалних релација. На основу претходног става закључујемо да је A изоморфна групи $\mathbb{Z}^n$.
2. Међу генераторима групе A има нетривијалних релација. Означимо са $d_1 > 0$ најмањи цео број за који постоји систем генератора $[x_1, \ldots, x_n]$ групе A, за који важи релација

$$d_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n = 0 \tag{1}$$

за неке целе бројеве $m_2, \ldots, m_n$. Тврдимо да важи следеће.

> Ако је $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ ма који систем генератора за који важи $d_1 y_1 + r_2 y_2 + \cdots + r_n y_n = 0$, за неке целе бројеве $r_2, \ldots, r_n$, онда $d_1 \mid r_i$ за све $i = \overline{2, n}$.

У супротном, претпоставимо да ово није тачно за неке целе r_i и нека, на пример, d_1 не дели r_2. То значи да је $r_2 = q d_1 + s$, при чему је

$0 < s < r_2$. Дакле,

$$d_1y_1 + (qd_1 + s)y_2 + \cdots + r_ny_n = 0,$$

па је и

$$d_1(y_1 + qy_2) + sy_2 + \cdots + r_ny_n = 0.$$

Према ранијој напомени, $[y_1+qy_2, y_2, \ldots, y_n]$ је такође један систем генератора, а то је онда, наравно, и $[y_2, y_1 + qy_2, \ldots, y_n]$, но за тај систем генератора постоји (нетривијална) релација

$$sy_2 + d_1(y_1 + qy_2) + \cdots + r_ny_n = 0,$$

при чему је $0 < s < d_1$. То противречи дефиниционом својству коефицијента d_1 те на тај начин добијамо контрадикцију.

Вратимо се на релацију (1). Према управо доказаном, $d_1 \mid m_2, \ldots, d_1 \mid m_n$. Дакле, за неке целе бројеве q_i је $m_i = d_1q_i$ за $i = \overline{2, n}$. Релација (1) своди се на

$$d_1x_1 + d_1q_2x_2 + \cdots + d_1q_nx_n = 0,$$

тј. на

$$d_1(x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n) = 0.$$

Добијамо нови систем генератора $[z_1, x_2, \ldots, x_n]$ (где је $z_1 = x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n$) код кога је $d_1z_1 = 0$. Уколико би d_1 био једнак 1, онда би и наша група имала мање од n генератора, а то противречи претпоставци. Стога је $d_1 > 1$. Посматрајмо две подгрупе групе A:

$$A_1 = \langle z_1 \rangle, \quad B_1 = \langle x_2, \ldots, x_n \rangle.$$

Јасно је да је $A_1 \cong \mathbb{Z}_{d_1}$ (зашто је то јасно?). Приметимо да је $A_1 + B_1 = A$. Докажимо да је ова сума заправо директна, тј. да је $A_1 \cap B_1 = \{0\}$. У супротном, постоји нетривијалан елемент у овом пресеку, тј. за неко $s_1 \in \{1, \ldots, d_1 - 1\}$ и неке целе $s_2, \ldots, s_n$ важи:

$$s_1z_1 = s_2x_2 + \cdots + s_nx_n.$$

Добијамо да је

$$s_1z_1 + (-s_2)x_2 + \cdots + (-s_n)x_n = 0,$$

при чему је $0 < s_1 < d_1$. То је, наравно, у контрадикцији са дефиницоним својством броја d_1, те тако нешто није могуће и пресек ових подгрупа је тривијалан. Добили смо да је

$$A = A_1 \oplus B_1 \cong A_1 \times B_1 \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times B_1.$$

Абелова група B_1 има мање од n генератора, па је по индуктивној хипотези изоморфна директном производу цикличних група (као што је наведено у формулацији теореме). Ако је она изоморфна групи Z^{n-1}, доказ је завршен. У супротном, појављују се и коначне цикличне групе у производу:

$$B_1 \cong \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_k} \times \mathbb{Z}^l,$$

при чему је $k \geqslant 2$ и $d_i \mid d_{i+1}$ за $i = \overline{2, k-1}$. Тврдимо да $d_1 \mid d_2$. У супротном, група A има систем генератора $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ (где су генератори z_i, за $i \geqslant 2$, генератори подгрупа које одговарају преосталим факторима у директном производу), при чему је $d_2 z_2 = 0$. Но, тада је $d_1 z_1 + d_2 z_2 + 0z_3 + \cdots + 0z_n = 0$, те на основу раније доказаног следи да $d_1 \mid d_2$ (на основу чега ово следи?). Тиме је завршен доказ да је свака коначно генерисана Абелова група изоморфна директном производу цикличних група траженог облика. □

Групу наведеног облика, изоморфну групи A, зовемо и нормална форма те групе, а бројеве d_i инваријантним делитељима. Осим нормалне, постоји и елементарна форма те групе. Наиме, коришћењем чињенице да важи изоморфизам $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, уколико су m и n узајамно прости, добијамо да се свака коначно генерисана Абелова група може представити у облику производа цикличних група, при чему је свака коначна циклична група, која се појављује у том производу, реда једнаког степену неког простог броја. На пример, за групу $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{60}$ важи изоморфизам

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{60} \cong \mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5) \times (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$$

и тако је добијена елементарна форма те групе.

На самом почетку излагања о коначно генерисаним Абеловим групама, било је речи о примеру Абелизације диедарске групе, која је била задата помоћу генератора и релација међу тим генераторима. Продискутујмо сада општи случај.

Шта заправо значи када кажемо да је група задата генераторима и релацијама? Нека је, на пример, група A задата генераторима $x_1, \ldots, x_n$ и релацијама

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0. \end{array} \tag{2}$$

Ако је $r_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n$, онда је заправо група A изоморфна количничкој групи

$$F_n / \langle r_1, \ldots, r_m \rangle,$$

где је са F_n означена слободна Абелова група са n генератора $x_1, \ldots, x_n$. Наиме, знамо да у слободној Абеловој групи са n генератора $x_1, \ldots, x_n$ (где је n минималан број генератора) нема релација међу генераторима. Да бисмо ми увели неке релације, ми ту групи „сечемо” по елементима који дефинишу релације (тако да ти елементи постају неутрали у количничкој групи), односно са групом генерисаном тим елементима.

Погледајмо како то изгледа у посебно једноставном случају када су релације облика

$$\begin{aligned} d_1x_1 &= 0 \\ d_2x_2 &= 0 \\ \cdots & \quad . \\ d_kx_k &= 0. \end{aligned}$$

Тада је $A \cong \langle x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\rangle / \langle d_1x_1, \ldots, d_kx_k\rangle$. Но, с обзиром да су $x_1, \ldots, x_n$ слободни генератори групе $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, тј. генератори међу којима нема релација, то је $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_n\rangle$, те је

$$\begin{aligned} A &\cong \langle x_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_k\rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_n\rangle / (\langle d_1x_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_kx_k\rangle) \\ &\cong \langle x_1\rangle \times \cdots \times \langle x_k\rangle \times \cdots \times \langle x_n\rangle / (\langle d_1x_1\rangle \times \cdots \times \langle d_kx_k\rangle) \\ &\cong \langle x_1\rangle \times \cdots \times \langle x_k\rangle \times \langle x_{k+1}\rangle \times \cdots \times \langle x_n\rangle / \langle d_1x_1\rangle \times \cdots \times \langle d_kx_k\rangle \times \{0\} \times \cdots \{0\} \\ &\cong \langle x_1\rangle / \langle d_1x_1\rangle \times \cdots \times \langle x_k\rangle / \langle d_kx_k\rangle \times \langle x_{k+1}\rangle / \{0\} \times \cdots \times \langle x_n\rangle / \{0\}. \end{aligned}$$

С обзиром да је $\langle x_i\rangle / \langle d_ix_i\rangle \cong \mathbb{Z}_{d_i}$ и да је $\langle x_i\rangle / \{0\} \cong \mathbb{Z}$, то добијамо да је $A \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_k} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$.

Поставља се питање да ли можемо трансформисати почетне релације међу генераторима у овако једноставне релације међу (можда неким другим генераторима), пошто бисмо на тај начин очигледно могли да добијемо нормалну форму дате групе. Одговор је да је то могуће урадити.

Преформулишимо најпре наш проблем на проблем у вези матрица над прстеном целих бројева. Релације (2) очигледно се могу и овако записати:

$$AX = \mathbf{0},$$

где је A матрица $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{mn}(\mathbb{Z})$, $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$ и $\mathbf{0} = [0, \ldots, 0]^T$. (Додуше, овде користимо слово A да означимо и матрицу и Абелову групу, али тешко да може да буде неке конфузије!)

У линеарној алгебри користили смо елементарне врста (колона) трансформације. Имали смо трансформације два типа. Први тип је трансформација која се састоји од множења неке врсте (колоне) дате матрице неким инвертибилним скаларом (ознака $V_r := \alpha V_r$ ($K_r := \alpha K_r$) означава да r-ту врсту (колону) множимо скаларом α). Други тип је трансформација која некој врсти (колони) додаје другу врсту (колону) помножену неким скаларом (ознака: $V_r := V_r + \alpha V_r$ за врсте, односно $K_r := K_r + \alpha K_s$ за колоне, где је обавезно $r \neq s$). У случају када радимо, као што је сада, са целобројним матрицама, онда је у првом типу допуштено множење само са 1 и -1 (пошто су то једини цели бројеви који имају инверз у односу на множење), док је у другом случају исто као и код векторских простора (имајући наравно у виду да су бројеви којима множимо цели бројеви). Уз ове елементарне трансформације, може се додати и трансформација која пермутује две врсте (колоне), а која се може извести композицијом претходно наведених (ово је вероватно прави тренутак да потражите неки уџбеник или свеску из Линеарне алгебре).

Ове операције се могу извести и множењем дате матрице елементарним матрицама (подсетите се овога) и то множењем слева ако „баратамо" са врстама, односно здесна, ако радимо са колонама. Све елементарне матрице су инвертибилне у прстену $M_s(\mathbb{Z})$ (матрица $A \in M_s(\mathbb{Z})$ је инвертибилна у $M_s(\mathbb{Z})$ уколико постоји матрица $B \in M_s(\mathbb{Z})$ за коју је $A \cdot B = I_s$, где је са I_s означена јединична матрица реда s; квадратна матрица из $M_s(\mathbb{Z})$ је инвертибилна акко јој је детерминанта једнака 1 или -1). Наводимо сада, без доказа, теорему која утврђује да постоје тражене трансформације (њен доказ није тежи од доказа да је свака коначно генерисана Абелова група изоморфна директном производу цикличних, али резултат који даје је заправо то, а тако нешто смо већ доказали, па нема потребе да изводимо и овај доказ – вероватно читаоцима неће превише недостајати још један доказ ☺).

Теорема 2 Нека је $A \in M_{mn}(\mathbb{Z})$. Тада постоје инвертибилне матрице $P \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ и $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ тако да је $PAQ = A^0$, при чему је

$$A^0 = \left[\begin{array}{cccc|c} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \cdots & d_k & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

и $d_i \mid d_{i+1}$ за $i = \overline{1, k-1}$. □

Како је множење инвертибилним матрицама еквивалентно вишеструкој примени елементарних трансформација, то закључујемо да њиховом применом можемо добити матрицу траженог облика, односно релације међу почетним генераторима свести на једноставне релације међу (највероватније) неким другим генераторима.

Множење елементарним матрицама слева одговара елементарним трансформацијама на врстама, док множење здесна одговара трансформацијама на колонама. Трансформације врста мењају релације међу генераторима, али не и саме генераторе, док трансформације на колонама мењају генераторе.

Нека су генератори $x_1, \ldots, x_n$ и релације међу генераторима задате матрицом A, тј. релације су задате са

$$AX = \mathbf{0}.$$

Уколико је $PAQ = A^0$, онда множењем горње релације матрицом P слева добијамо
$$PAX = \mathbf{0}.$$
Сада, уметањем производа $Q \cdot Q^{-1}$ добијамо
$$(PAQ)(Q^{-1}X) = \mathbf{0}.$$
Стога, ако са $Y = Q^{-1}X$ означимо нови систем генератора, добијамо
$$A^0Y = \mathbf{0}.$$

Покажимо како ово у пракси можемо извести, тј. како да погодно региструјемо и нове релације и нове генераторе. Формирајмо матрицу
$$R = \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline & x_1 \\ I_n & \vdots \\ & x_n \end{array}\right].$$
Циљ је на позицији матрице A добити матрицу A^0 трансформацијом врста и колона. Наравно у току рада изводићемо и трансформације врста и колона у произвољном поретку, али да бисмо појаснили шта се дешава, можемо претпоставити да смо прво извели све потребне трансформације на врстама, а потом на колонама. Трансформације на врстама (и то наравно само на првих m врста „велике" матрице, пошто желимо матрицу A да доведемо на тражен облик) доводе до еквивалентне матрице
$$R_1 = \left[\begin{array}{c|c} PA & \mathbf{0} \\ \hline & x_1 \\ I_n & \vdots \\ & x_n \end{array}\right].$$
Сада вршимо трансформацију на колонама да бисмо добили матрицу A^0, али тиме мењамо и колоне у јединичној матрици. Тако добијамо нову матрицу
$$R_2 = \left[\begin{array}{c|c} PAQ & \mathbf{0} \\ \hline & x_1 \\ Q & \vdots \\ & x_n \end{array}\right].$$
Сада желимо да поново добијемо јединичну матрицу уместо матрице Q, тј. да идентификујемо нове генераторе и то изводимо трансформацијом на врстама, али само на „доњим" врстама. Тако напокон добијамо матрицу
$$R = \left[\begin{array}{c|c} A^0 & \mathbf{0} \\ \hline & y_1 \\ I_n & \vdots \\ & y_n \end{array}\right],$$

где је $A^0 = PAQ$, а $Y = Q^{-1}X$ (I_n добијамо множењем слева матрицом Q^{-1}).

Урадимо пар примера.

Пример 3 Нека је Абелова група A задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Одредити нормалну форму ове групе.

Решење. Полазимо од матрице

$$R = \left[\begin{array}{rrr|l} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -8 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right]$$

Трансформацијом $V_2 := V_2 - 2V_1$, добијамо матрицу

$$R_1 = \left[\begin{array}{rrr|l} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right]$$

Трансформацијама $K_2 := K_2 + 2K_1$ и $K_3 := K_3 - K_1$, добијамо

$$R_2 = \left[\begin{array}{rrr|l} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right]$$

Трансформација $K_3 := K_3 + K_2$ доводи до матрице

$$R_3 = \left[\begin{array}{rrr|l} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right]$$

С обзиром да $2 \mid 12$, добили смо тражену матрицу A^0. Преостаје да идентификујемо генераторе. Трансформације $V_3 := V_3 - V_5$ и $V_4 := V_4 - V_5$ дају матрицу

$$R_4 = \left[\begin{array}{rrr|l} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right]$$

Најзад, трансформација $V_3 := V_3 - 2V_4$ доводи до матрице

$$R_5 = \left[\begin{array}{ccc|l} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right]$$

Дакле, нови генератори су $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 - x_3$ и $y_3 = x_3$, а релације међу њима су $2y_1 = 0$, $12y_2 = 0$. Закључујемо да је нормална форма дате групе: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}$. ♣

Пример 4 Група је задата генераторима x_1, x_2, x_3, x_4 и релацијама

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Одредити њену нормалну форму.

Решење. Полазимо од матрице (обратите пажњу да ли неки генератор учествује у датој релацији!).

$$R = \left[\begin{array}{cccc|l} 5 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right]$$

Увек је корисно одредити највећи заједнички делилац свих компонената матрице A. Тај број ће заправо бити тражени d_1. Њега треба поставити на позицију $(1,1)$ и онда га искористити да се „почисте” елементи прве врсте и прве колоне. После тога се прелази на подматрицу која има једну врсту и једну колону мање и поступак се наставља.

У нашем случају лако је уверити се да је тај највећи заједнички делилац једнак 1. Трансформацијом $V_1 := V_1 - 2V_2$, добијамо матрицу

$$R_1 = \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & -5 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Трансформације $V_2 := V_2 - 2V_1$ и $V_3 := V_3 - 7V_1$ дају матрицу

$$R_2 = \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 14 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & -30 & 18 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Трансформације $K_2 := K_2 + 5K_1$, $K_3 := K_3 - 4K_1$ и $K_4 = K_4 + 3K_1$ дају матрицу

$$R_3 = \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & -30 & 18 & 0 \\ \hline 1 & 5 & -4 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Сада се можемо концентрисати на матрицу

$$\left[\begin{array}{rrr} 14 & -10 & 6 \\ 42 & -30 & 18 \end{array}\right].$$

Јасно је да је овде највећи заједнички делилац 2. После трансформације $K_2 := K_2 - 2K_4$ добијамо матрицу

$$R_4 = \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -30 & 18 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -4 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Применимо трансформацију $V_3 := V_3 - 3V_2$. Добијамо

$$R_5 = \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -4 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right].$$

Трансформације $K_3 := K_3 + 5K_2$ и $K_4 := K_4 - 3K_2$ завршавају први део (одређивање матрице A^0):

$$R_6 = \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -9 & 6 & x_1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -2 & -10 & 7 & x_4 \end{array}\right].$$

Трансформације $V_4 := V_4 + V_5$ и $V_7 := V_7 + 2V_5$ дају

$$R_7 = \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 3 & x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_2 + x_4 \end{array}\right].$$

После трансформација $V_4 := V_4 - 3V_7$ и $V_5 := V_5 + 3V_7$, добијамо

$$R_8 = \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & x_1 - 5x_2 - 3x_4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7x_2 + 3x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_2 + x_4 \end{array}\right].$$

Завршавамо наш рад применом трансформација $V_4 := V_4 + 4V_6$ и $V_5 := V_5 - 5V_6$:

$$R_9 = \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7x_2 - 5x_3 + 3x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_2 + x_4 \end{array}\right].$$

Дакле, нови генератори су

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ y_2 &= 7x_2 - 5x_3 + 3x_4 \\ y_3 &= x_3 \\ y_4 &= 2x_2 + x_4, \end{aligned}$$

док су релације међу тим генераторима: $y_1 = 0$, $2y_2 = 0$. Видимо да је један генератор сувишан, тј. почетни систем није био минималан систем генератора. Нормална форма дате групе је $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ♣