Dragomir Lopandić

GEOMETRIJA

Sadržaj

Glava 1

Aksiomatičko zasnivanje euklidske geometrije

1.1 Razvoj aksiomatičke metode u geometriji. Euklidovi „Elementi“ i V postulat.

Geometrija kao naučna disciplina ima svoju veoma dugu i bogatu istoriju. Začeta već u najstarijim ljudskim civilizacijama, ona se vekovima razvijala kao induktivna nauka, nauka u kojoj se empirijskim putem, pomoću čula i opita, dolazilo do pojedinačnih saznanja iz kojih su se zatim indukcijom izvodila opšta tvrđenja. U čemu se sastojao induktivan metod izvođenja zaključaka pokušaćemo da objasnimo na sledećem primeru. Ako je merenjem utvrđeno da je kod jednog trougla zbir dveju stranica veći od treće stranice, zatim istim postupkom utvrđeno da to svojstvo važi i kod drugog trougla, potom kod trećeg trougla, itd, izvođeno je opšte tvrđenje po kojem je zbir dveju stranica bilo kojeg trougla veći od treće stranice. Tako se postupalo i pri ustanovljavanju drugih geometrijskih tvrđenja kao što su pravila za određivanje površina pravougaone, paralelogramske, trapezne i trougaone površi i pravila za određivanje zapremine kvadra, prizme i piramide. Takva je bila geometrija drevnih Egipćana, Sumerana, Vavilonaca, Indijaca, Kineza i drugih.

Kada su negde u VI veku pre nove ere vodeću ulogu u nauci i kulturi preuzeli Grci, geometrija počinje da se razvija jednim potpuno novim putem koji će vremenom da se odrazi i u drugim naučnim oblastima. Induktivan metod nalaženja geometrijskih tvrđenja bio je zamenjen novim tzv. deduktivnim metodom kojim se najpre ustanovljuju opšta tvrđenja da bi se zatim iz njih dobila pojedinačna saznanja. Prelasku na taj novi put u razvoju geometrije doprinelo je jedno veoma značajno načelo, to je načelo dokazivanja geometrijskih tvrđenja. Do tog načela, kažu, prvi je došao starogrčki filozof Tales (624–547. pre n. e.). Njegovi spisi, ukoliko su uopšte i postojali, do nas nisu dospeli, te se ne može pouzdano reći koja je geometrijska tvrđenja on uspeo da dokaže. Istoričar geometrije Eudem iz IV veka pre n. e. pripisivao je Talesu dokaz drugog stava podudarnosti trouglova, stava o jednakosti uglova na osnovici jednakokrakog trougla i njemu obratnog tvrđenja, stava o međusobnoj podudarnosti pravih uglova, stava po kojem je periferijski ugao nad prečnikom bilo kojeg kruga prav ugao i stav po kojem svaki dijametar kružne površi razlaže tu površ na dva podudarna dela. Koristeći sličnost jednakokrako pravouglih trouglova odredio je, kažu, visinu Keopsove piramide, a pomoću podudarnosti trouglova uspeo je da odredi udaljenost usidrenog broda od morske obale. Na koji je način izvodio dokaze tih geometrijskih tvrđenja, pouzdano nam nije poznato. Veruje se da su, u skladu sa njegovim filozofskim pogledima na svet, geometrijski objekti identifikovani sa fizikalnim i da su prilikom dokazivanja geometrijskih tvrđenja u znatnoj meri korišćena fizikalna kretanja.

Načelo dokazivanja geometrijskih tvrđenja u mnogo većoj meri počeo je da sprovodi znameniti starogrčki filozof i matematičar Pitagora (oko 580–oko 500. pre n. e.). Upoznavši se već u mlađim godinama sa učenjem Talesa, Pitagora je niz godina proveo u Egiptu i Vavilonu, gde je bio u mogućnosti ne samo da se upozna već i kritički osvrne na sve što se do tada znalo u oblasti geometrije. Po povratku u domovinu on osniva svoju školu, ne na rodnom Samosu, već u gradu Krotonu, grčkoj koloniji u južnoj Italiji. U oblasti matematike Pitagora se posebno bavio geometrijom i teorijom brojeva. U oblasti geometrije njemu se pripisuje otkriće i dokaz niza geometrijskih tvrđenja kao što su: stav o zbiru unutrašnjih uglova trougla; prvi, treći i četvrti stav podudarnosti trouglova; stavovi o razlaganju ravni na pravilne trougaone, četvorougaone i šestougaone površi. Smatra se da je Pitagora prvi začeo učenja o paralelnim pravama, o proporcijama, o sličnim likovima. On je začeo učenje o uzajamnom odnosu pravih i ravni, i učenje o poliedrima. Pouzdano se zna da je otkrio tri, a po nekim podacima svih pet postojećih vrsta pravilnih poliedara. Posebno je značajna teorema o pravouglom trouglu koja danas nosi njegovo ime. Pitagori ili nekom od njegovih učenika, po svoj prilici Hipasu iz Metaponta, treba pripisati i teoremu o egzistenciji nesamerljivih duži koja će podstaći razvoj tzv. geometrijske algebre.

Obilje dokazanih geometrijskih tvrđenja već je bilo dovoljno da se postavi pitanje redosleda njihovog izlaganja. To je zahtevao i sam proces dokazivanja tvrđenja koji se sastoji u logičkom izvođenju zaključaka iz ranije poznatih tvrđenja, tj. tvrđenja koja su već dokazana ili se pretpostavljaju. Taj redosled u dokazivanju geometrijskih tvrđenja značio je jedno novo načelo, tzv. načelo sistematizacije. To načelo prvi je proklamovao i u oblasti geometrije počeo da sprovodi Pitagora. Veruje se da je već njemu bilo potpuno jasno da se ideja sistematizacije u geometriji ne može dosledno sprovesti od samog početka jer se prva geometrijska tvrđenja ne mogu dokazivati iz prethodnih koja ne postoje. Ne nalazeći bolje rešenje u otklanjanju te teškoće, Pitagora se zadovoljava time da geometrijska tvrđenja dokazuje polazeći od najočiglednijih tvrđenja. Koja je tvrđenja u geometriji smatrao najočiglednijim nije nam poznato, jer njegovi spisi kao i spisi njegovih učenika do nas nisu dospeli. Ima istoričara koji neargumentovano tvrde da je već Pitagora u geometriji uveo neke aksiome i postulate izvodeći iz njih ostala geometrijska tvrđenja. Međutim, pouzdano se o tome ne može reći baš ništa, jer ni pozniji starogrčki spisi ne govore ništa o tome. Bez obzira da li je Pitagora u geometriji došao do aksioma i postulata ili ne, načelo sistematizacije dovoljno je da se on smatra tvorcem deduktivne metode ne samo u oblasti geometrije, već u nauci uopšte.

Deduktivni metod u zasnivanju geometrije prihvaćen je ne samo od strane Pitagorinih učenika, već i drugih starogrčkih matematičara tog vremena. Hipokrat sa ostrva Hija, koji je negde sredinom V veka pre n. e. u ranije osnovanoj školi u Atini predavao geometriju, napisao je, kažu, prvo sistematizovano delo iz ove oblasti pod naslovom „Elementi“ koje do nas nije dospelo. Smatra se da je u tom delu bilo sabrano sve što se do tada znalo u oblasti geometrije. Pozniji autori pozivali su se na to delo, isticali su u njemu strogost u izlaganju gradiva, no nijednom reči nisu pomenuli pojmove i tvrđenja na kojima je Hipokrat zasnovao geometriju. Prema nekim podacima i starogrčki filozof Demokrit (oko 480–oko 370. pre n. e.) iz Abdere napisao je jedno delo pod naslovom „O geometriji“ koje takođe do nas nije dospelo. Nije nam poznat ni sadržaj te rasprave, ali se pretpostavlja da je bila posvećena pitanjima zasnivanja geometrije.

Prve nagoveštaje aksiomatičkog zasnivanja geometrije srećemo u atinskoj školi zvanoj „Akademija“ istaknutog starogrčkog filozofa Platona (427–347. pre n. e.). Premda je u toj školi prioritetan značaj pridavan filozofiji i društvenim naukama, izučavana je i matematika, posebno geometrija, kako bi se slušaoci na najefikasniji način naučili veštini egzaktnog logičkog rasuđivanja, veštini koja je smatrana kao preduslov bavljenju filozofijom. Sam Platon eksplicitno se nije bavio matematikom, ali su njegova rasuđivanja u oblasti filozofije imala snažnog odraza i u ovoj oblasti. Posebno u poimanju matematičkih objekata kao što su brojevi i geometrijski likovi. Platon je prvi počeo da geometrijska tela razmatra odvojeno od opažajnih koje srećemo oko sebe u fizikalnom prostoru i ukazao na razliku koja postoji između naučnog zaključivanja i empirijskog saznanja. Geometrijske objekte smatrao je idealnim, savršenim, kakvi se ne mogu sresti u prirodi. Oslobođena empirijskih primesa geometrija je u Akademiji dobila karakter aprioristične deduktivne teorije zasnovane na izvesnom broju opštepriznatih principa koji su nazvani aksiomama i postulatima. Koji su to bili osnovni (opštepriznati) principi i kakav je po Platonovom mišljenju bio pravi smisao aksioma i postulata, pouzdano nam nije poznato. Neki pozniji autori skloni su da tvrde da su aksiome imale deskriptivan, a postulati konstruktivan karakter. Izvesno je jedino da u sačuvanim delima Platona pisanih najčešće u obliku dijaloga ima više mesta iz kojih se jasno naslućuje aksiomatička metoda ne samo u izgradnji geometrije već bilo koje naučne teorije.

Teorijske osnove deduktivne metode u najopštijoj formi razvio je najdarovitiji Platonov učenik, genijalni starogrčki filozof Aristotel (384–322. pre n. e.). U više svojih rasprava logičkog karaktera, koje su negde sredinom I veka pre n. e. od strane istaknutog peripatetičara Andronika sabrana u poseban kodeks pod nazivom „Organon“, kao i u raspravi „Metafizika“ Aristotel je pokušao da na svojevrstan način naučno razotkrije opšte zakonitosti deduktivnog zaključivanja. Nije nam cilj da ovde podrobno obrazlažemo sva njegova nastojanja, već da damo kratak osvrt na njegov način definisanja novih pojmova i njegov način odabiranja osnovnih tvrđenja deduktivne naučne teorije.

Način ustanovljavanja pojmova, koji je u izvesnoj meri već naslućivan u delima Platona, Aristotel je podrobnije razradio utvrđujući svojevrsno pravilo kojim se novi pojam definiše pomoću bližeg, njemu srodnog, pojma i specifične razlike. Bio je to vekovima, sve do XIX veka, jedini naučno priznati način koji je nalazio široku primenu u svim naučnim oblastima, pa i geometriji. Srednjevekovni skolastičari posebno su ga negovali i obrazlagali rečima: „Definitio fit per genus proximum et differentiam specificam", što u prevodu znači da se definicija sastavlja iz bližeg srodnog pojma i specifične razlike. Prema tom načinu, definicija novog pojma sastojala se u isticanju dveju bitnih odredbi: jedna od njih odnosila se na pripadnost pojma koji se uvodi nekom širem unapred poznatom pojmu za koji se govorilo da predstavlja njegov bliži rod, druga od tih odredbi odnosila se na specifičnu razliku koja je bila neophodna da bi se novi pojam razlikovao od pojma koji predstavlja njegov bliži rod. Tako npr. u definiciji romba kao paralelograma sa jednakim susednim stranicama, pojam romba pripada širem unapred poznatom pojmu paralelograma koji predstavlja njegov bliži rod, a jednakost susednih stranica predstavlja specifičnu razliku.

Ako je na razmatrani način definisan neki pojam, tada srodni pojam koji ga obuhvata predstavlja njegovo uopštenje. Taj opštiji pojam najčešće je služio kao predikat pri definisanju njemu podčinjenih pojmova. Ako je razmatranim načinom definisan i taj opštiji pojam, srodni pojam koji ga obuhvata predstavlja njegovo dalje uopštenje. Aristotel je smatrao da je takav postupak konačan, naime da se takvim postupkom neminovno dolazi do pojma koji se ne može uključiti ni u koji opštiji pojam. Te najopštije vrste pojmova Aristotel je nazivao kategorijama.

Osnovne principe, tj. osnovna tvrđenja na kojima se zasniva deduktivna teorija, Aristotel je takođe razvrstavao na aksiome i postulate. Po njegovom mišljenju aksiome treba da budu osnovna tvrđenja opštijeg karaktera, tj. tvrđenja koja se prihvataju bez dokazivanja, a koja važe ne samo u jednoj već u dvema ili više naučnih teorija. Naprotiv, postulati treba da budu osnovna tvrđenja specifičnog karaktera, tj. tvrđenja koja se prihvataju bez dokazivanja i koja važe isključivo u toj naučnoj teoriji. Ilustracije radi, pomenimo neka tvrđenja koja Aristotel smatra aksiomama: „Ako se jednakim veličinama dodaju jednake veličine dobijaju se jednake veličine" i „Ako se od jednakih veličina oduzmu jednake veličine dobijaju se jednake veličine". Jasno je da ove aksiome ne važe samo u geometriji već i teoriji brojeva. Za razumevanje Aristotelove koncepcije zasnivanja naučne teorije od osobitog je značaja kriterijum u odabiranju osnovnih tvrđenja. Aristotel je smatrao da aksiome i postulati deduktivne teorije moraju predstavljati tvrđenja koja su do te mere opštepriznata i iz svakodnevne prakse poznata i očigledna da ih ne samo nije moguće, već i nije potrebno dokazivati. Takav kriterijum u izboru osnovnih tvrđenja intuitivno je vodio ka uverenju da u izgradnji deduktivne naučne teorije nije moguće doći do dvaju protivrečnih tvrđenja. U takvoj teoriji istinitost izvedenih tvrđenja tj. teorema nije mogla podlegati nikakvoj sumnji. Iz tih razloga nije se ni nametao problem neprotivrečnosti deduktivne teorije aristotelovskog tipa.

Najsistematičnije delo iz geometrije antičkih vremena koje je dospelo do nas pod naslovom „Elementi“ napisao je starogrčki matematičar Euklid (oko 365–270. pre n. e.). Obrazovanje je, kažu, stekao u Atini kod Platonovih učenika, a oko 300. pre n. e. prešao u Aleksandriju da bi u tek osnovanoj školi predavao geometriju. Sakupivši sve što se do tada znalo iz oblasti geometrije, Euklid je pristupio sistematizaciji te građe izloživši je u „Elementima“ koji se sastoje iz 13 knjiga. Prvih šest knjiga odnose se na planimetriju, naredne četiri na geometrijsku teoriju brojeva, a poslednje tri na stereometriju. Tim knjigama obično se prilažu kao dodatak još dve kraće monografije koje često komentatori nazivaju četrnaestom i petnaestom knjigom Euklidovih „Elemenata“. Izvesno vreme smatralo se da je i njih napisao Euklid; docnije je ustanovljeno da je prvu od njih napisao Euklidov učenik Hipsikle iz Aleksandrije, a drugu neki nepoznati autor nekoliko vekova kasnije. Ove dve monografije imaju više istorijski značaj, te se u prevodima najčešće sreću u skraćenoj verziji.

U svojem grandioznom delu „Elementi“ Euklid je pokušao da dosledno sprovede deduktivan metod u izlaganju geometrije. Upravo ta doslednost u dedukciji učnilila je da njegovo delo vekovima predstavlja savršenstvo i uzor logičkog rasuđivanja ne samo u oblasti geometrije već u nauci uopšte. Premda je stolećima uživalo epitet najsavršenijeg dela što ga je uspeo da stvori ljudski um, pomenuto delo imalo je i svojih nedostataka koji će povremeno biti predmetom istraživanja ne malog broja matematičara skoro sve do naših dana i dovesti do otkrića tzv. neeuklidskih geometrija. Iz tih razloga dajemo kratak osvrt na bitne, karakteristike Euklidovog zasnivanja geometrije.

Euklid počinje izlaganje navođenjem niza definicija kojima se obrazlažu prvi geometrijski pojmovi kao što su tačka, linija, površ, prava, ravan, itd. Evo kako glasi nekoliko prvih definicija:

I. Tačka je ono čiji je deo ništa.

II. Linija je dužina bez širine.

III. Granice linije su tačke.

IV. Prava je linija jednako postavljena u odnosu na sve svoje tačke.

V. Površ je ono što ima samo dužinu i širinu.

VI. Granice površi su linije.

VII. Ravan je površ jednako postavljena u odnosu na sve svoje prave itd.

Navedene definicije su krajnje nejasne, čak i logički nekorektne. Nejasnoće dolaze otuda što autor često nastoji da definiše neki pojam pomoću pojmova koji prethodno nisu definisani. Kako razumeti pojam tačke, šta su to dužina i širina pomoću kojih se definišu linije i površi, kako shvatiti liniju jednako raspoređenu u odnosu na sve svoje tačke i površ jednako raspoređenu u odnosu na sve svoje prave, pitanja su na koja Euklid nije dao odgovor. On to nije mogao ni učiniti, jer geometriju zasniva ne uvodeći prethodno nikakve osnovne pojmove što je sa logičkog stanovišta nemoguće.

Euklid navodi četrnaest osnovnih tvrđenja razvrstanih na pet postulata i devet aksioma. Najpre su navedeni postulati; evo kako oni glase:

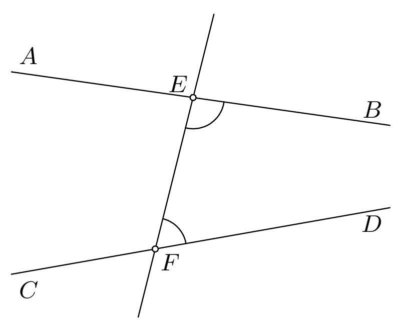
I. Pretpostavlja se da je moguće od svake tačke do svake druge tačke konstruisati pravu liniju.

II. Pretpostavlja se da se svaka prava, sledujući njen pravac, može neograničeno produžavati.

III. Pretpostavlja se da se u nekoj ravni oko svake njene tačke može opisati krug bilo kojeg poluprečnika.

IV. Pretpostavlja se da su svi pravi uglovi među sobom jednaki.

V. Ako jedna prava presecajući druge dve komplanarne prave obrazuje sa njima s iste strane dva unutrašnja ugla kojima je zbir manji od zbira dva prava ugla, tada se te dve prave, neograničeno produžene, seku sa one strane sečice sa koje je taj zbir uglova manji od zbira dva prava ugla (Sl. 1.1).



Sl. 1.1

Po svojoj prirodi, postulati su strogo geometrijska tvrđenja. Oni su izraženi u vidu zahteva ili pretpostavki kojima kao da se želi naglasiti njihov konstruktivan karakter. Prva tri postulata zaista su konstruktivnog karaktera; na njima je vekovima zasnivana teorija geometrijskih konstrukcija. Za poslednja dva postulata ne može se reći da su konstruktivnog karaktera. Pomenimo da u savremenoj geometriji četvrti postulat predstavlja tvrđenje koje se dokazuje; o famoznom petom postulatu govorićemo malo kasnije.

Euklid navodi devet aksioma koje glase:

I. One koje su jednake istoj, jednake su i među sobom.

II. Ako se jednakim dodaju jednake, celine su jednake.

III. Ako se od jednakih oduzmu jednake, ostaci su jednaki.

IV. Ako se nejednakim dodaju jednake, celine su nejednake.

V. Udvostručenja jednakih među sobom su jednake.

VI. Polovine jednakih među sobom su jednake.

VII. One koje se mogu dovesti do poklapanja, jednake su među sobom.

VIII. Celina je veća od dela.

IX. Dve prave ne ograničavaju oblast.

Po svojoj prirodi, većina Euklidovih aksioma je opštijeg karaktera, to su tvrđenja koja važe ne samo u geometriji već i u drugim naučnim oblastima. Izuzetak čine jedino aksiome VII i IX koje su izrazito geometrijskog karaktera, jer se po mišljenju komentatora obe odnose na geometrijske objekte. Pomenimo da se aksiomom VII prećutno upotrebljava kretanje geometrijskih figura koje se nigde u „Elementima“ ne definiše, a aksiomom IX praktično tvrdi da dve razne prave ne mogu imati dve razne zajedničke tačke. Budući da ni svi postulati nisu konstruktivnog karaktera, može se zaključiti da se Euklid u razvrstavanju osnovnih tvrđenja na postulate i aksiome nije rukovodio niti Platonovim, niti Aristotelovim načelima. S obzirom da Euklidovi „Elementi“ nisu sačuvani u originalu već u prepisima, neki istoričari matematike pretpostavljaju i mogućnost da su prepisivači samovoljno neka tvrđenja sa spiska postulata prenosili na spisak aksioma ili obratno. Tako se npr. u nekim verzijama aksioma IX nalazi na spisku postulata pod rednim brojem VI.

Veoma je značajno istaći da Euklidov sistem osnovnih tvrđenja nije potpun, naime da se iz njegovih aksioma i postulata ne može izvesti svako geometrijsko tvrđenje. Tu nepotpunost prvi je primetio znameniti starogrčki matematičar Arhimed (287–212. pre n. e.). U svojem delu „O lopti i valjku“ on je dodao novih pet postulata koji omogućuju da se zasnuje teorija merenja geometrijskih figura. Jedan od tih postulata i danas ima status osnovnog tvrđenja; to je tzv. Eudoks-Arhimedova aksioma prestiživosti. Euklid kao da nije osećao potrebu da u geometriji strogo zasnuje učenje o neprekidnosti. Neka tvrđenja koja se odnose na to učenje kao što je stav o preseku prave i kruga i stav o preseku dvaju krugova Euklid ne dokazuje već smatra očiglednim. Takav je npr. prvi stav kojim Euklid izvodi konstrukciju jednakostraničnog trougla. Ti nedostaci biće u geometriji otklonjeni tek u XIX veku uvođenjem tzv. aksioma neprekidnosti. Euklidovi „Elementi“ obilovali su i drugim nedostacima. Euklid je npr. u razmatranjima često koristio pojam „između“ ne pridavajući mu nikakav poseban značaj. Štaviše, on ga i ne definiše, već smatra očiglednim i opštepoznatim pojmom. Značaj pojma „između“ u geometriji biće shvaćen tek u XIX veku kada je uvođenjem tzv. aksioma rasporeda razrađena geometrija poretka na pravoj, u ravni i prostoru.

Za razvoj geometrije, a preko nje i drugih matematičkih oblasti, ogroman značaj imao je Euklidov peti postulat. S obzirom na ondašnje kriterijume u odabiranju osnovnih tvrđenja, mnogi su matematičari posle Euklida opravdano smatrali da peti postulat zbog svoje složenosti i neočiglednosti ne treba da bude na spisku osnovnih tvrđenja, već da ga treba kao teoremu dokazati. Bili su to dovoljni razlozi zbog kojih će mnogi matematičari narednih dvadeset i više stoleća neumorno pokušavati da odgonetnu to pitanje. Uvereni da Euklidov peti postulat ne treba da predstavlja osnovno tvrđenje, već teoremu koju treba dokazati pomoću ostalih Euklidovih postulata i aksioma, mnogi su matematičari pokušavali da, najčešće indirektnim postupkom, izvedu dokaz tog tvrđenja. Polazeći od negacije petog postulata ili negacije nekog stava koji je ekvivalentan petom postulatu, oni su pomoću ostalih Euklidovih postulata i aksioma izvodili nova tvrđenja nadajući se da će tim putem doći do dvaju protivrečnih tvrđenja i time rešiti problem petog postulata. Mnogi od njih dovodili su sebe u zabludu smatrajući da su u tome uspeli ne primećujući da su skriveno u svojim izvođenjima na izvestan način iskoristili neki od ekvivalenata Euklidovog petog postulata. U istoriji geometrije zabeležen je ne mali broj takvih slučajeva, ovde ih nećemo navoditi.

Devetnaesti vek bio je vek neslućenih dostignuća u skoro svim oblastima nauke, pa i u geometriji. Najznačajnije dostignuće u ovoj oblasti bilo je otkriće novih tzv. neeuklidskih geometrija koje se bitno razlikuju od euklidske. Prioritetne zasluge u otkriću neeuklidske geometrije ima ruski matematičar Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792–1856.). Kao i mnogi prethodnici, Lobačevski je nastojao da indirektnim postupkom Euklidov peti postulat izvede iz ostalih postulata i aksioma Euklida. U tom cilju on je pošao od negacije jednog tvrđenja koje je ekvivalentno Euklidovom petom postulatu, naime od pretpostavke da kroz tačku van jedne prave postoje najmanje dve prave koje su sa tom pravom komplanarne i disjunktne. Ne koristeći nigde Euklidov peti postulat niti bilo koje njemu ekvivalentno tvrđenje, Lobačevski je uspeo da izgradi potpuno novu teoriju ne našavši u njoj nikakvih protivrečnosti. Uveren u logičku ispravnost svojih rasuđivanja, on je smelo razotkrivao nove zakonitosti, tvrdeći da Euklidov peti postulat ne predstavlja posledicu ostalih Euklidovih postulata i aksioma i da, štaviše, sem Euklidove geometrije postoji i geometrija koja se bitno razlikuje od nje. Rezultate svojih istraživanja Lobačevski je saopštio u Odelenju fizičko-matematičkih nauka Kazanjskog univerziteta dana 23. (11.) februara 1826. godine, a publikovao u „Vesniku“ Kazanjskog univerziteta 1829–1830. godine. Potpuno nezavisno od njega do iste geometrije došao je i mađarski matematičar Janoš Boljaj (1802–1860.) koji je rezultate svojih istraživanja objavio 1832. godine u vidu dodatka knjige „Geometrija“ svojeg oca Farkaša Boljaja. Stoga se taj rad u literaturi i sreće pod naslovom „Apendiks“, što na latinskom jeziku znači dodatak. Tu novootkrivenu geometriju danas nazivamo neeuklidskom geometrijom Lobačevskog-Boljaja ili pak hiperboličkom geometrijom. Godine 1854. nemački matematičar Bernhard Riman (1826–1866.) u svojem radu „O hipotezama koje leže u osnovi geometrije“ razmatrajući tzv. polidimenzione mnogostrukosti dolazi do još jedne neeuklidske geometrije koju danas nazivamo rimanskom geometrijom u užem smislu ili pak eliptičkom geometrijom. U poslednjem poglavlju ovog tečaja biće dat kratak osvrt na obe ove neeuklidske geometrije Lobačevskog i Rimana.

Otkriće neeuklidskih geometrija odrazilo se na zasnivanje ne samo geometrije, već bilo koje deduktivne teorije. Stolećima neprikosnoveni kriterijumi odabiranja osnovnih pojmova i osnovnih tvrđenja deduktivne teorije koje su svojevremeno proklamovali Platon i Aristotel nisu mogli i dalje odolevati vremenu. Došlo se do saznanja da osnovna geometrijska tvrđenja, tj. aksiome i postulati, važe ne samo na skupu tačaka, pravih i ravni shvaćenih u klasičnom Euklidovom smislu, već i na skupu tačaka, pravih i ravni shvaćenih u mnogo širem smislu. Proširivani su i apstraktnije poimani objekti koji su se nalazili u osnovi skoro svih geometrijskih tvrđenja. Dajući tim apstraktnim osnovnim pojmovima konkretna značenja ustanovljuju se modeli na kojima je moguće izvoditi realizacije poznatih geometrija Euklida, Lobačevskog i Rimana. Do koje se mere otišlo daleko u apstrahovanju geometrijskih objekata najbolje ilustruje činjenica da se pod pojmom tačka mogla podrazumevati uređena n-torka realnih brojeva, a pod prostorom skup svih takvih postojećih n-torki. Time je praktično bila omogućena i izgradnja geometrije polidimenzionih prostora o kojima u ovom tečaju nećemo govoriti.

Zasnivanje geometrije na apstraktnim osnovnim pojmovima i neočiglednim aksiomama podstaklo je mnoge matematičare poslednjih decenija XIX veka da svoju istraživačku delatnost usmere ka osnovama geometrije, a sa njome osnovama drugih matematičkih disciplina. Počinju se razmatrati fundamentalni problemi koji karakterišu ne samo aksiomatiku geometrije već i aksiomatiku bilo koje deduktivne teorije. To su problemi neprotivrečnosti, nezavisnosti i potpunosti aksioma te teorije. Sa nekoliko reči pokušajmo objasniti u čemu se sastoje ti problemi. Kaže se da je sistem aksioma neke deduktivne teorije *neprotivrečan* ako u toj teoriji ne postoje dva tvrđenja koja bi bila među sobom protivrečna. Za sistem aksioma neke deduktivne teorije kaže se da je *nezavisan* ako se nijedna od aksioma tog sistema ne može izvesti iz ostalih aksioma tog sistema. Ovaj problem u literaturi često se naziva i problemom minimalnosti dotičnog sistema aksioma. Ako je neprotivrečan sistem aksioma neke deduktivne teorije dovoljan za ustanovljavanje istinitosti ili neistinitosti bilo kojeg tvrđenja te teorije, tada se kaže da je pomenuti sistem aksioma *potpun*. Problemi neprotivrečnosti, nezavisnosti i potpunosti najčešće se rešavaju na modelima tih teorija. Tako je 1868. god. italijanski matematičar Evđenio Beltrami (1835–1900.) uspeo da dokaže da se u okolini proizvoljne tačke naročite površi tzv. pseudosfere, zamišljajući prave kao najkraće linije na toj površi što spajaju dve njene tačke, realizuje planimetrija Lobačevskog. Time je praktično bio izveden dokaz neprotivrečnosti planimetrije Lobačevskog. Nešto docnije, 1871. god. nemački matematičar Feliks Klajn (1849–1925.) pojednostavljuje Beltramijevu ideju ustanovljujući da se u okolini bilo koje tačke euklidske ravni, tj. u unutrašnjosti jednog kruga, takođe ostvaruje planimetrija Lobačevskog. Do jednostavnih interpretacija ravni Lobačevskog došao je 80-ih godina devetnaestog veka i francuski matematičar Anri Poenkare (1854–1912.). O tim modelima nešto više biće rečeno u poslednjem poglavlju ove knjige.

Nova stremljenja u aksiomatičkom zasnivanju geometrije podsticala su matematičare da pristupe suptilnoj analizi osnovnih geometrijskih pojmova i tvrđenja. Sedamdesetih godina devetnaestog veka dva nemačka matematičara Rihard Dedekind (1872.) i Georg Kantor (1873.) skoro istovremeno, na različite načine, razvili su učenje o neprekidnosti. Uvođenjem aksioma neprekidnosti, oni su uspeli da otklone jedan od krupnih nedostataka aksiomatike Euklida. Godine 1882. nemački matematičar Moric Paš u svojoj knjizi „Predavanja iz novije geometrije“ uvodi aksiome poretka kojima otklanja još jedan nedostatak aksiomatike Euklida. Tri italijanska matematičara Đuzepe Peano (1889.), Đuzepe Veroneze (1891.) i Mario Pieri (1899.) u svojim raspravama daju svoje vizije aksiomatičkog zasnivanja geometrije. Najsistematičniji pristup u geometriju zasnovan na neprotivrečnom, nezavisnom i potpunom sistemu aksioma dao je nemački matematičar David Hilbert (1862–1943.) u svojem delu „Osnovi geometrije“ objavljenom 1899. godine. Geometrijski objekti koje razmatra Hilbert u ovom delu imaju daleko šire značenje no kod Euklida. Za osnovne geometrijske objekte on uzima tačke, prave i ravni. Ako želimo objasniti kojim stepenom apstrakcije po Hilbertu raspolažu ovi pojmovi, najbolje je poslužiti se citatom kojim počinje pomenuto delo: „Zamišljamo tri različita sistema objekata: objekte prvog sistema koje nazivamo tačkama i označavamo sa A, B, C, $\dots$; objekte drugog sistema koje nazivamo pravama i označavamo sa a, b, c, $\dots$; objekte trećeg sistema koje nazivamo ravnima i označavamo sa α, β, γ, $\dots$. Tačke, prave i ravni nalaze se u izvesnim međusobnim odnosima koje izražavamo rečima: leži na, između, podudarno, paralelno i neprekidno“. Tačan i za matematičke svrhe potpun opis tih relacija postiže se pomoću aksioma geometrije. Dok se aksiomatika Euklida odnosila na geometrijske objekte koji su imali potpuno određena značenja, aksiomatika Hilberta odnosila se na geometrijske objekte koji su mogli da imaju raznovrsna značenja. Stoga se kaže da je aksiomatika Euklida sadržajnog, a aksiomatika Hilberta poluformalnog karaktera. Ističemo da je poluformalnog karaktera zbog toga što je Hilbert već početkom XX veka ukazao na mogućnost izgrađivanja deduktivnih teorija kojima su aksiomatike potpuno formalnog karaktera.

1.2 Osnovni pojmovi i osnovni stavovi u geometriji

Kao i svaka druga deduktivna teorija, geometrija se zasniva na izvesnim pojmovima koje smatramo poznatim te ih ne definišemo i na izvesnim tvrđenjima koje smatramo poznatim te ih ne dokazujemo. Da je takav pristup neminovan sleduje otuda što se nijedan geometrijski pojam ne može definisati bez drugih unapred poznatih geometrijskih pojmova, a nijedno geometrijsko tvrđenje ne može dokazati bez drugih unapred poznatih geometrijskih tvrđenja. Te polazne pojmove koje prihvatamo bez definicija nazivamo *osnovnim geometrijskim pojmovima*, a polazna tvrđenja koja prihvatamo bez dokazivanja nazivamo *osnovnim geometrijskim tvrđenjima* ili *aksiomama* geometrije. Pojmove koje definišemo u geometriji nazivamo *izvedenim geometrijskim pojmovima*, a tvrđenja koja dokazujemo u geometriji nazivamo *izvedenim geometrijskim tvrđenjima* ili *teoremama* geometrije.

U zasnivanju geometrije polazimo od proizvoljnog skupa S, dveju klasa C_l i C_π podskupova skupa S i dveju relacija $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nad skupom S od kojih je prva troelementna, a druga četvoroelementna.

Skup S nazivamo *prostorom*, a njegove elemente nazivamo *tačkama* koje obeležavamo velikim latinskim slovima A, B, C, D, ...

Elemente klase C_l nazivamo *pravim linijama* ili *pravama* i obeležavamo malim latinskim slovima a, b, c, d, ...

Elemente klase C_π nazivamo *ravnima* i simbolički obeležavamo malim grčkim slovima α, β, γ, δ, ...

Troelementnu relaciju $\mathcal{B}$ nad skupom S nazivamo relacijom *između*. Upotrebljeni simbol $\mathcal{B}$ prvo je slovo engleske reči between, što znači — između. Tom relacijom izražavamo činjenicu prema kojoj se jedna tačka nalazi između drugih dveju tačaka, npr. tačka C između A i B, što simbolički obeležavamo sa $\mathcal{B}(A, C, B)$.

Četvoroelementnu relaciju $\mathcal{C}$ nad skupom S nazivamo relacijom *podudarnosti uređenih parova tačaka* ili relacijom *ekvidistancije*. Upotrebljeni simbol $\mathcal{C}$ je prvo slovo latinske reči congruentia, što znači — podudarno. S obzirom da će uopštavanjem ova relacija prerasti u relaciju podudarnosti složenijih geometrijskih likova koja se obeležava znakom $\cong$, dopustićemo u ovom tečaju upotrebu tog simbola i za relaciju podudarnosti parova tačaka. Ako je npr. uređen par tačaka (A, B) podudaran sa uređenim parom tačaka (C, D), pisaćemo

$$\mathcal{C}(A, B; C, D) \quad \text{ili} \quad (A, B) \cong (C, D).$$

Svaki neprazan skup tačaka prostora S nazivamo *geometrijskim likom*, *geometrijskim objektom* ili *geometrijskom figurom*. Tačke, prave i ravni su, prema tome, geometrijski likovi u prostoru S. Na taj način, osnovne pojmove u geometriji sačinjavaju tri vrste objekata, to su tačke, prave i ravni, i dve relacije $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. Osnovni geometrijski pojmovi okarakterisani su izvesnim zakonitostima koje nazivamo *osnovnim geometrijskim tvrđenjima* ili *aksiomama* geometrije. Prema prirodi tih zakonitosti, aksiome geometrije razvrstavamo u pet grupa; to su:

I. Aksiome incidencije (devet aksioma);

II. Aksiome poretka (šest aksioma);

III. Aksiome podudarnosti (sedam aksioma);

IV. Aksiome neprekidnosti (dve aksiome);

V. Aksiome paralelnosti (jedna aksioma).

U narednim odeljcima ovog poglavlja izložićemo ove grupe aksioma i ukazati na samo neke njihove važnije posledice.

1.3 Aksiome incidencije i njihove posledice

Osnovni geometrijski objekti, tj. tačke, prave i ravni raspolažu izvesnim međusobnim odnosima koje u teoriji skupova izražavamo poznatim relacijama „pripada" i „sadrži"; te relacije u geometriji nazivamo jednim imenom relacijama *incidencije*. Stoga i aksiome prve grupe kojima se obrazlažu osnovna svojstva tih relacija nazivamo *aksiomama incidencije.* Ovu grupu aksioma autori često nazivaju i *aksiomama veze* nastojeći na taj način da ukažu na ulogu koju imaju te aksiome u zasnivanju teorije uzajamnih odnosa među likovima. Pre uvođenja aksioma incidencije ustanovimo pojam kolinearnih i pojam komplanarnih tačaka.

Definicija 1.3.1. Za tri ili više tačaka A, B, C, $\ldots$ kaže se da su *kolinearne* ako postoji prava koja ih sadrži; ako takva prava ne postoji, za pomenute tačke kaže se da su *nekolinearne*. Analogno, za četiri i više tačaka A, B, C, D, $\ldots$ kaže se da su *komplanarne* ako postoji ravan koja ih sadrži; ako takva ravan ne postoji, za pomenute tačke kaže se da su *nekomplanarne*.

Grupu aksioma incidencije sačinjava sledećih devet aksioma:

I.1 Svaka prava sadrži najmanje dve tačke A i B.

I.2 Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke A i B.

I.3 Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke A i B.

I.4 Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke A, B, C.

I.5 Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri tačke A, B, C.

I.6 Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A, B, C.

I.7 Ako dve razne, tačke A i B neke rave p pripadaju izvesnoj ravni π, tada sve tačke prave p pripadaju ravni π.

I.8 Ako dve ravni α i β imaju jednu zajedničku tačku A, one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku B.

I.9 Postoje četiri nekomplanarne tačke A, B, C, D.

Dok se aksiome I.1–I.4 odnose na geometriju ravni, aksiome I.5–I.9 odnose se na geometriju prostora. Stoga prve četiri aksiome ove grupe nazivamo *planimetrijskim*, a poslednjih pet aksioma nazivamo *stereometrijskim aksiomama incidencije.* Tvrđenja koja se dobijaju iz aksioma incidencije ovde nećemo izvoditi; ona su čitaocima manje-više poznata iz ranijeg tečaja matematike. Primera radi, dokazaćemo samo neka od tih tvrđenja.

Teorema 1.3.1. Postoji jedna i samo jedna prava koja sadrži dve razne tačke A i B.

Dokaz. Prema aksiomi I.2 postoji prava p koja sadrži tačke A i B, a prema aksiomi I.3 postoji najviše jedna takva prava. Stoga postoji jedna i samo jedna prava p koja sadrži dve razne tačke A i B. □

Teorema 1.3.2. Postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A, B, C.

Dokaz. Prema aksiomi I.5 postoji najmanje jedna ravan π takva da, je A, B, $C \in \pi$, a prema aksiomi I.6 postoji najviše jedna ravan π takva da je A, B, $C \in \pi$. Stoga postoji jedna i samo jedna ravan π koja sadrži tri nekolinearne tačke A, B, C. □

Teorema 1.3.3. Ako dve razne ravni π_1 i π_2 poseduju najmanje jednu zajedničku tačku, one se seku po jednoj pravoj.

Dokaz. S obzirom da je $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, postoji tačka P koja pripada svakoj od ravni π_1 i π_2. Stoga, prema aksiomi I.8, ravni π_1 i π_2 poseduju najmanje još jednu zajedničku tačku Q. Tačke P i Q su različite, te određuju neku pravu s. Budući da dve razne tačke P i Q prave s pripadaju svakoj od ravni π_1 i π_2, prema aksiomi I.7, prava s pripada svakoj od ravni π_1 i π_2, pa je $s \subset \pi_1 \cap \pi_2$. Ako je $R \in \pi_1 \cap \pi_2$, imamo da je $R \in s$. Zaista, ako bi važila relacija. $R \notin s$, tačke P, Q, R bile bi nekolinearne. Kao nekolinearne tačke, one bi određivale jedinstvenu ravan, te bi važila relacija $\pi_1 = \pi_2$, što je suprotno pretpostavci. Stoga je $\pi_1 \cap \pi_2 \subset s$. Iz relacija $s \subset \pi_1 \cap \pi_2$ i $\pi_1 \cap \pi_2 \subset s$ sledi da je $\pi_1 \cap \pi_2 = s$. □

1.4 Aksiome rasporeda i njihove posledice

Drugu grupu aksioma euklidske geometrije sačinjavaju aksiome rasporeda kojima se obrazlažu osnovne karakteristike polazne relacije „između“ koju simbolički obeležavamo sa $\mathcal{B}$. To je troelementna relacija koja se ustanovljuje na skupu tačaka jedne prave. Ako je tačka B između tačaka A i C, pisaćemo $\mathcal{B}(A, B, C)$. Grupu aksioma rasporeda sačinjava sledećih šest aksioma:

II.1 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada su svake dve od tačaka A, B, C među sobom različite.

II.2 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada je $\mathcal{B}(C, B, A)$.

II.3 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada nije $\mathcal{B}(A, C, B)$.

II.4 Ako su A i B dve razne tačke neke prave p, tada na pravoj p postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A, B, C)$.

II.5 Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada važi najmanje jedna od relacija $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.

II.6 (Pašova aksioma) Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i p prava koja pripada ravni ABC, ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(B, P, C)$, tada prava p seče pravu AC u tački Q takvoj da je $\mathcal{B}(A, Q, C)$ ili pravu AB u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(A, R, B)$.

Prvih pet aksioma poretka odnose se na geometriju prave i zbog toga nazivaju *linearnim aksiomama poretka*; poslednja tzv. Pašova aksioma odnosi se na geometriju ravni. Napominjemo da se iz navedenih isključivo linearnih aksioma ne može izgraditi potpuna geometrija poretka tačaka na pravoj; i u izgradnji te teorije neophodna je primena Pašove aksiome. Ne postavljamo sebi za cilj da u ovom tečaju izgrađujemo geometriju poretka, već samo da ukažemo na način kojim se prilazi toj teoriji. Pomenućemo samo nekoliko važnijih tvrđenja.

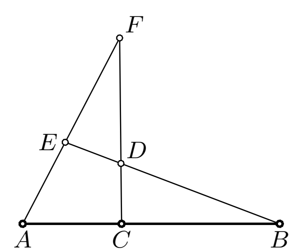
Teorema 1.4.1. Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada važi jedna i samo jedna od relacija

$$(*) \qquad \mathcal{B}(A,B,C), \quad \mathcal{B}(A,C,B), \quad \mathcal{B}(C,A,B).$$

Dokaz. S obzirom da su A, B, C tri razne kolinearne tačke, prema aksiomi II.5 važi najmanje jedna od relacija $(*)$. Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$, tada prema aksiomi II.3 nije $\mathcal{B}(A,C,B)$. Prema aksiomi II.2, iz relacije $\mathcal{B}(A,B,C)$ sledi da je $\mathcal{B}(C,B,A)$, a prema aksiomi II.3, iz relacije $\mathcal{B}(C,B,A)$ sledi da nije $\mathcal{B}(C,A,B)$. Na taj način, ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$, tada nije $\mathcal{B}(A,C,B)$, niti $\mathcal{B}(C,A,B)$. Istim postupkom dokazuje se da pri relaciji $\mathcal{B}(A,C,B)$ ne važe relacije $\mathcal{B}(C,A,B)$ i $\mathcal{B}(A,B,C)$, a pri relaciji $\mathcal{B}(C,A,B)$ ne važe relacije $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(A,C,B)$. $\square$

Teorema 1.4.2. Ako su A i B dve razne tačke, tada na pravoj AB postoji tačka C takva da je

$$\mathcal{B}(A,C,B).$$



Sl. 1.4.2

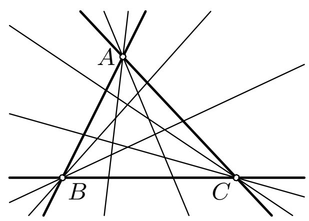
Dokaz. Neka je D proizvoljna tačka van prave AB (Sl. 1.4.2). Pri tome je $B \neq D$, te prema aksiomi II.4 na pravoj BD postoji tačka E takva da je $\mathcal{B}(B,D,E)$. Zatim je $A \neq E$, te prema aksiomi II.4 na pravoj AE postoji tačka F takva da je $\mathcal{B}(A,E,F)$. Sad su A, B, E tri nekolinearne tačke i DF prava koja pripada njihovoj ravni, ne sadrži nijednu od tih tačaka, a seče prave BE i AE u tačkama D i F takvim da je $\mathcal{B}(B,D,E)$ i $\mathcal{B}(A,E,F)$, te prema Pašovoj aksiomi II.6 prava DF seče pravu AB u nekoj tački C koja zadovoljava relaciju $\mathcal{B}(A,C,B)$. $\square$

Teorema 1.4.3. Ako su A i B dve razne tačke neke prave p, tada se prava p poklapa sa skupom p' koji se sastoji iz tačaka A, B i svih tačaka $X \in p$ koje zadovoljavaju neku od relacija

$$\mathcal{B}(A,X,B), \quad \mathcal{B}(X,A,B), \quad \mathcal{B}(A,B,X).$$

Dokaz. Iz same definicije skupa p' neposredno zaključujemo da je $p' \subset p$. Neka je X proizvoljna tačka prave p. Ako je $X = A$ ili $X = B$, iz definicije skupa p' sledi da je $X \in p'$. Ako je $X \neq A$ i $X \neq B$, biće A, B, X tri razne tačke prave p, te je prema teoremi 1.4.1 zadovoljena jedna i samo jedna od relacija $(*)$. Stoga je takođe $X \in p'$ i prema tome $p \subset p'$. Iz relacija $p' \subset p$ i $p \subset p'$ sledi da je $p = p'$. □

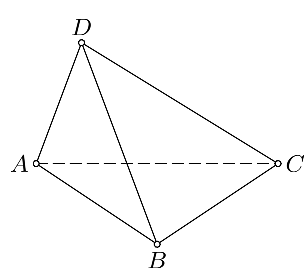
Ne izvodeći dokaze, pomenućemo još dva veoma značajna tvrđenja. Njima se izvodi identifikacija ravni i prostora sa naročito definisanim skupovima tačaka.



Sl. 1.4.4

Teorema 1.4.4. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke neke ravni π, tada je ravan π istovetna sa unijom π' svih tačaka pravih (Sl. 1.4.4) koje sadrže tačku A i neku tačku duži BC; koje sa drže tačku B i neku tačku duži CA; koje sadrže tačku C i neku tačku duži AB.

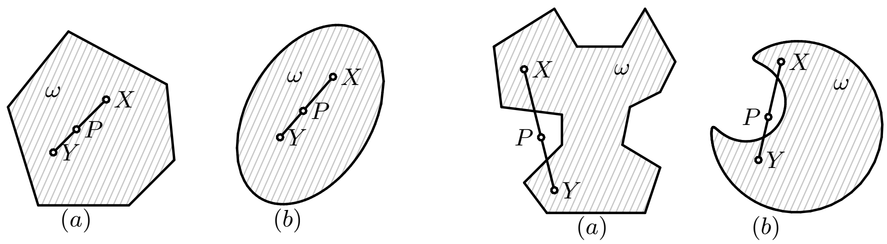
Teorema 1.4.5. Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke, tada je prostor S istovetan sa unijom S' svih tačaka ravni (Sl. 1.4.5) koje sadrže pravu AD i neku tačku duži BC; koje sadrže pravu BD i neku tačku duži CA; koje sadrže pravu CD i neku tačku duži AB.



Sl. 1.4.5

Aksiome poretka omogućuju da se ustanovi pojam duži, poluprave, poluravni, poluprostora zatim poligona, poligonske površi, poliedarske površi i poliedra. Pretpostavljamo da su ti pojmovi učenicima poznati od ranije. Pomenućemo da se u teoriji poretka mogu definisati konveksni i konkavni likovi koji u novije vreme u geometrijskim istraživanjima imaju značajnu ulogu.

Definicija 1.4.1. Za lik Φ kaže se da je *konveksan* ili *ispupčen* ako sve tačke duži određene bilo kojim dvema tačkama lika Φ pripadaju tome liku; ako taj uslov nije zadovoljen, za lik Φ kaže se da je *konkavan* ili *udubljen*.



(a) (b)

Sl. def. 1.4.1

Ilustracije radi na Sl. 1.4.1(a) predstavljena su dva konveksna, a na Sl. def. 1.4.1(b) predstavljena su dva konkavna lika. Jasno je da će duži, prave i ravni, zatim poluprave, poluravni i poluprostori predstavljati primere konkveksnih likova.

1.5 Aksiome podudarnosti i njihove posledice

Treću grupu aksioma euklidske geometrije sačinjavaju aksiome podudarnosti ili kongruencije. Njima se obrazlažu osnovne karakteristike polazne relacije „podudarnosti parova tačaka“ koju neki autori nazivaju i relacija ekvidistancije. To je četvoroelementna relacija kojom se ustanovljuje naročiti odnos između uređenih parova tačaka prostora. Ako je uređeni par tačaka (A, B) podudaran sa uređenim parom tačaka (C, D), pisaćemo $(A, B) \cong (C, D)$. Grupu aksioma podudarnosti sačinjava sledećih sedam aksioma.

III.1 Ako je $(A, B) \cong (C, D)$ i $A = B$, tada je $C = D$.

III.2 Za svake dve tačke A i B imamo da je $(A, B) \cong (B, A)$.

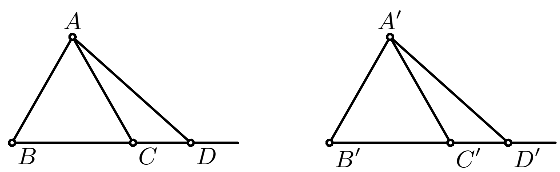
III.3 Ako tačke A, B, C, D, E, F zadovoljavaju relacije $(A, B) \cong (C, D)$ i $(A, B) \cong (E, F)$, tada je $(C, D) \cong (E, F)$.

III.4 Ako su C i C' tačke otvorenih duži (AB) i $(A'B')$ takve da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$, tada je i $(A, B) \cong (A', B')$.

III.5 Ako su A, B dve razne tačke i C kraj neke poluprave p, tada na polupravoj p postoji tačka D takva je da $(A, B) \cong (C, D)$.

III.6 Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i A, B tačke ruba neke poluravni π takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, tada u poluravni π postoji jedinstvena tačka C' takva da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$.

III.7 Ako su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka (Sl. III.7) i D, D' tačke polupravih BC i $B'C'$ takve da je $(A,B) \cong (A',B')$, $(B,C) \cong (B',C')$, $(C,A) \cong (C',A')$, $(B,D) \cong (B',D')$. tada je i $(A,D) \cong (A',D')$.



Sl. III.7

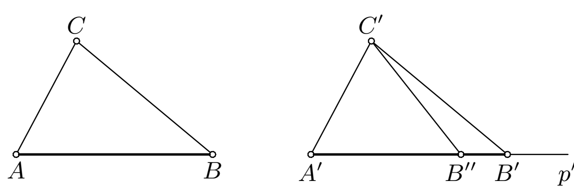
Teorema 1.5.1. Relacija podudarnosti parova tačaka je relacija ekvivalencije.

Dokaz. Ako su A i B dve razne tačke, prema aksiomi III.2 imamo da je $(B,A) \cong (A,B)$ i $(B,A) \cong (A,B)$, pa je prema aksiomi III.3 $(A,B) \cong (A,B)$. Stoga je relacija podudarnosti parova tačaka refleksivna.

Ako su A, B i C, D dva para tačaka takvih da je $(A,B) \cong (C,D)$, imamo da je $(A,B) \cong (C,D)$ i $(A,B) \cong (A,B)$, pa je prema aksiomi III.3 $(C,D) \cong (A,B)$. Stoga je relacija podudarnosti parova tačaka simetrična.

Ako su A, B; C, D; E, F tri para tačaka takvih da je $(A,B) \cong (C,D)$ i $(C,D) \cong (E,F)$, tada je $(C,D) \cong (A,B)$ i $(C,D) \cong (E,F)$, pa je prema aksiomi III.3 $(A,B) \cong (E,F)$. Stoga je relacija podudarnosti parova tačaka tranzitivna. □

Teorema 1.5.2. Ako je A, B par neistovetnih tačaka i A' kraj neke poluprave p', tada na polupravoj p' postoji jedinstvena tačka B' takva da je $(A,B) \cong (A',B')$.



Sl. 1.5.2

Dokaz. Prema aksiomi III.5, na polupravoj p' postoji tačka B' takva da je $(A,B) \cong (A',B')$. Dokažimo da je ona jedina. Neka na polupravoj p' sem tačke B' postoji još neka tačka B'' takva da je $(A,B) \cong (A',B'')$. Ako obeležimo sa C proizvoljnu tačku van prave AB (Sl. 1.5.2), tada prema aksiomi III.6 u nekoj od poluravni s rubom $A'B'$ postoji tačka C' takva da je $(A,C) \cong (A',C')$ i $(B,C) \cong (B',C')$. Primenom aksiome III.7 nalazimo da je $(B,C) \cong (B'',C')$. U tom slučaju imamo da su A, B, C tri nekolinearne tačke i A', C' tačke ruba $A'C'$ poluravni (A',C',B') takve da je $(A,C) \cong (A',C')$, a B' i B'' tačke te poluravni takve da je $(A,B) \cong (A',B')$, $(B,C) \cong (B',C')$ i $(A,B) \cong (A',B'')$, $(B,C) \cong (B'',C')$, što je prema aksiomi III.6 nemoguće. □

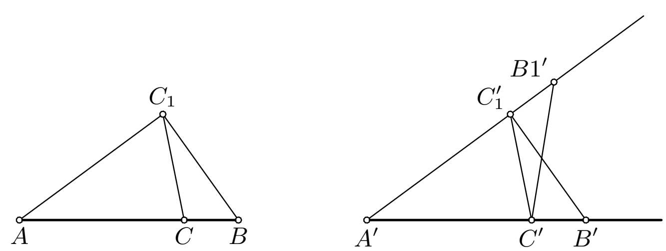
Teorema 1.5.3. Neka su p i p' dve prave prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$. Ako su A, B, C tri razne tačke prave p i A', B' dve tačke prave p' takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, tada u prostoru E^n postoji jedinstvena tačka C' takva da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$. Pri tome, tačka C' pripada pravoj p', štaviše,

1. ako je $\mathcal{B}(A, C, B)$, tada je $\mathcal{B}(A', C', B')$;

2. ako je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada je $\mathcal{B}(A', B', C')$;

3. ako je $\mathcal{B}(C, A, B)$, tada je $\mathcal{B}(C', A', B')$.

Dokaz. 1. Pretpostavimo najpre da je $\mathcal{B}(A, C, B)$. Ako obeležimo sa C' i B'' tačke poluprave $A'B'$ takve da je $\mathcal{B}(A', C', B'')$, $(A, C) \cong (A', C')$, $(B, C) \cong (B'', C')$, prema aksiomi III.4 imamo da je $(A, B) \cong (A', B'')$, i prema tome $B' = B''$. Otuda je $\mathcal{B}(A', C', B')$, $(A, C) \cong (A', C')$, $(B, C) \cong (B', C')$.



Sl. 1.5.3

Dokažimo da je C' jedina tačka koja zadovoljava te uslove. Ako bi sem tačke C' postojala još neka takva tačka C_1', ona bi bila na pravoj p' ili van nje. Ako je $C_1' \in p'$, tada bi važile relacije $\mathcal{B}(C_1', A', C')$ i $\mathcal{B}(A', C', B')$, te bi obe tačke C' i C_1' bile na polupravoj $B'A'$ takve da je $(B, C) \cong (B', C')$ i $(B, C) \cong (B', C_1')$, što je prema teoremi 1.5.2 nemoguće. Ako je $C_1' \notin p'$ (Sl. 1.5.3), tada van prave p postoji tačka C_1 takva da je $(A, C_1) \cong (A', C_1')$ i $(B, C_1) \cong (B', C_1')$. Primenom aksiome III.7 nalazimo da je $(C, C_1) \cong (C', C_1')$. Ako je B_1' tačka prave $A'C_1'$ takva da je $\mathcal{B}(A', C_1', B_1')$ i $(C', B') \cong (C_1', B_1')$, ponovnom primenom aksiome III.7 nalazimo da je $(C_1', B') \cong (C', B_1')$. Sad su B, C', C_1 tri nekolinearne tačke i C', C_1' tačke ruba $C'C_1'$ poluravni $(C'C_1', B')$ takve da je $(C, C_1) \cong (C', C_1')$, a B' i B_1' tačke te poluravni takve da je $(B, C) \cong (B', C')$, $(B, C_1) \cong (B', C_1')$ i $(B, C) \cong (B_1', C')$, $(B, C_1) \cong (B_1', C_1')$, što je prema aksiomi III.6 nemoguće.

Slučajevi 2. i 3. dokazuju se analognim ili pak indirektnim postupkom. □

Relacija podudarnosti parova tačaka može se proširiti i na skupove s većim brojem tačaka. To proširenje izvedimo ovde samo za konačne skupove tačaka, kako bi izlaganje izometrijskih transformacija koje ćemo proučavati u ovom tečaju učinili jednostavnijim.

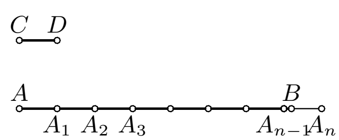
Definicija 1.5.1. Neka su $(A_1, \ldots, A_k)$ i $(A'_1, \ldots, A'_k)$ dva konačna i uređena skupa tačaka prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$. Ako je pri tome $(A_i, A_j) \cong (A'_i, A'_j)$ za svako i, $j = 1, 2, 3, \ldots, k$, tada kažemo da je skup tačaka $(A_1, \ldots, A_k)$ *podudaran* sa skupom tačaka $(A'_1, \ldots, A'_k)$, i simbolički obeležavamo sa

$$(A_1, \ldots, A_k) \cong (A'_1, \ldots, A'_k).$$

1.6 Aksiome neprekidnosti

Nekim tvrđenjima iz prethodnih razmatranja na izvestan način već smo bili upućeni da pravu liniju zamišljamo i na slici (modelu) predstavljamo kao neprekidnu liniju. Tim tvrđenjima može se samo naslutiti, no ne i egzaktno izgraditi učenje o neprekidnosti. Da bi se razvilo to učenje neophodno je uvesti novu grupu aksioma, to je tzv. grupa aksioma neprekidnosti. Tu grupu sačinjavaju sledeće dve aksiome:

IV.1 Ako su AB i CD bilo koje dve duži (Sl. IV.1), tada na pravoj AB postoji konačan broj tačaka $A_1, \ldots, A_n$ takvih da je $B \in (A_{n-1}, A_n)$ i $\mathcal{B}(A_1, \ldots, A_n)$ i $(C, D) \cong (A, A_1) \cong (A_1, A_2) \cong \ldots \cong (A_{n-1}, A_n)$.



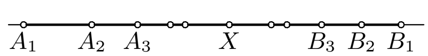
Sl. IV.1

IV.2 Neka je na izvesnoj pravoj p dat beskonačan niz duži A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, $\ldots$ koje zadovoljavaju sledeća dva uslova (Sl. IV.2):

(a) svaka duž tog niza duži sadrži sledeću duž,

(b) ne postoji duž koja pripada svim dužima tog niza;

tada postoji tačka X koja pripada svim dužima tog niza duži.



Sl. IV.2

U literaturi se aksioma IV.1 često naziva *Eudoks-Arhimedovom aksiomom* ili pak *aksiomom prestiživosti*; aksioma IV.2 naziva se *Kantorovom aksiomom neprekidnosti*. Gde se sve primenjuju aksiome neprekidnosti pomenuli smo u odeljku 1.1, na tim primenama ovde se nećemo zadržavati.

1.7 Plejferova aksioma paralelnosti

Navedene četiri grupe aksioma pomoću kojih se izgrađuje tzv. apsolutna geometrija nisu dovoljne da se u potpunosti izgradi geometrija razmatranog prostora. Za izgradnju te teorije neophodno je uvesti jednu grupu aksioma; to je po redu peta grupa aksioma geometrije. Tu grupu čini samo jedna aksioma koju je 1797. godine umesto Euklidovog petog postulata uveo engleski matematičar Džon Plejfer. Ona se odnosi na paralelne prave te je nazivamo Plejferovom aksiomom paralelnosti.

V.1 Ako je p proizvoljna prava i A tačka van nje, tada postoji jedinstvena prava a koja je komplanarna sa pravom p i koja zadovoljava relacije $A \in a$ i $a \cap p = \emptyset$.

Teoriju zasnovanu na sistemu aksioma apsolutne geometrije i Plejferovoj aksiomi paralelnosti nazivamo *euklidskom* ili *paraboličkom geometrijom.* Ravan i prostor u kojima važe aksiome euklidske geometrije nazivamo respektivno *euklidskom ravni* i *euklidskim prostorom*, i obeležavamo sa E^2 i E^3. U narednim izlaganjima bićemo često u mogućnosti da nove pojmove ili tvrđenja izvodimo istovremeno i u geometriji prave, i u geometriji ravni E^2, i u geometriji prostora E^3. U tom slučaju govorićemo o prostoru E^n podrazumevajući da za $n = 1$ razmatramo geometriju prave, za $n = 2$ geometriju ravni E^2, a za $n = 3$ geometriju prostora E^3.

Radi jednostavnijeg izlaganja u euklidskoj geometriji uvode se binarne relacije paralelnosti definisane nad skupom pravih, nad skupom ravni ili pak nad skupom pravih i ravni. Izvedimo definicije tih relacija i najvažnija njihova svojstva.

Definicija 1.7.1. Kaže se da je u prostoru E^3 prava p *paralelna* sa pravom q i simbolički obeležava sa $p \parallel q$ ako je prava p komplanarna sa pravom q i pri tome $p = q$ ili $p \cap q = \emptyset$.

Iz ove definicije i Plejferove aksiome paralelnosti neposredno sleduje da za svaku pravu $p \subset E^3$ i svaku tačku $P \in E^3$ postoji jedinstvena prava $q \subset E^3$ takva da je $P \in q$ i $p \parallel q$. Od svojstava kojima raspolaže uvedena relacija pomenimo najbitnije.

Teorema 1.7.1. Relacija paralelnosti definisana na skupu pravih prostora E^n $(n = 2, 3)$ je relacija ekvivalencije.

Dokaz. Da je relacija paralelnosti definisana na skupu pravih prostora E^n refleksivna i simetrična sleduje neposredno iz definicije. Dokažimo da je ona i tranzitivna.

U tom cilju obeležimo sa a, b, c tri prave prostora E^n takve da je $a \parallel b$ i $b \parallel c$. Ako su prave a, b, c komplanarne, prave a i c se ne seku u jednoj tački, jer bi u tom slučaju kroz tu tačku postojale dve razne prave a i c paralelne s pravom b, što je prema Plejferovoj aksiomi nemoguće, pa je $a \parallel c$.

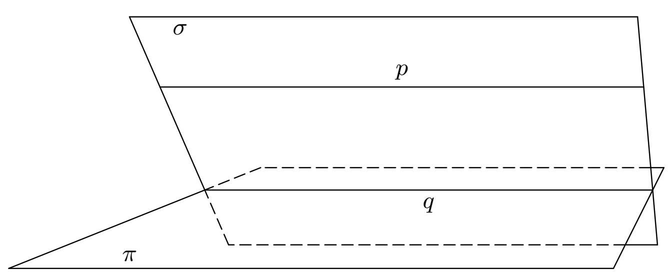
Ako prave a, b, c, nisu komplanarne, biće $a \cap c = \emptyset$. Zaista, ne može biti $a = c$, jer bi tada prave a, b, c bile komplanarne, što je suprotno pretpostavci.

Prave a i c ne mogu se ni seći u jednoj tački, jer bi tada kroz njihovu presečnu tačku postojale dve prave paralelne s pravom b, što je nemoguće. Neka je α ravan određena pravama a i b, β ravan određena pravama b i c, γ ravan određena pravom c i nekom tačkom $A \in a$. Iz relacija $A \in \alpha \cap \gamma$ i $\alpha \neq \gamma$ sleduje da se ravni α i γ seku po nekoj pravoj a'. Pri tome je $a' \cap b = \emptyset$, jer bi u protivnom svaka njihova zajednička tačka pripadala ravnima β i γ, dakle i pravoj c, što je nemoguće. Stoga je $a' \parallel b$, i prema tome $a' = a$. Iz ove relacije sleduje da su disjunktne prave a i c komplanarne, pa je $a \parallel c$. $\square$

Definicija 1.7.2. Kaže se da je u prostoru E^3 prava p *paralelna sa ravni* π i simbolički obeležava sa $p \parallel \pi$ ako je $p \subset \pi$ ili $p \cap \pi = \emptyset$. Obratno, kaže se da je u prostoru E^3 *ravan* π *paralelna sa pravom* p i simbolički obeležava sa $\pi \parallel p$ ako je $\pi \supset p$ ili $\pi \cap p = \emptyset$.

Iz definicije neposredno zaključujemo da iz relacije $p \parallel \pi$ sledi relacija $\pi \parallel p$; i obratno, da iz relacije $\pi \parallel p$ sledi relacija $p \parallel \pi$. Stoga smo u mogućnosti da za takvu pravu p i ravan π kažemo da su *među sobom paralelne.* Od svojstava kojima raspolaže ova relacija ističemo sledeće svojstvo.

Teorema 1.7.2. Ako u prostoru E^3 prava p ne pripada ravni π i ako u ravni π postoji prava q takva da je $p \parallel q$, tada je $p \parallel \pi$.



Sl. 1.7.2

Dokaz. S obzirom da je $p \not\subset \pi$ i $q \subset \pi$ imamo da je $p \neq q$. Iz relacija $p \neq q$ i $p \parallel q$ sledi da prave p i q određuju neku ravan σ (Sl. 1.7.2). Pri tome je $\pi \neq \sigma$ i $q \subset \pi \cap \sigma$, pa je $q = \pi \cap \sigma$. Ako pretpostavimo da prava p prodire ravan π u nekoj tački O biće $O \in q$. U tom bi slučaju bi važila relacija $p \cap q = O$, što je nemoguće. Stoga je $p \cap \pi = \emptyset$, i prema tome $p \parallel \pi$. $\square$

Definicija 1.7.3. Kaže se da je u prostoru E^3 ravan α *paralelna* sa ravni β, i simbolički obeležava sa $\alpha \parallel \beta$, ako je $\alpha = \beta$ ili $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Teorema 1.7.3. Relacija paralelnosti definisana na skupu ravni prostora E^3 je relacija ekvivalencije.

Dokaz. Da je relacija paralelnosti definisana na skupu ravni prostora E^3 refleksivna i simetrična sleduje neposredno iz definicije; dokažimo da je ona i tranzitivna. U tom cilju obeležimo sa α, β, γ, tri ravni prostora E^3 takve da je $\alpha \parallel \beta$ i $\beta \parallel \gamma$. Ako je $\alpha = \beta$ ili $\beta = \gamma$, neposredno sledi da je $\alpha \parallel \gamma$. Pretpostavimo da je $\alpha \neq \beta$ i $\beta \neq \gamma$. Ako bi se ravni α i γ sekle po nekoj pravoj s, tada bi proizvoljna ravan σ koja seče pravu s u nekoj tački S i ravan β po nekoj pravoj b, sekla ravni α i γ po dvema raznim pravama a i c koje sadrže tačku S i paralelne su s pravom b, što je nemoguće. Stoga je $\alpha = \gamma$ ili $\alpha \cap \gamma = \emptyset$, pa je $\alpha \parallel \gamma$. $\square$

Zadaci

Zadatak 1.1. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, dokazati da su svake dve od tih tačaka među sobom različite.

Zadatak 1.2. Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke. Dokazati da su svake dve od tih tačaka među sobom različite.

Zadatak 1.3. Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke, dokazati da su svake tri od tih tačaka nekolinearne.

Zadatak 1.4. Dokazati da u prostoru E^3 postoje mimoilazne (nekomplanarne) prave.

Zadatak 1.5. Dokazati da unutrašnje tačke P, Q, R, stranica BC, CA, AB trougla ABC ne pripadaju jednoj pravoj.

Zadatak 1.6. Ako su P i Q unutrašnje tačke stranica AB i AC trougla ABC u ravni E^2, dokazati da se duži BQ i CP seku u nekoj tački S.

Zadatak 1.7. Ako su P, Q, R unutrašnje tačke stranica BC, CA, AB trougla ABC sadržanog u ravni E^2, dokazati da se duži AP i QR seku u nekoj tački S.

Zadatak 1.8. Ako u ravni E^2 neka prava s seče jednu od dveju među sobom paralelnih pravih p i q, dokazati da prava s seče i drugu od tih dveju pravih.

Zadatak 1.9. Ako u prostoru E^3 neka prava s prodire jednu od dveju među sobom paralelnih ravni α i β, dokazati da prava s prodire i drugu od tih dveju ravni.

Zadatak 1.10. Ako u prostoru E^3 neka ravan σ seče jednu od dveju međusobom paralelnih ravni α i β, dokazati da ravan σ seče i drugu od tih dveju ravni.

Zadatak 1.11. Ako su a i b prave po kojima neka ravan σ seče dve među sobom paralelne ravni α i β prostora E^3, dokazati da je $a \parallel b$.

Zadatak 1.12. Ako u prostoru E^3 dve razne ravni α i β imaju zajedničku tačku C i seku neku ravan σ po dvema paralelnim pravama a i b, dokazati da se ravni α i β seku po pravoj c koja zadovoljava relacije $C \in c \parallel b$.

Zadatak 1.13. Ako su α i β dve paralelne ravni prostora E^3 i p prava u tom prostoru paralelna sa ravni α, dokazati da je $p \parallel \beta$.

Zadatak 1.14. Ako su a i b dve paralelne prave prostora E^3 i π ravan tog prostora paralelna sa pravom a, dokazati da je $\pi \parallel b$.

Zadatak 1.15. Neka su α i β dve razne ravni prostora E^3. Ako u ravni α postoje dve prave p i q koje se seku u nekoj tački O i zadovoljavaju relacije $p \parallel \beta$ i $q \parallel \beta$, dokazati da je $\alpha \parallel \beta$.

Zadatak 1.16. Dokazati da u prostoru E^3 postoji jedinstvena ravan α koja sadrži datu tačku A i paralelna je s datom ravni π.

Zadatak 1.17. Dokazati da su trougaone površi u ravni E^2 konveksni likovi.

Zadatak 1.18. Dokazati da je četvorougaona površ u ravni E^2 konveksna ako i samo ako se njene dijagonale seku.

Zadatak 1.19. Ako sva temena neke poligonske površi ω pripadaju nekoj konveksnoj figuri Φ, dokazati da sve tačke površi ω pripadaju figuri Φ.

Zadatak 1.20. Dokazati da presek konačnog broja od m konveksnih likova prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ predstavlja konveksan lik.

Zadatak 1.21.* Ako je $\omega_1, \ldots, \omega_m$ konačan skup od m duži koje pripadaju nekoj pravoj p i od kojih svake dve imaju najmanje jednu zajedničku tačku, dokazati da svih m duži poseduje najmanje jednu zajedničku tačku.

Zadatak 1.22.* Ako konačan skup od m polupravih neke prave p pokriva celu tu pravu, dokazati da u tom skupu polupravih postoje takve dve poluprave koje takođe pokrivaju celu tu pravu.

Zadatak 1.23.* (Helly, 1913) Ako je $\omega_1, \ldots, \omega_m$ konačan skup od m $(m \geq 4)$ konveksnih likova neke ravni E^2 od kojih svake tri imaju najmanje jednu zajedničku tačku, dokazati da svih m likova poseduje najmanje jednu zajedničku tačku.

Zadatak 1.24.* Ako konačan skup od $m(m \geq 4)$ poluravni neke ravni E^2 pokriva celu tu ravan, dokazati da u tom skupu poluravni postoje tri poluravni koje pokrivaju celu ravan E^2.

Glava 2

Izometrijske transformacije prostora E^n

2.1 Definicija i opšta svojstva izometrijskih transformacija prostora E^n

Aksiome podudarnosti omogućuju da u geometriji prostora E^n ($n = 1, 2, 3$) definišemo naročitu klasu transformacija tog prostora koje imaju veoma široku primenu. To su izometrijske transformacije ili geometrijska kretanja prostora E^n.

Definicija 2.1.1. *Izometrijskom transformacijom* ili *geometrijskim kretanjem* prostora E^n ($n = 1, 2, 3$) nazivamo bijektivnu transformaciju $\mathcal{I}\colon E^n \to E^n$ takvu da za svake dve tačke X, $Y \in E^n$ i njihove slike X', $Y' \in E^n$ važi relacija $(X, Y) \cong (X', Y')$.

Iz same definicije mogu se izvesti neka neposrednija svojstva izometrijskih transformacija. Budući da za svake dve tačke X, $Y \in E^n$ važi relacija $(X, Y) \cong (X, Y)$, identična transformacija $\mathcal{E}$, tj. *koincidencija* koja svaku tačku prostora E^n prevodi u tu istu tačku, predstavlja izometrijsku transformaciju tog prostora. Narednim teoremama izvešćemo najvažnija svojstva izometrijskih transformacija prostora E^n.

Teorema 2.1.1. Kompozicija dveju izometrijskih transformacija prostora E^n predstavlja takođe izometrijsku transformaciju.

Dokaz. Neka su $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ bilo koje dve izometrijske transformacije prostora E^n. Ako obeležimo sa X i Y proizvoljne tačke tog prostora, sa X_1 i Y_1 tačke koje u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}_1$ odgovaraju tačkama X i Y, a sa X_2 i Y_2 tačke koje u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}_2$ odgovaraju tačkama X_1 i Y_1, tada u kompoziciji $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ tačkama X i Y odgovaraju tačke X_2 i Y_2. Pri tome je $(X, Y) \cong (X_1, Y_1)$ i $(X_1, Y_1) \cong (X_2, Y_2)$, pa je $(X, Y) \cong (X_2, Y_2)$. Stoga kompozicija $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ predstavlja takođe izometrijsku transformaciju prostora E^n. $\square$

Teorema 2.1.2. Inverzna transformacija izometrijske transformacije prostora E^n predstavlja takođe izometrijsku transformaciju tog prostora.

Dokaz. Neka je $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija prostora E^n. Ako obeležimo sa X i Y proizvoljne tačke tog prostora a sa X' i Y' tačke koje u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ odgovaraju tačkama X i Y, biće $(X,Y) \cong (X',Y')$. S obzirom da je relacija podudarnosti parova tačaka simetrična, biće $(X',Y') \cong (X,Y)$, pa je inverzna transformacija $\mathcal{I}^{-1}$ takođe izometrijska transformacija. □

Teorema 2.1.3. Skup svih izometrijskih transformacija prostora E^n $(n = 1,\, 2,\, 3)$ predstavlja grupu.

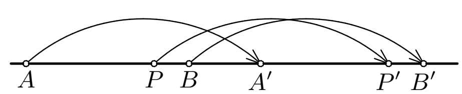
Dokaz. Prema teoremi 2.1.1 kompozicija svake dve izometrijske transformacije $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ prostora E^n predstavlja takođe izometrijsku transformaciju tog prostora, a prema teoremi 2.1.2 inverzna transformacija $\mathcal{I}^{-1}$ izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ prostora E^n predstavlja takođe izometrijsku transformaciju tog prostora. Budući da su izometrijske transformacije prostora E^n elementi grupe svih bijektivnih transformacija tog prostora, iz navedenih dveju osobina sleduje da skup svih izometrijskih transformacija prostora E^n predstavlja podgrupu pomenute grupe. □

Definicija 2.1.2. Grupu koja se sastoji iz svih izometrijskih transformacija prostora E^n nazivamo *grupom izometrijskih transformacija tog prostora* i simbolički obeležavamo sa $G(\mathcal{I})$.

Narednim trima teoremama navode se uslovi pod kojima je izometrijska transformacija euklidske prave, euklidske ravni i euklidskog prostora jednoznačno određena. U izgradnji teorije izometrijskih transformacija one imaju izuzetan značaj. Primera radi mi ćemo u ovom tečaju dokazati samo prvu od tih teorema; dokazi ostalih dveju teorema nešto su složeniji i mi ih zbog toga ovde nećemo dokazivati. Pomenućemo samo da se one izvode višestrukom primenom aksiome III.7 i teorema 1.4.4 i 1.4.5.

Teorema 2.1.4. Ako su A, B dve razne tačke neke prave p i A', B' tačke prave p takve da je $(A,B) \cong (A',B')$, tada postoji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I}\colon p \to p$ takva da je

$$\mathcal{I}(A) = A' \quad \text{i} \quad \mathcal{I}(B) = B'.$$



Sl. 2.1.4

Dokaz. S obzirom da je $A \neq B$ i $(A,B) \cong (A',B')$, biće $A' \neq B'$ (Sl. 2.1.4). Prema teoremi 1.5.3, svakoj tački $P \in p$ odgovara jedinstvena tačka $P' \in p$ takva da je $(A,P) \cong (A',P')$ i $(B,P) \cong (B',P')$. Takvu transformaciju prave obeležimo sa

$\mathcal{I}$, zatim dokažimo da je ona izometrijska. Ako obeležimo sa X i Y bilo koje dve tačke prave p a sa X' i Y' njihove odgovarajuće tačke, biće

$$(A,X) \cong (A',X'),\ (B,X) \cong (B',X') \quad \text{i} \quad (A,Y) \cong (A',Y'),\ (B,Y) \cong (B',Y').$$

Budući da je transformacija $\mathcal{I}$ uređena, poretku tačaka A, B, X, Y na pravoj p odgovara analogan poredak tačaka A', B', X', Y' na pravoj p. Stoga je $(X,Y) \cong (X',Y')$, pa je transformacija $\mathcal{I}$ izometrijska. $\square$

Posledica. Ako izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prave p poseduje dve razne invarijantne tačke ona predstavlja koincidenciju.

Teorema 2.1.5. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni E^2 i A', B', C' tačke te iste ravni takve da je $(A,B,C) \cong (A',B',C')$, tada postoji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I}\colon E^2 \to E^2$ takva da je

$$\mathcal{I}(A) = A', \quad \mathcal{I}(B) = B', \quad \mathcal{I}(C) = C'.$$

Posledica. Ako izometrijska transformacija $\mathcal{I}\colon E^2 \to E^2$ poseduje tri nekolinearne invarijantne tačke, ona predstavlja koincidenciju.

Teorema 2.1.6. Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke prostora E^3 i A', B', C', D' tačke tog istog prostora takve da je $(A,B,C,D) \cong (A',B',C',D')$, tada postoji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I}\colon E^3 \to E^3$ takva da je

$$\mathcal{I}(A) = A', \quad \mathcal{I}(B) = B', \quad \mathcal{I}(C) = C', \quad \mathcal{I}(D) = D'.$$

Posledica. Ako izometrijska transformacija $\mathcal{I}\colon E^3 \to E^3$ poseduje četiri nekomplanarne invarijantne tačke, ona predstavlja koincidenciju.

2.2 Relacija podudarnosti geometrijskih figura

U prethodnim izlaganjima bilo je reči o relaciji podudarnosti parova tačaka i o uopštenju te relacije na konačne skupove tačaka u euklidskom prostoru E^n $(n = 1,2,3)$. Izometrijske transformacije omogućuju da definišemo relaciju podudarnosti bilo kojih figura u tom prostoru.

Definicija 2.2.1. Kaže se da je u prostoru E^n $(n = 1,2,3)$ figura Φ *podudarna* ili *kongruentna* sa figurom Φ', i simbolički obeležava sa $\Phi \cong \Phi'$, ako postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ tog prostora takva da je $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$.

Iz ove definicije neposredno sleduje da ranije ustanovljena relacija podudarnosti konačnih skupova tačaka predstavlja samo specijalan slučaj ove mnogo opštije relacije podudarnosti geometrijskih figura. Od svojstava kojima se odlikuje uvedena relacija izvodimo samo najvažnije; ta svojstva se izražavaju sledećom teoremom.

Teorema 2.2.1. Relacija podudarnosti geometrijskih figura u euklidskom prostoru E^n $(n = 1, 2, 3)$ je relacija ekvivalencije.

Dokaz. S obzirom da je identična transformacija $\mathcal{E}$ prostora E^n izometrijska i da za svaku figuru Φ tog prostora važi relacija $\mathcal{E}(\Phi) = \Phi$, imamo da je $\Phi \cong \Phi$, pa je relacija podudarnosti figura u prostoru E^n refleksivna.

Ako su Φ i Φ' dve figure u prostoru E^n takve da je $\Phi \cong \Phi'$, prema definiciji 2.2.1 postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^n takva da je $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$. Budući da inverzna transformacija $\mathcal{I}^{-1}$ izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ predstavlja takođe izometrijsku transformaciju, iz relacije $\mathcal{I}^{-1}(\Phi') = \Phi$ sledi da je $\Phi' \cong \Phi$, pa je relacija podudarnosti figura u prostoru E^n simetrična.

Ako su Φ, Φ', Φ'' tri figure u prostoru E^n takve da je $\Phi \cong \Phi'$ i $\Phi' \cong \Phi''$, prema definiciji 2.2.1 postoje izometrijske transformacije $\mathcal{I}'$ i $\mathcal{I}''$ prostora E^n takve da je $\mathcal{I}'(\Phi) = \Phi'$ i $\mathcal{I}''(\Phi') = \Phi''$. S obzirom da kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{I}'' \circ \mathcal{I}'$ predstavlja izometrijsku transformaciju prostora E^n, iz relacije $\mathcal{I}(\Phi) = \mathcal{I}'' \circ \mathcal{I}'(\Phi) = \Phi''$ sledi da je $\Phi \cong \Phi''$, pa je relacija podudarnosti figura u prostoru E^n tranzitivna. $\square$

Dokazana teorema omogućuje da skup svih figura euklidskog prostora E^n razvrstavamo na tzv. klase ekvivalencije, kojih ima neizmerno mnogo. Takve su npr. klase podudarnih duži, klase podudarnih uglova, klase podudarnih trouglova, klase podudarnih poligona, klase podudarnih diedara, klase podudarnih poliedara, itd.

2.3 Podudarnost duži

1. Kretanje materijalnih figura u fizikalnom (opažajnom) prostoru navodi nas na zaključak da duž može da bude podudarna jedino sa duži, da ugao može da bude podudaran jedino sa uglom, da trougao može da bude podudaran jedino sa trouglom, itd. U ranijoj nastavi geometrije do takvih zaključaka dolazili smo empirijskim putem; tvrđenja takve prirode smatrana su očiglednim, te nisu dokazivana. Budući da se u deduktivnoj geometrijskoj teoriji takva tvrđenja ne nalaze na spisku aksioma, ona se dokazuju. Stoga, narednom teoremom izvodimo taj dokaz za slučaj kada je zadata figura duž.

Teorema 2.3.1. U izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ duži odgovara duž.

Dokaz. Neka su A i B dve razne tačke prostora E^n, a A' i B' njima odgovarajuće tačke u izometriji $\mathcal{I}$. Ako je $X \in (AB)$ i $X' = \mathcal{I}(X)$, tada je $X' \in (A'B')$. Zaista, primenom teoreme 1.5.3, iz relacija

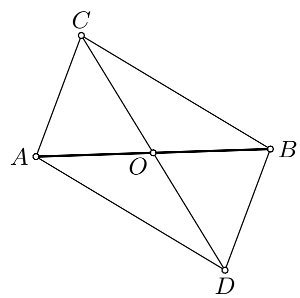
$$(A, X) \cong (A', X'),\ (B, X) \cong (B', X'),\ \mathcal{B}(A, X, B)$$

sledi da je $\mathcal{B}(A', X', B')$, pa je $X' \in (A'B')$. Stoga je $\mathcal{I}(AB) \subset (A'B')$. Istim postupkom dokazuje se da je i $(A'B') \subset \mathcal{I}(AB)$. Stoga je $\mathcal{I}(AB) = (A'B')$. $\square$

2. Relacija podudarnosti duži omogućuje da ustanovimo niz pojmova koji se odnose na duži; definišimo najpre središte duži.

Definicija 2.3.1. *Središtem duži* AB nazivamo tačku O te duži takvu da je $AO \cong OB$.

Teorema 2.3.2. Svaka duž ima jedno i samo jedno središte.

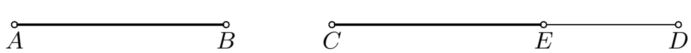


Sl. 2.3.2

Dokaz. Neka je AB proizvoljna duž, C tačka van prave AB i π ravan određena tačkama A, B, C (Sl. 2.3.2). S obzirom da je $(AB) \cong (BA)$, prema aksiomi III.6 u ravni π s one strane prave AB s koje nije tačka C postoji jedinstvena tačka D takva da je $(A, C) \cong (B, D)$ i $(B, C) \cong (A, D)$. Stoga prema teoremi 2.1.5 postoji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni π koja prevodi tačke A, B, C respektivno u tačke B, A, D. U toj transformaciji pravama AB i CD odgovaraju respektivno prave BA i DC, te presečnoj tački O pravih AB i CD odgovara ta ista tačka. Dokažimo da je tačka O središte duži AB. Iz relacija $\mathcal{I}(O) = O$, $\mathcal{I}(A) = B$, $\mathcal{I}(B) = A$ sledi da je $(OA) \cong (OB)$ i $O \neq A, B$. Tačka O nije na produženju duži AB, jer bi u protivnom poluprave OA i OB bile istovetne, te bi iz relacije $(O, A) \cong (O, B)$ sledila relacija $A = B$, što je nemoguće. Stoga je $O \in (AB)$, i prema tome tačka O središte duži AB.

Dokažimo da je tačka O jedinstveno središte duži AB. Ako bi duž AB imala sem središta O još neko središte O', tada bi u izometriji koja prevodi pravu AB u pravu BA postojale dve invarijantne tačke O i O', te bi u toj izometriji svaka tačka prave AB bila invarijantna, što je nemoguće jer tački A odgovara tačka B pri čemu $A \neq B$. □

3. Među pojmovima koji se izvode iz relacije podudarnosti duži nalaze se i poredbene relacije nad skupom duži koje izražavamo rečima „manja od“ i „veća od“.



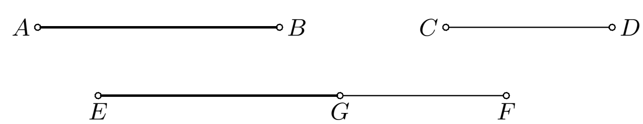
Sl. def. 2.3.2

Definicija 2.3.2. Ako su AB i CD dve duži i ako unutar duži CD postoji tačka E takva da je $AB \cong CE$, tada kažemo da je duž AB *manja* od duži CD i simbolički obeležavamo sa

$$AB < CD,$$

ili da je duž CD *veća* od duži AB i simbolički obeležavamo sa $CD > AB$ (Sl. def. 2.3.2).

Pretpostavljamo da su svojstva ovih relacija čitaocima poznata od ranije, te ih ovde nećemo navoditi. Pomenućemo još samo da se pomoću relacije podudarnosti duži ustanovljuju i neke operacije nad skupom duži; to su operacije sabiranja i oduzimanja duži, zatim operacije množenja i delenja duži nekim brojem.



Sl. def. 2.3.3

Definicija 2.3.3. Kaže se da je duž EF jednaka *zbiru dveju duži* AB i CD i simbolički obeležava sa

$$EF = AB + CD,$$

ako na duži EF postoji tačka G takva da je $AB \cong EG$ i $CD \cong GF$. Kaže se da je duž EF jednaka *razlici duži* AB i CD, i simbolički obeležava sa

$$EF = AB - CD,$$

ako je $AB = CD + EF$. Kaže se da je duž CD jednaka *proizvodu duži* AB *i prirodnog broja* k, i simbolički obeležava sa $CD = k \cdot AB$, ako je

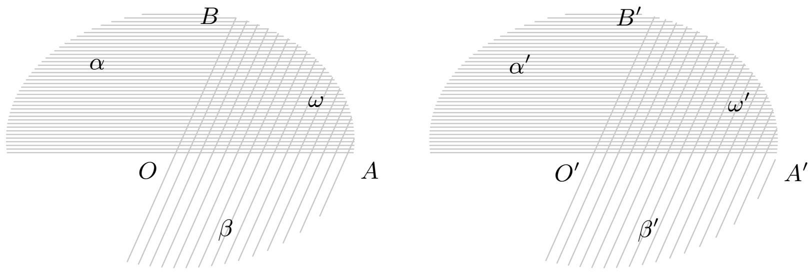
$$CD = \underbrace{AB + AB + \cdots + AB}_{\text{k puta}}$$

Definicija proizvoda duži sa bilo kojim pozitivnim brojem nešto je složenija, te je ovde nećemo navoditi. Napominjemo samo da je ona u tesnoj vezi sa merenjem duži koje je čitaocima poznato od ranije.

2.4 Podudarnost uglova

1. Govoriti o klasi podudarnih uglova ima smisla tek posle ustanovljavanja sledeće teoreme:

Teorema 2.4.1. U svakoj izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ ravni E^2 uglu odgovara ugao.



Sl. 2.4.1

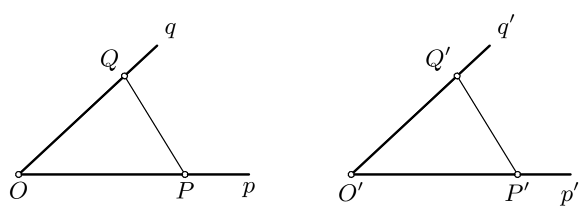
Dokaz. Neka je u ravni E^2 dat ugao ω. Ako je taj ugao opružen, dokaz se izvodi neposredno, jer u izometrijskoj transformaciji ravni E^2 poluravni uvek odgovara poluravan. Ako ugao ω nije opružen, dovoljno je razmotriti slučaj kada je on konveksan (Sl. 2.4.1). Obeležimo sa OA i OB krake ugla ω. U izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ nekolinearnim tačkama O, A, B odgovaraju takođe nekolinearne tačke O', A', B', a ugaonoj liniji AOB neka ugaona linija $A'O'B'$. Ako poluravni (OA, B), (OB, A) i $(O'A', B')$, $(O'B', A')$ obeležimo respektivno sa α, β i α', β' biće $\mathcal{I}(\alpha) = \alpha'$, $\mathcal{I}(\beta) = \beta'$, $\alpha \cap \beta = \omega$, $\alpha' \cap \beta' = \omega'$, pa je

$$\mathcal{I}(\omega) = \mathcal{I}(\alpha \cap \beta) = \mathcal{I}(\alpha) \cap \mathcal{I}(\beta) = \alpha' \cap \beta' = \omega'.$$

□

Teorema 2.4.2. Dva konveksna ili dva konkavna ugla pq i $p'q'$ sa temenima O i O' su podudarna ako i samo ako na kracima p, q, p', q' tih uglova postoje respektivno tačke P, Q, P', Q' takve da je

$$OP \cong O'P', \quad OQ \cong O'Q', \quad PQ \cong P'Q'.$$



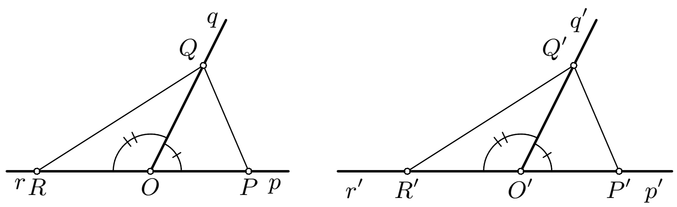
Sl. 2.4.2

Dokaz. Ako su uglovi pq i $p'q'$ opruženi, dokaz sleduje neposredno. Pretpostavimo da uglovi pq i $p'q'$ nisu opruženi (Sl. 2.4.2). Ako je $\measuredangle pq \cong \measuredangle p'q'$, postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 koja prevodi $\measuredangle pq$ na $\measuredangle p'q'$. U toj transformaciji proizvoljnim tačkama $P \in p$ i $Q \in q$ odgovaraju respektivno tačke $P' \in p'$ i $Q' \in q'$ takve da je $(O, P, Q) \cong (O', P', Q')$, i prema tome

$$OP \cong O'P', \quad OQ \cong O'Q', \quad PQ \cong P'Q'.$$

Obratno, ako na kracima p, q, p', q', dvaju konveksnih ili dvaju konkavnih uglova postoje tačke P, Q, P', Q' takve da je $OP \cong O'P'$, $OQ \cong O'Q'$, $PQ \cong P'Q'$, tada trojke nekolinearnih tačaka O, P, Q i O', P', Q', zadovoljavaju relaciju $(O, P, Q) \cong (O', P', Q')$ te prema poznatoj teoremi postoji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 koja prevodi tačke O, P, Q u tačke O', P', Q', i prema tome $\measuredangle pq$ na $\measuredangle p'q'$. Stoga je $\measuredangle pq \cong \measuredangle p'q'$. $\square$

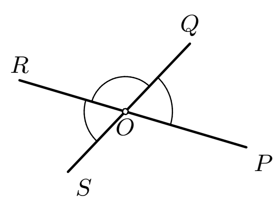
Teorema 2.4.3. Naporedni uglovi dvaju podudarnih neopruženih konveksnih uglova takođe su među sobom podudarni.



Sl. 2.4.3

Dokaz. Neka su pq i $p'q'$ dva neopružena konveksna među sobom podudarna ugla (Sl. 2.4.3), a qr i $q'r'$ njihovi naporedni uglovi. Ako obeležimo sa O, O' temena uglova pq i $p'q'$ i sa P, Q, P', Q' tačke polupravih p, q, p', q' takve da je $OP \cong O'P'$ i $OQ \cong O'Q'$, prema prethodnoj teoremi biće $PQ \cong P'Q'$. Ako zatim obeležimo sa R i R' tačke polupravih r i r' takve da je $OR \cong O'R'$, primenom aksiome III.7 nalazimo da je $QR \cong Q'R'$ pa je i $\measuredangle qr \cong \measuredangle q'r'$. $\square$

Teorema 2.4.4. Unakrsni uglovi među sobom su podudarni.

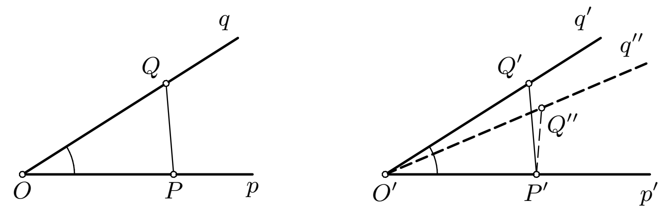


Sl. 2.4.4

Dokaz. Neka su POQ i ROS dva unakrsna ugla takva da kraci OP i OR pripadaju jednoj, a kraci OQ i OS pripadaju drugoj pravoj (Sl. 2.4.4). Budući da uglovi POQ i QOR imaju zajednički krak OQ dok im ostala dva kraka sačinjavaju jednu pravu, oni su naporedni. Istim postupkom dokazuje se da su i uglovi ROQ i ROS naporedni. Budući da su uglovi QOR i ROQ među sobom podudarni, prema prethodnoj teoremi i njihovi naporedni uglovi POQ i ROS među sobom su podudarni. $\square$

Teorema 2.4.5. Za svaki $\measuredangle pq$ i svaku polupravu p' neke ravni E^2 postoji u zadatoj orijentaciji K te ravni jedinstven $\measuredangle p'q'$ takav da je

$$\measuredangle pq \cong \measuredangle p'q' \quad \text{i} \quad \measuredangle p'q' \in K.$$



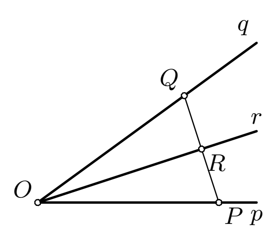
Sl. 2.4.5

Dokaz. Ako je $\measuredangle pq$ opružen, dokaz sleduje neposredno. Razmotrimo slučaj kada $\measuredangle pq$ nije opružen. Da bismo uprostili izlaganje pretpostavićemo da je $\measuredangle pq$ konveksan; slučaj kada je on konkavan dokazuje se analognim postupkom. Ako obeležimo sa P i Q proizvoljne tačke polupravih p i q, sa O teme ugla pq, sa O' kraj poluprave p' i sa P' tačku te poluprave takvu da je $OP \cong O'P'$ (Sl. 2.4.5), tada prema aksiomi III.6. u ravni E^2 postoji jedinstvena tačka Q' takva da je $(P,O,Q) \cong (P',O',Q')$ i konveksni $\measuredangle P'O'Q'$ iz orijentacije K. Ako polupravu $O'Q'$ obeležimo sa q', prema ranije dokazanoj teoremi, imamo da je $\measuredangle pq \cong \measuredangle p'q'$ i $\measuredangle p'q' \in K$. Indirektnim postupkom dokažimo da je q' jedina poluprava koja zadovoljava te uslove. Ako bi sem poluprave q' postojala još neka takva poluprava q'' i ako bi Q'' bila tačka te poluprave takva da je $OQ \cong O'Q''$, važila bi relacija $PQ \cong P'Q''$. U tom slučaju postojale bi u ravni E^2 s iste strane prave $O'P'$ dve razne tačke Q' i Q'' takve da je $(P,O,Q) \cong (P',O',Q')$ i $(P,O,Q) \cong (P',O',Q'')$, što je prema aksiomi III.6 nemoguće. □

2. Relacija podudarnosti uglova omogućuje da ustanovimo niz novih pojmova koji se odnose na uglove; od tih pojmova navodimo najpre pojam raspolovnice ili bisektrise ugla.

Definicija 2.4.1. Raspolovnicom ili bisektrisom nekog ugla POQ nazivamo polupravu OR koja pripada tom uglu i koja razlaže taj ugao na dva podudarna ugla.

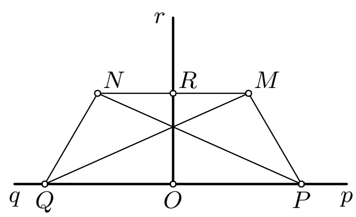
Teorema 2.4.6. Svaki ugao ima jednu i samo jednu bisektrisu.



Sl. 2.4.6(a)

Dokaz. Neka je u ravni E^2 dat $\measuredangle pq$. Ako taj ugao nije opružen (Sl. 2.4.6(a)) obeležimo sa P i Q tačke polupravih p i q takve da je $OP \cong OQ$. Pri tome su O, P, Q i O, Q, P dve trojke nekolinearnih tačaka ravni E^2 takvih da je $(O,P,Q) \cong (O,Q,P)$, te postoji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni

E^2 koja prevodi tačke O, P, Q u tačke O, Q, P. Iz relacija $\mathcal{I}(P) = Q$ i $\mathcal{I}(Q) = P$ sleduje da u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ središtu R duži PQ odgovara ta ista tačka. Pri tome su O i R dve razne invarijantne tačke transformacije $\mathcal{I}$, pa je svaka tačka prave OR invarijantna. Ako je R' tačka prave OR takva da je $\mathcal{B}(R, O, R')$, jedna i samo jedna od polupravih OR i OR', obeležimo je sa r, pripada uglu pq. Stoga ugao pq ima jednu i samo jednu bisektrisu.

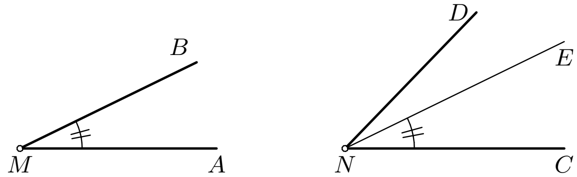


Sl. 2.4.6(b)

Ako je $\angle pq$ opružen (Sl. 2.4.6(b)), obeležimo sa P i Q tačke polupravih p i q takve da je $OP \cong OQ$, sa M bilo koju unutrašnju tačku ugla pq i sa N tačku toga ugla takvu da je $PM \cong QN$ i $QM \cong PN$. Pri tome su P, Q, M i Q, P, N dve trojke nekolinearnih tačaka ravni E^2 takve da je $(P, Q, M) \cong (Q, P, N)$, te postoji jedinstvena izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 koja prevodi tačke P, Q, M u tačke Q, P, N. Središta O i R duži PQ i MN su invarijantne tačke te transformacije, pa je svaka tačka prave OR invarijantna. Stoga je polupráva OR i samo ta polupráva bisektrisa ugla pq. □

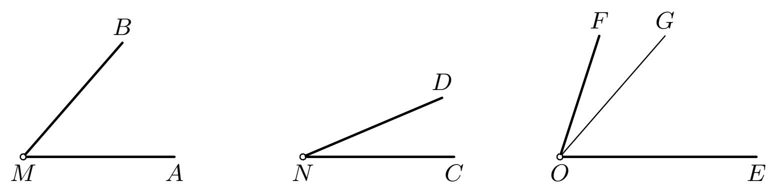
3. Među pojmovima koji se definišu pomoću relacije podudarnosti uglova ističemo i poredbene relacije nad skupom uglova koje izražavamo rečima „manji od“ i „veći od“.

Definicija 2.4.2. Ako su AMB i CND dva ugla i ako unutar ugla CND postoji polupráva NE takva da je $\measuredangle AMB \cong \measuredangle CNE$, tada kažemo da je $\measuredangle AMB$ *manji od* $\measuredangle CND$ i simbolički obeležavamo sa $\measuredangle AMB < \measuredangle CND$, ili da je $\measuredangle CND$ *veći od* $\measuredangle AMB$ i simbolički obeležavamo sa $\measuredangle CND > \measuredangle AMB$ (Sl. def. 2.4.2).



Sl. def. 2.4.2

Pretpostavljamo da su svojstva ovih relacija čitaocima poznata od ranije, ovde ih nećemo izvoditi. Pomenućemo još da se pomoću relacije podudarnosti uglova definišu i neke operacije nad skupom uglova; to su operacije sabiranja i oduzimanja uglova, zatim operacija množenja i delenja uglova brojem.



Sl. def. 2.4.3

Definicija 2.4.3. Kaže se da je ugao EOF jednak *zbiru dvaju uglova* AMB i CND, i simbolički obeležava sa

$$\measuredangle EOF = \measuredangle AMB + \measuredangle CND,$$

ako unutar ugla EOF postoji poluprava OG koja razlaže taj ugao na dva ugla EOG i GOF takva da je (Sl. def. 2.4.3)

$$\measuredangle AMB \cong \measuredangle EOG \quad \text{i} \quad \measuredangle CND \cong \measuredangle GOF.$$

Kaže se da je ugao AMB jednak *razlici uglova* EOF i CND, i simbolički obeležava sa

$$\measuredangle AMB = \measuredangle EOF - \measuredangle CND$$

ako je $\measuredangle AMB + \measuredangle CND = \measuredangle EOF$. Kaže se da je ugao CND jednak *proizvodu ugla* AMB *i prirodnog broja* k, i simbolički obeležava sa $\measuredangle CND = k\measuredangle AMB$, ako je

$$\measuredangle CND = \underbrace{\measuredangle AMB + \measuredangle AMB + \cdots + \measuredangle AMB}_{k \text{ puta}}.$$

Definicija proizvoda nekog ugla sa bilo kojim pozitivnim brojem nešto je složenija, te je ovde nećemo navoditi. Pomenućemo samo da je ona u tesnoj vezi sa merenjem uglova koje je čitaocima poznato od ranije.

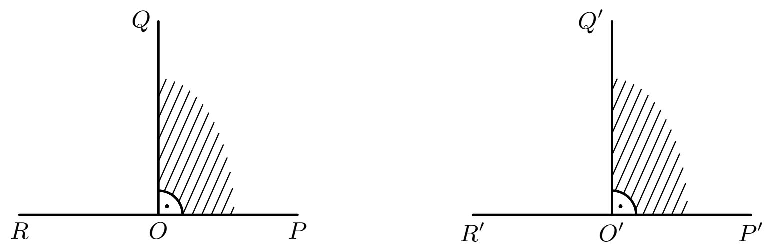
2.5 Pravi, oštri i tupi uglovi. Upravne prave

1. Poredbene relacije definisane na skupu uglova omogućuju da uvedemo pojam pravog, oštrog i tupog ugla.

Definicija 2.5.1. Za neki ugao POQ kaže se da je *prav*, *oštar* ili *tup* u zavisnosti od toga da li je on podudaran, manji od ili veći od svojeg naporednog ugla QOR.

Iz definicije neposredno zaključujemo da su pravi, oštri i tupi uglovi definisani isključivo na skupu uglova koji su manji od opruženog ugla. Egzistencija pravog ugla sleduje neposredno iz stava prema kojem svaki ugao, prema tome i opružen ugao, ima svoju bisektrisu. Pomenimo još neka značajna svojstva kojima raspolažu pravi uglovi.

Teorema 2.5.1. Ugao podudaran s nekim pravim uglom takođe je prav.



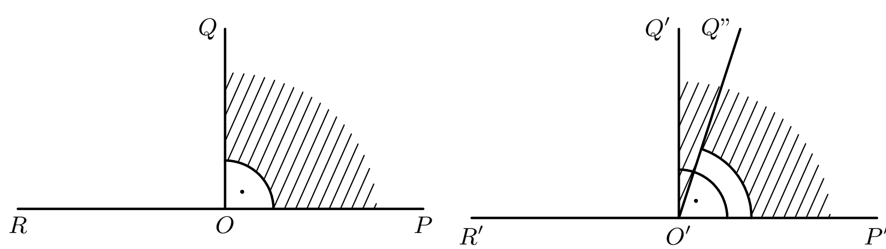
Sl. 2.5.1

Dokaz. Neka je $\measuredangle POQ$ podudaran s pravim $\measuredangle P'O'Q'$ (Sl. 2.5.1). Ako obeležimo sa OR i $O'R'$ poluprave komplementne sa polupravima OP i $O'P'$, tada iz relacije $\measuredangle POQ \cong \measuredangle P'O'Q'$ sledi da je $\measuredangle QOR \cong \measuredangle Q'O'R'$. Po pretpostavci je $\measuredangle P'O'Q'$ prav, pa je $\measuredangle P'O'Q' \cong \measuredangle Q'O'R'$. Na taj način imamo da je

$$\measuredangle POQ \cong \measuredangle P'O'Q' \cong \measuredangle Q'O'R' \cong \measuredangle QOR,$$

pa je $\measuredangle POQ \cong \measuredangle QOR$. Stoga je $\measuredangle POQ$ prav. □

Teorema 2.5.2. Pravi uglovi su među sobom podudarni.



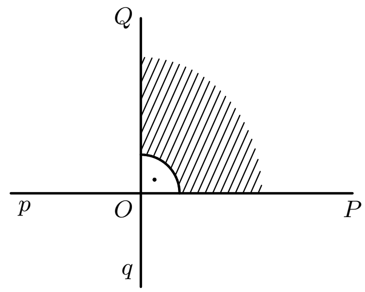
Sl. 2.5.2

Dokaz. Neka su POQ i $P'O'Q'$ pravi uglovi, dokažimo da su oni među sobom podudarni. Ako bi naprotiv neki od tih uglova bio veći od drugog, npr. $\measuredangle P'O'Q' > \measuredangle POQ$, tada bi u uglu $P'O'Q'$ postojala poluprava $O'Q''$ takva da je $\measuredangle POQ \cong \measuredangle P'O'Q''$ (Sl. 2.5.2). Prema prethodnoj teoremi $\measuredangle P'O'Q''$ je prav. Stoga, ako obeležimo sa $O'R'$ polupravu komplementnu s polupravom $O'P'$, tada su zadovoljene relacije

$$\measuredangle P'O'Q' \cong \measuredangle Q'O'R' \quad \text{i} \quad \measuredangle P'O'Q'' \cong \measuredangle Q''O'R',$$

pa je svaka od polupravih $O'Q'$ i $O'Q''$ bisektrisa istog opruženog ugla $P'O'R'$. Međutim, to je nemoguće jer ugao može da ima samo jednu bisektrisu. □

2. Pojam pravog ugla omogućuje da na skupu pravih jedne ravni ustanovimo jednu veoma značajnu binarnu relaciju, to je relacija upravnosti ili normalnosti prave na pravoj.

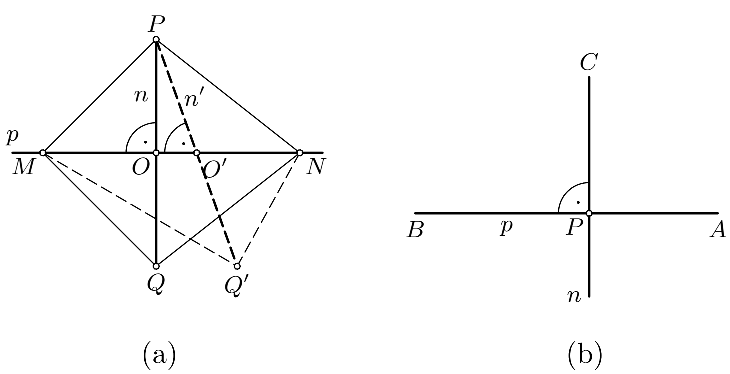


Sl. def. 2.5.2

Definicija 2.5.2. Ako dve prave p i q sadrže krake OP i OQ nekog pravog ugla POQ, tada kažemo da je prava p *upravna* ili *normalna* na pravoj q, i simbolički obeležavamo sa $p \perp q$ (Sl. def. 2.5.2).

Iz definicije neposredno sleduje da je relacija upravnosti prave na pravoj simetrična, tj. da iz relacije $p \perp q$ sleduje relacija $q \perp p$. S toga se za takve prave dopušta reći da su upravne među sobom. Navodimo najvažnija svojstva kojima se odlikuju upravne prave.

Teorema 2.5.3. U ravni E^2 postoji jedinstvena prava n koja sadrži datu tačku $P \in E^2$ a upravna je na datoj pravoj p.



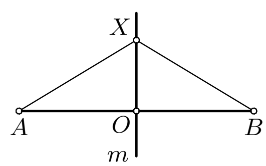
Sl. 2.5.3

Dokaz. Razmotrimo najpre slučaj kada je $P \notin p$ (Sl. 2.5.3(a)). Ako obeležimo sa M i N dve razne tačke prave p, postoji u ravni E^2 s one strane prave p s koje nije tačka P jedinstvena tačka Q takva da je $MP \cong MQ$ i $NP \cong NQ$. Budući da su tačke P i Q u ravni E^2 s raznih strana prave p, prava n određena tačkama P i Q seče pravu p u nekoj tački O. Pri tome je najmanje jedna od tačaka M i N različita od tačke O, neka je to tačka M. U tom slučaju imamo da je $(M,N,P) \cong (M,N,Q)$, te primenom aksiome III.7 nalazimo da je $(O,P) \cong (O,Q)$. Sad su M, O, P i M, O, Q dve trojke nekolinearnih tačaka takvih da je $(M,O,P) \cong (M,O,Q)$ pa su naporedni uglovi MOP i MOQ podudarni, i prema tome pravi. Stoga je $n \perp p$. Dokažimo da je n jedina prava ravni E^2

koja zadovoljava navedene uslove. Ako bi osim prave n postojala još neka takva prava n', ona bi sekla pravu p u nekoj tački $O' \neq O$. Ako je Q' tačka prave n' takva da je $\mathcal{B}(P, O', Q')$ i $PO' \cong O'Q'$, biće $MP \cong MQ'$ i $NP \cong NQ'$. U tom slučaju, u ravni E^2 s iste strane prave p postoje dve razne tačke Q i Q' takve da je $(M, N, P) \cong (M, N, Q)$ i $(M, N, P) \cong (M, N, Q')$ što je nemoguće. Ovim je teorema dokazana za slučaj kada je $P \notin p$.

Ako je $P \in p$ (Sl. 2.5.3(b)), tačka P razlaže skup ostalih tačaka prave p na dve poluprave PA i PB koje određuju izvestan opružen ugao APB. Prema poznatoj teoremi taj ugao ima jedinstvenu bisektrisu, obeležimo je sa PC. Budući da su uglovi APC i BPC naporedni i podudarni, oni su pravi, pa je prava n određena polupravom PC upravna na pravoj p. Da je n jedina prava ravni E^2 koja je u tački P upravna na pravoj p, dokazuje se indirektnim postupkom. Prepuštamo čitaocu da taj dokaz izvede sam. $\square$

3. Relacija upravnosti dveju pravih omogućuje da uvedemo pojam medijatrise duži.



Sl. def. 2.5.3

Definicija 2.5.3. Neka je u ravni E^2 data duž AB. Pravu m koja pripada ravni E^2 i koja je u središtu O duži AB upravna na pravoj AB nazivamo *medijatrisom duži* AB (Sl. def. 2.5.3).

Budući da duž poseduje samo jedno središte i da u ravni E^2 postoji samo jedna prava upravna na nekoj pravoj u nekoj tački, duž AB u ravni E^2 ima samo jednu medijatrisu. Pomenućemo samo najznačajnije svojstvo medijatrise duži, to svojstvo izraženo je sledećom teoremom.

Teorema 2.5.4. Neka je u ravni E^2 data duž AB. Skup svih tačaka $X \in E^2$ takvih da je $AX \cong BX$ predstavlja medijatrisu m duži AB.

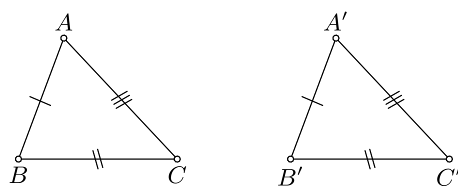
Dokaz. Prilikom dokazivanja teorema 2.3.2 ustanovili smo da na pravoj AB postoji jedinstvena tačka O takva da je $AO \cong BO$. Ta tačka je središte duži AB. Ako je X neka druga tačka ravni E^2 za koju je $AX \cong BX$, biće $(A, O, X) \cong (B, O, X)$ pa su naporedni uglovi AOX i BOX podudarni. Stoga je $OX \perp AB$, i prema tome $X \in m$ (Sl. def. 2.5.3).

Obratno, ako je $X \in m$ i $X \neq O$, tada su naporedni uglovi AOX i BOX podudarni, te iz relacija $OA \cong OB$ i $OX \cong OX$ sledi da je $AX \cong BX$. $\square$

2.6 Podudarnost trouglova u ravni E^2

Već smo pomenuli da u svakoj izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ prostora E^n ($n = 2, 3$) kolinearnim tačkama odgovaraju kolinearne tačke, a nekolinearnim tačkama odgovaraju nekolinearne tačke. Iz tog svojstva i činjenice da u izometrijskoj transformaciji duži uvek odgovara duž neposredno sleduje da u toj transformaciji trouglu uvek odgovara trougao, četvorouglu uvek odgovara četvorougao, i uopšte n-touglu uvek odgovara n-tougao. Na taj način, u euklidskoj geometriji ustanovljuju se klase podudarnih trouglova, klase podudarnih četvorouglova, i uopšte klase podudarnih n-touglova. Uslovi iz kojih se utvrđuje podudarnost nekih dvaju n-touglova ω i ω' nisu uvek dati na idealan način postojanjem izometrijske transformacije koja prevodi n-tougao ω na n-tougao ω'. Ti uslovi se i kod najjednostavnijih poligona, tj. trouglova, izražavaju na razne načine. Oni se najčešće odnose na podudarnost nekih odgovarajućih stranica i podudarnost nekih odgovarajućih uglova dvaju datih trouglova. Od isključivo takvih uslova moguće je u euklidskoj geometriji ustanoviti četiri stava podudarnosti trouglova. Izvedimo te stavove pretpostavljajući da se zadati trouglovi nalaze u istoj ravni.

Teorema 2.6.1. Dva trougla su podudarna ako su im podudarne odgovarajuće stranice (III stav podudarnosti trouglova).

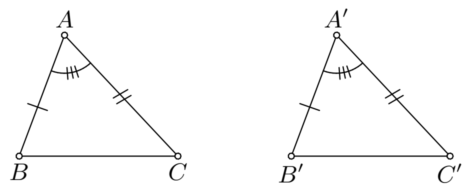


Sl. 2.6.1

Dokaz. Neka su ABC i $A'B'C'$ dva trougla ravni E^2 takva da je $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$ (Sl. 2.6.1), tada su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka ravni E^2 takvih da je $(A, B, C) \cong (A', B', C')$. Stoga postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 koja prevodi tačke A, B, C respektivno u tačke A', B', C' pa je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

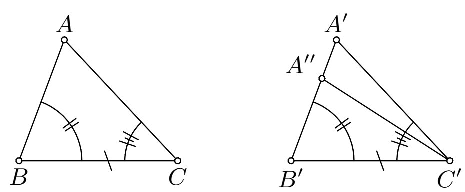
Teorema 2.6.2. Dva trougla su podudarna ako su dve stranice i njima zahvaćeni ugao jednog trougla podudarni sa odgovarajućim stranicama i odgovarajućim uglom drugog trougla (I stav podudarnosti trouglova).

Dokaz. Neka su ABC i $A'B'C'$ dva trougla u ravni E^2 kojima je $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ (Sl. 2.6.2). S obzirom da su uglovi A i A' tih trouglova podudarni, a B, C i B', C' tačke na kracima tih uglova takve da je $(A, B) \cong (A', B')$ i $(A, C) \cong (A', C')$, prema teoremi 2.4.2 imamo da je $(B, C) \cong (B', C')$, pa je i $BC \cong B'C'$. Stoga je prema prethodnoj teoremi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □



Sl. 2.6.2

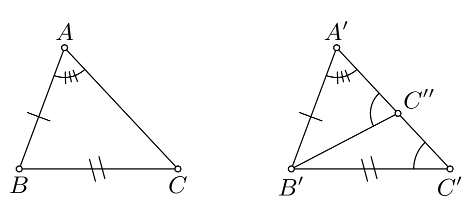
Teorema 2.6.3. Dva trougla su podudarna ako su jedna stranica i na njoj nalegli uglovi jednog trougla podudarni sa odgovarajućom stranicom i odgovarajućim uglovima drugog trougla (II stav podudarnosti trouglova).



Sl. 2.6.3

Dokaz. Neka su ABC i $A'B'C'$ dva trougla u ravni E^2 kojima je $BC \cong B'C'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$ (Sl. 2.6.3). Dokažimo da je $AB \cong A'B'$. Ako pretpostavimo da nije $AB \cong A'B'$, jedna od duži AB i $A'B'$ veća je od druge; neka je npr. $A'B' > AB$. U tom slučaju, unutar duži $A'B'$ postoji tačka A'' takva da je $AB \cong A''B'$. Prema prethodnoj teoremi imamo da je $\triangle ABC \cong \triangle A''B'C'$, pa je $\measuredangle BCA \cong \measuredangle B'C'A''$. Pri tome su $C'A'$ i $C'A''$ dve razne poluprave koje s polupravom $C'B'$ zahvataju podudarne istosmerne uglove, što je nemoguće. Stoga je $AB \cong A'B'$, i prema prethodnoj teoremi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

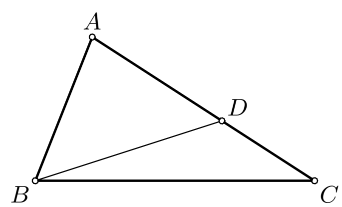
Teorema 2.6.4. Dva trougla su podudarna ako su dve stranice i ugao naspram jedne od njih jednog trougla podudarni sa odgovarajućim stranicama i odgovarajućim uglom drugog trougla, dok su uglovi naspram drugih dveju pomenutih stranicama oba oštra, oba prava, ili oba tupa (IV stav podudarnosti trouglova).



Sl. 2.6.4

Dokaz. Neka su ABC i $A'B'C'$ dva trougla ravni E^2 kojima je $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, dok su uglovi C i C' oba oštra, oba prava ili oba tupa (Sl. 2.6.4). Dokažimo da je $AC \cong A'C'$. Ako pretpostavimo da nije $AC \cong A'C'$, biće npr. $AC < A'C'$. U tom slučaju postoji tačka $C'' \in (A'C')$ takva da je $AC \cong A'C''$. Prema I stavu podudarnosti trouglova imamo da je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C''$, pa je $BC \cong B'C''$ i $\measuredangle BCA \cong \measuredangle B'C''A'$. U $\triangle B'C'C''$ je $B'C' \cong B'C''$, pa je $\measuredangle B'C'C'' \cong \measuredangle B'C''C'$. Stoga su uglovi $B'C''A'$ i $B'C''C'$ oba oštra, oba prava ili oba tupa. Ne mogu biti oba oštra niti oba tupa jer su naporedni. Ne mogu biti ni pravi, jer bi tada kroz tačku B' postojale dve upravne $B'C'$ i $B'C''$ na pravoj $A'C'$, što je nemoguće. Stoga je $AC \cong A'C'$ i prema tome $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

Teorema 2.6.5. Naspram veće stranice trougla nalazi se veći ugao, i obratno, naspram većeg ugla trougla nalazi se veća stranica.

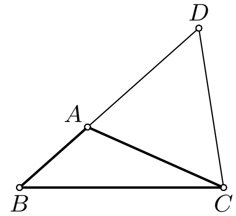


Sl. 2.6.5

Dokaz. Ako je dat $\triangle ABC$ kojem je $AC > AB$, tada je $\measuredangle B > \measuredangle C$. Zaista, iz relacije $AC > AB$ sleduje da unutar duži AC postoji tačka D takva da je $AB \cong AD$. Poluprava BD nalazi se u uglu ABC, pa je $\measuredangle ABC > \measuredangle ABD \cong \measuredangle ADB > \measuredangle ACB$, i prema tome $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ (Sl. 2.6.5).

Obratno, ako je dat $\triangle ABC$ kojem je $\measuredangle B > \measuredangle C$, tada je $AC > AB$. Zaista, ne može biti $AC \cong AB$, jer bi tada važila relacija $\measuredangle B \cong \measuredangle C$, što je suprotno pretpostavci. Ne može biti ni $AC < AB$, jer bi tada prema dokazanom delu ove teoreme važila relacija $\measuredangle B < \measuredangle C$, što je takođe suprotno pretpostavci. Stoga je $AC > AB$ (Sl. 2.6.5). □

Teorema 2.6.6. Zbir dveju stranica trougla veći je od treće stranice, a razlika dveju stranica trougla manja od treće stranice.

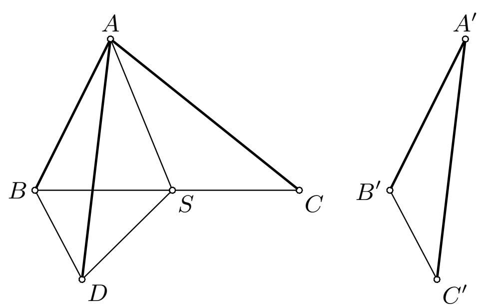


Sl. 2.6.6

Dokaz. Neka je dat $\triangle ABC$. Da bismo dokazali da je npr. $AB + AC > BC$, obeležimo sa D tačku prave AB takvu da je $\mathcal{B}(B, A, D)$ i $AC \cong AD$. Pri tome je $\measuredangle BCD > \measuredangle ACD$ i $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BDC$, pa je $\measuredangle BCD < \measuredangle BDC$. Stoga je prema prethodnoj teoremi $BD > BC$, i prema tome $AB + AC > BC$ (Sl. 2.6.6).

Da bismo dokazali drugi deo teoreme, pretpostavimo da je $AC > AB$. Prema dokazanom delu ove teoreme imamo da je $AC < AB + BC$, pa je $AC - AB < BC$ (Sl. 2.6.6). □

Teorema 2.6.7. Ako su ABC i $A'B'C'$ dva trougla u kojih je $AB \cong A'B'$ i $AC \cong A'C'$, tada je
$$BC > B'C' \iff \measuredangle A > \measuredangle A'.$$



Sl. 2.6.7

Dokaz. Ustanovimo najpre da iz relacije $\measuredangle A > \measuredangle A'$ sledi relacija $BC > B'C'$. S obzirom da je $\measuredangle A > \measuredangle A'$, u uglu A postoji poluprava AD takva da je $\measuredangle BAD \cong \measuredangle B'A'C'$. Neka je D tačka te poluprave takva da je $AD \cong A'C'$. Pri tome je $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$, pa je $BD \cong B'C'$ (Sl. 2.6.7). Tačka D pripada stranici BC ili ne. U prvom slučaju biće $BC > BD$, dakle i $BC > B'C'$. U drugom slučaju bisektrisa AS ugla CAD seče duž BC u nekoj tački S. Pri tome je $\triangle ASC \cong \triangle ASD$, pa je $SC \cong SD$. Kod $\triangle SBD$ imamo da je $BS + SD > BD$, pa je $BS + SC > BD$, i prema tome $BC > B'C'$.

Dokažimo sad obratno tvrđenje prema kojem iz relacije $BC > B'C'$ sledi da je $\measuredangle A > \measuredangle A'$. Ako bi bio $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, važila bi relacija $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ dakle i relacija $BC \cong B'C'$, što je suprotno pretpostavci. Ako bi bio $\measuredangle A < \measuredangle A'$, tada bi prema dokazanom delu ove teoreme važila relacija $BC < B'C'$, što je takođe suprotno pretpostavci. Stoga je $\measuredangle A > \measuredangle A'$. □

2.7 Relacija upravnosti prave i ravni

1. U prethodnim razmatranjima bilo je reči o relaciji upravnosti dveju komplanarnih pravih. Po definiciji, to su prave određene kracima nekog pravog ugla. U ovom odeljku ustanovićemo relaciju upravnosti prave i ravni i izvesti njena najvažnija svojstva.

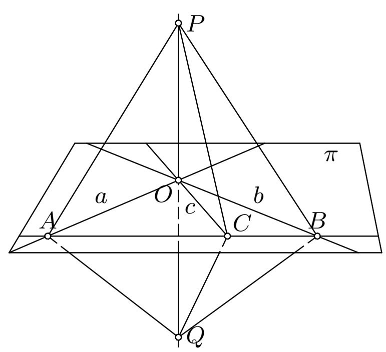
Definicija 2.7.1. Za pravu n kaže se da je *upravna*, *normalna* ili *ortogonalna na ravni* π i piše se $n \perp \pi$ ako prava n prodire ravan π, a upravna je na svakoj pravoj ravni π koja sadrži prodornu tačku. Obratno, za ravan π kaže se da je *upravna*, *normalna* ili *ortogonalna* na pravoj n i piše se $\pi \perp n$ ako ravan π seče pravu n i ako je svaka prava ravni π kroz presečnu tačku upravna na pravoj n. Tačku P u kojoj prava p normalna na ravni π prodire tu ravan nazivamo *podnožjem te normale.*

Iz ove definicije i svojstva simetričnosti relacije $\perp$ definisane na skupu pravih neposredno zaključujemo da je i relacija upravnosti prave i ravni simetrična; drugim rečima da iz:

$$n \perp \pi \Longrightarrow \pi \perp n \quad \text{i} \quad \pi \perp n \Longrightarrow n \perp \pi.$$

Stoga u izlaganjima nije potrebno isticati da li je prava n upravna na ravni π ili je ravan π upravna na pravoj n; dovoljno je samo reći da su prava n i ravan π *upravne među sobom.* Od svojstava kojima se odlikuje uvedena relacija, poseban značaj ima naredna Košijeva teorema.

Teorema 2.7.1. (Koši, 1813) Ako neka prava n prodire izvesnu ravan π u nekoj tački O i ako je ona pri tome upravna na dvema raznim pravama a i b, koje pripadaju ravni π i sadrže tačku O, tada je $n \perp \pi$.



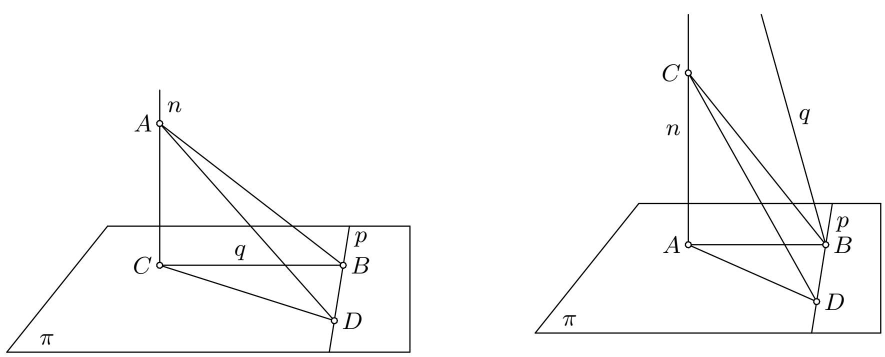
Sl. 2.7.1

Dokaz. Da bi prava n bila upravna na ravni π, potrebno je dokazati da je prava n upravna na svakoj pravoj c koja pripada ravni π i sadrži tačku O. Obeležimo sa s proizvoljnu pravu koja seče prave a, b, c u raznim tačkama A, B, C i sa P, Q dve tačke prave n s raznih strana tačke O takve da je $OP \cong OQ$ (Sl. 2.7.1). Pri tome je $\triangle POA \cong \triangle QOA$ i $\triangle POB \cong \triangle QOB$, pa je $AP \cong AQ$ i $BP \cong BQ$. Sad je $\triangle PAB \cong \triangle QAB$, pa je $\measuredangle PAB \cong \measuredangle QAB$, i prema tome $\measuredangle PAC \cong \measuredangle QAC$. Zatim je $\triangle PAC \cong \triangle QAC$, te je i $CP \cong CQ$. Najzad je $\triangle POC \cong \triangle QOC$, dakle i $\measuredangle POC \cong \measuredangle QOC$. S obzirom da su uglovi POC i QOC naporedni i podudarni, oni su pravi, pa je $n \perp c$, i prema tome $n \perp \pi$. $\square$

Naredne dve teoreme su konstruktivnog karaktera. Prvom od njih ustanovljuje se postupak dobijanja prave koja sadrži datu tačku a upravna je na datoj ravni, dok se drugom ustanovljuje postupak dobijanja ravni koja sadrži datu tačku, a upravna je na datoj pravoj.

Teorema 2.7.2. Postoji jedna i samo jedna prava n koja sadrži datu tačku A i upravna je na datoj ravni π.

Dokaz. Razmotrimo najpre slučaj kada je tačka A izvan ravni π (Sl. 2.7.2(a)). Ako obeležimo sa p proizvoljnu pravu ravni π, sa B podnožje upravne iz tačke A na pravoj p, sa q pravu koja pripada ravni π i koja je u tački B upravna na pravoj p, sa C podnožje upravne iz tačke A na pravoj q i sa n pravu određenu tačkama A i C, biće $n \perp \pi$. Zaista, ako obeležimo sa D tačku prave p sa bilo koje strane od tačke B takvu da je $AC \cong BD$, biće $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, pa je $AB \cong CD$. Sad je $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, pa je $\measuredangle ABD \cong \measuredangle ACD$. No $\measuredangle ABD$ je prav, pa je i njemu podudaran $\measuredangle ACD$ prav. Stoga je $n \perp CD$, i prema Košijevoj teoremi, $n \perp \pi$. Dokažimo da je n jedina prava koja zadovoljava relacije $A \in n$ i $n \perp \pi$. Ako bi, osim te prave, postojala još neka prava n', tada bi prave n i n' određivale neku ravan σ koja bi sekla ravan π po nekoj pravoj s. U tom slučaju postojale bi u ravni σ dve razne prave n i n' koje sadrže tačku A i upravne su na pravoj s, što je nemoguće. Ovim je teorema dokazana za slučaj kada je $A \notin \pi$.



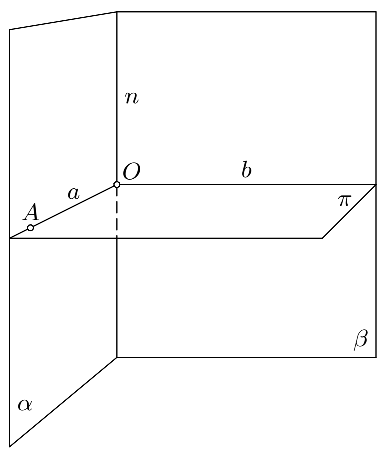
(a) (b)

Sl. 2.7.2

Pretpostavimo sad da se tačka A nalazi u ravni π (Sl. 2.7.2(b)). Ako obeležimo sa p proizvoljnu pravu ravni π koja ne sadrži tačku A, sa B podnožje upravne iz tačke A na pravoj p, sa α proizvoljnu ravan koja seče ravan π po pravoj p, sa q pravu ravni α koja je u tački B upravna na pravoj p, sa β ravan određenu pravom q i tačkom A i sa n pravu ravni β koja je u tački A upravna na pravoj AB, biće $n \perp \pi$. Zaista, ako obeležimo sa C tačku prave n različitu od tačke A i sa D tačku prave p sa bilo koje strane od tačke B takvu da je $AC \cong BD$, biće $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, pa je $BC \cong AD$. Sad je $\triangle BCD \cong \triangle ADC$, pa je $\measuredangle CBD \cong \measuredangle DAC$. Budući da prava p prodire ravan β u tački B i da je u toj tački upravna na dvema raznim pravama AB i q ravni β, prema Košijevoj teoremi imamo da je $p \perp \beta$, i prema tome $p \perp BC$. Stoga je $\measuredangle$CBD prav, pa je i njemu podudaran $\measuredangle$DAC prav, i prema tome $n \perp AD$. Sad, primenom Košijeve teoreme, nalazimo da je $n \perp \pi$. Da je n jedina prava koja zadovoljava relacije $A \in n$ i $n \perp \pi$ dokazuje se kao u prethodnom slučaju. □

Teorema 2.7.3. Postoji jedna i samo jedna ravan π koja sadrži datu tačku A i upravna je na datoj pravoj n.

Dokaz. Obeležimo sa α ravan koja sadrži pravu n i tačku A, sa a pravu koja pripada ravni α, sadrži tačku A i upravna je na pravoj n, sa β bilo koju drugu ravan koja sadrži pravu n i sa b pravu koja pripada ravni β, sadrži tačku $O = a \cap n$ i upravna je na pravoj n (Sl. 2.7.3). Pri tome se prave a i b seku u tački O, te određuju neku ravan π. Iz relacije $A \in a$ i $a \subset \pi$ sledi da je $A \in \pi$. S obzirom da prava n prodire ravan π u tački O i da je u toj tački upravna na dvema raznim pravama a i b ravni π, prema Košijevoj teoremi imamo da je $n \perp \pi$, i prema tome $\pi \perp n$.

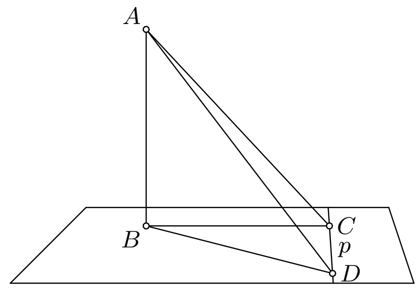


Sl. 2.7.3

Dokažimo da je π jedinstvena ravan koja zadovoljava relacije $A \in \pi$ i $\pi \perp n$. Ako bi postojala još neka takva ravan π', tada bi dve razne ravni π i π' imale zajedničku tačku A, prema tome one bi se sekle po nekoj pravoj s. Neka je σ ravan koja sadrži pravu n i seče pravu s u nekoj tački S. Pri tome ravan σ seče ravni π i π' po dvema raznim pravama p i p' od kojih svaka sadrži tačku S, a upravna je na pravoj n, što je nemoguće. □

2. Narednom teoremom ustanovljuje se jedno u geometriji veoma značajno tvrđenje koje nazivamo *teoremom o trima normalama*.

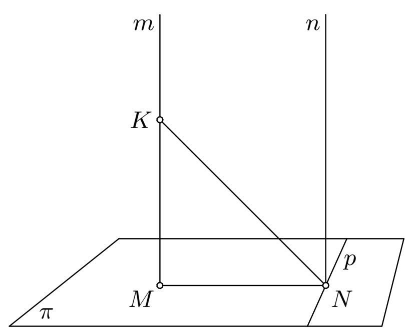
Teorema 2.7.4. Ako je neka prava AB upravna na ravni π u tački B, a prava BC upravna u tački C na nekoj pravoj $p \subset \pi$, tada je $AC \perp p$.



Sl. 2.7.4

Dokaz. Neka je D tačka prave p, s bilo koje strane od tačke C, takva da je $AB \cong CD$. Pri tome je $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, pa je $AC \cong BD$. Sad je $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, pa je $\measuredangle ABD \cong \measuredangle ACD$. No $\measuredangle ABD$ je prav, pa je i njemu podudaran $\measuredangle ACD$ prav. Stoga je $AC \perp p$ (Sl. 2.7.4). $\square$

Teorema 2.7.5. Dve prave m i n upravne na istoj ravni π među sobom su paralelne.



Sl. 2.7.5

Dokaz. Ustanovimo najpre da su prave m i n komplanarne. Obeležimo sa M i N tačke u kojima prave m i n prodiru ravan π, sa K tačku prave m različitu od tačke M i sa p pravu koja pripada ravni π, a upravna je na pravoj MN u tački N (Sl. 2.7.5). Prema teoremi o trima normalama imamo da je $KN \perp p$. Prave n, KN, MN upravne su na pravoj p u istoj tački N, te pripadaju jednoj ravni σ. Prava m ima sa ravni σ dve razne zajedničke tačke K i M, te je $m \subset \sigma$. Stoga su prave m i n komplanarne.

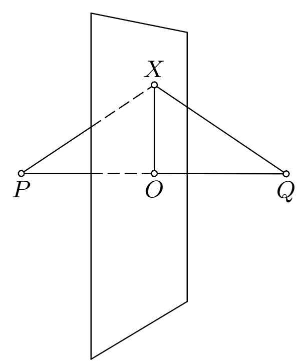
Dokažimo sad da je $m \parallel n$. Ako komplanarne prave m i n ne bi bile paralelne, one bi se sekle u nekoj tački S. U tom slučaju postojale bi dve razne prave m i n koje sadrže tačku S a upravne su na pravoj MN, što je nemoguće. $\square$

3. Relacija upravnosti prave i ravni omogućuje da uvedemo pojam medijalne ravni jedne duži.

Definicija 2.7.2. *Medijalnom ravni* duži PQ u prostoru E^3 nazivamo ravan σ koja sadrži središte O te duži i upravna je na njoj.

S obzirom da duž poseduje samo jedno središte i da u prostoru E^3 postoji samo jedna ravan upravna na nekoj pravoj u nekoj tački, duž PQ u prostoru E^3 poseduje samo jednu medijalnu ravan. Pomenimo samo najznačajnije svojstvo medijalne ravni jedne duži; to svojstvo izraženo je sledećom teoremom.

Teorema 2.7.6. Neka je u prostoru E^3 zadata duž PQ. Skup svih tačaka $X \in E^3$ takvih da je $PX \cong QX$ predstavlja medijalnu ravan σ duži PQ.



Sl. 2.7.6

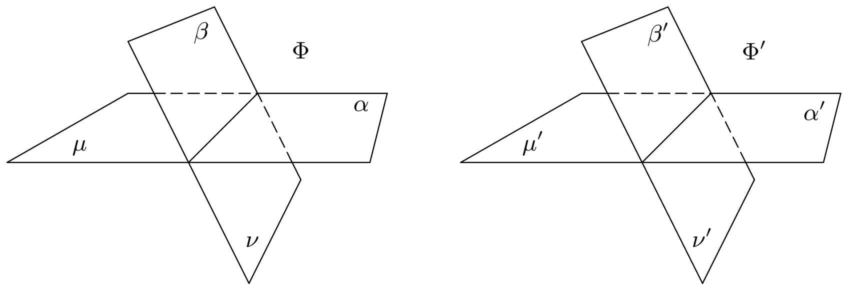
Dokaz. Prema poznatoj teoremi, na pravoj PQ postoji jedinstvena tačka O takva da je $PO \cong QO$, ta tačka je središte duži PQ. Ako je X neka druga tačka prostora E^3 za koju je $PX \cong QX$, biće $\triangle POX \cong \triangle QOX$, pa su naporedni uglovi POX i QOX podudarni, i prema tome pravi. Stoga je $OX \perp PQ$, i prema tome $X \in \sigma$.

Obratno, ako je $X \in \sigma$ i $X \neq O$, tada su naporedni uglovi POX i QOX podudarni, te iz relacija $OP \cong OQ$ i $OX \cong OX$ sledi da je $PX \cong QX$ (Sl. 2.7.6). $\square$

2.8 Podudarnost diedara. Upravne ravni

Kao pri ustanovljavanju pojma podudarnosti uglova postupa se pri ustanovljavanju pojma podudarnosti diedara. Stoga je neophodno najpre dokazati da važi sledeća teorema.

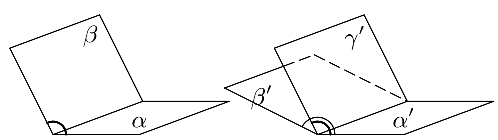
Teorema 2.8.1. U svakoj izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ prostora E^3 diedru odgovara diedar.



Sl. 2.8.1

Dokaz. Neka je u prostoru E^3 dat diedar Φ. Ako je taj diedar opružen, dokaz sleduje neposredno. Ako diedar Φ nije opružen, dovoljno je razmotriti slučaj kada je on konveksan (Sl. 2.8.1). U tom cilju obeležimo sa α i β pljosni diedra Φ. U izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ poluravnima α i β sa zajedničkim rubom s odgovaraju takođe poluravni α' i β' sa zajedničkim rubom s', te diedarskoj površi $\alpha\beta$ odgovara takođe diedarska površ $\alpha'\beta'$. Ako zatim obeležimo sa A, B, A', B' proizvoljne tačke poluravni $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, sa μ, ν, μ', ν' ravni određene poluravnima $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ i sa Φ_1, Φ_2, Φ_1', Φ_2' poluprostore (μ, B), (ν, A), (μ', B'), (ν', A'), imamo da je $\mathcal{I}(\Phi_1) = \Phi_1'$, $\mathcal{I}(\Phi_2) = \Phi_2'$, i $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi$, $\Phi_1' \cap \Phi_2' = \Phi'$, pa je $\mathcal{I}(\Phi) = \mathcal{I}(\Phi_1 \cap \Phi_2) = \Phi_1' \cap \Phi_2' = \Phi'$. □

Relacija podudarnosti diedara omogućuje da na skupu diedara ustanovimo relacije koje izražavamo rečima „manji od“ i „veći od“.

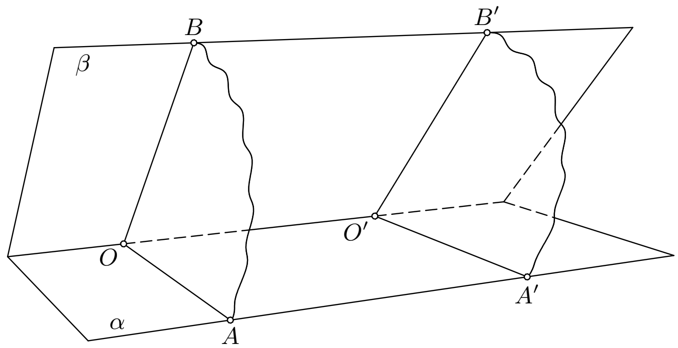


Sl. def. 2.8.1

Definicija 2.8.1. Kaže se da je diedar Φ *manji* od diedra Φ' i simbolički obeležava $\Phi < \Phi'$ ili da je diedar Φ' *veći* od diedra Φ i simbolički obeležava sa $\Phi' > \Phi$ ako u diedru Φ' postoji poluravan koja ga razlaže na dva diedra od kojih je jedan podudaran sa diedrom Φ (Sl. def. 2.8.1).

Svojstva ovih relacija potpuno su analogna svojstvima istoimenih relacija definisanih na skupu uglova, stoga ih posebno ovde nećemo navoditi. Pomenućemo samo da se pomoću tih relacija uvodi pojam pravog, oštrog i tupog diedra. Za jedan diedar kaže se da je *prav*, *oštar* ili *tup* u zavisnosti od toga da li je on podudaran, manji od ili veći od svojeg naporednog diedra. Uz pojam diedra nerazdvojno je vezan i pojam njegovog nagibnog ugla ili kako se češće kaže ugla diedra.

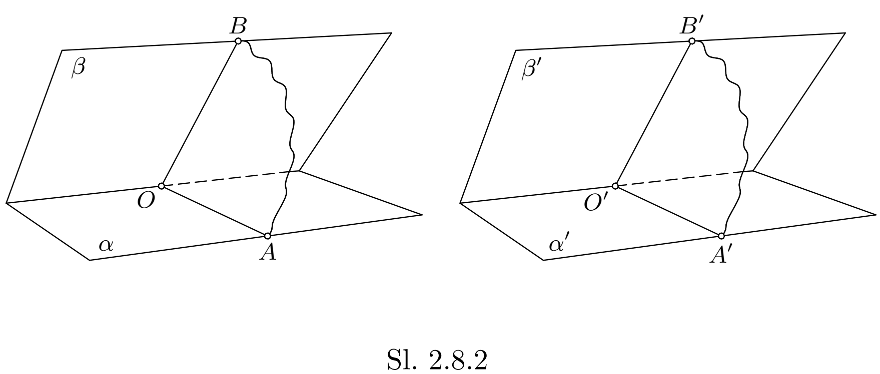
Definicija 2.8.2. *Nagibnim uglom* ili *uglom diedra* nazivamo ugao po kojem neka ravan upravna na ivici tog diedra seče taj diedar.



Sl. def. 2.8.2

Nije teško ustanoviti da veličina ugla jednog diedra ne zavisi od položaja tačke u kojoj se postavlja ravan upravna na ivici s nekog diedra Φ (Sl. def. 2.8.2). Zaista, ako obeležimo AOB i $A'O'B'$ uglove po kojima dve razne ravni π i π' upravne na pravoj s seku diedar Φ, biće poluprave OA i $O'A'$, a isto tako poluprave OB i $O'B'$ paralelne i istosmerne, te je $\measuredangle AOB \cong \measuredangle A'O'B'$. Na taj način, sve ravni upravne na ivici jednog diedra seku taj diedar po podudarnim uglovima. Štaviše, važi opštije tvrđenje koje predstavlja kriterijum podudarnosti dvaju diedara; navodimo ga u vidu sledeće teoreme.

Teorema 2.8.2. Da bi dva diedra Φ i Φ' u prostoru E^3 bila među sobom podudarna potrebno je i dovoljno da njihovi nagibni uglovi ω i ω' budu među sobom podudarni.



Sl. 2.8.2

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $\Phi \cong \Phi'$. U tom slučaju postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 takva da je $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$ (Sl. 2.8.2). Ako je π ravan upravna na ivici s diedra Φ, tada je i ravan $\mathcal{I}(\pi) = \pi'$ upravna na ivici $\mathcal{I}(s) = s'$ diedra Φ'. Po definiciji imamo da je $\Phi \cap \pi = \omega$ i $\Phi' \cap \pi' = \omega'$, pa je

$$\mathcal{I}(\omega) = \mathcal{I}(\Phi \cap \pi) = \mathcal{I}(\Phi) \cap \mathcal{I}(\pi) = \Phi' \cap \pi' = \omega'$$

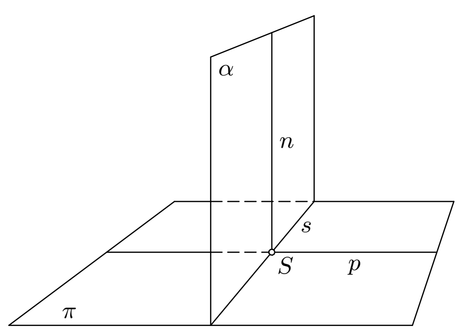
Stoga je i $\omega \cong \omega$. Obratno tvrđenje prepuštamo čitaocu da dokaže sam. □

Pojam ugla diedra omogućuje da definišemo ugao dveju ravni i relaciju ortogonalnosti dveju ravni u prostoru E^3.

Definicija 2.8.3. Neka su α i β dve ravni koje se seku po nekoj pravoj s. Te ravni određuju dva para unakrsnih diedara. Ugao manjeg od tih diedara nazivamo *uglom tih dveju ravni* i simbolički obeležavamo sa $\measuredangle(\alpha, \beta)$. Specijalno, ako su pomenuti diedri podudarni, $\measuredangle(\alpha, \beta)$ je prav. U tom slučaju kažemo da je ravan α *upravna*, *normalna* ili *ortogonalna* na ravni β i simbolički obeležavamo sa $\alpha \perp \beta$.

Iz same definicije neposredno zaključujemo da je relacija upravnosti dveju ravni simetrična, tj. da iz relacije $\alpha \perp \beta$ sledi relacija $\beta \perp \alpha$. Navodimo još nekoliko važnijih svojstva ove relacije.

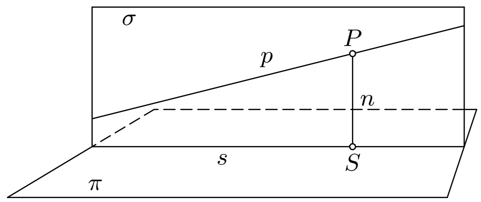
Teorema 2.8.3. Ako je prava n upravna na ravni π, tada je svaka ravan α, koja sadrži pravu n, upravna na ravni π.



Sl. 2.8.3

Dokaz. S obzirom da je prava n upravna na ravni π, ona prodire ravan π u nekoj tački S. Ravan α različita je od ravni π, a ima s njom zajedničku tačku S, te prema tome seče tu ravan po nekoj pravoj s koja sadrži tačku S (Sl. 2.8.3). Neka je p prava koja pripada ravni π i koja je u tački S upravna na pravoj s. Kako su prave n i p sadržane raspektivno u ravnima α i π, i u istoj tački S upravne na presečnoj pravoj s tih dveju ravni, te dve prave određuju uglove diedara zahvaćenih ravnima α i π. Iz relacije $n \perp \pi$ sledi da je $n \perp p$, pa su uglovi diedara što ih određuju ravni α i π pravi. Stoga je i $\alpha \perp \pi$. □

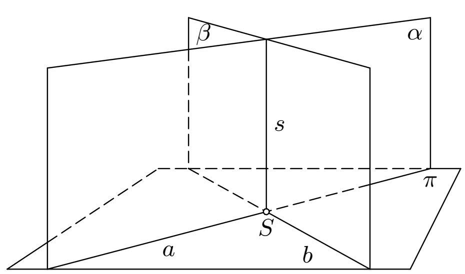
Teorema 2.8.4. Ako prava p nije upravna na ravni π, tada postoji jedna i samo jedna ravan σ koja sadrži pravu p i upravna je na ravni π



Sl. 2.8.4

Dokaz. Obeležimo sa P proizvoljnu tačku prave p i sa n pravu koja sadrži tačku P i upravna je na ravni π. Pri tome se prave n i p seku te određuju neku ravan σ (Sl. 2.8.4). Budući da ravan σ sadrži pravu n upravnu na ravni π, prema prethodnoj teoremi imamo da je $\sigma \perp \pi$. Dokažimo da je σ jedina ravan koja sadrži pravu p, a upravna je na ravni π. Pretpostavimo da, osim ove ravni, postoji još neka takva ravan σ'. Iz relacija $\sigma \perp \pi$ i $\sigma' \perp \pi$ sledi da ravni σ i σ' seku ravan π po izvesnim pravama s i s'. Ako je n' prava koja pripada ravni σ', sadrži tačku P, a upravna je na pravoj s', biće $n \neq n'$ i $n' \perp \pi$. U tom slučaju postojale bi dve razne prave n i n' koje sadrže tačku P, a upravne su na ravni π, što je nemoguće. □

Teorema 2.8.5. Ako se dve ravni α i β upravne na ravni π seku po nekoj pravoj s, tada je $s \perp \pi$.



Sl. 2.8.5

Dokaz. Ako prava s ne bi zadovoljavala relaciju $s \perp \pi$, prema prethodnoj teoremi postojala bi jedna i samo jedna ravan koja sadrži pravu s, a upravna je na ravni π. Stoga bi ravni α i β, od kojih svaka sadrži pravu s i upravna je na ravni π, bile istovetne. Međutim, to je nemoguće, jer se po pretpostavci ravni α i β seku po pravoj s. Stoga je $s \perp \pi$ (Sl. 2.8.5). □

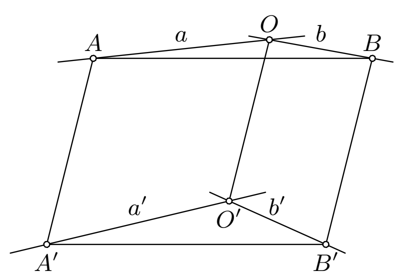
2.9 Ugao dveju pravih, ugao dveju ravni, ugao prave i ravni

Kada smo razmatrali uzajamni položaj dveju pravih, ustanovili smo da se dve prave mogu seći u jednoj tački, da mogu biti među sobom paralelne ili mimoilazne. Kada se dve prave p i q seku u jednoj tački, pomenuto je da one pripadaju jednoj ravni i da u toj ravni određuju dva para unakrsnih uglova. Ako ti uglovi nisu pravi, manji od tih uglova nazivamo uglom tih dveju pravih. Za paralelne prave dopušta se reći da zahvataju ugao mere nula ili ugao mere 180°. Pojam ugla dveju mimoilaznih pravih ustanovljujemo sledećom definicijom.

Definicija 2.9.1. *Uglom dveju mimoilaznih pravih* p i q u prostoru E^3 nazivamo ugao što ga određuju njima paralelene prave a i b koje se seku u nekoj tački O. Specijalno, ako je ugao dveju mimoilaznih pravih u prostoru E^3 prav, tada kažemo da su prave p i q *upravne* ili *normalne među sobom*, i simbolički obeležavamo sa $p \perp q$.

Jasno je da se pri ovakvoj definiciji mora ustanoviti da veličina ugla dveju mimoilaznih pravih p i q ne zavisi od položaja tačke O u kojoj se seku njima paralelne prave a i b. Ova nezavisnost neposredno sleduje iz sledeće teoreme.

Teorema 2.9.1. Ugao između dveju pravih a i b koje se seku u nekoj tački O podudaran je sa uglom između njima paralelnih pravih a' i b' koje se takođe seku u nekoj drugoj tački O'.

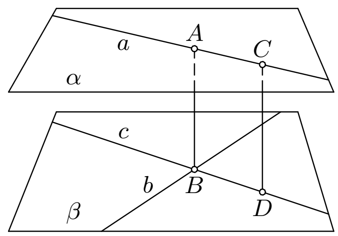


Sl. 2.9.1

Dokaz. S obzirom da je tačka O u kojoj se seku prave a i b, različita od tačke O' u kojoj se seku njima paralelne prave a' i b', važi najmanje jedna od relacija $a \neq a'$ i $b \neq b'$. Neka je npr. $a \neq a'$ (Sl. 2.9.1). Ako obeležimo sa A i B proizvoljne tačke pravih a i b, različite od tačke O, sa A' tačku prave a' takvu da je $OO' \parallel AA'$ i sa B' tačku prave b' takvu da je $AB \parallel A'B'$, biće četvorouglovi $OO'A'A$ i $AA'B'B$ paralelogrami, pa je $OA \cong O'A'$ i $AB \cong A'B'$. Osim toga, duži OO' i BB' podudarne su i istosmerne sa duži AA', dakle i među sobom, pa je $OB \cong O'B'$ stoga je $\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$ pa je $\measuredangle AOB \cong \measuredangle A'O'B'$, i prema tome $\measuredangle(a,b) \cong \measuredangle(a',b')$. $\square$

Dok je reč o uglu dveju pravih, pomenimo jedno značajno tvrđenje koje se odnosi na mimoilazne prave. To je teorema o zajedničkoj normali dveju mimoilaznih pravih koja glasi:

Teorema 2.9.2. Postoji jedna i samo jedna prava koja seče svaku od dve mimoilazne prave a i b pod pravim uglovima.



Sl. 2.9.2

Dokaz. S obzirom da su prave a i b mimoilazne, postoje jedinstvene ravni α i β takve da je $a \subset \alpha \parallel b$ i $b \subset \beta \parallel a$. Pri tome je $\alpha \parallel \beta$. Zaista, ako bi se α i β sekle po nekoj pravoj s, ta prava bi bila paralelna sa svakom od pravih a i b, te bi važila i relacija $a \parallel b$, što je suprotno pretpostavci. Na taj način imamo da je $\alpha \parallel \beta$. Obeležimo sa C proizvoljnu tačku prave a, sa D podnožje upravne iz iz tačke C na ravni β, sa B tačku u kojoj prava c određena relacijama $D \in c \parallel a$ seče pravu b i sa n pravu upravnu na ravni β u tački B. Pri tome prava n seče pravu a u nekoj tački A. Budući da je prava n upravna na ravnima α i β ona je upravna i na pravama a i b (Sl. 2.9.2).

Dokažimo da je n jedinstvena prava koja zadovoljava postavljene uslove. Ako bi sem te prave postojala još neka prava n' koja seče prave a i b u tačkama A' i B' pod pravim uglovima, tada bi obe prave n i n' bile upravne na ravnima α i β, i prema tome komplanarne. U tom bi slučaju i prave a i b bile komplanarne, što je suprotno pretpostavci. □

Zadaci

Zadatak 2.1. Ako je $\mathcal{I}$ izometrijska transformacija prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$, dokazati da za svake dve figure Φ_1 i Φ_2 tog prostora važe relacije:
a) $\mathcal{I}(\Phi_1 \cap \Phi_2) = \mathcal{I}(\Phi_1) \cap \mathcal{I}(\Phi_2)$; b) $\mathcal{I}(\Phi_1 \cup \Phi_2) = \mathcal{I}(\Phi_1) \cup \mathcal{I}(\Phi_2)$.

Zadatak 2.2. Dokazati da u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ konveksnom liku Φ odgovara konveksan lik Φ', a konkavnom liku Φ odgovara konkavan lik Φ'.

Zadatak 2.3. Dokazati da u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ ravni E^2 paralelnim pravama p i q odgovaraju paralelne prave p' i q'.

Zadatak 2.4. Dokazati da u izometrijskoj transformaciji prostora E^3 paralelnim ravnima α i β odgovaraju paralelne ravni α' i β'.

Zadatak 2.5. Ako u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ ravni E^2 (prostora E^3) duži XY odgovara duž $X'Y'$, dokazati da središtu O duži XY odgovara središte O' duži $X'Y'$.

Zadatak 2.6. Ako u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ ravni E^2 duži XY odgovara duž $X'Y'$, dokazati da medijatrisi m duži XY odgovara medijatrisa m' duži $X'Y'$.

Zadatak 2.7. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Dokazati da je

$$AB \cong AC \iff \measuredangle B \cong \measuredangle C.$$

Zadatak 2.8. Ako su B' i C' podnožja visina iz temena B i C trougla ABC, dokazati da je

$$AB \cong AC \iff BB' \cong CC'.$$

Zadatak 2.9. Ako su B_1 i C_1 središta stranica CA i AB trougla ABC, dokazati da je

$$AB \cong AC \iff BB_1 \cong CC_1.$$

Zadatak 2.10. Ako su B' i C' tačke u kojima bisektrisa unutrašnjih uglova B i C seku naspramne stranice CA i AB trougla ABC, dokazati da je

$$AB \cong AC \iff BB' \cong CC'.$$

Zadatak 2.11. Ako su B_1 i C_1 središta stranica CA i AB trougla ABC u ravni E^2, dokazati da je

$$BC \parallel C_1B_1 \quad \text{i} \quad BC = 2C_1B_1.$$

Zadatak 2.12. Ako su M i N središta bočnih stranica AD i BC trapeza $ABCD$, dokazati da je

$$AB + CD = 2MN.$$

Zadatak 2.13. Dokazati da središta stranica bilo kojeg četvorougla predstavljaju temena nekog paralelograma ili se nalaze na jednoj pravoj.

Zadatak 2.14. U prostoru E^3 dati su ravan π i tačka P. Konstruisati pravu n takvu da je $P \in n$ i $n \perp \pi$. Analizirati slučaj kada je (a) $P \notin \pi$; (b) $P \in \pi$.

Zadatak 2.15. U prostoru E^3 dati su prava n i tačka P. Konstruisati ravan π takvu da je $P \in \pi$ i $\pi \perp n$. Analizirati slučaj kada je (a) $P \notin n$; (b) $P \in n$.

Zadatak 2.16. Ako je u prostoru E^3 prava PQ upravna na ravni π u tački Q, a prava PR upravna na pravoj $s \subset \pi$ u tački R, dokazati da je $QR \perp s$.

Zadatak 2.17. Konstruisati skup svih tačaka prostora E^3 podjednako udaljenih od triju datih nekolinearnih tačaka A, B, $C \in E^3$.

Zadatak 2.18. Dokazati da se oko svakog tetraedra $ABCD$ u prostoru E^3 može opisati sfera.

Zadatak 2.19. U prostoru E^3 date su dve ravni α, β i dve prave p, q takve da je $p \perp \alpha$ i $q \perp \beta$. Dokazati da je $\alpha \parallel \beta \iff p \parallel q$.

Zadatak 2.20. Ako su P i Q podnožja zajedničke normale dveju mimoilaznih pravih p i q prostora E^3, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

Zadatak 2.21. Date su u prostoru E^3 dve mimoilazne prave p i q. Konstruisati pravu koja seče svaku od pravih p i q pod pravim uglovima.

Zadatak 2.22. Dokazati da u prostoru E^3 postoji jedinstvena prava koja sadrži datu tačku O a upravna je na svakoj od dveju mimoilaznih pravih p i q.

Zadatak 2.23. Neka je u prostoru E^3 dat nekomplanaran četvorougao $ABCD$. Ako je pri tome $AB \cong CD$ i $BC \cong AD$, dokazati da je prava koja sadrži središta P i Q dijagonala AC i BD zajednička normala mimoilaznih pravih AC i BD.

Zadatak 2.24. Neka je u prostoru E^3 dat nekomplanaran četvorougao $ABCD$. Ako su P, Q, R, S središta stranica AB, BC, CD, DA tog četvorougla, dokazati da je
$$PR \cong QS \iff AC \perp BD.$$

Zadatak 2.25. Date su u prostoru E^3 dve mimoilazne prave p i q. Konstruisati skup središta svih duži kojima krajevi pripadaju pravama p i q.

Zadatak 2.26. Date su u prostoru E^3 četiri mimoilazne prave p, q, r, s. Konstruisati skup središta svih paralelograma $PQRS$ kojima temena P, Q, R, S respektivno pripadaju pravama p, q, r, s.

Zadatak 2.27. Date su u prostoru E^3 tri mimoilazne prave a, b, c. Konstruisati tačku O takvu da svake dve od triju ravni $\alpha(a, O)$, $\quad\beta(b, O)$, $\quad\gamma(c, O)$ budu među sobom upravne.

Zadatak 2.28. U prostoru E^3 date su dve ravni α i β koje se seku po jednoj pravoj. Konstruisati skup svih tačaka tog prostora kojima je zbir ili razlika odstojanja od ravni α i β jednaka datoj duži s.

Zadatak 2.29. Dokazati da je zbir uglova nekomplanarnog četvorougla $AECD$ u prostoru E^3 manji od zbira četiri prava ugla.

Zadatak 2.30. Dokazati da je zbir ivičnih uglova konveksnog n-tostranog roglja manji od zbira četiri prava ugla.

Glava 3

Vrste izometrijskih transformacija ravni E^2

3.1 Direktne i indirektne izometrijske transformacije ravni E^2

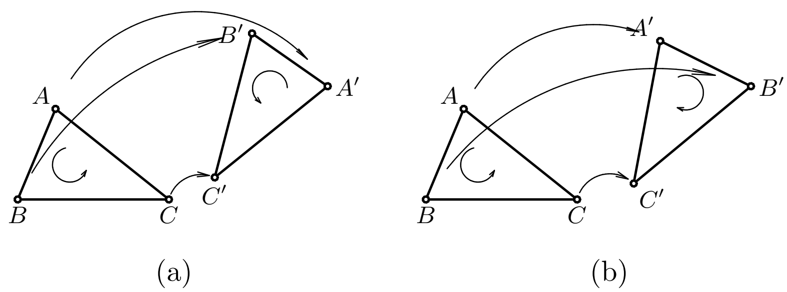
U prethodnom poglavlju izveli smo definiciju i neka opšta svojstva izometrijskih transformacija prostora

$$E^n \quad (n = 1,\, 2,\, 3).$$

Ona su omogućila da se u razmatranom prostoru pristupi izgradnji teorije podudarnosti geometrijskih likova. Brojna pitanja koja se postavljaju u toj teoriji ukazuju na neophodnost uvođenja i razmatranja specifičnih vrsta izometrijskih transformacija. Prirodno je da se te specifične vrste proučavaju posebno; najpre na pravoj E^1, zatim u ravni E^2, najzad u prostoru E^3. Zbog jednostavnosti nećemo se zadržavati na izvođenju specifičnih vrsta izometrijskih transformacija prave E^1; pristupićemo odmah izvođenju specifičnih vrsta izometrijskih transformacija ravni E^2.

U ovom odeljku razmatraćemo tzv. direktne i indirektne izometrijske transformacije ravni E^2. Da bismo definisali te vrste izometrijskih transformacija neophodno je pomenuti tvrđenje prema kojem svaka izometrijska transformacija ravni E^2 prevodi istosmerne trouglove u istosmerne trouglove, a suprotnosmerne trouglove u suprotnosmerne trouglove. Dokaz ovog tvrđenja nešto je složeniji, te ga ovde nećemo navoditi. Iz tog tvrđenja neposredno se zaključuje da postoje dve vrste izometrijskih transformacija ravni E^2; to su *direktne izometrijske transformacije* koje ne menjaju orijentaciju ravni E^2 i *indirektne izometrijske transformacije* koje menjaju orijentaciju te ravni. Da bismo ustanovili da li je neka izometrijska transformacija ravni E^2 direktna ili indirektna, dovoljno je utvrditi da li neke dve odgovarajuće trojke nekolinearnih tačaka određuju istosmerne ili suprotnosmerne trouglove.

Tako npr. na Sl. 3.1(a) istosmerni podudarni trouglovi ABC i $A'B'C'$ određuju direktnu, a na Sl. 3.1(b) suprotnosmerni podudarni trouglovi ABC i $A'B'C'$ određuju indirektnu izometrijsku transformaciju razmatrane ravni. Jasno je da identična transformacija ravni E^2 predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju te ravni.



Sl. 3.1

Pozivajući se na teoremu 2.1.5 neposredno se ustanovljuje da je direktna (indirektna) izometrijska transformacija ravni E^2 jednoznačno određena ako su zadata dva para odgovarajućih tačaka. Štaviše, kao specijalan slučaj tog tvrđenja nalazimo da direktna izometrijska transformacija ravni E^2 sa dve razne invarijantne tačke uvek predstavlja koincidenciju. Pomenimo još i tvrđenje prema kojem kompozicija sastavljena iz dveju direktnih ili dveju indirektnih izometrijskih transformacija ravni E^2 uvek predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju te ravni; naprotiv, kompozicija sastavljena iz jedne direktne i jedne indirektne izometrijske transformacije ravni E^2 uvek predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju. To svojstvo omogućuje da ustanovimo da skup svih direktnih izometrijskih transformacija ravni E^2 predstavlja nekomutativnu podgrupu grupe $G(\mathcal{I})$ svih izometrijskih transformacija ravni E^2. Tu podgrupu nazivamo grupom direktnih izometrijskih transformacija ravni E^2 i simbolički označavamo $G(\mathcal{I}^+)$.

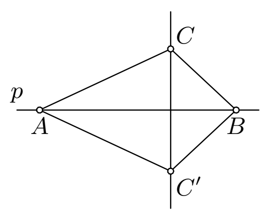
3.2 Osna refleksija ravni E^2

Direktne i indirektne izometrijske transformacije ravni E^2 predstavljaju samo jedan vid razvrstavanja izometrijskih transformacija te ravni. Razvrstavanju tih transformacija možemo pristupiti na potpuno drugačiji način. Kada smo svojevremeno razmatrali tvrđenje prema kojem izometrijska transformacija ravni E^2 sa tri nekolinearne invarijantne tačke predstavlja koincidenciju, bilo je prirodno postaviti pitanje koje su to neidentične izometrijske transformacije te ravni koje poseduju dve, jednu ili nula invarijantnih tačaka. Pristupimo razmatranju neidentičnih izometrijskih transformacija ravni E^2 koje poseduju po dve razne invarijantne tačke i prema tome po jednu pravu kojoj su sve tačke invarijantne. Takve izometrijske transformacije ravni E^2 nazivaćemo osnim refleksijama te ravni.

Definicija 3.2.1. *Osnom refleksijom* ili *osnom simetrijom* ravni E^2 sa osom $p \subset E^2$ nazivamo neidentičnu izometrijsku transformaciju $\mathcal{S}_p\colon E^2 \to E^2$ kojoj je svaka tačka prave p invarijantna.

Iz ove definicije i teoreme 2.1.5 iz prethodnog poglavlja neposredno zaključujemo da osna refleksija $\mathcal{S}_p$ ravni E^2 van prave p nema invarijantnih tačaka. Ako u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_p$ ravni E^2 tački $X \in E^2$ odgovara neka druga tačka $X' \in E^2$, lako se ustanovljuje da je prava p medijatrisa duži XX'. Zaista, ako obeležimo sa A i B dve razne tačke prave p, imamo da je $AX \cong AX'$ i $BX \cong BX'$, pa je svaka od tačaka A, B na medijatrisi duži XX'. Budući da dve razne tačke određuju samo jednu pravu, medijatrisa duži XX' poklapa se sa pravom p. Iz ovih svojstava neposredno sleduje da je osna refleksija ravni E^2 jednoznačno određena svojom osom ili pak jednim parom odgovarajućih neistovetnih tačaka. Izvodimo još nekoliko važnijih svojstava osne refleksije ravni E^2.

Teorema 3.2.1. Osna refleksija $\mathcal{S}_p$ ravni E^2 je indirektna izometrijska transformacija.



Sl. 3.2.1

Dokaz. Ako obeležimo sa A i B dve razne tačke ose p i sa C bilo koju tačku ravni E^2 van ose p (Sl. 3.2.1), biće prava p medijatrisa duži CC', gde je $C' = \mathcal{S}_p(C)$. Stoga su tačke C i C' s raznih strana prave p, pa su odgovarajući trouglovi ABC i ABC' suprotnosmerni, i prema tome transformacija $\mathcal{S}_p$ indirektna. □

Narednom teoremom ustanovićemo da je osna refleksija involuciona transformacija. Inače, *involucionom transformacijom* naziva se svaka neidentična transformacija f kojoj kvadrat predstavlja koincidenciju, tj.

$$f^2 = \mathcal{E}.$$

Reč involucija je latinskog porekla a znači izdanak ili pupoljak; u geometriju ga je uveo francuski matematičar i inženjer Žerar Dezarg (1593–1662).

Teorema 3.2.2. Osna refleksija $\mathcal{S}_p$ euklidske ravni E^2 je involuciona transformacija.

Dokaz. Obeležimo sa X proizvoljnu tačku ravni E^2 i sa X', X'' tačke takve da je

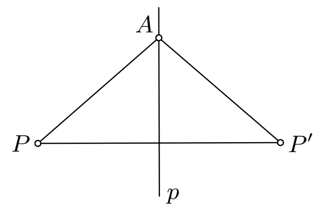
$$\mathcal{S}_p(X) = X' \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_p(X') = X''.$$

Ako je $X \in p$, tada je $X = X'$ i $X' = X''$, pa je $X = X''$. Ako je $X \notin p$, tada je $X \neq X'$ i $X' \neq X''$, pa je osa p osne refleksije $\mathcal{S}_p$ medijatrisa svake od duži XX' i $X'X''$, pa je $X = X''$. Ovim smo dokazali da u svakom slučaju važi relacija

$$\mathcal{S}_p^2 = \mathcal{E},$$

pa je osna refleksija $\mathcal{S}_p$ involuciona transformacija. □

Teorema 3.2.3. Ako indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 poseduje bar jednu invarijantnu tačku A, ona predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_p$ kojoj osa p sadrži invarijantnu tačku A.



Sl. 3.2.3

Dokaz. S obzirom da je $\mathcal{I}$ indirektna i $\mathcal{E}$ direktna izometrijska transformacija, biće $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. Stoga u ravni E^2 postoji tačka P takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Pri tome je $(P, A) \cong (P', A)$, pa se tačka A nalazi na medijatrisi p duži PP' (Sl. 3.2.3). Budući da su $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{I}$ indirektne izometrijske transformacije, kompozicija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju ravni E^2. Ta transformacija poseduje dve razne invarijantne tačke A i P, te prema ranije izvedenoj teoremi predstavlja koincidenciju. Stoga je $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$ i prema tome

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p.$$

□

Teorema 3.2.4. Ako su $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ dve osne refleksije ravni E^2 sa raznim osama p i q, a X tačka te iste ravni E^2, tada je

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X \iff X = p \cap q.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X$. Ako obeležimo sa X' tačku takvu da je $\mathcal{S}_p(X) = X'$, biće i $\mathcal{S}_q(X') = X$. Indirektnim postupkom dokažimo da je $X = X'$.

Ako bi, naprotiv, važila relacija $X \neq X'$, tada bi postojale dve razne medijatrise p i q duži XX', što je nemoguće. Stoga je $X = X'$, pa je $\mathcal{S}_p(X) = X$ i $\mathcal{S}_q(X) = X$. Iz ovih jednakosti sledi da je $X \in p$ i $X \in q$, pa je $X = p \cap q$.

Obratno, ako pretpostavimo da je zadovoljena relacija $X = p \cap q$, tada je $X \in p$ i $X \in q$, pa je $\mathcal{S}_p(X) = X$ i $\mathcal{S}_q(X) = X$, i prema tome $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X$. □

Narednom teoremom razmatraćemo transmutaciju osne refleksije bilo kojom izometrijskom transformacijom. *Transmutacijom* ili *preobražavanjem* neke transformacije f nekom transformacijom g nazivamo kompoziciju

$$f' = g \circ f \circ g^{-1}.$$

Teorema 3.2.5. Ako je $\mathcal{S}_p$ osna refleksija euklidske ravni E^2 i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija te iste ravni, zatim p' prava koja u izometriji $\mathcal{I}$ odgovara pravoj p, tada je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathcal{S}_p"] \arrow[d, "\mathcal{I}"'] & X_1 \arrow[d, "\mathcal{I}"'] \\
X' \arrow[r, "\mathcal{S}'_p"] & X'_1
\end{tikzcd}$$

Sl. 3.2.5

Dokaz. Prema definiciji osne refleksije, za svaku tačku $P' \in p'$ koja u izometriji $\mathcal{I}$ odgovara nekoj tački $P \in p$, imamo da je (Sl. 3.2.5)

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{I}^{-1}(P').$$

Ako obe strane ove jednakosti pomnožimo s leva sa izometrijom $\mathcal{I}$, dobijamo da je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{I} \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{E}(P') = P'.$$

Na taj način, kompozicija $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}$ prevodi svaku tačku prave p' u tu istu tačku. Budući da ta kompozicija predstavlja indirektnu, dakle neidentičnu, izometrijsku transformaciju ravni E^2 kojoj je svaka tačka prave p' invarijantna, ona predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_{p'}$, naime biće

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}.$$

□

Teorema 3.2.6. Dve osne refleksije $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ euklidske ravni E^2, sa raznim osama p i q, su komutativne transformacije ako i samo ako je $p \perp q$, naime biće

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \iff p \perp q$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, tj.

$$(*) \qquad \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_p$$

Ako obeležimo sa p' pravu određenu relacijom $\mathcal{S}_q(p) = p'$, prema zakonu transmutacije osne refleksije $\mathcal{S}_p$ osnom refleksijom $\mathcal{S}_q$, nalazimo da je

$$(**) \qquad \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{p'}.$$

Iz jednakosti $(*)$ i $(**)$ sledi da je $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p'}$, pa je $p = p'$, tj. $p = \mathcal{S}_q(p)$. Otuda i iz relacije $p \neq q$ zaključujemo da je $p \perp q$.

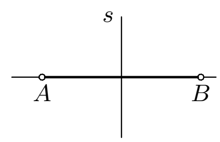
Obratno, pretpostavimo sad da je $p \perp q$. Iz ove relacije sledi da je $\mathcal{S}_q(p) = p$, te prema zakonu transmutacije osne refleksije $\mathcal{S}_p$ osnom refleksijom $\mathcal{S}_q$, nalazimo da je $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_p$, tj.

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q.$$

□

Osna refleksija ravni E^2 omogućuje da u geometriji te ravni ustanovimo specifičnu relaciju podudarnosti, tzv. relaciju osnosimetrične podudarnosti likova.

Definicija 3.2.2. Kaže se da je u ravni E^2 lik Φ *osnosimetričan* sa likom Φ' u odnosu na neku pravu s ako je $\mathcal{S}_s(\Phi) = \Phi'$. Pravu s nazivamo *osom simetrije* likova Φ i Φ'. Specijalno, ako je $\mathcal{S}_s(\Phi) = \Phi$, tada se kaže da je prava *s osa simetrije* lika Φ.



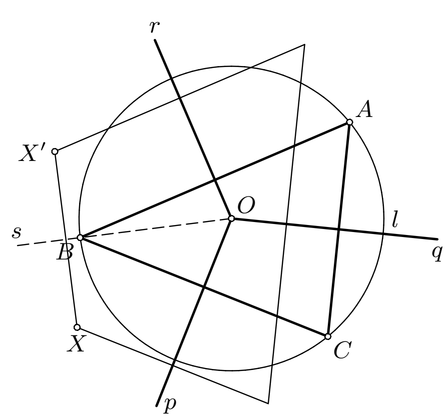
Sl. def. 3.2.2

Nije teško ustanoviti da duž AB u ravni E^2 (Sl. def. 3.2.2) ima dve i samo dve ose simetrije; jedna od tih osa sadrži duž AB, a druga predstavlja njenu medijatrisu. Ugao u ravni E^2 ima samo jednu osu simetrije, to je prava koja sadrži njegovu bisektrisu.

Primeri

Da bismo ukazali na način korišćena osnih refleksija ravni E^2 u rešavanju zadataka, navodimo dva karakteristična primera.

Primer 3.1. U zadati krug l ravni E^2 upisati $\triangle ABC$ kojem su stranice BC, CA, AB paralelne respektivno sa zadatim pravama a, b, c.



Sl. Primer 3.1

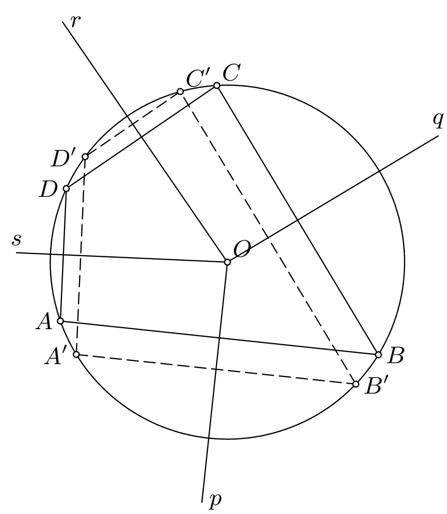
Rešenje. Pretpostavimo da postoji $\triangle ABC$ koji zadovoljava postavljene uslove. Medijatrise p, q, r stranica BC, CA, AB sadrže središte O kruga l i upravne su na pravama a, b, c. Kompozicija $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju ravni E^2 sa invarijantnim tačkama O i B, prema tome prezentira osnu refleksiju $\mathcal{S}_s$ kojoj osa s sadrži tačke O i B (Sl. Primer 3.1).

Pristupajući konstrukciji $\triangle ABC$, ustanovimo najpre položaj prave s. Stoga konstruišimo prave p, q, r koje sadrže tačku O, a upravne su na pravama a, b, c. Ako je X' tačka koja u kompoziciji $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ odgovara proizvoljnoj tački X različitoj od tačke O, biće $\mathcal{S}_s(X) = X'$. Pri relaciji $X \neq X'$ prava s je medijatrisa duži XX', a pri relaciji $X = X'$ prava s je određena tačkama O i X. U oba slučaja prava s sadrži tačku O, prema tome seče krug l u dvema tačkama; neka je B bilo koja od njih. Ako obeležimo sa C i A tačke takve da je $\mathcal{S}_p(B) = C$ i $\mathcal{S}_q(C) = A$, biće A, B, C tri razne tačke kruga l, prema tome one određuju $\triangle ABC$ upisan u krugu l. Iz relacije $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$ sledi da je

$$\mathcal{S}_r = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q,$$

pa je $\mathcal{S}_r(A) = B$. Na taj način, prave p, q, r predstavljaju medijatrise stranica BC, CA, AB, pa je $BC \parallel a$, $CA \parallel b$, $AB \parallel c$. S obzirom da prava s seče krug l u dvema tačkama, problem ima dva rešenja. □

Primer 3.2. Neka su u ravni E^2 data dva četvorougla $ABCD$ i $A'B'C'D'$ upisana u istom ili u koncentričnim krugovima. Ako su pri tome tri stranice četvorougla $ABCD$ paralelne sa odgovarajućim stranicama četvorougla $A'B'C'D'$, dokazati da su i preostale dve odgovarajuće stranice tih četvorouglova među sobom paralelne.



Sl. Primer 3.2

Rešenje. S obzirom da su četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ upisani u istom ili u koncentričnim krugovima, njihove paralelne stranice npr. AB i $A'B'$, BC i $B'C'$, CD i $C'D'$ imaju zajedničke medijatrise, obeležimo ih sa p, q, r (Sl. Primer 3.2). Da bismo dokazali da je $DA \parallel D'A'$, dovoljno je dokazati da su i medijatrise s i s' stranica DA i $D'A'$ istovetne. U tom cilju razmotrićemo kompozicije

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p.$$

Budući da se svaka od tih kompozicija sastoji iz parnog broja osnih refleksija, svaka od njih predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju. Ako obeležimo sa O zajednički centar krugova opisanih oko zadatih četvorouglova $ABCD$ i $A'B'C'D'$, imamo da je $\mathcal{I}_1(O) = O$, $\mathcal{I}_1(A) = A$ i $\mathcal{I}_2(O) = O$, $\mathcal{I}_2(A') = A'$. Na taj način, direktne izometrijske transformacije $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ poseduju po dve razne invarijantne tačke, te prema poznatoj teoremi predstavljaju koincidencije. Stoga je $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$, i prema tome

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p.$$

Iz ove jednakosti nalazimo da je $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_{s'}$, pa je $s = s'$, i prema tome $DA \parallel D'A'$. $\square$

Zadaci

Zadatak 3.1. Ako u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ ravni E^2 pravama $p_1, \ldots, p_m$ odgovaraju respektivno prave $p_1', \ldots, p_m'$ dokazati da je

$$\mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_{p_m} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{p_1}) \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p_m'} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{p_1'}.$$

Zadatak 3.2. Ako su a, b i c tri prave ravni E^2, dokazati da je

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b \iff \mathcal{S}_s(a) = b.$$

Zadatak 3.3. Date su u ravni E^2 tri prave p, q i r i dve tačke M i N. Konstruisati u toj ravni prave s i s' takve da je $M \in s$, $N \in s'$ i $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(s) = s'$.

Zadatak 3.4. U dati krug k ravni E^2 upisati petougao $ABCDE$ kojem su stranice AB, BC, CD, DA, EA paralelne respektivno s datim pravama a, b, c, d, e.

Zadatak 3.5. U ravni E^2 dati su prava s i s iste strane od te prave dve tačke A i B. Konstruisati tačku $X \in s$ takvu da zbir duži AX i BX bude minimalan.

Zadatak 3.6. U ravni E^2 dati su prava s i s raznih strana od te prave dve tačke A i B. Konstruisati tačku $X \in s$ takvu da razlika duži AX i BX bude maksimalna.

Zadatak 3.7. U ravni E^2 dati su prava s i dva kruga k_1 i k_2. Konstruisati kvadrat $ABCD$ kojem su temena A i C na pravoj s, a temena B i D na krugovima k_1 i k_2.

Zadatak 3.8. U ravni E^2 date su dve prave a, b i tačka P. Konstruisati pravu p koja sadrži tačku P i seče prave a, b zahvatajući sa njima jednake suprotne uglove.

Zadatak 3.9. Dati su u ravni E^2 ugao AOB i dve tačke M, N. Odrediti na polupravoj OA tačku X takvu da prave MX i NX seku polupravu OB u tačkama Y i Z koje zadovoljavaju relaciju $XY \cong XZ$.

Zadatak 3.10. Neka je u ravni E^2 dat pravougaonik $ABCD$ kojem je $AB = 3BC$. Ako su E i F tačke stranice AB takve da je $AE \cong EF \cong FB$, dokazati da je

$$\measuredangle AED + \measuredangle AFD + \measuredangle ABD = 90^\circ.$$

3.3 Predstavljanje izometrijskih transformacija ravni E^2 pomoću osnih refleksija

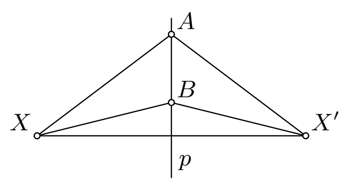
Od svojstava kojima raspolažu osne refleksije euklidske ravni E^2 poseban značaj ima svojstvo prema kojem se svaka izometrijska transformacija te ravni može predstaviti u obliku kompozicije konačnog broja osnih refleksija. Ono omogućuje da polazeći od osnih refleksija izgradimo celovitu teoriju izometrijskih transformacija euklidske ravni. Takvu zamisao nastojaćemo da, u izvesnoj meri, sprovedemo i mi u ovom tečaju.

Teorema 3.3.1. Svaka izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ euklidske ravni E^2 može se predstaviti kao kompozicija konačnog broja osnih refleksija; minimalan broj osnih refleksija zastupljenih u takvoj kompoziciji nije veći od tri.

Dokaz. Prema maksimalnom broju invarijantnih linearno nezavisnih tačaka izometrijske transformacije $\mathcal{I}$, razlikujemo sledeća četiri slučaja:

1° Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ može da poseduje najviše tri invarijantne, linearno nezavisne tačke; to su nekolinearne tačke ravni E^2, obeležimo ih sa A, B, C. Prema poznatoj teoremi, takva izometrijska transformacija predstavlja koincidenciju, te s obzirom na involutivnost bilo koje osne refleksije $\mathcal{S}_p$ ravni E^2 imamo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p.$$



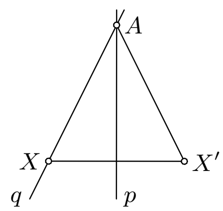
Sl. 3.3.1(a)

2° Pretpostavimo da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ poseduje najviše dve invarijantne linearno nezavisne tačke, obeležimo ih sa A i B. Te tačke nisu istovetne, pa određuju neku pravu p (Sl. 3.3.1(a)). S obzirom da van prave p izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, imamo da je $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, te postoji tačka $X \in E^2$ takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Pri tome je $(A, X) \cong (A, X')$ i $(B, X) \cong (B, X')$ pa je prava p medijatrisa duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ predstavlja izometrijsku transformaciju ravni E^2, koja ima tri nekolinearne invarijantne tačke A, B, X pa je $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, i prema tome

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p.$$

3° Pretpostavimo da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ poseduje samo jednu invarijantnu tačku, obeležimo je sa A. S obzirom da je $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, postoji tačka $X \in E^2$ takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Pri tome je $(A, X) \cong (A, X')$, pa je tačka A na medijatrisi p duži XX'. Stoga kompozicija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ poseduje dve razne invarijantne tačke A i X (Sl. 3.3.1(b)). Van prave AX kompozicija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, jer bi u protivnom ta kompozicija predstavljala koincidenciju. U tom bi slučaju iz jednakosti $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$ sledila relacija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, pa bi izometrija $\mathcal{I}$ posedovala više invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Stoga, prema slučaju 2°, izometrijska transformacija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_q$ kojoj osa q sadrži invarijantne tačke A i X. Iz jednakosti $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$ sledi da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q.$$



Sl. 3.3.1(b)

4° Pretpostavimo sad da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ uopšte nema invarijantnih tačaka. U tom slučaju izometrija $\mathcal{I}$ može se predstaviti kao kompozicija sastavljena iz dve ili tri osne refleksije. Da bismo dokazali to tvrđenje, obeležimo sa X proizvoljnu tačku ravni E^2, sa X' njenu odgovarajuću tačku i sa p medijatrisu duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ predstavlja izometrijsku transformaciju ravni E^2 sa invarijantnom tačkom X. Ta kompozicija ne može imati tri nekolinearne invarijantne tačke, jer bi ona tada predstavljala koincidenciju. U tom bi slučaju iz jednakosti $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$ sledila relacija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, pa bi izometrija $\mathcal{I}$ imala invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Ako bi kompozicija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ posedovala najviše dve invarijantne linearno nezavisne tačke, ona bi prema slučaju 2° predstavljala neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_q$, kojoj osa q sadrži pomenute invarijantne tačke. U tom slučaju iz jednakosti $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_q$ sledi da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q.$$

Jasno je pri tome da prave p i q nemaju zajedničkih tačaka, jer bi u protivnom izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ imala zajedničkih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Najzad, ako je X jedina invarijantna tačka kompozicije $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$, prema slučaju 3° ta kompozicija predstavlja proizvod dveju osnih refleksija, obeležimo ih sa $\mathcal{S}_q$ i $\mathcal{S}_r$. Iz jednakosti $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$ sledi da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r.$$

□

Definicija 3.3.1. Svaku kompoziciju konačnog broja osnih refleksija euklidske ravni E^2 kojom je predstavljena neka izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ te ravni nazivamo *osnorefleksivnom* ili *simetrijskom reprezentacijom* te izometrije. Simetrijsku reprezentaciju izometrije $\mathcal{I}$ ravni E^2 sastavljenu iz najmanjeg mogućeg broja osnih refleksija nazivamo *minimalnom* ili *optimalnom simetrijskom reprezentacijom* te izometrije.

3.4 Pramenovi pravih u ravni E^2

1. S obzirom na uzajamni položaj pravih, u ravni E^2 razlikujemo prave koje se seku u jednoj tački i prave koje su među sobom paralelne. Tim uzajamnim položajima odgovaraju dva pramena pravih; to su pramen konkurentnih i pramen paralelnih pravih.

Definicija 3.4.1. Skup $\mathcal{X}$ svih pravih ravni E^2 koje se seku u jednoj tački O nazivamo *pramenom konkurentnih pravih* sa središtem O i simbolički obeležavamo sa $\mathcal{X}_O$. Skup $\mathcal{X}$ svih pravih ravni E^2 koje su paralelne s nekom pravom $s \subset E^2$, i prema tome među sobom, nazivamo *pramenom paralelnih pravih* i simbolički obeležavamo sa $\mathcal{X}_s$.

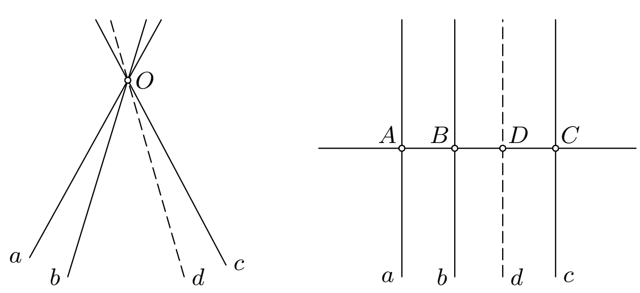
Iz definicije neposredno sleduje da je pramen $\mathcal{X}_O$ konkurentnih pravih ravni E^2 jednoznačno određen središtem O tog pramena, a pramen $\mathcal{X}_s$ paralelnih pravih ravni E^2 jednoznačno određen bilo kojom svojom pravom s.

Premda su pramenovi pravih u ravni E^2 definisani nezavisno od pojma izometrijske transformacije, oni se mogu dovesti u tesnu vezu sa tim transformacijama, posebno sa osnim refleksijama. Pomenimo samo da se pomoću osnih refleksija može čak izvesti i jedinstvena definicija pramena pravih, što mi ovde nećemo činiti. Izvedimo najvažnija svojstva pramenova pravih koja se odnose na osne refleksije.

Teorema 3.4.1. Ako tri prave a, b, c ravni E^2 pripadaju nekom pramenu $\mathcal{X}$, tada kompozicija

$$\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$$

predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ kojoj osa d takođe pripada pramenu $\mathcal{X}$.



(a) (b)

Sl. 3.4.1

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $\mathcal{X}$ pramen konkurentnih pravih; neka je O njegovo središte (Sl. 3.4.1(a)). S obzirom da tačka O pripada svakoj od pravih a, b, c, imamo da je $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(O) = O$. Na taj način, indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ ravni E^2 poseduje invarijantnu tačku O, te prema poznatoj teoremi predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$. Pri tome je $O \in d$, i prema tome $d \in \mathcal{X}$.

Pretpostavimo sad da je $\mathcal{X}$ pramen paralelnih pravih (Sl. 3.4.1(b)). Neka je s proizvoljna prava koja pripada ravni E^2, a upravna je na pravama a, b, c. Iz relacija $s \perp a, b, c$ sleduje da svaka od osnih refleksija $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$ prevodi pravu s u tu istu pravu menjajući njenu orijentaciju. Stoga kompozicija $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ takođe prevodi pravu s u tu istu pravu, menjajući njenu orijentaciju. Otuda sleduje da na pravoj s postoji invarijantna tačka D. Na taj način, indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ ravni E^2 poseduje invarijantnu tačku D, te prema poznatoj teoremi predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$. Pri tome je $D \in d$ i $d \perp s$, pa je $d \in \mathcal{X}$. □

Teorema 3.4.2. Ako kompozicija $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ sastavljena iz triju osnih refleksija ravni E^2 predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$, tada ose a, b, c, d tih osnih refleksija pripadaju jednom pramenu.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da se prave a i b seku u nekoj tački O (Sl. 3.4.1(a)). Prema poznatoj teoremi, iz relacije $a \cap b = O$ sledi da je O jedina invarijantna tačka kompozicije $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Budući da je $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, tj. $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$, biće O jedina invarijantna tačka i kompozicije $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$. Stoga se prave c i d takođe seku u tački O, te prave a, b, c, d pripadaju jednom pramenu.

Pretpostavimo sad da su prave a i b među sobom paralelne (Sl. 3.4.1(b)). Ako obeležimo sa s bilo koju pravu ravni E^2 upravnu na pravama a i b, imamo da je $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(s) = s$. Budući da je $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, tj. $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$, biće i $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d(s) = s$. Stoga je c, $d \perp s$, te sve prave a, b, c, d pripadaju jednom pramenu. □

2. Teoremama 3.4.1 i 3.4.2 ustanovili smo da tri prave a, b, c neke ravni E^2 pripadaju jednom pramenu $\mathcal{X}$ ako i samo ako kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$. Štaviše, ustanovljeno je da prava d pripada pramenu $\mathcal{X}$. Prirodno je postaviti pitanje koja još geometrijska svojstva proističu iz relacije

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d.$$

Odgovor na to pitanje dobićemo posle uvođenja naročite relacije na skupu pravih jednog pramena; to je tzv. relacija izogonalnosti parova pravih.

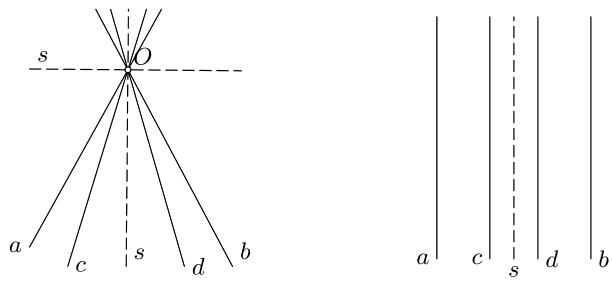
Definicija 3.4.2. Kaže se da je u ravni E^2 par pravih c i d *izogonalno spregnut* ili *simetrično raspoređen* s parom pravih a i b ako je

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_b.$$

Iz definicije neposredno sleduje da izogonalne prave a, b, c ravni E^2 pripadaju jednom pramenu pravih. Bez teškoća se ustanovljuje da uvedena relacija predstavlja relaciju ekvivalencije; prepuštamo čitaocu da to svojstvo dokaže sam.

Za nas je od posebnog značaja kriterijum ustanovljavanja izogonalnosti dvaju parova pravih u jednom pramenu koji glasi:

Teorema 3.4.3. Neka su a, b, c, d četiri prave nekog pramena $\mathcal{X} \subset E^2$. Da bi parovi pravih a, b i c, d bili izogonalno spregnuti među sobom, potrebno je i dovoljno da se ose simetrije pravih a i b poklapaju sa osama simetrije pravih c i d.



Sl. 3.4.3

Dokaz. Ustanovimo najpre da je uslov potreban. U tom cilju pretpostavimo da su parovi pravih a, b i c, d izogonalno spregnuti; tj. da je $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$. Neka je s osa simetrije pravih a i b. Ako obeležimo sa d' pravu određenu relacijom $\mathcal{S}_s(c) = d'$, imamo da je $d = d'$. Zaista, iz uvedenih pretpostavki sledi da je

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c.$$

Primenom ovih dveju jednakosti nalazimo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_a \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a) \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'}) = \mathcal{S}_{d'}. \end{aligned}$$

Iz jednakosti $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_{d'}$ sledi da je $d = d'$. Stoga je $\mathcal{S}_s(c) = d$, pa je prava s osa simetrije pravih c i d.

Obratno, pretpostavimo sad da se ose simetrije pravih a i b poklapaju sa osama simetrije pravih c i d. U tom slučaju važe relacije

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c.$$

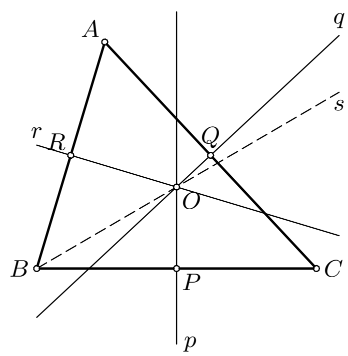
Primenom ovih dveju jednakosti nalazimo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_a \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a) \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d) = \mathcal{S}_d. \end{aligned}$$

□

Primeri

Primer 3.3. Dokazati da medijatrise stranica trougla u ravni E^2 pripadaju konkurentnom pramenu pravih.



Sl. Primer 3.3

Rešenje. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$ i neka su p, q, r medijatrise njegovih stranica BC, CA, AB (Sl. Primer 3.3). S obzirom da je osna refleksija ravni E^2 indirektna izometrijska transformacija, biće kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ takođe indirektna izometrijska transformacija. U toj kompoziciji tačka B je invarijantna. Zaista

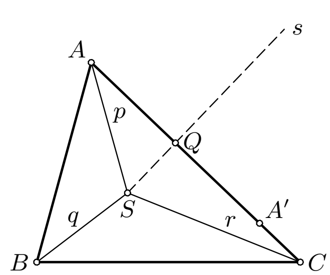
$$\mathcal{I}(B) = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(B) = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(C) = \mathcal{S}_r(A) = B.$$

Budući da indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 poseduje invarijantnu tačku B, prema ranije dokazanoj teoremi, ona predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_s$ kojoj osa s sadrži invarijantnu tačku B. Iz jednakosti

$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s,$$

sleduje da prave p, q, r pripadaju jednom pramenu, obeležimo ga sa $\mathcal{X}$. Prave p i q tog pramena upravne su respektivno na dvema pravama BC i CA koje se seku, pa se i prave p i q seku u nekoj tački O. Stoga je $\mathcal{X}$ pramen konkurentnih pravih sa središtem O, te i prava r sadrži tačku O. $\square$

Primer 3.4. Dokazati da simetrale unutrašnjih uglova trougla u ravni E^2 pripadaju konkurentnom pramenu pravih.



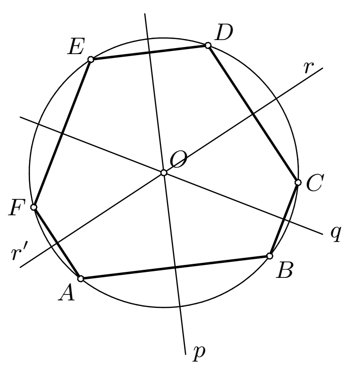
Sl. Primer 3.4

Rešenje. Neka su p, q, r simetrale unutrašnjih uglova A, B, C trougla ABC. Ako orijentisane prave BC, CA, AB obeležimo sa a, b, c, i te iste prave sa suprotnim orijentacijama obeležimo sa a', b', c' (Sl. Primer 3.4), biće

$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(b) = b'.$$

Na taj način, kompozicija $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ indukuje na pravoj b indirektnu izometrijsku transformaciju. Ako u toj transformaciji tački $A \in b$ odgovara tačka $A' \in b$, biće središte Q duži AA' invarijantna tačka. S obzirom da indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ poseduje invarijantnu tačku Q, prema poznatoj teoremi ona predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_s$ pri čemu je $Q \in s$ i $s \perp b$. Stoga prave p, q, r pripadaju jednom pramenu $\mathcal{X}$. Ako je D tačka u kojoj prava p seče duž BC, biće tačke A i D s raznih strana prave q, te se prave p i q seku u nekoj tački S. Otuda sleduje da je $\mathcal{X}$ konkurentan pramen pravih sa središtem S. □

Primer 3.5. Neka je u ravni E^2 dat tetivan šestougao $ABCDEF$. Ako pri tome naspramne stranice AB i CD imaju zajedničku medijatrisu p, a naspramne stranice BC i EF imaju zajedničku medijatrisu q, dokazati da i naspramne stranice CD i AF imaju zajedničku medijatrisu r.



Sl. Primer 3.5

Rešenje. Ako obeležimo sa r i r' medijatrise stranica CD i AE, tada kompozicija (Sl. Primer 3.5)

$$(1) \qquad \mathcal{I} = \mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$$

sastavljena iz parnog broja osnih refleksija predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju sa dvema invarijantnim tačkama; to su teme A i središte O kruga l opisanog oko tetivnog šestougla $ABCDEF$. Stoga je prema poznatoj teoremi

$$(2) \qquad \mathcal{I} = \mathcal{E}$$

Budući da se prave p, q, r seku u tački O, one pripadaju jednom pramenu pravih, te kompozicija $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ predstavlja neku osnu refleksiju, dakle involutivnu transformaciju, pa je

$$(3) \qquad \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r.$$

Iz jednakosti (1), (2), (3) nalazimo da je

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) = \mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ (\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{r'} \circ \mathcal{S}_r.$$

Stoga je $\mathcal{S}_r = \mathcal{S}_{r'}$ i prema tome $r = r'$. □

Zadaci

Zadatak 3.11. Dokazati da simetrala jednog unutrašnjeg ugla i simetrale spoljašnjih uglova kod druga dva temena trougla u ravni E^2 pripadaju konkurentnom pramenu pravih.

Zadatak 3.12. Dokazati da prave određene visinama trougla u ravni E^2 pripadaju konkurentnom pramenu pravih.

Zadatak 3.13. Dokazati da kompozicija neparnog broja osnih refleksija ravni E^2 kojima ose pripadaju jednom pramenu pravih, predstavlja takođe osnu refleksiju kojoj osa pripada tom pramenu pravih.

Zadatak 3.14. Neka je u ravni E^2 dat tetivan petougao $ABCDE$. Ako je pri tome $BC \parallel CE$ i $CD \parallel EA$, dokazati da se teme D nalazi na medijatrisi p stranice AB.

Zadatak 3.15. Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni E^2, zatim a, b, c određene tačkama B i C, C i A, A i B, najzad p i p', q i q', r i r' parovi pravih izogonalno spregnutih respektivno sa parovima pravih b i c, c i a, a i b. Pri tome, ako prave p, q, r pripadaju nekom pramenu $\mathcal{X}$, dokazati da i prave p', q', r' pripadaju nekom pramenu $\mathcal{X}'$.

Zadatak 3.16. Neka je u ravni E^2 dat četvorougao $ABCD$ i neka su a, b, c, d prave određene stranicama AB, BC, CD, DA, zatim p i p', q i q', r i r', s i s' parovi pravih izogonalno spregnutih respektivno sa parovima pravih d i a, a i b, b i c, c i d. Pri tome, ako su prave q i s izogonalno spregnute sa pravama p i q, dokazati da su i prave q' i s' izogonalno spregnute sa pravama p' i r'.

3.5 Centralna rotacija ravni E^2

1. Već smo pomenuli da se izračunavanju složenijih vrsta izometrijskih transformacija euklidske ravni E^2 može pristupiti razmatranjem specifičnih vidova njihovih minimalnih simetrijskih reprezentacija. Pridržavajući se tog načela ustanovićemo postupno sve postojeće vrste izometrijskih transformacija euklidske ravni E^2 i izvesti njihova najvažnija svojstva. Od tih vrsta razmatraćemo najpre centralne rotacije.

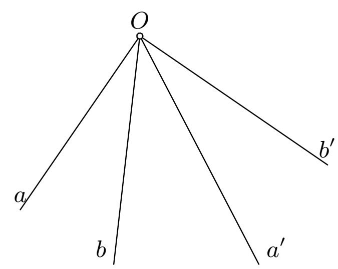
Definicija 3.5.1. Neka su $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ dve osne refleksije euklidske ravni E^2 kojima se ose p i q seku u nekoj tački O. *Središnjim obrtanjem* ili *centralnom rotacijom* ravni E^2 oko tačke O za ugao ω nazivamo transformaciju $\mathcal{R}_{O,\omega}$ određenu relacijom

$$\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \quad (O = p \cap q,\ \omega = 2\measuredangle(p,q)).$$

Tačku O nazivamo *središtem* ili *centrom*, a orijentisani ugao ω nazivamo *uglom centralne rotacije* $\mathcal{R}_{O,\omega}$.

S obzirom da je osna refleksija ravni E^2 indirektna izometrijska transformacija, kompozicija dveju osnih refleksija, prema tome i centralna rotacija ravni E^2, predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju. Primenom teoreme 3.2.4 neposredno zaključujemo da centralna rotacija ravni E^2 poseduje samo jednu invarijantnu tačku, to je središte te centralne rotacije.

Teorema 3.5.1. Dve centralne rotacije $\mathcal{R}_{O,\omega}$ i $\mathcal{R}_{O',\omega'}$ iste ravni E^2 među sobom su jednake ako i samo ako su tačke O i O' istovetne, a uglovi ω i ω' podudarni i istosmerni.



Sl. 3.5.1

Dokaz. Obeležimo sa a, b i a', b' prave pomoću kojih su definisane pomenute centralne rotacije; to su prave koje zadovoljavaju relacije (Sl. 3.5.1)

$$\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{O',\omega'} = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}.$$

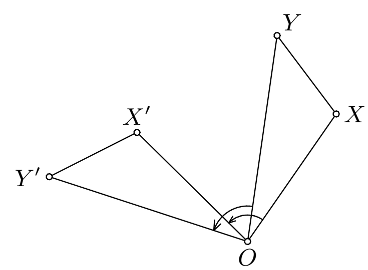
Ako pretpostavimo da je $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O',\omega'}$ imamo da je $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}$, tj.

$$(*) \qquad \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_{b'}.$$

Iz relacije $(*)$ sledi da prave a, b, a', b' pripadaju jednom pramenu, pa se tačka $O = a \cap b$ poklapa sa tačkom $O' = a' \cap b'$. Sem toga, iz relacije $(*)$ sledi da su prave a i b' izogonalno spregnute sa pravama a' i b, pa su orijentisani uglovi (a,b) i (a',b'), prema tome i uglovi ω i ω' podudarni i istosmerni.

Obratno, ako pretpostavimo da su tačke O i O' istovetne, a uglovi ω i ω' podudarni i istosmerni, biće prave a, b, a', b' konkurentne, a orijentisani uglovi (a,b) i (a',b') podudarni i istosmerni. Stoga su prave a i b' izogonalno spregnute sa pravama a' i b, pa je $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_{b'}$, tj. $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}$ i prema tome $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O',\omega'}$. □

Teorema 3.5.2. U centralnoj rotaciji $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ravni E' tačkama X i Y različitim od tačke O odgovaraju tačke X' i Y' takve da su istosmerni uglovi XOX' i YOY' među sobom podudarni.



Sl. 3.5.2

Dokaz. Neka je X_1 tačka ravni E^2 takva da je orijentisani ugao XOX_1' podudaran i istosmeran s uglom ω i $OX \cong OX_1'$. Ako taj ugao obeležimo sa ω', prema prethodnoj teoremi imamo da je $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O,\omega'}$. Stoga je (Sl. 3.5.2)

$$X_1' = \mathcal{R}_{O,\omega'}(X) = \mathcal{R}_{O,\omega}(X) = X'.$$

Na taj način, istosmerni uglovi ω i XOX' među sobom su podudarni. Istim postupkom dokazuje se da su i istosmerni uglovi YOY' i ω među sobom podudarni. Stoga su i istosmerni uglovi XOX' i YOY' među sobom podudarni. □

2. Iz dokazanih dveju teorema neposredno sleduje da je centralna rotacija ravni E^2 jednoznačno određena centrom O i još jednim parom odgovarajućih tačaka. Štaviše, ako u centralnoj rotaciji $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ravni E^2 tačkama A, B, C, ... različitim od tačke O odgovaraju respektivno tačke A', B', C', ... i ako uglove AOA', BOB', COC', ... istosmerne sa uglom ω obeležimo redom sa ω_1, ω_2, ω_3, ..., biće

$$\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O,\omega_1} = \mathcal{R}_{O,\omega_2} = \mathcal{R}_{O,\omega_3} = \cdots$$

Teorema 3.5.3. Ako direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku O, ona predstavlja centralnu rotaciju.

Dokaz. Obeležimo sa P i P' dve razne tačke ravni E^2 takve da je $\mathcal{I}(P) = P'$, sa p pravu određenu tačkama O i P, a sa q medijatrisu duži PP'. Iz relacije $OP \cong OP'$ sledi da je $O \in q$ te je $O = p \cap q$. S obzirom da je $\mathcal{I}$ direktna i $\mathcal{S}_q$ indirektna izometrijska transformacija, biće kompozicija $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija. Ona poseduje dve razne invarijantne tačke O i P, te prema poznatoj teoremi predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_p$. Stoga je $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, pa je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p.$$

Iz ove jednakosti i relacije $O = p \cap q$, sledi da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ predstavlja centralnu rotaciju. □

Teorema 3.5.4. Skup $\mathcal{R}_O$ koji se sastoji iz identične transformacije i svih centralnih rotacija ravni E^2, koje imaju zajednički centar O, predstavlja grupu.

Dokaz. Obeležimo sa $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{O,\beta}$ bilo koje dve centralne rotacije iz skupa $\mathcal{R}_O$, a sa p proizvoljnu pravu koja sadrži tačku O i pripada ravni E^2 i sa m, n prave određene relacijama

$$\mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{O,\beta} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p.$$

Množenjem odgovarajućih strana ovih dveju jednakosti nalazimo da je

$$\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m.$$

S obzirom da prave m i n poseduju zajedničku tačku O, one su istovetne ili se seku u toj tački, pa je

$$\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{E} \quad \text{ili} \quad \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{R}_{O,\gamma}$$

gde je $\gamma = 2\measuredangle(m,n)$. Ovim smo dokazali da u svakom slučaju važi relacija

$$\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} \in \mathcal{R}_O.$$

Ako obeležimo sa $\mathcal{R}_{O,\omega}$ bilo koju centralnu rotaciju iz skupa $\mathcal{R}_O$ i sa p, q prave ravni E^2 takve da je $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, biće

$$\mathcal{R}_{O,\omega}^{-1} = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{R}_{O,-\omega} \in \mathcal{R}_O.$$

S obzirom da transformacije iz skupa $\mathcal{R}_O$ predstavljaju elemente grupe $G(\mathcal{I})$ svih izometrijskih transformacija ravni E^2, iz dokazanih svojstva sleduje da skup $\mathcal{R}_O$ predstavlja takođe grupu. □

Definicija 3.5.2. Grupu koja se sastoji iz identične transformacije i svih centralnih rotacija ravni E^2 koje imaju zajednički centar O, nazivamo *grupom centralnih rotacija* te ravni oko tačke O, i simbolički obeležavamo sa $G(\mathcal{R}_O)$.

Teorema 3.5.5. Grupa $G(\mathcal{R}_O)$ centralnih rotacija ravni E^2 oko tačke O je komutativna; drugim rečima, za svake dve centralne rotacije $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{O,\beta}$ iz grupe $G(\mathcal{R}_O)$ važi relacija

$$\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{R}_{O,\beta}$$

Dokaz. Obeležimo sa p proizvoljnu pravu koja pripada ravni E^2 i sadrži tačku O i sa m, n prave ravni E^2 takve da je

$$\mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{O,\beta} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p$$

Množenjem odgovarajućih strana ovih dveju jednakosti, nalazimo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} &= \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m, \\ \mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{R}_{O,\beta} &= \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \end{aligned}$$

S obzirom da prave p, m, n ravani E^2 sadrže istu tačku O, one pripadaju jednom pramenu pravih, te kompozicija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n$ predstavlja neku osnu refleksiju, dakle involucionu transformaciju. Stoga kvadrat te kompozicije predstavlja koincidenciju, naime biće

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n = \mathcal{E} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m.$$

Iz ove i prethodnih jednakosti nalazimo da je

$$\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{R}_{O,\beta}.$$

□

Teorema 3.5.6. Ako je $\mathcal{R}_{O,\omega}$ centralna rotacija i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija euklidske ravni E^2, zatim O' tačka koja u izometriji $\mathcal{I}$ odgovara tački O i ω' ugao koji u toj izometriji odgovara uglu ω, tada važi relacija

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{R}_{O',\omega'}.$$

Dokaz. Ako obeležimo sa m i n prave ravni E^2 takve da je

$$\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m,$$

tada se prave m i n seku u tački O pod uglom $\measuredangle(m,n) = \frac{1}{2}\omega$. Ako zatim obeležimo sa m' i n' prave koje u izometriji $\mathcal{I}$ odgovaraju respektivno pravama m i n, tada se prave m' i n' seku u tački O' pod uglom $\measuredangle(m',n') = \frac{1}{2}\omega'$. Stoga, primenom ranije dokazane teoreme 3.2.5 nalazimo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&= \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_n \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&= (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{I}^{-1}) \\
&= \mathcal{S}_{n'} \circ \mathcal{S}_{m'} = \mathcal{R}_{O',\omega'}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.5.7. Dve centralne rotacije $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{B,\beta}$ ravni E^2 su komutativne transformacije ako i samo ako se središta A i B tih rotacija poklapaju; drugim rečima, imamo da je

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} \iff A = B$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A,\alpha}.$$

Ako u centralnoj rotaciji $\mathcal{R}_{B,\beta}$ tački A odgovara neka tačka A', a uglu α odgovara neki ugao α', prema prethodnoj teoremi imamo da je

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}.$$

Iz ove i prethodne jednakosti sledi da je $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}$. Stoga su tačke A i A' istovetne, a uglovi α i α' podudarni i istosmerni.

Obratno tvrđenje na jedan način već smo dokazali prilikom izvođenja teoreme 3.5.5. Ono se može dokazati i na sledeći način. Pretpostavimo, dakle, da je $A = B$. Ako u osnoj rotaciji $\mathcal{R}_{B,\beta}$ tački A odgovara tačka A' i uglu α odgovara ugao α', biće tačke A i A' istovetne a uglovi α i α' podudarni i istosmerni, pa je $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}$. Stoga je prema prethodnoj teoremi

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A,\alpha}$$

tj.

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}.$$

□

3. Centralna rotacija omogućuje da u ravni E^2 ustanovimo specifičnu relaciju podudarnosti geometrijskih likova; to je relacija obrtne podudarnosti likova. Kaže se da je u ravni E^2 lik Φ *obrtno podudaran* sa likom Φ' ako postoji centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ravni E^2 takva da je $\mathcal{R}_{O,\omega}(\Phi) = \Phi'$. Posebno je značajan slučaj kada je $\Phi = \Phi'$. On dovodi do pojma tzv. centralne simetrije reda n.

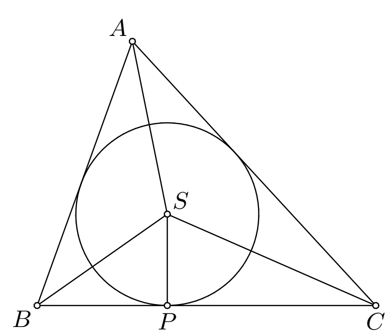
Definicija 3.5.3. Kaže se da u ravni E^2 lik Φ raspolaže *centralnom simetrijom reda* n ako postoji centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}$ te ravni takva da je $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}(\Phi) = \Phi$, gde je O tačka ravni E^2, R orijentisani prav ugao i n ceo pozitivan broj ili racionalan broj oblika $p : q$ pri čemu su p i q uzajamno prosti brojevi. Tačku O nazivamo *središtem* te centralne simetrije reda n.

Centralna simetrija reda n posebno je značajna u teoriji simetrija ravnih likova.

Primeri

Primer 3.6. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako je tačka P podnožje upravne iz središta S upisanog kruga na stranici BC, dokazati da je

$$\mathcal{R}_{C,\measuredangle ACB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBA} = \mathcal{S}_{P,180^\circ}.$$



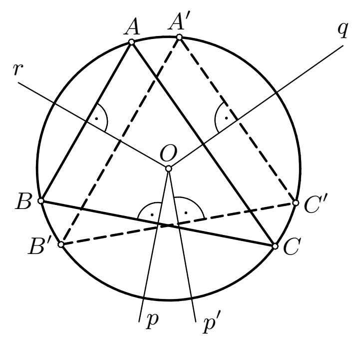
Sl. Primer 3.6

Rešenje. S obzirom da je tačka S središte upisanog kruga $\triangle ABC$, prave AS, BS, CS su simetrale unutrašnjih uglova A, B, C, tog trougla, te primenom ranije dokazane teoreme 3.2.5, nalazimo da je (Sl. Primer 3.6)

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \mathcal{R}_{C,\measuredangle ACB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBA} \\ &= \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{CS} \circ \mathcal{S}_{AS} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{BS} \\ &= \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{CS} \circ \mathcal{S}_{AS} \circ \mathcal{S}_{BS} \\ &= \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{SP} = \mathcal{S}_{P,180^\circ}.\end{aligned}$$

□

Primer 3.7. Neka su u ravni E^2 data dva trougla ABC i $A'B'C'$ upisana u istom krugu l. Ako je pri tome $AB \parallel A'B'$ i $AC \parallel A'C'$, dokazati da je $BC \cong B'C'$.



Sl. Primer 3.7

Rešenje. S obzirom da su trouglovi ABC i $A'B'C'$ upisani u istom krugu, njihove paralelne stranice AB i $A'B'$ imaju zajedničku medijatrisu r, a paralelne stranice AC i $A'C'$ imaju zajedničku medijatrisu q (Sl. Primer 3.7). Da bismo dokazali da je $BC \cong B'C'$, razmotrimo kompoziciju $\mathcal{I}$ određenu relacijom $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q$. Budući da je kompozicija sastavljena iz dveju osnih refleksija kojima se ose seku u središtu O kruga l, ona predstavlja centralnu rotaciju $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ravni E^2. U toj centralnoj rotaciji tačkama C i C' odgovaraju respektivno tačke B i B', pa je $BC \cong B'C'$. □

Zadaci

Zadatak 3.17. Date su u ravni E^2 dve podudarne duži AB i $A'B'$. Odrediti središte i ugao centralne rotacije ravni E^2 koja prevodi tačke A i B respektivno u tačke A' i B'.

Zadatak 3.18. Date su dve centralne rotacije $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{B,\beta}$ iste ravni E^2. Konstruisati tačku $X \in E^2$ takvu da je $\mathcal{R}_{A,\alpha}(X) = \mathcal{R}_{B,\beta}(X)$.

Zadatak 3.19. Date su u ravni E^2 dve prave a i b, tačka O i ugao ω. Konstruisati tačke $X \in a$ i $Y \in b$ takve da je $OX \cong OY$ i $\measuredangle XOY \cong \omega$.

Zadatak 3.20. Dati su u ravni E^2 dva kruga a, b i tačka C. Konstruisati jednakostraničan $\triangle ABC$ kojem se temena A i B nalaze na krugovima a i b.

Zadatak 3.21. Dati su u ravni E^2 dve prave p i q, tačka O i duž l. Konstruisati krug k koji ima za središte tačku O i koji seče prave p i q respektivno u tačkama A, B i C, D takvim da je $AB + CD \cong l$.

Zadatak 3.22. Dati su u ravni E^2 krug $k(O, r)$, dve tačke P, Q i ugao ω. Odrediti na krugu k tačke X i Y takve da je $PX \parallel QY$ i $\measuredangle XOY \cong \omega$.

Zadatak 3.23. Dati su u ravni E^2 krug k, dve tačke P, Q i duž l. Odrediti na krugu k tačke X i Y takve da je $PX \parallel QY$ i $XY \cong l$.

Zadatak 3.24. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni E^2, dokazati da je

$$\mathcal{R}^2_{C,\measuredangle BCA} \circ \mathcal{R}^2_{B,\measuredangle ABC} \circ \mathcal{R}^2_{A,\measuredangle CAB} = \mathcal{E}.$$

Zadatak 3.25. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$ i neka su B', C' tačke pravih AB i AC takve da je $\mathcal{B}(A, B, B')$ i $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ako je P_a tačka u kojoj spolja upisani krug koji odgovara temenu A dodiruje stranicu BC tog trougla, dokazati da je

$$\mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}.$$

Zadatak 3.26. Neka je $\mathcal{R}_{O,\omega}$ centralna rotacija i $\mathcal{S}_p$ osna refleksija iste ravni E^2. Ako je tačka O na pravoj p, dokazati da svaka od kompozicija

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{S}_p$$

predstavlja osnu refleksiju.

Zadatak 3.27. Dati su u ravni E^2 krug $k(O, r)$, ugao ω i dve tačke P, Q. Odrediti na krugu k tačke X i Y takve da je $\measuredangle OPX \cong \measuredangle OQY$ i $\measuredangle XOY \cong \omega$.

Zadatak 3.28. Dati su u ravni E^2 krug $k(O, r)$, dve tačke P, Q i dva ugla ω, δ. Odrediti na krugu k tačke X i Y takve da je $\measuredangle XOY \cong \omega$ i $\measuredangle OPX - \measuredangle OQY \cong \delta$.

3.6 Centralna refleksija ravni E^2

1. Centralne rotacije ravni E^2 u opštem slučaju nisu involucione transformacije. One su involucione samo u specijalnom slučaju kada su im uglovi rotacije opruženi. Takve centralne rotacije nazivamo centralnim simetrijama ili centralnim refleksijama ravni E^2. Zbog svoje involutivnosti one raspolažu nizom specifičnih svojstava koja ćemo razmatrati u ovom odeljku.

Definicija 3.6.1. *Centralnom refleksijom* $\mathcal{S}_O$ ravni E^2 nazivamo kompoziciju dveju osnih refleksija $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ ravni E^2 kojima su ose p i q upravne među sobom u tački O. Na taj način, biće:

$$\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \quad (p \cap q = O).$$

Tačku O nazivamo *centrom* ili *središtem* centralne refleksije $\mathcal{S}_O$.

Iz definicije neposredno sleduje da centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ ravni E^2 predstavlja centralnu rotaciju te ravni oko tačke O za opružen ugao. Kao takva, ona predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju ravni E^2 sa jedinstvenom invarijantnom tačkom O. Svaku drugu tačku $X \in E^2$ ona prevodi u tačku $X' \in E^2$ takvu da je tačka O središte duži XX'. Iz ovih osobina zaključujemo da je centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ ravni E^2 jednoznačno određena tačkom O.

Teorema 3.6.1. Centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ ravni E^2 je involuciona transformacija.

Dokaz. Ako obeležimo sa p i q dve prave koje pripadaju ravni E^2 i koje su upravne među sobom u tački O, imamo da je $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, pa je

$$\mathcal{S}_O^2 = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q) = \mathcal{E}.$$

Stoga je centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ involuciona transformacija. □

Teorema 3.6.2. U centralnoj refleksiji $\mathcal{S}_O$ ravni E^2 pravoj x koja sadrži tačku O odgovara ta ista prava, pravoj x koja ne sadrži tačku O odgovara prava x' takva da je $x \cap x' = \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da prava x sadrži tačku O. Ako obeležimo sa y pravu ravni E^2 takvu da je $O \in y \perp x$, biće $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_x$, pa je

$$\mathcal{S}_O(x) = \mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_x(x) = \mathcal{S}_y(x) = x.$$

Pretpostavimo sad da je $O \notin x$. Ako obeležimo sa p i q prave ravni E^2 takve da je $O \in p \perp x$ i $O \in q \perp p$, biće

$$\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p,$$

pa je

$$\mathcal{S}_O(x) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(x) = \mathcal{S}_q(x) = x'.$$

S obzirom da su prave q i x ravni E^2 upravne na pravoj p u dvema raznim tačkama, prave x i x' su disjunktne. Otuda sleduje da su prave x i x' s raznih strana q, pa je $x \cap x' \neq \emptyset$. □

Teorema 3.6.3. Centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ i osna refleksija $\mathcal{S}_p$ ravni E^2 su dve komutativne transformacije ako i samo ako tačka O pripada pravoj p, naime biće

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p \iff O \in p.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$(*) \qquad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O$$

Ako obeležimo sa O' tačku određenu relacijom $\mathcal{S}_p(O) = O'$, prema zakonu transmutacije centralne refleksije $\mathcal{S}_O$ osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ imamo da je

$$(**) \qquad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{O'}$$

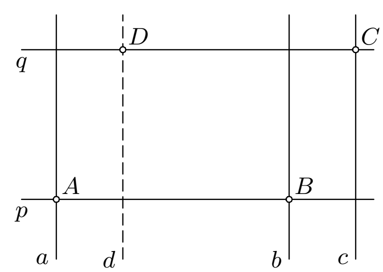
Iz jednakosti $(*)$ i $(**)$ sledi da je $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_{O'}$, i prema tome da je $O = O'$, što je moguće samo u slučaju kada je tačka O na pravoj p.

Obratno, pretpostavimo sad da je $O \in p$. Iz ove relacije sledi da je $\mathcal{S}_p(O) = O$, te prema zakonu transmutacije centralne refleksije $\mathcal{S}_O$ osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ nalazimo da je

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p.$$

□

Teorema 3.6.4. Kompozicija triju centralnih refleksija ravni E^2 predstavlja takođe centralnu refleksiju te ravni.



Sl. 3.6.4

Dokaz. Neka su date tri centralne refleksije $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C$ euklidske ravni E^2. Pri tome, ako je $A = B$ ili $B = C$, tada neposredno zaključujemo da kompozicija

$$\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$$

predstavlja takođe centralnu refleksiju. Razmotrimo slučaj kada je $A \neq B$ i $B \neq C$. Neka je p prava određena tačkama A i B, a q prava takva da je $C \in q$ i $p \parallel q$. Ako zatim obeležimo sa a, b, c prave koje sadrže respektivno tačke A, B, C a upravne su na pravoj p (Sl. 3.6.4), biće $c \perp q$, pa je

$$\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_c) \circ (\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a) = \mathcal{S}_q \circ (\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a).$$

S obzirom da su prave a, b, c ravni E^2 upravne na pravoj p, one pripadaju jednom pramenu paralelnih pravih, te kompozicija

$$\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$$

predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ kojoj osa d takođe pripada tom pramenu pravih. Stoga je $d \perp p$. Iz te relacije i relacije $p \parallel q$ sledi da je $d \perp q$. Ako obeležimo sa D tačku u kojoj se seku među sobom upravne prave d i q, nalazimo da je

$$\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_D.$$

□

Teorema 3.6.5. Kompozicija neparnog broja centralnih refleksija euklidske ravni E^2 predstavlja takođe centralnu refleksiju te ravni.

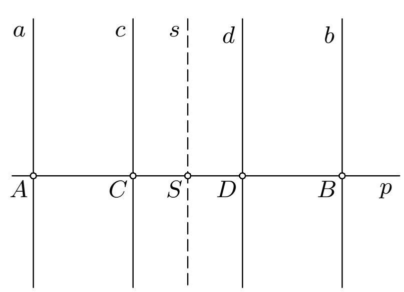
Dokaz. Neka je dat neparan broj centralnih refleksija $\mathcal{S}_{O_1}, \cdots, \mathcal{S}_{O_n}$ euklidske ravni E^2. Ako je $n = 3$, tvrđenje je dokazano prethodnom teoremom. Ako je $n > 3$, tada primenom prethodne teoreme nalazimo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{O_n} \circ \mathcal{S}_{O_{n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_1} &= \mathcal{S}_{O_n} \circ \mathcal{S}_{O_{n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_4} \circ \mathcal{S}_{O_3^*} \\ &= \mathcal{S}_{O_n} \circ \mathcal{S}_{O_{n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_6} \circ \mathcal{S}_{O_5^*} \\ &= \ldots \\ &= \mathcal{S}_{O_n} \circ \mathcal{S}_{O_{n-1}} \circ \mathcal{S}_{O_{n-2}^*} \\ &= \mathcal{S}_{O_n^*}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6.6. Ako su $\mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B$ dve razne centralne refleksije ravni E^2 i $\mathcal{S}_c$ osna refleksija te iste ravni, tada kompozicija $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ ako i samo ako je $AB \perp c$, naime biće

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d \iff AB \perp c.$$



Sl. 3.6.6

Dokaz. Pretpostavimo najpre da kompozicija $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ (Sl. 3.6.6). Ako obeležimo sa p pravu određenu tačkama A, B i sa a, b prave ravni E^2 upravne na pravoj p u tačkama A i B, biće

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_d.$$

Iz poslednje jednakosti i stava o transmutaciji osne refleksije nekom izometrijskom transformacijom, nalazimo da je

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{d'}.$$

gde je $d' = \mathcal{S}_p(d)$. Stoga prave a, b, c pripadaju jednom pramenu. Iz relacije $a \neq b$ i a, $b \perp p$ sledi da je to pramen paralelnih pravih, pa je i $c \perp p$, tj. $AB \perp c$.

Obratno, pretpostavimo da je prava p koja sadrži tačke A i B upravna na pravoj c. Ako obeležimo sa a i b prave ravni E^2 upravne na pravoj p u tačkama A i B, tada prave a, b, c pripadaju jednom pramenu paralelnih pravih, te kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$, kojoj osa d takođe pripada tom pramenu. Stoga je

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_d.$$

□

Teorema 3.6.7. Ako su $\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_b$ osne refleksije ravni E^2 i $\mathcal{S}_C$ centralna refleksija te iste ravni, tada kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a$ predstavlja neku centralnu refleksiju $\mathcal{S}_D$ ako i samo ako su prave a i b među sobom paralelne, naime biće

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_D \iff a \parallel b.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a$ predstavlja neku centralnu refleksiju $\mathcal{S}_D$. U tom slučaju imamo da je

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_D \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}'_b,$$

te je prema prethodnoj teoremi svaka od pravih a i b upravna na pravoj CD, i prema tome $a \parallel b$ (Sl. 3.6.6).

Obratno, pretpostavimo sad da je $a \parallel b$. Ako obeležimo sa p pravu koja zadovoljava relacije $C \in p$ i $p \perp a$, biće i $p \perp b$. Neka je c prava koja pripada ravni E^2 i koja je u tački C upravna na pravoj p. U tom slučaju prave a, b, c pripadaju jednom pramenu pravih, te kompozicija $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ kojoj osa takođe pripada tom pramenu pravih. Stoga je i $d \perp p$. Ako obeležimo sa D presečnu tačku pravih d i p, biće

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_D.$$

□

2. Prethodne dve teoreme omogućuju da u geometriji ravni E^2 uvedemo naročitu relaciju, to je relacja izotomičnosti para tačaka sa parom pravih, i obratno, para pravih sa parom tačaka.

Definicija 3.6.2. Kaže se da je u ravni E^2 par pravih c i d *izotomički spregnut* ili *simetrično raspoređen sa parom tačaka A i B*, i obratno, da je par tačaka A i B *izotomički spregnut* ili *simetrično raspoređen sa parom pravih c i d* ako je

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_B$$

Iz definicije neposredno sleduje da je uvedena relacija izotomičnosti simetrična, tj. da iz izotomičnosti para pravih c i d sa parom tačaka A i B sleduje izotomičnost para tačaka A i B sa parom pravih c i d, i obratno. Stoga je dopušteno reći da su u tom slučaju par tačaka A, B i par pravih c, d izotomički spregnuti. U geometrijskim razmatranjima poseban značaj ima kriterijum ustanovljavanja relacije izotomičnosti para tačaka sa parom pravih koji glasi:

Teorema 3.6.8. Neka su A, B dve razne tačke i c, d dve prave ravni E^2 takve da je $AB \perp c, d$. Da bi par tačaka bio izotomički spregnut sa parom pravih c, d potrebno je i dovoljno da medijatrisa duži AB bude osa simetrije pravih c i d.

Dokaz. Ustanovimo najpre da je uslov potreban. U tom pretpostavimo da su par tačaka A, B i par pravih c, d izotomički spregnuti, tj. da je

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d.$$

Neka je s medijatrisa duži AB. Ako obeležimo sa d' pravu određenu relacijom $\mathcal{S}_s(c) = d'$, biće $d = d'$. Zaista, iz uvedenih pretpostavki sledi da je

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_B \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c.$$

Primenom ovih jednakosti imamo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_d &= \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A \\ &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_A \\ &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_{d'}) \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \\ &= (\mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{d'}. \end{aligned}$$

Iz jednakosti $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_{d'}$ sledi da je $d = d'$. Stoga je $\mathcal{S}_s(c) = d$, pa je prava s osa simetrije pravih c i d.

Obratno, pretpostavimo sad da je medijatrisa s duži AB osa simetrije pravih c i d. Pri tome je

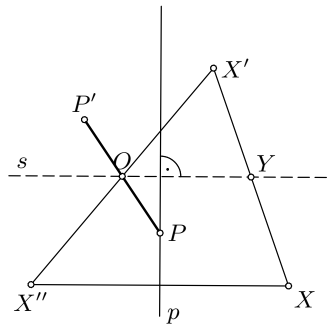
$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_B \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c.$$

Primenom ovih dveju jednakosti nalazimo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_A \\ &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_d) \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \\ &= (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6.9. Središta duži koje spajaju odgovarajuće tačke indirektne izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ ravni E^2 pripadaju jednoj pravoj.



Sl. 3.6.9

Dokaz. Neka je $P \in E^2$, $P' \in \mathcal{I}(P)$ i O središte duži PP' (Sl. 3.6.9). S obzirom da je $\mathcal{I}$ indirektna i $\mathcal{S}_O$ direktna izometrijska transformacija ravni E^2, kompozicija

$$\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$$

predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju te ravni. U toj indirektnoj izometrijskoj transformaciji tačka P je invarijantna, te prema poznatoj teoremi predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_p$ pri čemu je $P \in p$. Neka je s prava ravni E^2 određena relacijama $O \in s$ i $s \perp p$. Ako obeležimo sa X bilo koju tačku ravni E^2, različitu od tačke P, i sa X' tačku takvu da je $\mathcal{I}(X) = X'$, biće središte Y duži XX' na pravoj s. Zaista, stavimo li da je $\mathcal{S}_O(X') = X''$, biće

$$\mathcal{S}_p(X) = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}(X) = X'',$$

pa je prava p medijatrisa duži XX'', i prema tome upravna na pravoj OY koja je određena središtima stranica $X'X''$ i $X'X$ trougla $XX'X''$. Stoga su prave s i OY istovetne, te je $Y \in s$. □

Definicija 3.6.3. Pravu s koja sadrži središta duži određenih odgovarajućim tačkama indirektne izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ ravni E^2 nazivamo *osom* te indirektne izometrijske transformacije.

Primeri

Primer 3.8. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako su M i N središta stranica AB i AC, a p i q prave od kojih prva predstavlja medijatrisu stranice BC a druga pravu određenu visinom iz temena A trougla ABC, dokazati da je

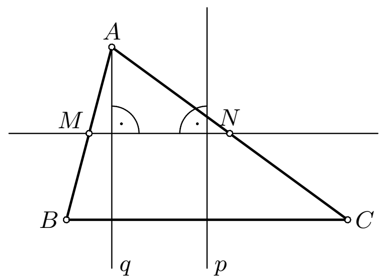
$$\mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_p.$$

Rešenje. S obzirom da je prava q upravna na pravoj MN, prema poznatoj teoremi, kompozicija

$$\mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_M$$

predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_{p'}$. U toj osnoj refleksiji tački B odgovara tačka C, jer je (Sl. Primer 3.8)

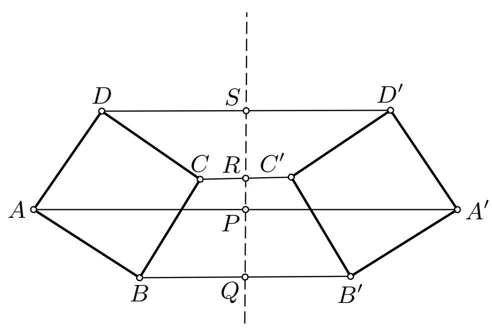
$$\mathcal{S}_{p'}(B) = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_M(B) = C.$$



Sl. Primer 3.8

Stoga je p' medijatrisa duži BC, i prema tome $p = p'$. □

Primer 3.9. Ako su $A_1 \cdots A_m$ i $B_1 \cdots B_m$ dva podudarna suprotnosmerna poligona ravni E^2, dokazati da središta duži koje spajaju odgovarajuća temena tih poligona pripadaju jednoj pravoj.



Sl. Primer 3.9

Rešenje. S obzirom da se podudarni poligoni $A_1 \cdots A_m$ i $B_1 \cdots B_m$ nalaze u istoj ravni E^2, postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ te ravni koja prevodi poligon $A_1 \cdots A_m$ na poligon $B_1 \cdots B_m$. Po pretpostavci, poligoni $A_1 \cdots A_m$ i $B_1 \cdots B_m$ su suprotnosmerni, te je izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ indirektna. Stoga, prema teoremi 3.6.9 koja se naziva i *teoremom Šala-Hjelmsleva*, središta duži koje spajaju odgovarajuća temena poligona $A_1 \cdots A_m$ i $B_1 \cdots B_m$ pripadaju jednoj pravoj (Sl. Primer 3.9). □

Zadaci

Zadatak 3.29. Ako je $\mathcal{S}_O$ centralna refleksija ravni E^2 i x prava te ravni, dokazati da je

$$\mathcal{S}_O(x) = x \iff O \in x.$$

Zadatak 3.30. Ako su $\mathcal{S}_O$ i $\mathcal{S}_{O'}$ centralne refleksije ravni E^2 i $\mathcal{I}$ izometrijska transformacija te iste ravni, dokazati da je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{O'} \iff \mathcal{I}(O) = O'.$$

Zadatak 3.31. Ako su $\mathcal{S}_O$, $\mathcal{S}_P$, $\mathcal{S}_Q$ centralne refleksije ravni E^2, dokazati da je

$$\mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_Q \iff \mathcal{S}_O(P) = Q.$$

Zadatak 3.32. Ako su $\mathcal{S}_P$, $\mathcal{S}_Q$ centralne refleksije ravni E^2 i $\mathcal{S}_m$ osna refleksija te iste ravni, dokazati da je

$$\mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_Q \iff \mathcal{S}_m(P) = Q.$$

Zadatak 3.33. Ako su $\mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B$ dve razne centralne refleksije ravni E^2 i $\mathcal{S}_p$ osna refleksija te iste ravni, dokazati da je

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \iff p \perp AB.$$

Zadatak 3.34. Neka je u ravni E^2 zadato pet tačaka $P_1, \cdots, P_5$. Konstruisati u toj ravni petougao $A_1 \cdots A_5$ takav da tačke $P_1 \cdots P_5$ budu središta stranica A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1.

Zadatak 3.35. Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni E^2 zatim p i p', q i q', r i r' parovi pravih te iste ravni koji su izotomički spregnuti respektivno sa parovima tačaka B i C, C i A, A i B. Pri tome, ako se prave p, q, r seku u nekoj tački S, dokazati da se i prave p', q', r' seku u nekoj tački S'.

Zadatak 3.36. Neka je u ravni E^2 dat četvorougao $ABCD$ i neka su p i p', q i q', r i r' parovi pravih u toj ravni koji su izotomički spregnuti respektivno sa parovima tačaka A i B, B i C, C i D, D i A. Pri tome, ako su prave q i s izogonalno spregnute sa pravama p i r, dokazati da su i prave q' i s' izogonalno spregnute sa pravama p' i r'.

3.7 Translacija ravni E^2

Sem centralnih rotacija postoji još jedna vrsta izometrijskih transformacija ravni E^2 koje se mogu predstaviti kao kompozicija dveju osnih reefleksija; to su tzv. translacije ravni E^2.

Definicija 3.7.1. Neka su $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ dve osne refleksije prostora E^2 kojima su ose p i q upravne na nekoj pravoj s u dvema raznim tačkama P i Q, i neka je $P' = \mathcal{S}_q(P)$. *Pomeranjem* ili *translacijom* ravni E^2 po pravoj s za orijentisanu duž $PP' \subset s$ nazivamo transformaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \colon E^2 \to E^2$ određenu relacijom

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p.$$

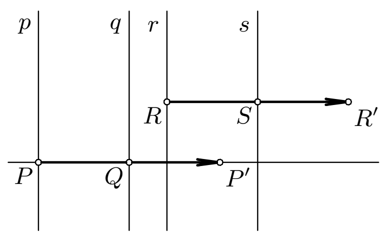
S obzirom da je osna refleksija ravni E^2 indirektna izometrijska transformacija, kompozicija sastavljena iz dveju osnih refleksija, prema tome i translacija ravni E^2 predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju. Kako su prave p i q upravne na pravoj s u dvema raznim tačkama, one su disjunktne, naime biće $p \cap q = \emptyset$. Stoga kompozicija $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, prema tome i translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 nema invarijantnih tačaka. Međutim, translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 poseduje beskonačno mnogo invarijantnih pravih; to su prave paralelne sa pravom PP'.

Zaista, ako je x bilo koja od tih pravih, biće $x \perp p$ i $x \perp q$, pa je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(x) = x$. Budući da osne refleksije $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ menjaju orijentaciju prave x, translacija

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$$

ne menja orijentaciju prave x. Narednim teoremama izvodimo još neka svojstva translacije.

Teorema 3.7.1. Dve translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ i $\mathcal{T}_{\overrightarrow{RR'}}$ iste ravni E^2 među sobom su jednake ako i samo ako su duži PP' i RR' među sobom podudarne i istosmerne.



Sl. 3.7.1

Dokaz. Neka su Q i S središta duži PP' i RR'. Ako obeležimo sa p i q prave koje su u tačkama P i Q upravne na pravoj PQ, a sa r i s prave koje su u tačkama R i S upravne na pravoj RS (Sl. 3.7.1), biće

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \quad \text{i} \quad \mathcal{T}_{\overrightarrow{RR'}} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_r.$$

Ako pretpostavimo da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{RR'}}$, imamo da je $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_r$ pa je

$$(*) \qquad \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_s.$$

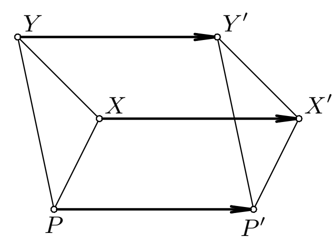
Iz ove relacije sleduje da prave p, q, r, s pripadaju jednom pramenu, obeležimo ga sa $\mathcal{X}$. S obzirom da je $p \neq q$ i $p \parallel q$, $\mathcal{X}$ je pramen paralelnih pravih. Iz relacije $(*)$ takođe sleduje da su prave p i s izogonalno spregnute sa pravama q i r, te se osa simetrije pravih p i s poklapa sa osom simetrije pravih q i r. Otuda sleduje da su duži PQ i RS, prema tome i duži PP' i RR' među sobom podudarne i istosmerne.

Obratno, ako pretpostavimo da su duži PP' i RR' među sobom podudarne i istosmerne, biće prave p, q, r, s među sobom paralelne, a osa simetrije pravih p i s istovetna sa osom simetrije pravih q i r. Stoga je $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_s$, tj.

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_r,$$

i prema tome $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{RR'}}$. □

Teorema 3.7.2. Ako u translaciji $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 tačkama X i Y odgovaraju tačke X' i Y', tada su duži XX' i YY' među sobom podudarne i istosmerne.



Sl. 3.7.2

Dokaz. Ustanovimo najpre da su duži PP' i XX' među sobom podudarne i istosmerne. Ako obeležimo sa X_1' tačku takvu da su duži PP' i XX_1' podudarne i istosmerne, prema prethodnoj teoremi imamo da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{XX_1'}}$. Koristeći ovu jednakost nalazimo da je (Sl. 3.7.2)

$$X_1' = \mathcal{T}_{\overrightarrow{XX_1'}}(X) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'.$$

Stoga su duži PP' i XX' podudarne i istosmerne. Istim postupkom dokazuje se da su i duži XX' i YY' podudarne i istosmerne. □

Iz dokazanih dveju teorema neposredno sleduje da je translacija ravni E^2 jednoznačno određena bilo kojim parom odgovarajućih tačaka. Štaviše, ako u translaciji $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$, ravni E^2 tačkama A, B, C, D, ... odgovaraju respektivno tačke A', B', C', D', ... biće

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AA'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BB'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CC'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{DD'}} = \cdots$$

Narednim dvema teoremama ustanovljuju se uslovi pod kojima neka izometrijska transformacija ravni E^2 predstavlja translaciju te ravni.

Teorema 3.7.3. Ako direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 nema invarijantnih tačaka, ona predstavlja translaciju te ravni.

Dokaz. S obzirom da je $\mathcal{I}$ direktna izometrijska transformacija ravni E^2, ona se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija te ravni; neka je npr.

$$(1) \qquad \mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p.$$

Po pretpostavci transformacija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, pa je $p \cap q = \emptyset$. Ako obeležimo sa P bilo koju tačku prave p i sa P' tačku takvu da je $\mathcal{S}_q(P) = P'$ biće

$$(2) \qquad \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p.$$

Iz jednakosti (1) i (2) sledi da je $\mathcal{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$. □

Teorema 3.7.4. Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 predstavlja translaciju te ravni ako i samo ako se može predstaviti kao kompozicija dveju raznih centralnih refleksija te iste ravni.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 predstavlja neku translaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$, te ravni. Ako obeležimo sa Q središte duži PP', sa s pravu određenu tačkama P i P', a sa p i q prave upravne na pravoj s u tačkama P i Q, imamo da je

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p) = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P.$$

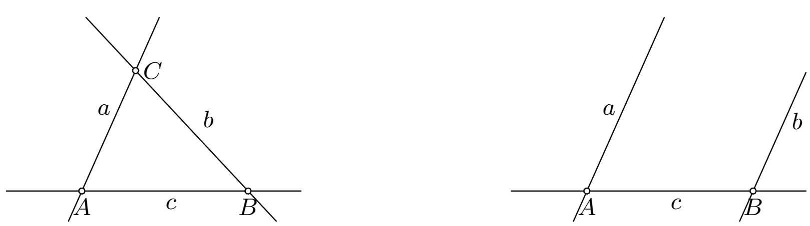
Obratno, pretpostavimo sad da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 predstavlja kompoziciju dveju raznih centralnih refleksija; neka je npr. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P$. Ako obeležimo sa s pravu određenu tačkama P i Q, sa p i q prave koje su u tačkama P i Q upravne na pravoj s i sa P' tačku takvu da je $\mathcal{S}_q(P) = P'$, biće

$$\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}.$$

$\square$

Ovom teoremom ustanovljena je veza koja postoji između translacija i centralnih refleksija ravni E^2.

Teorema 3.7.5. Kompozicija dveju centralnih rotacija ravni E^2 predstavlja centralnu rotaciju, translaciju ili koincidenciju.



(a) (b)

Sl. 3.7.5

Dokaz. Neka su $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{B,\beta}$ dve centralne rotacije ravni E^2. Ako je $A = B$, prema ranije dokazanoj teoremi kompozicija $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha}$ predstavlja centralnu rotaciju ili koincidenciju. Razmotrimo slučaj kada je $A \neq B$. Ako obeležimo sa c pravu određenu tačkama A i B, a sa a i b prave određene relacijama

$$\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c.$$

Množenjem odgovarajućih strana nalazimo da je

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a.$$

U zavisnosti od toga da li se prave a i b seku u nekoj tački C (Sl. 3.7.5(a)) ili su među sobom paralelne (Sl. 3.7.5(b)), razmatrana kompozicija predstavlja centralnu rotaciju sa središtem C i uglom $\gamma = 2\measuredangle(a,b)$ ili neku translaciju za neku orijentisanu duž MN, naime biće

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{C,\gamma} \quad \text{ili} \quad \mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}.$$

□

Teorema 3.7.6. Skup $\mathcal{T}$ koji se sastoji iz identične transformacije i svih translacija ravni E^2 predstavlja podgrupu grupe $G(\mathcal{I}+)$ svih direktnih izometrijskih transformacija te iste ravni.

Dokaz. Neka su $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ i $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ bilo koje dve translacije iz skupa $\mathcal{T}$. Ako je E tačka koja u translaciji $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ odgovara tački B, prema poznatoj teoremi imamo da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}}$. Ako zatim obeležimo sa M i N središta duži AB i BE, i sa M' tačku takvu da je $\mathcal{S}_N(M) = M'$, biće

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}} \in \mathcal{T}.$$

Na taj način, kompozicija svake dve transformacije iz skupa τ predstavlja takođe transformaciju iz tog skupa.

Ako je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ proizvoljna transformacija iz skupa $\mathcal{T}$ i R središte duži PQ, imamo da je

$$\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{PQ}} = (\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_R)^{-1} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_Q = \mathcal{T}_{\overrightarrow{QP}} \in \mathcal{T}.$$

Stoga inverzna transformacija bilo koje transformacije iz skupa $\mathcal{T}$ predstavlja takođe transformaciju iz skupa $\mathcal{T}$.

S obzirom da transformacije iz skupa $\mathcal{T}$ predstavljaju elemente iz grupe $G(\mathcal{I}+)$, iz dokazanih svojstava sleduje da skup $\mathcal{T}$ predstavlja podgrupu te grupe. □

Definicija 3.7.2. Grupu ustanovljenu ovom teoremom nazivamo *grupom translacija ravni* E^2, i simbolički obeležavamo sa $G(\mathcal{T})$.

Teorema 3.7.7. Grupa translacija $G(\mathcal{T})$ ravni E^2 je komutativna; drugim rečima, za svake dve translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ i $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ ravni E^2 važi relacija

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}.$$

Dokaz. Neka je E tačka koja u translaciji $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ ravni E^2 odgovara tački B. Prema ranije izvedenoj teoremi imamo da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}}$. Ako obeležimo sa M i N središta duži AB i BE, primenom teoreme 3.7.4 nalazimo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} &= \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M,\\
\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} &= \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B.
\end{aligned}$$

Prema ranije dokazanoj teoremi, kompozicija $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N$ predstavlja centralnu refleksiju, dakle involucionu transformaciju. Stoga kvadrat te kompozicije predstavlja involuciju, naime biće

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N = \mathcal{E}, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M.$$

Iz ove i prethodnih dveju jednakosti sledi da je

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}.$$

□

Teorema 3.7.8. Ako je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ translacija i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija euklidske ravni E^2, zatim M' i N' tačke koje u izometriji $\mathcal{I}$ odgovaraju respektivno tačkama M i N, tada važi relacija

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}.$$

Dokaz. Ako obeležimo sa m pravu koja je u tački M upravna na pravoj MN i sa n medijatrisu duži MN, biće

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m.$$

Ako zatim obeležimo sa m' i n' prave koje u izometriji $\mathcal{I}$ odgovaraju respektivno pravama m i n, biće prava m' u tački M' upravna na pravoj $M'N'$, a prava n' medijatrisa duži $M'N'$, pa je

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} = \mathcal{S}_{n'} \circ \mathcal{S}_{m'}.$$

Primenom teoreme 3.2.5 nalazimo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&= \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_n \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&= (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{I}^{-1}) \\
&= \mathcal{S}_{n'} \circ \mathcal{S}_{m'} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.7.9. Translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ i osna refleksija $\mathcal{S}_p$ euklidske ravni E^2 su dve komutativne transformacije ako i samo ako je prava MN paralelna s pravom p, naime biće

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p \iff MN \parallel p.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}.$$

Ako obeležimo sa M' i N' tačke koje u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_p$ odgovaraju tačkama M i N, prema prethodnoj teoremi imamo da je

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}.$$

Iz ove i prethodne jednakosti sledi da je

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}},$$

pa su orijentisane duži $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$ podudarne i istosmerne, što je moguće samo u slučaju kada je

$$MN \parallel p.$$

Obratno, pretpostavimo da je $MN \parallel p$. Ako obeležimo sa M' i N' tačke koje u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_p$ odgovaraju respektivno tačkama M i N, biće orijentisane duži $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$ podudarne i istosmerne, pa je

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}.$$

Stoga, primenom prethodne teoreme, imamo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} &= \mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \\ &= \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} \circ \mathcal{S}_p \\ &= \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p. \end{aligned}$$

□

Zadaci

Zadatak 3.37. Dokazati da skup koji se sastoji iz koincidencije $\mathcal{E}$, svih translacija $\mathcal{T}$ ravni E^2 i svih centralnih refleksija $\mathcal{S}$ te iste ravni, predstavlja nekomutativnu grupu u odnosu na operaciju $\circ$.

Zadatak 3.38. Neka su $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$ centralne refleksije i $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ translacija ravni E^2. Odrediti vrstu transformacije $f : E^2 \to E^2$ koja zadovoljava relaciju

a) $\mathcal{S}_A \circ f = \mathcal{S}_B$; d) $\mathcal{S}_A \circ f \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B$;
b) $\mathcal{S}_A \circ f = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$; e) $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ f \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} = \mathcal{S}_A$;
c) $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ f = \mathcal{S}_A$; f) $f \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ \mathcal{S}_A$.

Zadatak 3.39. Ako je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ translacija i $\mathcal{R}_{O,\omega}$ centralna rotacija ravni E^2, dokazati da svaka od kompozicija

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ \mathcal{R}_{O,\omega}$$

predstavlja centralnu rotaciju ravni E^2.

Zadatak 3.40. Ako je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ translacija i $\mathcal{S}_O$ centralna refleksija ravni E^2, dokazati da svaka od kompozicija

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ \mathcal{S}_O$$

predstavlja centralnu refleksiju ravni E^2.

Zadatak 3.41. Ako je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ translacija i $\mathcal{S}_m$ osna refleksija ravni E^2 kojoj je osa upravna na pravoj PQ, dokazati da svaka od kompozicija

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \quad \text{i} \quad I_2 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ \mathcal{S}_m$$

predstavlja osnu refleksiju ravni E^2.

Zadatak 3.42. Date su u ravni E^2 dve razne tačke A, B i dve prave c, d. Konstruisati tačke $C \in c$ i $D \in d$ takve da četvorougao $ABCD$ bude paralelogram.

Zadatak 3.43. U ravni E^2 dati su krugovi k_1, k_2 i prava p. Konstruisati pravu s koja je paralelna sa pravom p, a seče krug k_1 u tačkama A, B i krug k_2 u tačkama C, D takvim da je $AB \cong CD$.

Zadatak 3.44. Dati su u ravni E^2 krugovi k_1, k_2, prava p i duž l. Konstruisati pravu s koja je paralelna sa pravom p i koja seče krugove k_1 i k_2 respektivno u tačkama A, B i C, D takvim da je $AB \pm CD \cong l$.

3.8 Klizajuća refleksija ravni E^2

Proučavanju izometrijskih transformacija ravni E^2 kojima se minimalna simetrijska reprezentacija sastoji iz triju osnih refleksija prethodi uvođenje naročite vrste izometrijskih transformacija; to su tzv. klizajuće refleksije.

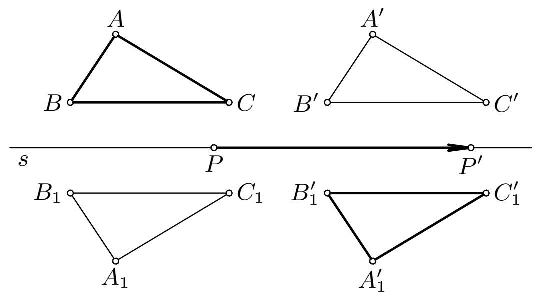
Definicija 3.8.1. *Klizajućom* ili *translatornom refleksijom* $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 nazivamo kompoziciju sastavljenu iz translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ i osne refleksije $\mathcal{S}_{PP'}$, te iste ravni; naime biće

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}.$$

Pravu s određenu tačkama P i P' nazivamo *osom klizajuće refleksije* $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$.

Iz definicije neposredno sleduje da je klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 jednoznačno određena parom odgovarajućih tačaka P i P'. S obzirom da je translacija ravni E^2 direktna, a osna refleksija te iste ravni indirektna izometrijska transformacija, kompozicija tih transformacija, prema tome i klizajuća refleksija ravni E^2 predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju. Budući da translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ i osna refleksija $\mathcal{S}_{PP'}$ pomoću kojih je definisana klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ imaju zajedničku osu PP', prema teoremi 3.7.9 te dve transformacije su komutativne, pa je

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'}.$$



Sl. 3.8

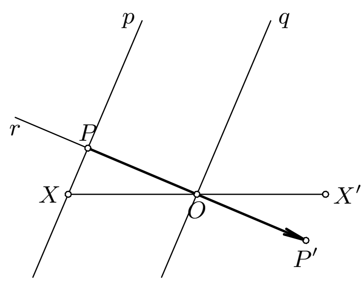
Stoga prilikom izvođenja konstrukcije lika koji u klizajućoj refleksiji $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 odgovara nekom liku $\Phi \subset E^2$ nije važno da li se najpre izvodi translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$, zatim osna refleksija $\mathcal{S}_{PP'}$, ili obratno, najpre osna refleksija $\mathcal{S}_{PP'}$, zatim translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$. Ilustracije radi na Sl. 3.8, predstavljena su oba redosleda dobijanja $\triangle A_1'B_1'C_1' \subset E^2$ koji u zadatoj klizajućoj refleksiji $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 odgovara zadatom $\triangle ABC \subset E^2$.

Teorema 3.8.1. Klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 nema invarijantnih tačaka; ona poseduje jedinstvenu invarijantnu pravu, to je osa PP' te refleksije.

Dokaz. Prvi deo teoreme dokažimo indirektnim postupkom. Ako pretpostavimo da klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ poseduje neku invarijantnu tačku X imamo da je $\mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X$. Stavimo li da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'$, biće $\mathcal{S}_{PP'}(X') = X$. S obzirom da translacija $\mathcal{S}_{PP'}$ ravni E^2 nema invarijantnih tačaka biće $X \neq X'$. Iz relacija $\mathcal{S}_{PP'}(X') = X$ i $X \neq X'$ sledi da su tačke X i X' s raznih strana prave PP', što je nemoguće jer iz relacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'$ sledi da je $XX' \parallel PP'$. Stoga klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ ravni E^2 nema invarijantnih tačaka.

Budući da je prava s na kojoj se nalaze tačke P i P' invarijantna u svakoj od tih transformacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ i $\mathcal{S}_{PP'}$, prava s je invarijantna i u klizajućoj refleksiji $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$. Indirektnim postupkom dokažimo da je s jedinstvena invarijantna prava transformacije $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$. Ako bi transformacija $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$, sem prave s, posedovala još neku invarijantnu pravu t, važila bi relacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'}(t) = t$. Neka je T tačka takva da je $T \in t$ i $T \notin s$, zatim T' tačka određena relacijom $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}(T) = T'$. Pri tome su tačke T i T' s raznih strana prave s, te prava t seče pravu s u nekoj tački S. S obzirom da su u klizajućoj refleksiji $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ prave s i t invarijantne, invarijantna je i njihova presečna tačka S, što je prema prvom delu ove teoreme nemoguće. $\square$

Teorema 3.8.2. Ako indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 nema invarijantnih tačaka, ona predstavlja klizajuću refleksiju.



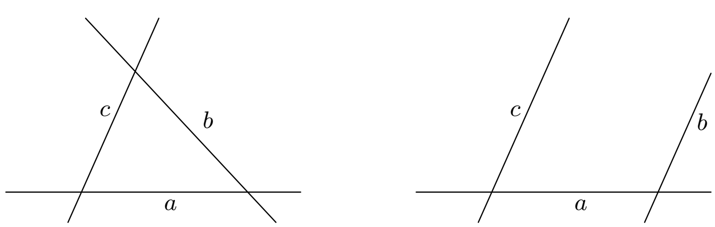
Sl. 3.8.2

Dokaz. Neka je X proizvoljna tačka ravni E^2 i X' njena odgovarajuća tačka. S obzirom da izometrija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, imamo da je $X \neq X'$. Ako obeležimo sa O središte duži XX', biće X invarijantna tačka kompozicije $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$. Budući da je $\mathcal{I}$ indirektna i $\mathcal{S}_O$ direktna izometrijska transformacija ravni E^2, kompozicija $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju te ravni. Stoga, prema poznatoj teoremi, ona predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_p$ kojoj osa p sadrži neku invarijantnu tačku X. Iz jednakosti $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ nalazimo da je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$. Po pretpostavci, izometrija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, pa je $O \notin p$. Ako obeležimo sa r pravu koja pripada ravni E^2, sadrži tačku O, a upravna je na pravoj p, sa q pravu koja pripada ravni E^2, a upravna je na pravoj r u tački O, a sa P i P' tačke određene relacijama $p \cap r = P$ i $\mathcal{S}_q(P) = P'$, imamo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}.$$

$\square$

Teorema 3.8.3. Kompozicija sastavljena iz triju osnih refleksija neke ravni E^2, kojima ose ne pripadaju jednom pramenu pravih, predstavlja klizajuću refleksiju te ravni.



Sl. 3.8.3

Dokaz. Neka su $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$ tri osne refleksije iste ravni E^2 kojima ose a, b, c, ne pripadaju jednom pramenu pravih (Sl. 3.8.3). Kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ sastavljena iz tih osnih refleksija predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju koja nema invarijantnih tačaka. Zaista, ako bi indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ posedovala invarijantnu tačku O, prema teoremi 3.2.3 ona bi predstavljala neku osnu refleksiju, te bi prave a, b, c pripadale jednom pramenu pravih, što je suprotno pretpostavci. S obzirom da je $\mathcal{I}$ indirektna izometrijska transformacija ravni E^2 bez invarijantnih tačaka, prema prethodnoj teoremi ona predstavlja klizajuću refleksiju razmatrane ravni. $\square$

Teorema 3.8.4. Ako su P i P' dve razne tačke neke ravni E^2 i s prava te iste ravni, tada je

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P \iff \mathcal{S}_s(P) = P'.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P$. Ako obeležimo sa s' medijatrisu duži PP' i sa p pravu koja pripada ravni E^2 i zadovoljava relaciju $P \in p$ i $p \perp PP'$, imamo da je

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{S}_P.$$

Stoga je $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_{s'}$, pa je $s = s'$, i prema tome $\mathcal{S}_s(P) = P'$.

Obratno, neka je $\mathcal{S}_s(P) = P'$. Ako obeležimo sa p pravu koja pripada ravni E^2 i koja je u tački P upravna na pravoj PP', imamo da je

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P.$$

$\square$

Zadaci

Zadatak 3.45. Date su u ravni E^2 dve podudarne duži AB i $A'B'$. Konstruisati osu osne ili klizajuće refleksije ravni E^2 koja prevodi tačke A i B respektivno u tačke A' i B'.

Zadatak 3.46. Date su u ravni E^2 dve prave p, p' i dve tačke $A \in p$, $A' \in p'$. Konstruisati ose indirektnih izometrijskih transformacija ravni E^2 koje prevode pravu p na pravu p' i tačku A na tačku A'. Pod kojim uslovom obe te izometrije predstavljaju osne refleksije?

Zadatak 3.47. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Dokazati da kompozicija osnih refleksija ravni E^2 definisanih u odnosu na prave određene stranicama $\triangle ABC$ predstavljaju klizajuću refleksiju. Konstruisati osu i u funkciji stranica $\triangle ABC$ odrediti translacionu duž klizajuće refleksije

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{S}_{BC}.$$

Zadatak 3.48. Date su u ravni E^2 tri razne prave a, b, c od kojih su dve među sobom paralelne a treća ih seče u izvesnim tačkama. Dokazati da kompozicija osnih refleksija definisanih u odnosu na te prave predstavlja klizajuću refleksiju. Konstruisati osu i odrediti translacionu duž klizajuće refleksije

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a.$$

Zadatak 3.49. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako su

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}},\ \mathcal{G}_{\overrightarrow{QQ'}},\ \mathcal{G}_{\overrightarrow{RR'}},$$

klizajuće refleksije ravni E^2 koje respektivno prevode poluprave CA, AB, BC u poluprave BA, CB, AC, dokazati da kompozicija

$$\mathcal{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{RR'}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{QQ'}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$$

predstavlja osnu refleksiju kojoj je osa upravna na pravoj AC.

Zadatak 3.50. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke ravni E^2 i c prava koja u tački A dodiruje krug opisan oko ABC, dokazati da je

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_c.$$

Zadatak 3.51. Dokazati da su dva kruga ABC i ACD ravni E^2 ortogonalna među sobom ako i samo ako je zadovoljena relacija

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_A.$$

Zadatak 3.52. Dokazati da se dva razna kruga ABC i $A'B'C'$ ravni E^2 dodiruju među sobom ako i samo ako je zadovoljena relacija

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA'}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC'}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB'}}.$$

Zadatak 3.53. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ neke ravni E^2 tetivan ako i samo ako je

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}.$$

3.9 Klasifikacija izometrijskih transformacija euklidske ravni E^2

U prethodnim poglavljima razmatrali smo više različitih vrsta izometrijskih transformacija euklidske ravni E^2. Prirodno je postaviti pitanje da li su njima obuhvaćene sve postojeće vrste izometrijskih transformacija te ravni. Odgovor na to pitanje dat je u narednim dvema teoremama kojima se izvode klasifikacije respektivno direktnih i indirektnih izometrijskih transformacija pomenute ravni.

Teorema 3.9.1. Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 predstavlja koincidenciju, translaciju ili centralnu rotaciju.

Dokaz. S obzirom da je $\mathcal{I}$ direktna izometrijska transformacija ravni E^2, prema ranije navedenoj teoremi ona se može predstaviti u obliku kompozicije dveju osnih refleksija. Neka je npr.

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m.$$

S obzirom na međusobni položaj osa m i n tih dveju osnih refleksija, razlikujemo naredne tri mogućnosti:

1° Ako su ose m i n istovetne, tada iz involutivnosti osne refleksije ravni E^2 neposredno zaključujemo da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 predstavlja koincidenciju, tj. da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{E}.$$

2° Ako su ose m i n dve razne među sobom paralelne prave, tada kompozicija $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$ predstavlja neku translaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}}$ ravni E^2, gde je npr. $M \in m$ i $M' = \mathcal{S}_n(M)$. U tom slučaju imamo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}}.$$

3° Ako se ose m i n osnih refleksija $\mathcal{S}_m$ i $\mathcal{S}_n$ seku u nekoj tački O, tada kompozicija $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$ predstavlja centralnu rotaciju $\mathcal{R}_{O,\omega}$, ravni E^2, gde je ω orijentisani ugao što ga čini uređen par pravih m i n. U tom slučaju imamo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{R}_{O,\omega}.$$

□

Teorema 3.9.2. Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 predstavlja osnu ili klizajuću refleksiju te ravni.

Dokaz. Prema tome da li izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 poseduje ili ne poseduje invarijantnih tačaka, razlikujemo dva slučaja.

1° Ako indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 poseduje invarijantnih tačaka, prema poznatoj teoremi 3.2.4, ona predstavlja osnu refleksiju te ravni.

2° Ako indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 nema invarijantnih tačaka, prema teoremi 3.8.3, ona predstavlja klizajuću refleksiju te ravni. □

Prethodne dve teoreme omogućuju da klasifikaciju transformacija euklidske ravni E^2 prikažemo u obliku sledeće sheme:

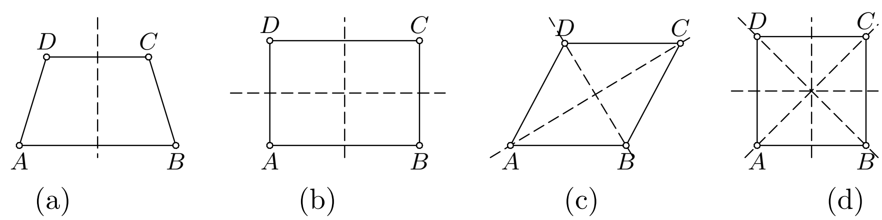
		Izometrijske transformacije euklidske ravni E^2		
	↙		↘	
	Direktne izometrijske transformacije		Indirektne izometrijske transformacije	
↙	↓	↘	↙	↘
Koincidencija	Translacija	Centralna rotacija	Osna refleksija	Klizajuća refleksija

Napominjemo da se u izvedenoj klasifikaciji izometrijskih transformacija euklidske ravni E^2 posebno ne ističe centralna refleksija; nju kao i centralne refleksije bilo kojeg reda treba razmatrati kao specifičan vid centralnih rotacija te ravni.

3.10 Simetrije likova u ravni E^2

Prethodnim razmatranjima ustanovljene su sve postojeće vrste izometrijskih transformacija ravni E^2; to su: koincidencija, centralna rotacija, translacija, osna refleksija i klizajuća refleksija. Svakoj od tih transformacija odgovara specifična relacija podudarnosti definisana na skupu likova u pomenutoj ravni. Tako se dolazi do tzv. *identične*, *obrtne*, *translatorne*, *osnosimetrične* i *klizajuće podudarnosti likova*. Ako je u nekoj ravni E^2 lik Φ podudaran s likom Φ', tada po definiciji postoji izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ ravni E^2 takva da je $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$. Prema vrsti izometrijskih transformacija $\mathcal{I}$ ustanovljuje se i vrsta relacije podudarnosti likova Φ i Φ'.

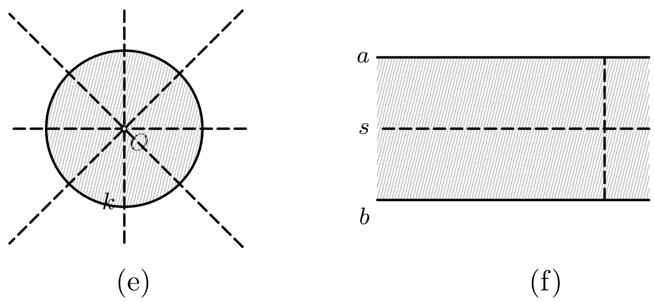
Izometrijsku transformaciju $\mathcal{I}$ ravni E^2 koja prevodi neki lik Φ na taj isti lik Φ nazivamo *simetrijom* lika Φ. Budući da je identična transformacija $\mathcal{E}$ ravni E^2 izometrijska i da za svaki lik $\Phi \subset E^2$ važi relacija $\mathcal{E}(\Phi) = \Phi$, svaki lik $\Phi \subset E^2$ raspolaže najmanje jednom simetrijom.



Sl. 3.10

Nije teško uveriti se da u ravni E^2 postoje likovi koji raspolažu sa više simetrija. Jednakokraki trapez $ABCD$ u ravni E^2 (Sl. 3.10(a)) raspolaže ne samo koincidencijom, već i osnom simetrijom; osa te simetrije određena je središtima paralelnih stranica AB i CD. Pravougaonik $ABCD$ u ravni E^2 (Sl. 3.10(b)) raspolaže još većim brojem simetrija; to su dve osne simetrije, centralna simetrija i koincidencija. Romb $ABCD$ u ravni E^2 (Sl. 3.10(c)) raspolaže istim brojem simetrija; to su takođe dve osne simetrije centralna simetrija i koincidencija. Dok su ose simetrija pravougaonika određene središtima naspramnih stranica, ose simetrija romba određene su njegovim dijagonalama. Kvadrat $ABCD$ u ravni E^2 (Sl. 3.10(d)) raspolaže još većim brojem simetrija; to su rotacije oko njegovog središta za uglove $90°$, $180°$, $270°$, $360°$, dve osne simetrije kojima su ose određene središtima naspramnih stranica i dve osne simetrije kojima su ose određene njegovim dijagonalama.

Svaka od navedenih figura raspolaže konačnim brojem simetrija. Nije teško utvrditi da u ravni E^2 postoje i figure koje raspolažu s beskonačno mnogo simetrija. Tako npr. krug (Sl. 3.10(e)) raspolaže s beskonačno mnogo simetrija, jer rotacija oko njegovog središta za bilo koji ugao predstavlja rotacionu simetriju tog kruga, a prava određena bilo kojim njegovim dijametrom predstavlja njegovu osnu simetriju. Pantljika Φ (Sl. 3.10(f)) koju sačinjava deo ravni E^2 između dveju raznih paralelnih pravih a i b takođe je figura koja raspolaže beskonačnim brojem simetrija. Ne samo osna refleksija $\mathcal{S}_s$ određena relacijom $\mathcal{S}_s(a) = b$, već i sve translacije duž prave s, sve centralne refleksije kojima su središta na pravoj s, sve osne refleksije kojima su ose upravne na pravoj s, kao i sve klizajuće refleksije sa osom s predstavljaju simetrije pantljike Φ.



Sl. 3.10

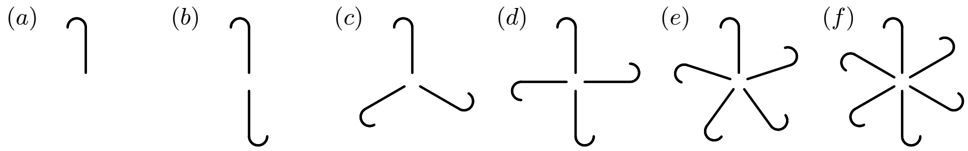
Nije teško ustanoviti da skup svih simetrija nekog lika Φ u ravni E^2 predstavlja grupu; tu grupu nazivamo grupom simetrija lika Φ i simbolički obeležavamo $G(\mathcal{I}_\Phi)$. Ukupan broj elemenata grupe $G(\mathcal{I}_\Phi)$ nazivamo redom te grupe simetrija.

Ako je red grupe simetrija lika $\Phi \subset E^2$ jednak jedinici, za lik Φ kažemo da je *asimetričan*; ako je red grupe simetrije lika $\Phi \subset E^2$ veći od jedan, za lik Φ kažemo da je *simetričan*. Ukoliko je red grupe simetrija lika $\Phi \subset E^2$ veći utoliko se smatra da je on *simetričniji*.

Iz gore navedenih primera zaključujemo da u ravni E^2 postoje likovi koji raspolažu beskonačnim grupama simetrija. Prirodno je postaviti pitanje kako se ustanovljuju te grupe i identifikuju vrste simetrija. Pristup ka toj dosta složenoj problematici daje se postupno razmatranjem najpre punktualnih, zatim linearnih, najzad planarnih grupa simetrija. *Punktualnom grupom simetrija* nazivamo grupu u kojoj sve simetrije raspolažu najmanje jednom invarijantnom tačkom; *linearnom grupom simetrija* nazivamo grupu u kojoj sve simetrije nemaju zajedničkih invarijantnih tačaka no imaju jednu zajedničku invarijantnu pravu; *planarnom grupom simetrija* nazivamo grupu u kojoj sve simetrije nemaju niti zajedničkih invarijantnih tačaka, niti zajedničkih invarijantnih pravih. Nemamo nameru izgrađivati kompletnu teoriju tih grupa simetrija, već da razotkrijemo najbitnije karakteristike punktualnih grupa.

Iz same definicije neposredno sleduje da punktualna grupa simetrija nekog lika u ravni E^2 može da raspolaže isključivo simetrijama koje imaju invarijantnih tačaka; to su centralne simetrije izvesnog reda i osne simetrije. Jasno je da u punkualnoj grupi centralne simetrije moraju imati zajedničko središte, ukoliko takva grupa raspolaže i osnim simetrijama, ose tih simetrija sadrže pomenuto središte. Razlikujemo dve vrste punktualnih grupa simetrija; to su tzv. cikličke i diedarske grupe. *Cikličkom grupom* $\mathcal{C}_n$ nazivamo grupu koja raspolaže jedinstvenim generatorom reda n i takva grupa je uvek reda n. Ako je g generator te grupe, biće

$$\mathcal{C}_n = \{g^1, g^2, g^3, g^4, \dots, g^n\}.$$



Sl. 3.10′

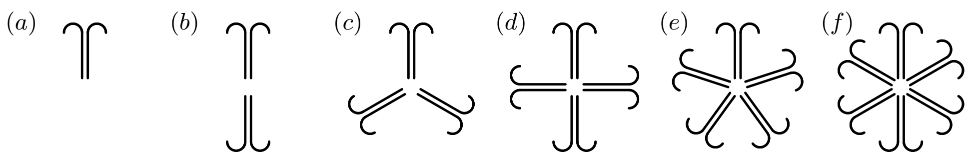
Primeri cikličkih grupa $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ prezentirani su respektivno na Sl. 3.10′.

Diedarskom grupom simetrija $\mathcal{D}_n$ nazivamo grupu sa dva generatora g_1 i g_2 koji zadovoljavaju sledeće uslove

$$g_1^n = \mathcal{E}, \quad g_2^2 = \mathcal{E}, \quad (g_2 \circ g_1)^2 = \mathcal{E}.$$

Jedan od generatora te grupe je reda n, drugi je reda dva, dok je sama grupa $\mathcal{D}_n$ reda $2n$; šta više, biće

$$\mathcal{D}_n = \{g_1,\, g_1^2,\, \ldots,\, g_1^n;\; g_2 \circ g_1,\, g_2 \circ g_1^2,\, \ldots,\, g_2 \circ g_1^n\}.$$



Sl. 3.10″

Iz definicije neposredno zaključujemo da diedarska grupa simetrija tipa $\mathcal{D}_n$ uvek raspolaže jednom podgrupom $\mathcal{C}_n$. Na Sl. 3.10″ prezentirane su figure koje respektivno raspolažu diedarskim grupama simetrija tipa $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$, $\mathcal{D}_6$.

Nije teško ustanoviti da pravilan poligon Φ od n stranica u ravni E^2 raspolaže diedarskom grupom simetrija tipa $\mathcal{D}_n$. Zaista, ako obeležimo sa O središte tog poligona i sa AB i CD bilo koje dve njegove stranice, biće $\triangle AOB \cong \triangle COD$ i $\triangle AOB \cong \triangle DOC$. Stoga postoje dve izometrijske transformacije $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ ravni E^2 od kojih prva prevodi $\triangle AOB$ na $\triangle COD$, a druga prevodi $\triangle AOB$ na $\triangle DOC$. Štaviše, biće $\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi$ i $\mathcal{I}_2(\Phi) = \Phi$, pa je svaka od izometrija $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ simetrija poligona. Budući da poligon Φ ima n stranica i da svakoj od tih stranica odgovaraju dve simetrije tog poligona, poligon Φ raspolaže sa $2n$ simetrija. Grupa simetrija poligona Φ ima dva *generatora*; to su centralna simetrija reda n kojoj se centar poklapa sa središtem O tog poligona i osna simetrija $\mathcal{S}_s$ kojoj se osa poklapa sa medijatrisom neke stranice ili simetralom nekog unutrašnjeg ugla. Budući sa ovi generatori zadovoljavaju relacije

$$\mathcal{R}^n_{O,\frac{360^\circ}{n}} = \mathcal{E}, \quad \mathcal{S}_s^2 = \mathcal{E}, \quad (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}_{O,\frac{360^\circ}{n}})^2 = \mathcal{E},$$

grupa simetrija poligona Φ je tipa $\mathcal{D}_n$.

Već smo pomenuli da punktualna grupa simetrija $G(\mathcal{I}_\Phi)$ lika $\Phi \subset E^2$ predstavlja cikličku ili diedarsku grupu. Dokaz tog tvrđenja nismo izveli, učinimo to samo za slučaj kada je punktualna grupa simetrija konačna. Pretpostavimo najpre da je grupa $G(\mathcal{I}_\Phi)$ reda n i da raspolaže isključivo direktnim simetrijama. Budući da te simetrije raspolažu zajedničkom invarijantnom tačkom O, one predstavljaju centralne rotacije sa središtem O. Ako je ω najmanji od uglova koji odgovaraju tim rotacijama, a centralna simetrija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ reda k, biće

$$\mathcal{R}_{O,\omega};\ \mathcal{R}^2_{O,\omega};\ \mathcal{R}^3_{O,\omega};\ \ldots;\ \mathcal{R}^k_{O,\omega} \in G(\mathcal{I}_\Phi).$$

Dokažimo da su to jedine simetrije grupe $G(\mathcal{I}_\Phi)$ tj. da je $k = n$. U tom cilju pretpostavimo da u toj grupi postoji još neka centralna simetrija $\mathcal{R}_{O',\omega'}$. S obzirom da je grupa $G(\mathcal{I}_\Phi)$ punktualna, imamo da je $O = O'$. Stoga ugao ω' mora da bude različit od uglova ω, 2ω, 3ω, $\cdots$, $k\omega$, te postoji ceo pozitivan broj t takav da je $t\omega < \omega < (t+1)\omega$. U tom slučaju imamo da je

$$\mathcal{R}_{O,\omega'} \circ \mathcal{R}^{-t}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O,\omega''} \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{O,\omega''} \in G(\mathcal{I}_\Phi)$$

pri čemu je $\omega'' < \omega$. Međutim, to je nemoguće, jer je ω najmanji od uglova koji odgovaraju centralnim simetrijama lika Φ u odnosu na tačku O. Ovim zaključujemo da je

$$G(\mathcal{I}_\Phi) = \{\mathcal{R}_{O,\omega};\ \mathcal{R}^2_{O,\omega};\ \mathcal{R}^3_{O,\omega};\ \ldots;\ \mathcal{R}^n_{O,\omega}\}.$$

te je u razmatranom slučaju $G(\mathcal{I}_\Phi)$ ciklička grupa tipa $\mathcal{C}_n$.

Pretpostavimo sad da grupa $G(\mathcal{I}_\Phi)$ raspolaže sem pomenutih centralnih simetrija i nekom osnom simetrijom $\mathcal{S}_s$. S obzirom da je grupa $G(\mathcal{I}_\Phi)$ punktualna, imamo da je $O \in s$. Stoga svaka od kompozicija

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}_{O,\omega};\ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}^2_{O,\omega};\ \ldots;\ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}^n_{O,\omega}$$

predstavlja osnu simetriju lika Φ; dokažimo da su one jedine. Ako bi sem tih osnih simetrija postojala još neka osna simetrija $\mathcal{S}_{s'}$, tada bi za neko $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ važila relacija $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{s'} = \mathcal{R}^i_{O,\omega}$, dakle i relacija $\mathcal{S}_{s'} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}^i_{O,\omega}$, što je suprotno pretpostavci. Na taj način, imamo da je

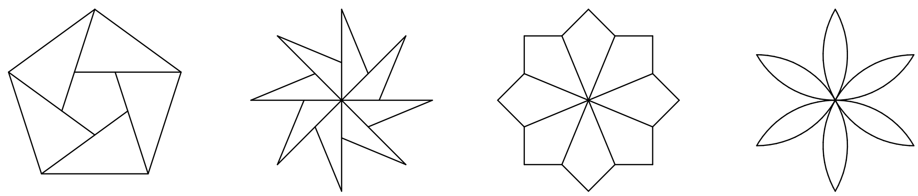
$$G(\mathcal{I}_\Phi) = \{\mathcal{R}_{O,\omega};\ \ldots;\ \mathcal{R}^n_{O,\omega};\ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}_{O,\omega};\ \ldots;\ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}^n_{O,\omega}\}.$$

te je u razmatranom slučaju $G(\mathcal{I}_\Phi)$ diedarska grupa tipa $\mathcal{D}_n$.

Zadaci

Zadatak 3.54. Kojom grupom simetrija raspolaže

a)	duž;	d)	paralelogram;
b)	jednakokraki trougao;	e)	pravougaonik;
c)	jednakokraki trapez;	f)	romb?



Sl. zad. 3.55

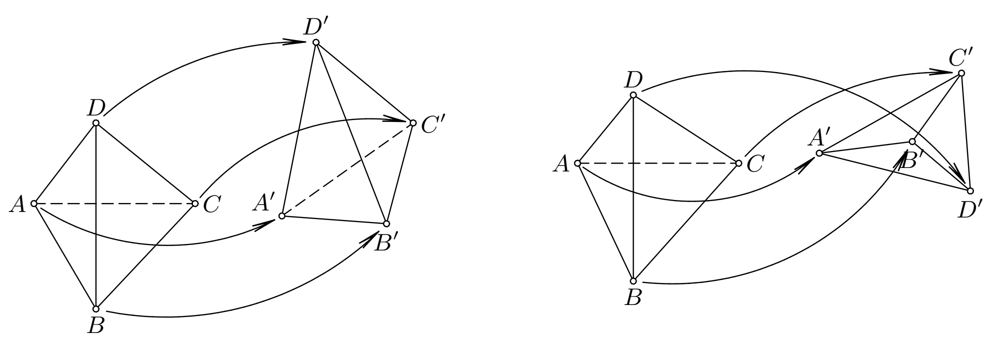
Zadatak 3.55. Kojim grupama simetrija raspolažu likovi predstavljeni na Sl. zad. 3.55?

Glava 4

Vrste izometrijskih transformacija prostora E^3

4.1 Direktne i indirektne izometrijske transformacije prostora E^3

U ovom poglavlju biće uvedene i razmatrane specifične vrste izometrijskih transformacija prostora E^3. Kao i u prethodnom poglavlju ustanovićemo najpre da postoje direktne i indirerektne izometrijske transformacije tog prostora.



(a) (b)

Sl. 4.1

Da bismo definisali te dve vrste izometrijskih transformacija neophodno je pomenuti tvrđenje prema kojem svaka izometrijska transformacija prostora E^3 prevodi istosmerne tetraedre u istosmerne tetraedre, a suprotnosmerne tetraedre u suprotnosmerne tetraedre. Dokaz ovog tvrđenja dosta je složen, te ga ovde nećemo navoditi. Iz tog tvrđenja neposredno sleduje da postoje dve vrste izometrijskih transformacija prostora: to su *direktne izometrijske transformacije* koje ne menjaju orijentaciju prostora E^3 i *indirektne izometrijske transformacije* koje menjaju orijentaciju tog prostora. Da bismo ustanovili da li je neka izometrijska transformacija prostora E^3 direktna ili indirektna, dovoljno je ustanoviti da li neke dve odgovarajuće četvorke nekomplanarnih tačaka određuju istosmerne ili suprotnosmerne tetraedre.

Tako npr. na Sl. 4.1(a) istosmerni podudarni tetraedri $ABCD$ i $A'B'C'D'$ određuju direktnu, a na Sl. 4.1(b) suprotnosmerni podudarni tetraedri $ABCD$ i $A'B'C'D'$ određuju indirektnu izometrijsku transformaciju prostora E^3. Jasno je da identična transformacija prostora E^3 predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju.

Pozivajući se na teoremu 2.1.6 neposredno se ustanovljuje da je direktna (indirektna) izometrijska transformacija prostora E^3 jednoznačno određena ako su zadata tri para odgovarajućih nekolinearnih tačaka. Štaviše, kao specijalan slučaj tog tvrđenja nalazimo da direktna izometrijska transformacija prostora E^3 sa tri nekolinearne invarijantne tačke predstavlja koincidenciju. Pomenimo još i tvrđenje prema kojem kompozicija sastavljena iz dveju direktnih ili dveju indirektnih izometrijskih transformacija prostora E^3 uvek predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju tog prostora; naprotiv, kompozicija sastavljena iz jedne direktne i jedne indirektne transformacije prostora E^3 uvek predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju. To svojstvo omogućuje da ustanovimo da skup svih direktnih izometrijskih transformacija prostora E^3 predstavlja nekomutativnu podgrupu grupe $G(\mathcal{I})$ svih izometrijskih transformacija prostora E^3. Tu podgrupu nazivamo grupom direktnih izometrijskih transformacija prostora E^3 i simbolički obeležavamo $G(\mathcal{I}^+)$.

4.2 Ravanska refleksija prostora E^3

Direktne i indirerektne izometrijske transformacije prostora E^3 predstavljaju samo jedan vid razvrstavanja izometrijskih transformacija tog prostora. Razvrstavanju tih transformacija možemo pristupiti na potpuno drugačiji način. Kada smo svojevremeno razmatrali tvrđenje prema kojem izometrijska transformacija sa četiri nekomplanarne invarijantne tačke predstavlja koincidenciju, bilo je prirodno postaviti pitanje koje su to neidentične izometrijske transformacije tog prostora koje poseduju tri nekolinearne invarijantne tačke, odnosno dve, jednu ili nula invarijantnih tačaka. Osnovu naših daljih razmatranja predstavljaće upravo neidentične izometrijske transformacije prostora E^3 koje poseduju po tri nekolinearne invarijantne tačke, i prema tome po jednu ravan kojoj su sve tačke invarijantne. Takve transformacije nazvaćemo ravanskim refleksijama.

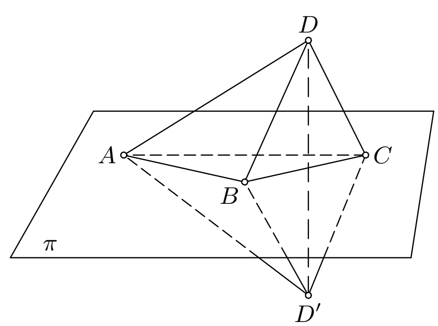
Definicija 4.2.1. *Ravanskom refleksijom* ili *ravanskom simetrijom prostora* E^3 sa osnovom $\pi \subset E^3$ nazivamo neidentičnu izometrijsku transformaciju $\mathcal{S}_\pi \colon E^3 \to E^3$ kojoj je svaka tačka ravni π invarijantna.

Iz ove definicije i teoreme dokazane u drugom poglavlju neposredno zaključujemo da ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 van ravni π nema invarijantnih tačaka. Ako u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 tački $X \in E^3$ odgovara neka druga tačka $X' \in E^3$, lako se dokazuje da je π medijalna ravan duži XX'. Zaista, ako obeležimo sa A, B, C tri nekolinearne tačke ravni π, imamo relacije

$$AX \cong AX', \quad BX \cong BX', \quad CX \cong CX',$$

pa je svaka od tačaka A, B, C u medijalnoj ravni π' duži XX'. Budući da su tačke A, B, C nekolinearne, one određuju samo jednu ravan, pa je $\pi = \pi'$. Iz ovih svojstava neposredno sleduje da je ravanska refleksija jednoznačno određena svojom osnovom π ili pak jednim parom odgovarajućih neistovetnih tačaka. Navodimo još nekoliko važnijih svojstava ravanske refleksije prostora E^3.

Teorema 4.2.1. Ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 je indirektna izometrijska transformacija.



Sl. 4.2.1

Dokaz. Ako obeležimo sa A, B, C tri nekolinearne tačke ravni π, sa D bilo koju tačku van ravni π i sa D' tačku takvu da je $D' = \mathcal{S}_\pi(D)$, biće $D \neq D'$ i π medijalna ravan duži DD' (Sl. 4.2.1). Stoga su tačke D i D' s raznih strana ravni π te su odgovarajući tetraedri $ABCD$ i $ABCD'$ suprotnosmerni, i prema tome ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ indirektna transformacija. □

Teorema 4.2.2. Ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 je involuciona transformacija.

Dokaz. Obeležimo sa X proizvoljnu tačku prostora E^3, i sa X', X'' tačke takve da je

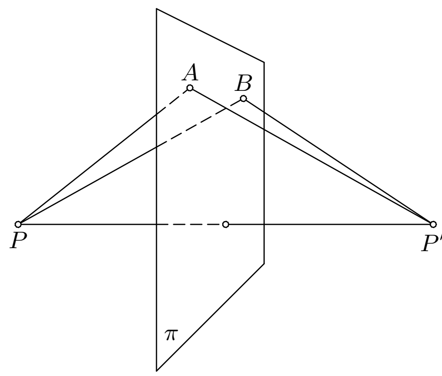
$$\mathcal{S}_\pi(X) = X' \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_\pi(X') = X''.$$

Ako je $X \in \pi$, tada je $X = X'$ i $X'{=}X''$, pa je $X{=}X''$. Ako je $X \notin \pi$, tada je $X \neq X'$ i $X' \neq X''$, pa je osnova π ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ medijalna ravan svake od duži XX' i $X'X''$, pa je $X{=}X''$. Ovim smo dokazali da u svakom slučaju važi relacija

$$\mathcal{S}_\pi^2 = \mathcal{E},$$

pa je ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ involuciona transformacija. □

Teorema 4.2.3. Ako indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 poseduje dve razne invarijantne tačke A i B, ona predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 kojoj osnova π sadrži obe tačke A i B.



Sl. 4.2.3

Dokaz. S obzirom da je $\mathcal{I}$ indirektna i $\mathcal{E}$ direktna izometrijska transformacija, biće $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. Stoga u prostoru E^3 postoji tačka P takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Pri tome je $(P, A) \cong (P', A)$ i $(P, B) \cong (P', B)$, pa se svaka od tačaka A i B nalazi u medijalnoj ravni π duži PP' (Sl. 4.2.3). Budući da su $\mathcal{S}_\pi$ i $\mathcal{I}$ indirektne izometrijske transformacije, kompozicija $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju prostora E^3. Ta transformacija poseduje tri invarijantne nekolinearne tačke A, B, P, te prema ranije izvedenoj teoremi, ona predstavlja koincidenciju. Stoga je $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, i prema tome $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi$. $\square$

Teorema 4.2.4. Ako je $\mathcal{S}_\pi$ ravanska refleksija prostora E^3 i p prava koja se nalazi u tom prostoru, a ne pripada ravni π, tada je

$$\mathcal{S}_\pi(p) = p \iff p \perp \pi.$$

Dokaz. Ako je $\mathcal{S}_\pi(p) = p$, tada je $\pi \cap p \neq \emptyset$. Zaista, ako bi važila relacija $\pi \cap p = \emptyset$, tada bi istovetne prave p i $\mathcal{S}_\pi(p)$ bile s raznih strana ravni π, što je nemoguće. Stoga je $\pi \cap p \neq \emptyset$. Iz te relacije i relacije $p \notin \pi$ sledi da prava p prodire ravan π u nekoj tački O. Ako je P tačka prave p različita od O i P' njena odgovarajuća tačka u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\pi$, imamo da je $P \neq P'$ i $P' \in p$, pa je π medijalna ravan duži PP' i prema tome $p \perp \pi$.

Obratno, ako je $p \perp \pi$ u nekoj tački O, tada je $\mathcal{S}_\pi(p) = p$. Zaista, ako je P tačka prave p različita od O i P' njena odgovarajuća tačka u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\pi$, imamo da je $P \neq P'$, pa je π medijalna ravan duži PP' te je $PP' \perp \pi$. Stoga je $P' \in p$, dakle i $\mathcal{S}_\pi(p) = p$. $\square$

Teorema 4.2.5. Ako su $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ dve ravanske refleksije prostora E^3 sa raznim osnovama α i β, a X tačka tog istog prostora, tada je

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(X) = X \iff X \in \alpha \cap \beta.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(X) = X$. Ako obeležimo sa X' tačku takvu da je $\mathcal{S}_\alpha(X) = X'$ biće i $\mathcal{S}_\beta(X') = X$. Indirektnim postupkom dokažimo da je $X = X'$. Ako bi naprotiv važila relacija $X \neq X'$, tada bi postojale dve razne medijalne ravni α i β duži XX' što je nemoguće. Stoga je $X = X'$, pa je $\mathcal{S}_\alpha(X) = X$ i $\mathcal{S}_\beta(X) = X$. Iz ovih jednakosti sledi da je $X \in \alpha$ i $X \in \beta$, pa je $X \in \alpha \cap \beta$.

Obratno, ako pretpostavimo da je zadovoljena relacija $X \in \alpha \cap \beta$, tada je $X \in \alpha$ i $X \in \beta$, pa je $\mathcal{S}_\alpha(X) = X$ i $\mathcal{S}_\beta(X) = X$. □

Teorema 4.2.6. Ako je $\mathcal{S}_\pi$ ravanska refleksija euklidskog prostora E^3 i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija tog istog prostora, zatim π' ravan koja u izometriji $\mathcal{I}$ odgovara ravni π, tada važi relacija

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\pi'}.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathcal{S}_\pi"] \arrow[d, "\mathcal{I}"'] & X_1 \arrow[d, "\mathcal{I}"'] \\
X' \arrow[r, "\mathcal{S}'_\pi"] & X'_1
\end{tikzcd}$$

Sl. 4.2.6

Dokaz. Prema definiciji ravanske refleksije, za svaku tačku $P' \in \pi'$ koja u izometriji $\mathcal{I}$ odgovara nekoj tački $P \in \pi$ imamo da je (Sl. 4.2.6)

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{I}^{-1}(P').$$

Ako obe strane ove jednakosti pomnožimo s leva sa izometrijom $\mathcal{I}$, dobijamo da je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{I} \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{E}(P') = P'$$

Na taj način, kompozicija

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1}$$

prevodi svaku tačku ravni π' u tu istu tačku. S obzirom da ta kompozicija predstavlja indirektnu, dakle neidentičnu, izometrijsku transformaciju prostora E^3 kojoj je svaka tačka ravni π' invarijantna, ona predstavlja ravansku refleksiju $\mathcal{S}_{\pi'}$, naime biće

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\pi'}.$$

□

Teorema 4.2.7. Dve ravanske refleksije $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ euklidskog prostora E^3, sa raznim osnovama α i β, su komutativne transformacije ako i samo ako je $\alpha \perp \beta$, naime biće

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \iff \alpha \perp \beta.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta$$

tj.

$$(*) \qquad \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha$$

Ako obeležimo sa α' ravan određenu relacijom $\mathcal{S}_\beta(\alpha) = \alpha'$, prema zakonu transmutacije ravanske refleksije $\mathcal{S}_\alpha$ ravanskom refleksijom $\mathcal{S}_\beta$, nalazimo da je

$$(**) \qquad \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_{\alpha'}.$$

Iz jednakosti $(*)$ i $(**)$ sledi da je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha'}$, pa je $\alpha = \alpha'$, tj. $\alpha = \mathcal{S}_\beta(\alpha)$. Otuda i iz relacije $\alpha \neq \beta$ zaključujemo da je $\alpha \perp \beta$.

Obratno, pretpostavimo sad da je $\alpha \perp \beta$. Iz ove relacije sledi da je $\mathcal{S}_\beta(\alpha) = \alpha$, te prema zakonu transmutacije ravanske refleksije $\mathcal{S}_\alpha$ ravanskom refleksijom $\mathcal{S}_\beta$, nalazimo da je $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha$ tj. $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta$. □

Zadaci

Zadatak 4.1. Ako je $\mathcal{S}_\pi$ ravanska refleksija prostora E^3 i P tačka tog prostora, dokazati da je

$$\mathcal{S}_\pi(P) = P \iff P \in \pi.$$

Zadatak 4.2. Ako prava p ne pripada osnovi π ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3, dokazati da je

$$\mathcal{S}_\pi(p) = p \iff p \perp \pi.$$

Zadatak 4.3. Ako su $\mathcal{S}_\pi$,$\mathcal{S}_\mu$,$\mathcal{S}_\nu$ ravanske refleksije prostora E^3, dokazati da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \iff \mathcal{S}_\pi(\mu) = \nu.$$

Zadatak 4.4. Date su u prostoru dve razne ravni α i β. Konstruisati ravan π takvu da je $\mathcal{S}_\pi(\alpha)$=β.

Zadatak 4.5. Date su u prostoru E^3 dve razne prave p i q. Konstruisati ravan π takvu da je $\mathcal{S}_\pi$ $(p) = q$.

4.3 Predstavljanje izometrijskih transformacija prostora E^3 pomoću ravanskih refleksija

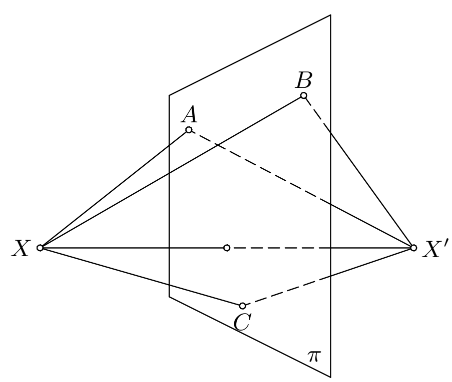
U ovom odeljku biće ustanovljeno jedno veoma značajno svojstvo izometrijskih transformacija euklidskog prostora E^3, to je svojstvo prema kojem se svaka izometrijska transformacija tog prostora može predstaviti u obliku kompozicija konačnog broja ravanskih refleksija. Štaviše, biće istovremeno dokazano da minimalan broj ravanskih refleksija pomoću kojih se može predstaviti bilo koja unapred zadata izometrijska transformacija prostora E^3 nije veći od četiri. Ovo svojstvo omogućuje da pomoću ravanskih refleksija izgradimo i celu teoriju izometrijskih transformacija euklidskog prostora E^3, što ćemo u izvesnoj meri nastojati i da ostvarimo u narednim izlaganjima.

Teorema 4.3.1. Svaka izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 može se predstaviti kao kompozicija konačnog broja ravanskih refleksija, minimalan broj ravanskih refleksija zastupljenih u takvoj kompoziciji nije veći od četiri.

Dokaz. Prema maksimalnom broju invarijantnih linearno nezavisnih tačaka izometrijske transformacije $\mathcal{I}$, razlikujemo narednih pet slučajeva.

1° Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ može da poseduje četiri nekomplanarne invarijantne tačke, obeležimo ih sa A, B, C, D. Prema poznatoj teoremi, takva izometrijska transformacija predstavlja koincidenciju, te s obzirom na involutivnost bilo koje ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 imamo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi.$$



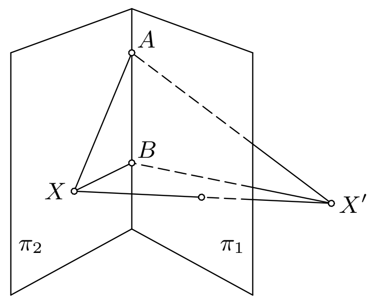
Sl. 4.3.1(a)

2° Pretpostavimo da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ poseduje najviše tri invarijantne linearno nezavisne tačke, obeležimo ih sa A, B, C. Te tačke su nekolinearne, te određuju neku ravan π (Sl. 4.3.1(a)). S obzirom da van ravni π izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, imamo da je $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. Stoga postoji tačka $X \in E^3$ takva da je $\mathcal{I}(X){=}X'$ i $X \neq X'$. Pri tome važe relacije

$$(A, X) \cong (A, X'), \quad (B, X) \cong (B, X'), \quad (C, X) \cong (C, X'),$$

pa je π medijalna ravan duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ predstavlja izometrijsku transformaciju koja ima četiri nekomplanarne invarijantne tačke A, B, C, X pa je kao u prethodnom slučaju $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, i prema tome

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi.$$



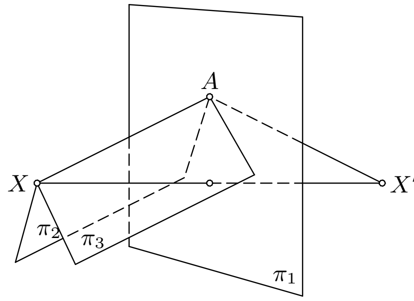
Sl. 4.3.1(b)

3° Pretpostavimo da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ poseduje najviše dve invarijantne linearno nezavisne tačke, obeležimo ih sa A i B. Te tačke su različite, te određuju neku pravu p. S obzirom da van prave p izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka, imamo da je $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. Stoga postoji tačka $X \in E^3$ takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Pri tome je

$$(A, X) \cong (A, X'), \quad (B, X) \cong (B, X'),$$

pa je svaka od tačaka A i B sadržana u medijalnoj ravni π_1 duži XX' (Sl. 4.3.1(b)). Kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ predstavlja izometrijsku transformaciju prostora E^3 koja ima tri invarijantne nekolinearne tačke A, B, X. Te tačke određuju neku ravan π_2. Van te ravni kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka jer bi u protivnom važila relacija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, tj. relacija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$, te bi izometrija $\mathcal{I}$ posedovala tri invarijantne nekolinearne tačke, što je suprotno pretpostavci. Stoga, prema prethodnom slučaju imamo da je $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$, pa je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}.$$



Sl. 4.3.1(c)

4° Pretpostavimo da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku, obeležimo je sa A. S obzirom da je $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, postoji tačka $X \in E^3$ takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Pri tome je

$$(A, X) \cong (A, X'),$$

pa je tačka A u medijalnoj ravni π_1 duži XX'. Stoga kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ poseduje dve razne invarijantne tačke A i X.

Van prave AX kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka. Zaista, ako bi ta kompozicija posedovala četiri nekomplanarne invarijantne tačke, važila bi relacija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, tj. relacija

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1},$$

pa bi izometrija $\mathcal{I}$ posedovala više invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Ako bi pomenuta kompozicija posedovala najviše tri invarijantne linearno nezavisne tačke, ona bi prema slučaju 2° predstavljala neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_{\pi_2}$ te bi iz relacije $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$ sledila relacija

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}.$$

Kako je $\mathcal{I}(A) = A$, tj. $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}(A) = A$, prema ranije dokazanoj teoremi imamo da je $A = \pi_1 \cap \pi_2$. Budući da ravni π_1 i π_2 poseduju zajedničku tačku A, one poseduju najmanje još jednu zajedničku tačku B. U tom slučaju imamo da je $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}(B) = B$, tj. $\mathcal{I}(B) = B$ pa bi izometrija $\mathcal{I}$ sem tačke A posedovala još invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Ovim je dokazano da van prave AX kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ nema invarijantnih tačaka.

Stoga, prema slučaju 3°, izometrijska transformacija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ predstavlja kompoziciju dveju ravanskih refleksija $\mathcal{S}_{\pi_2}$ i $\mathcal{S}_{\pi_3}$ kojima se osnove π_2 i π_3 seku po pravoj AX (Sl. 4.3.1(c)). Iz relacije $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ sledi da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}.$$

5° Pretpostavimo sada da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ uopšte nema invarijantnih tačaka. U tom slučaju izometrija $\mathcal{I}$ može se predstaviti kao kompozicija sastavljena iz dve, tri ili četiri ravanske refleksije. Da bismo to dokazali, obeležimo sa X proizvoljnu tačku prostora E^3, sa X' njenu odgovarajuću tačku i sa π_1 medijalnu ravan duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ predstavlja izometrijsku transformaciju prostora E^3, koja poseduje invarijantnu tačku X.

Ta kompozicija ne može imati četiri nekomplanarne invarijantne tačke, jer bi tada važila relacija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, tj. relacija

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1},$$

pa bi izometrija $\mathcal{I}$ imala invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci.

Ako bi kompozicia $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ posedovala najviše tri linearno nezavisne invarijantne tačke, ona bi prema slučaju 2° predstavljala neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_{\pi_2}$. Iz relacije $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$ sledila bi jednakost

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}.$$

Pri tome bi važila relacija $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, jer bi u protivnom svaka zajednička tačka ravni π_1 i π_2 bila invarijantna tačka izometrije $\mathcal{I}$, što je suprotno pretpostavci.

Ako bi kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ posedovala najviše dve invarijantne linearno nezavisne tačke, ona bi prema slučaju 3° predstavljala kompoziciju dveju ravanskih refleksija, obeležimo ih sa $\mathcal{S}_{\pi_2}$ i $\mathcal{S}_{\pi_3}$. Osnove π_2 i π_3 tih dveju refleksija seku se po pravoj x koja je određena pomenutim invarijantnim tačkama. Iz jednakosti $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ nalazimo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}.$$

Pri tome, prava x ne prodire ravan π_1, jer bi tada prodorna tačka predstavljala zajedničku tačku ravni π_1, π_2 i π_3 i prema tome invarijantnu tačku izometrije $\mathcal{I}$, što je suprotno pretpostavci.

Ako bi kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ posedovala jedino invarijantnu tačku X, ona bi se prema slučaju 4° mogla predstaviti kao kompozicija triju ravanskih refleksija, obeležimo ih sa $\mathcal{S}_{\pi_2}$, $\mathcal{S}_{\pi_3}$, $\mathcal{S}_{\pi_4}$. Iz jednakosti $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}$ nalazimo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}.$$

□

Definicija 4.3.1. Svaku kompoziciju konačnog broja ravanskih refleksija euklidskog prostora E^3 kojom je predstavljena neka izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ tog prostora nazivamo *ravanskorefleksivnom* ili *simetrijskom reprezentacijom te izometrije.* Simetrijsku reprezentaciju izometrije $\mathcal{I}$ prostora E^3 sastavljenu iz najmanjeg mogućeg broja ravanskih refleksija nazivamo *minimalnom* ili *optimalnom simetrijskom reprezentacijom.* Broj ravanskih refleksija iz kojih se sastoji minimalna simetrijska reprezentacija izometrije $\mathcal{I}$ nazivamo *redom te izometrije.*

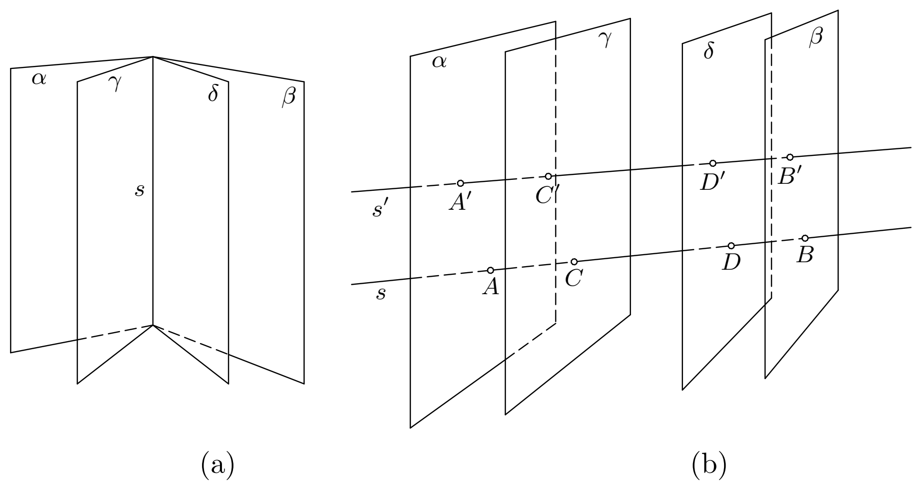
4.4 Pramenovi ravni u prostoru E^3

S obzirom na uzajamni položaj ravni, u geometriji prostora E^3 razlikujemo ravni koje se seku po jednoj pravoj i ravni koje su među sobom paralelne. Tim uzajamnim položajima odgovaraju dva pramena ravni; to je pramen koaksijalnih i pramen paralelnih ravni.

Definicija 4.4.1. Skup $\mathcal{X}$ svih ravni prostora E^3 koje se seku po jednoj pravoj s nazivamo *pramenom koaksijalnih ravni* sa osom s i simbolički obeležavamo sa $\mathcal{X}_s$. Skup $\mathcal{X}$ svih ravni prostora E^3 koje su paralelne s nekom ravni σ, i prema tome među sobom, nazivamo *pramenom paralelnih ravni* i simbolički obeležavamo sa $\mathcal{X}_\sigma$.

Iz definicije neposredno sleduje da je pramen $\mathcal{X}_s$ jednoznačno određen osom s, a pramen $\mathcal{X}_\sigma$ jednoznačno određen bilo kojom svojom ravni σ. Premda su pramenovi ravni definisani nezavisno od pojma izometrijske transformacije, oni se mogu dovesti u tesnu vezu sa tim transformacijama, posebno sa ravanskim refleksijama.

Teorema 4.4.1. Ako tri ravni α, β, γ prostora E^3 pripadaju nekom pramenu $\mathcal{X}$, tada kompozicija $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\delta$ kojoj osnova δ takođe pripada pramenu $\mathcal{X}$.



Sl. 4.4.1

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $\mathcal{X}$ pramen koaksijalnih ravni; neka je s njegova osa (Sl. 4.4.1(a)). S obzirom da prava s pripada svakoj od ravni α, β, γ, svaka tačka prave s invarijantna je u kompoziciji $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Na taj način, indirektna izometrijska transformacija

$$\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$$

poseduje dve razne invarijantne tačke, te prema poznatoj teoremi predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\delta$. Pri tome je $s \subset \delta$, i prema tome $\delta \in \mathcal{X}$.

Pretpostavimo sad da je $\mathcal{X}$ pramen paralelnih ravni (Sl. 4.4.1(b)). Neka su s i s' dve razne prave upravne na ravnima α, β, γ. S obzirom da svaka od ravanskih refleksija $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\beta$, $\mathcal{S}_\gamma$ prevodi svaku od pravih s i s' u tu istu pravu, menjajući njenu orijentaciju, i kompozicija $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ takođe prevodi svaku od pravih s i s' u tu istu pravu, menjajući njenu orijentaciju. Stoga kompozicija

$$\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$$

poseduje na svakoj od pravih s i s' po jednu invarijantnu tačku. Budući da ta kompozicija predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju prostora E^3 sa dve razne invarijantne tačke, prema poznatoj teoremi, ona predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\delta$. Pri tome je $\delta \perp s$, i prema tome $\delta \in \mathcal{X}$. □

Teorema 4.4.2. Ako kompozicija $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ sastavljena iz triju ravanskih refleksija prostora E^3 predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\delta$, tada osnove α, β, γ, δ tih ravanskih refleksija pripadaju jednom pramenu.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da se ravni α i β seku po nekoj pravoj s (Sl. 4.4.1(a)). Prema poznatoj teoremi, u kompoziciji $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ svaka tačka prave s je invarijantna. Budući da je

$$\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\delta,$$

tj. $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$, i u kompoziciji $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$ biće svaka tačka prave s invarijantna. Stoga se i ravni γ i δ seku po pravoj s, te sve ravni α, β, γ, δ pripadaju jednom pramenu.

Pretpostavimo sad da je $\alpha \parallel \beta$ (Sl. 4.4.1(b)). Ako obeležimo sa s neku pravu upravnu na ravnima α i β, imamo da je $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(s) = s$. Budući da je

$$\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\delta,$$

tj. $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$, biće i $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta(s) = s$. Stoga je $\gamma, \delta \perp s$, te sve ravni α, β, γ, δ pripadaju jednom pramenu. $\square$

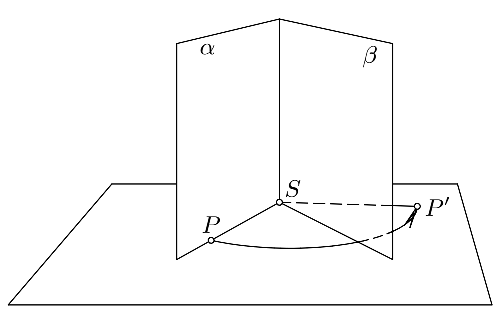
4.5 Osna rotacija prostora E^3

Već smo pomenuli da se izračunavanju složenih vrsta izometrijskih transformacija euklidskog prostora E^3 može pristupiti razmatranjem specifičnih vidova njihovih minimalnih simetrijskih reprezentacija. Pridržavajući se dosledno tog načela ustanovićemo postupno sve postojeće vrste izometrijskih transformacija euklidskog prostora E^3 i izvesti njihova najvažnija svojstva. Od tih vrsta razmatraćemo najpre osne rotacije.

Definicija 4.5.1. Neka su $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ dve ravanske refleksije euklidskog prostora E^3 kojima se osnove α i β seku po nekoj pravoj s. *Osnim obrtanjem* ili *osnom rotacijom* prostora E^3 oko prave s za ugao ω nazivamo transformaciju $\mathcal{R}_{s,\omega}$ određenu relacijom

$$\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \quad (s = \alpha \cap \beta,\ \omega = 2\ \measuredangle(\alpha, \beta)).$$

Pravu s nazivamo *osom*, a orijentisani ugao ω nazivamo *uglom rotacije* $\mathcal{R}_{s,\omega}$.



Sl. def. 4.5.1

Iz same definicije i ranije dokazanih teorema može se neposredno ustanoviti niz svojstava osnih rotacija. S obzirom da je ravanska refleksija prostora E^3 indirektna izometrijska transformacija, kompozicija dveju ravanskih refleksija, prema tome i osna rotacija prostora E^3, predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju.

Teorema 4.5.1 (Dalamber, 1743). Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3, koja poseduje najmanje jednu invarijantnu tačku O, predstavlja koincidenciju ili neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{s,\omega}$ kojoj osa s sadrži tačku O.

Dokaz. Ako je $\mathcal{I} = \mathcal{E}$, tvrđenje sleduje neposredno. Razmotrimo slučaj kada je $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. U tom slučaju postoji tačka $P \in E^3$ takva da je $\mathcal{I}(P) = P'$ i $P \neq P'$. Neka je π_1 medijalna ravan duži PP'. S obzirom da u izometrijskoj transformaciji $\mathcal{I}$ tačkama O i P odgovaraju respektivno tačke O i P', važi relacija $OP \cong OP'$, pa je tačka O u medijalnoj ravni π_1 duži PP'. Stoga kompozicija

$$\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$$

poseduje dve razne invarijantne tačke O i P. Budući da je $\mathcal{I}$ direktna, a ravanska refleksija $\mathcal{S}_{\pi_1}$ indirektna izometrijska transformacija, kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ je indirektna izometrijska transformacija. Na taj način, indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ poseduje dve razne tačke O i P, te prema ranije dokazanoj teoremi predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_{\pi_2}$ kojoj osnova π_2 sadrži tačke O i P. Stoga je $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$, i prema tome

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}.$$

Iz relacije $P \notin \pi_1$ i $P \in \pi_2$ sledi da je $\pi_1 \neq \pi_2$. S obzirom da dve razne ravni π_1 i π_2 imaju zajedničku tačku O, one se seku po nekoj pravoj s koja sadrži tačku O. Stoga kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$, tj. izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ predstavlja neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{s,\omega}$ prostora E^3. □

Teorema 4.5.2. Skup $\mathcal{R}_s$ koji se sastoji iz identične transformacije i svih osnih rotacija prostora E^3, koje imaju zajedničku osu s, predstavlja grupu.

Dokaz. Obeležimo sa $\mathcal{R}_{s,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{s,\beta}$ bilo koje dve osne rotacije iz skupa $\mathcal{R}_s$, a sa π proizvoljnu ravan koja sadrži pravu s i sa μ, ν ravni određene relacijama

$$\mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi.$$

Koristeći ove jednakosti, nalazimo da je

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu.$$

S obzirom da ravni μ i ν seku ravan π po pravoj s, ravni μ i ν imaju zajedničku pravu s, prema tome one su isovetne ili se seku po pravoj s. Ako je $\mu = \nu$, tada je $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{E}$; ako je $\mu \cap \nu = s$, kompozicija $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ predstavlja neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{s,\gamma}$. Ovim smo dokazali da u svakom slučaju važi relacija

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} \in \mathcal{R}_s.$$

Ako obeležimo sa $\mathcal{R}_{s,\omega}$ bilo koju osnu rotaciju iz skupa $\mathcal{R}_s$ i sa μ, ν ravni prostora E^3 takve da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$, biće

$$\mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu)^{-1} = \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu = \mathcal{R}_{s,-\omega} \in \mathcal{R}_s.$$

S obzirom da transformacije iz skupa $\mathcal{R}_s$ predstavljaju elemente grupe $G(\mathcal{I})$ svih izometrijskih transformacija prostora E^3, iz dokazanih svojstva sleduje da skup $\mathcal{R}_s$ predstavlja takođe grupu. □

Definicija 4.5.2. Grupu koja se sastoji iz identične transformacije i svih osnih rotacija prostora E^3, koje imaju zajedničku osu s, nazivamo *grupom osnih rotacija prostora* E^3 *oko prave* s, i simbolički obeležavamo sa $G(\mathcal{R}_s)$.

Teorema 4.5.3. Grupa $G(\mathcal{R}_s)$ osnih rotacija prostora E^3 oko prave s je komutativna. Drugim rečima, za svake dve osne rotacije $\mathcal{R}_{s,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{s,\beta}$ iz grupe $G(\mathcal{R}_s)$ važi relacija

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta}.$$

Dokaz. Obeležimo sa π proizvoljnu ravan koja sadrži pravu s i sa μ, ν ravni takve da je

$$\mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi$$

Koristeći ove jednakosti, nalazimo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} &= \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu, \\
\mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta} &= \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi
\end{aligned}$$

S obzirom da ravni μ i ν seku ravan π po istoj pravoj s, ravni π, μ pripadaju koaksijalnom pramenu ravni $\mathcal{X}_s$, te kompozicija $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu$ predstavlja neku ravansku refleksiju, dakle involucionu transformaciju prostora E^3. Stoga kvadrat te kompozicije predstavlja koincidenciju, naime biće

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu = \mathcal{E} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$$

Iz ove i prethodnih jednakosti nalazimo da je

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta}.$$

□

Teorema 4.5.4. Ako je $\mathcal{R}_{s,\omega}$ osna rotacija i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija euklidskog prostora E^3, zatim s' prava koja u izometriji $\mathcal{I}$ odgovara pravoj s i ω' ugao koji u izometriji $\mathcal{I}$ odgovara uglu ω, tada je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\omega'}.$$

Dokaz. Ako obeležimo sa μ i ν ravni euklidskog prostora E^3 takve da je

$$\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu,$$

tada se ravni μ i ν seku po pravoj s pod uglom $\measuredangle(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\omega$. Ako zatim obeležimo sa μ' i ν' ravni koje u izometriji $\mathcal{I}$ odgovaraju respektivno ravnima μ i ν, tada se ravni μ' i ν' seku po pravoj s' pod uglom $\measuredangle(\mu',\nu') = \frac{1}{2}\omega'$, te primenom teoreme 4.2.6 nalazimo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu) \circ \mathcal{I}^{-1} \\ &= \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\mu) \circ \mathcal{I}^{-1} \\ &= (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{I}^{-1}) \\ &= \mathcal{S}_{\nu'} \circ \mathcal{S}_{\mu'} = \mathcal{R}_{s',\omega'}. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.5. Osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ i ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ euklidskog prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako je prava s upravna na ravni π, naime biće

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi \iff s \perp \pi.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,\omega}.$$

Ako obeležimo sa s' pravu koja u ravanskoj refleksiji odgovara pravoj s i sa ω' ugao koji u toj istoj refleksiji odgovara uglu ω, primenom prethodne teoreme nalazimo da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s',\omega'}.$$

Iz ove i prethodne jednakosti sledi da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$. S toga su ose s i s' istovetne, a orijentisani uglovi ω i ω' podudarni i istosmerni, što je moguće samo u slučaju ako je $s \perp \pi$.

Obratno, pretpostavimo da je $s \perp \pi$. Ako obeležimo sa s' pravu koja u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\pi$ odgovara pravoj s i sa ω' ugao koji u toj istoj reflefsiji odgovara uglu ω, biće prave s i s' istovetne, a orijentisani uglovi ω i ω' podudarni i istosmerni, pa je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$. Stoga, primenom prethodne teoreme, nalazimo da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s',\omega'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi.$$

□

Teorema 4.5.6. Dve osne rotacije $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{b,\beta}$ euklidskog prostora E^3, kojima uglovi α i β nisu opruženi, predstavljaju komutativne transformacije ako i samo ako se ose tih rotacija poklapaju; drugim rečima, biće

$$\mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta} = \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \iff a = b.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a,\alpha}.$$

Ako u osnoj rotaciji $\mathcal{R}_{b,\beta}$ pravoj a odgovara neka prava a', a uglu α odgovara izvestan ugao α', prema poznatoj teoremi imamo da je

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a',\alpha'}.$$

Iz ove i prethodne jednakosti sledi da je

$$\mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a',\alpha'}.$$

Stoga su prave a i a' istovetne, a uglovi α i α' podudarni i istosmerni, što je moguće samo u slučaju kada je $a = b$.

Obratno tvrđenje na jedan način već smo dokazali prilikom izvođenja teoreme 4.5.3. Ono se može dokazati i na sledeći način. Pretpostavimo, dakle, da je $a = b$. Ako u osnoj rotaciji $\mathcal{R}_{b,\beta}$ pravoj a odgovara neka prava a', a uglu α odgovara izvestan ugao α', biće prave a i a' istovetne, a uglovi α i α' podudarni i istosmerni, pa je

$$\mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a',\alpha'}.$$

Stoga je, prema poznatoj teoremi,

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a,\alpha} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}.$$

□

Primer

Primer 4.1 (Ojler, 1765). Dokazati da kompozicija dveju osnih rotacija euklidskog prostora E^3, kojima se ose seku u nekoj tački O, predstavlja osnu rotaciju kojoj osa sadrži tačku O.

Rešenje. Neka su $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{b,\beta}$ osne rotacije euklidskog prostora E^3, kojima se ose a i b seku u tački O. Ako obeležimo sa π ravan određenu pravima a i b, a sa μ i ν ravni takve da je

$$\mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{b,\beta} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi$$

tada kompoziciju datih osnih rotacija $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{b,\beta}$ možemo napisati u obliku

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$$

S obzirom da ravni μ i ν seku ravan π po dvema raznim pravama a i b, imamo da je $\mu \neq \nu$. Na taj način, dve razne ravni μ i ν imaju zajedničku tačku O, prema tome one se seku po nekoj pravoj c. Stoga kompozicija $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ predstavlja neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{c,\gamma}$ pa je i

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{c,\gamma}.$$

□

Zadaci

Zadatak 4.6. Date su u prostoru E^3 dve podudarne duži AB i $A'B'$. Konstruisati osu s i odrediti ugao ω osne rotacije $\mathcal{R}_{s,\omega}$ koja prevodi tačke A i B respektivno u tačke A' i B'.

Zadatak 4.7. Dokazati da kompozicija parnog broja ravanskih refleksija prostora E^3, kojima osnove pripadaju nekom koaksijalnom pramenu ravni, predstavlja osnu rotaciju ili koincidenciju.

Zadatak 4.8. Dokazati da kompozicija sastavljena iz četiri ravanske refleksije prostora E^3, kojima su osnove određene bočnim pljosnima četvorostrane piramide, predstavlja osnu rotaciju tog prostora. Konstruisati osu te osne rotacije.

4.6 Osna refleksija prostora E^3

Osne rotacije prostora E^3 u opštem slučaju nisu involucione transformacije. One su involucione samo u specijalnom slučaju kada su im uglovi rotacije opruženi. Takve osne rotacije nazivamo osnim refleksijama. Zbog svoje involutivnosti one raspolažu nizom specifičnih svojstava koja ćemo proučavati u ovom odeljku.

Definicija 4.6.1. *Osnom refleksijom* $\mathcal{S}_s$ prostora E^3 nazivamo kompoziciju dveju ravanskih refleksija $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ prostora E^3 kojima osnove α i β zadovoljavaju relaciju $\alpha \perp \beta$ i $\alpha \cap \beta = s$. Na taj način imamo da je:

$$\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \qquad (\alpha \cap \beta = s).$$

Pravu s nazivamo *osom* osne refleksije $\mathcal{S}_s$.

Iz definicije neposredno sleduje da osna refleksija $\mathcal{S}_s$ prostora E^3 predstavlja osnu rotaciju kojoj je ugao rotacije jednak $180°$. Kao takva, ona predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju prostora E^3 kojoj su invarijantne jedino tačke ose s. Nije teško dokazati da je u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_s$ prostora E^3 invarijantna svaka ravan koja sadrži osu s, kao i svaka ravan koja je upravna na osi s. U ravni koja sadrži osu s osna refleksija $\mathcal{S}_s$ indukuje osnu refleksiju, a u ravni koja je upravna na osi s osna refleksija $\mathcal{S}_s$ indukuje centralnu refleksiju.

Teorema 4.6.1. Osna refleksija $\mathcal{S}_s$ prostora E^3 je involuciona transformacija.

Dokaz. Ako obeležimo sa α i β dve ravni prostora E^3 koje zadovoljavaju relacije $\alpha \cap \beta = s$ i $\alpha \perp \beta$ biće $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Koristeći relaciju $\alpha \perp \beta$, nalazimo da je

$$\mathcal{S}_s^2 = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) \circ (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) \circ (\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta) = \mathcal{E}.$$

□

Teorema 4.6.2. Ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ i osna refleksija $\mathcal{S}_p$ prostora E^3, kojima osa p ne pripada osnovi π, predstavljaju dve komutativne transformacije ako i samo ako je prava p upravna na ravni π, naime biće

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi \iff p \perp \pi.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$(*) \qquad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_p.$$

Ako obeležimo sa p' pravu određenu relacijom $\mathcal{S}_\pi(p) = p'$, prema zakonu za transmutaciju osne refleksije $\mathcal{S}_p$ ravanskom refleksijom $\mathcal{S}_\pi$ imamo da je

$$(**) \qquad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{p'}.$$

Iz jednakosti $(*)$ i $(**)$ sledi da je $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p'}$, i prema tome da je $p = p'$. S obzirom da prava p ne pripada ravni π jednakost $p = p'$ važi samo u slučaju kada je $p \perp \pi$.

Obratno, pretpostavimo da je $p \perp \pi$. Iz te relacije sledi da je $\mathcal{S}_\pi(p) = p$, te prema zakonu za transmutaciju osne refleksije $\mathcal{S}_p$ ravanskom refleksijom $\mathcal{S}_\pi$ nalazimo da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_p \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi.$$

□

Zadaci

Zadatak 4.9. Ako su p, q, r tri prave prostora E^3 upravne među sobom u tački O, dokazati da je

$$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{E}$$

Zadatak 4.10. Dokazati da kompozicija dveju osnih refleksija $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ prostora E^3, kojima se ose p i q seku u nekoj tački O, predstavlja osnu rotaciju tog prostora.

Zadatak 4.11. Dokazati da se svaka osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ prostora E^3 može predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija tog prostora.

Zadatak 4.12. Dokazati da kompozicija sastavljena iz tri osne refleksije $\mathcal{S}_p$, $\mathcal{S}_q$, $\mathcal{S}_r$ prostora E^3, kojima su ose upravne na nekoj ravni $\pi \subset E^3$ predstavlja takođe osnu refleksiju kojoj je osa upravna na ravni π.

Zadatak 4.13. Dokazati da kompozicija sastavljena iz neparnog broja osnih refleksija prostora E^3, kojima su ose upravne na nekoj ravni $\pi \subset E^3$, predstavlja takođe osnu refleksiju kojoj je osa upravna na ravni π.

Zadatak 4.14. U prostoru E^3 konstruisati dve mimoilazne prave x i y takve da prave $\mathcal{S}_x(y)$ i $\mathcal{S}_y(x)$ budu komplanarne.

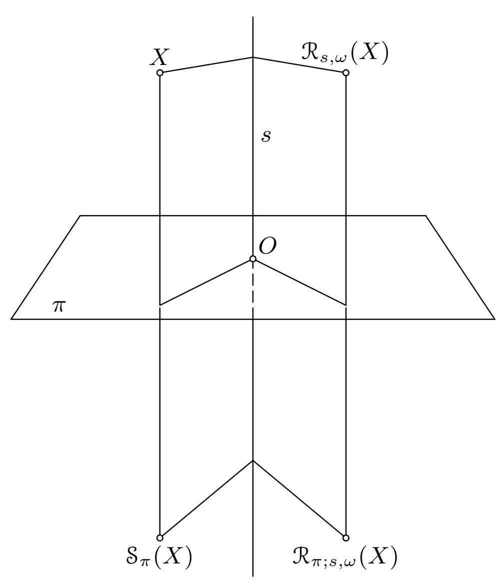
4.7 Osnorotaciona refleksija prostora E^3

U dosadašnjim izlaganjima upoznali smo samo jednu vrstu indirektnih izometrijskih transformacija prostora E^3, bile su to ravanske refleksije tog prostora. Po definiciji one predstavljaju neidentične izometrijske transformacije koje raspolažu sa ravnima kojima su sve tačke invarijantne. Na taj način, svaka ravanska refleksija poseduje beskonačno mnogo invarijantnih tačaka. U ovom odeljku proučavaćemo indirektne izometrijske transformacije koje poseduju samo po jednu invarijantnu tačku. Njihovom proučavanju prethodi uvođenje nove vrste indirektnih izometrijskih transformacija; to su tzv. osnorotacione refleksije prostora E^3.

Definicija 4.7.1. Kompozicija sastavljena iz jedne osne rotacije $\mathcal{R}_{s,\omega}$ i jedne ravanske refleksije prostora E^3, pri čemu je $s \perp \pi$, nazivamo *osnorotacionom* ili samo *rotacionom refleksijom* prostora E^3 koju simbolički obeležavamo sa $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega}$. Na taj način imamo da je

$$\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi$$

Ravan π nazivamo *osnovom*, pravu s nazivamo *osom*, tačku $S = s \cap \pi$ nazivamo *središtem* ili *centrom*, a orijentisani ugao ω nazivamo *uglom osnorotacione refleksije* $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega}$.



Sl. def. 4.7.1

Iz definicije neposredno sleduje da je osnorotaciona refleksija $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega}$ prostora E^3 jednoznačno određena osnovom π, osom s i orijentisanim uglom ω. S obzirom da je osna rotacija direktna, a ravanska refleksija indirektna izometrijska transformacija, njihova kompozicija, prema tome i osnorotaciona refleksija predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju prostora E^3. Nije teško dokazati da osnorotaciona refleksija $\mathcal{R}_{\pi;\,s,\omega}$ prostora E^3 poseduje samo jednu invarijantnu tačku, to je tačka $O = \pi \cap s$. Ako ugao ω nije opružen, ona poseduje jedinstvenu invarijantnu pravu — to je osa s, i jedinstvenu invarijantnu ravan — to je osnova π te osnorotacione refleksije. Od svojstava kojima raspolažu osnorotacione refleksije izvodimo samo najvažnije.

Teorema 4.7.1. Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 koja ima jedinstvenu tačku O predstavlja osnorotacionu refleksiju sa središtem O.

Dokaz. Neka je X tačka prostora E^3 takva da je $\mathcal{I}\ (X) = X'$ i $X \neq X'$. Iz relacije $(O,X) \cong (O,X')$ sledi da tačka O pripada medijalnoj ravni π_1 duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju prostora E^3 sa dvema raznim invarijantnim tačkama O i X, te prema Dalamberovoj teoremi predstavlja koincidenciju ili neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{s,\omega}$ kojoj osa s sadrži tačke O i X. Ne može predstavljati koincidenciju, jer bi u tom slučaju iz relacije $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$ sledila relacija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$, te bi transformacija $\mathcal{I}$ sem tačke O imala još invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Stoga je $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$, i prema tome

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}.$$

S obzirom da prava s sadrži tačku O koja se nalazi u ravni π_1 i tačku X koja se nalazi van ravni π_1, prava s prodire ravan π_1 u tački O. Ako je $s \perp \pi_1$, transformacija $\mathcal{I}$ po definiciji predstavlja osnorotacionu refleksiju. Ako nije $s \perp \pi_1$, obeležimo sa π_2 ravan koja sadrži pravu s, a upravna je na ravni π_1 i sa π_3 ravan takvu da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$. S obzirom da su ravni π_1 i π_2 upravne među sobom, one se seku po nekoj pravoj s_1. Ako je δ_1 ravan koja sadrži pravu s_1 a upravna je na ravni π_3, zatim sa δ_2 ravan takva da je $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\delta_1} \circ \mathcal{S}_{\delta_2}$, kompozicija $\mathcal{S}_{\delta_2} \circ \mathcal{S}_{\delta_3}$ predstavlja neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{t,\theta}$ kojoj je osa t upravna na ravni δ_1 pa je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} = \mathcal{S}_{\delta_1} \circ \mathcal{S}_{\delta_2} \circ \mathcal{S}_{\delta_3} = \mathcal{S}_{\delta_1} \circ \mathcal{R}_{t,\theta} = \mathcal{R}_{\delta_1;t,\theta}.$$

□

Teorema 4.7.2. Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 može se predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija tog prostora.

Dokaz. Ako je $\mathcal{I} = \mathcal{E}$, tada zbog involutivnosti osne refleksije za svaku pravu $p \subset E^3$ imamo da je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p$. Ako je $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, tada postoji tačka $X \in E^3$ takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Neka je π_1 medijalna ravan duži XX'. S obzirom da je $\mathcal{I}$ direktna i $\mathcal{S}_{\pi_1}$ indirektna izometrijska transformacija prostora E^3, kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju tog prostora. Iz relacija $\mathcal{I}(X) = X'$ i $\mathcal{S}_{\pi_1}(X') = X$ sledi da je u kompoziciji $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ tačka X invarijantna. Ako kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ poseduje sem tačke X još neku invarijantnu tačku Y, prema teoremi 4.2.3 ona predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_{\pi_2}$. U tom slučaju, iz relacije $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$ sledi da je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$. Ako obeležimo sa π ravan upravnu na obema ravnima π_1 i π_2, a sa m i n prave po kojima ona seče te ravni, biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = (\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi}) \circ (\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}) = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n.$$

Ako kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ sem tačke X nema drugih invarijantnih tačaka, prema prethodnoj teoremi, ona predstavlja neku osnorotacionu refleksiju $\mathcal{R}_{\pi_4;\, s,\omega}$ kojoj je središte tačka X. Obeležimo sa π_2 ravan koja sadrži pravu s i koja je upravna na ravni π_1, a sa π_3 ravan takvu da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$. U tom slučaju, biće

$$\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}.$$

Iz relacija $\pi_1 \perp \pi_2$, $\pi_3 \perp \pi_4$ i jednakosti $\pi_1 \cap \pi_2 = m$, $\pi_3 \cap \pi_4 = n$ nalazimo da je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n$. □

Zadaci

Zadatak 4.15. Dokazati da središta duži koje spajaju odgovarajuće tačke osnorotacione refleksije $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega}$ prostora E^3 pripadaju ravni π.

Zadatak 4.16. Ako osa osne rotacije $\mathcal{R}_{s,\omega}$ prostora E^3 prodire neku ravan π, dokazati da svaka od kompozicija $\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_{\pi}$ i $\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$ predstavlja osnorotacionu refleksiju tog prostora.

Zadatak 4.17. Dokazati da kompozicija sastavljena iz triju ravanskih refleksija, kojima su osnove α, β, γ određene pljosnima nekog triedra $Oabc$ u prostoru E^3, predstavlja osnorotacionu refleksiju; konstruisati osnovu i osu te osnorotacione refleksije.

Zadatak 4.18. Odrediti zakon za transmutaciju osnorotacione refleksije $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega}$ prostora E^3 bilo kojom izometrijskom transformacijom $\mathcal{J}$ tog prostora.

Zadatak 4.19. Dokazati da kompozicija dveju osnorotacionih refleksija prostora E^3, koje imaju zajedničku osnovu i zajedničku osu, predstavlja osnu rotaciju ili koincidenciju.

4.8 Centralna refleksija prostora E^3

Osnorotaciona refleksija prostora E^3 u opštem slučaju nije involuciona transformacija; ona je involuciona jedino u slučaju kada je ugao rotacije opružen. Takvu osnorotacionu refleksiju zvaćemo centralnom refleksijom prostora E^3. Zbog svoje involutivnosti ona raspolaže nizom specifičnih svojstava koja predstavljaju predmet razmatranja ovog odeljka.

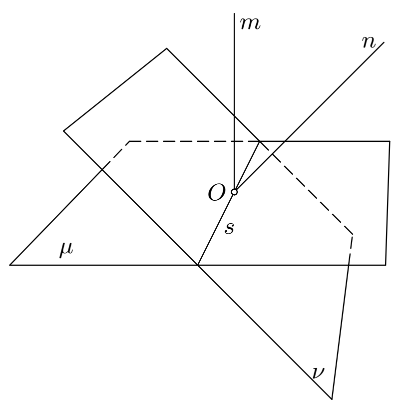
Definicija 4.8.1. *Centralnom refleksijom* $\mathcal{S}_O$ prostora E^3 nazivamo kompoziciju jedne osne refleksije $\mathcal{S}_s$ i jedne ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3, pri čemu je $s \perp \pi$ u tački O. Na taj način, ako je prava s upravna na ravni π u tački O, biće

$$\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\pi$$

Tačku O nazivamo *centrom* ili *središtem* centralne refleksije $\mathcal{S}_O$.

Iz definicije neposredno sleduje da centralna refleksija prostora E^3 predstavlja osnorotacionu refleksiju kojoj je ugao rotacije $180°$. Kao takva, ona predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju prostora E^3 koja ima samo jednu invarijantnu tačku, to je središte O te centralne refleksije. Svakoj drugoj tački $X \in E^3$ odgovara tačka $X' \in E^3$ takva da je tačka O središte duži XX'.

Teorema 4.8.1. Centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ prostora E^3 jednoznačno je određena svojim središtem O.



Sl. 4.8.1

Dokaz. Da bismo izveli dokaz ovog tvrđenja dovoljno je dokazati da za svake dve prave m i n koje se seku u tački O i ravni μ i ν koje su u tački O upravne na pravama m i n važi relacija $\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_n$ (Sl. 4.8.1). Ako obeležimo sa π ravan određenu pravama m i n, a sa s pravu po kojoj se seku ravni μ i ν, biće $s \perp \pi$. Ako zatim obeležimo sa μ' i ν' ravni određene parovima pravih $m,\ s$ i $n,\ s$, imamo da je

$$\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_{\mu'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_{\nu'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_n$$

$\square$

Teorema 4.8.2. Centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ prostora E^3 je involuciona transformacija.

Dokaz. Ako obeležimo sa π bilo koju ravan koja sadrži tačku O i sa s pravu koja je u tački O upravna na ravni π, biće $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s$ pa je

$$\mathcal{S}_O^2 = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s) = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_s) = \mathcal{E}.$$

□

Teorema 4.8.3. U centralnoj refleksiji $\mathcal{S}_O$ prostora E^3 pravoj x koja sadrži tačku O odgovara ta ista prava, pravoj x koja ne sadrži taču O odgovara prava x' takva da je $x \parallel x'$ i $x \cap x' = \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $O \in x$. Ako obeležimo sa π ravan koja je u tački O upravna na pravoj x, imamo da je $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_x$, pa je

$$\mathcal{S}_O(x) = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_x = \mathcal{S}_\pi(x) = x.$$

Pretpostavimo sad da je $O \notin x$. Ako obeležimo sa π ravan određenu relacijama $O \in \pi$ i $\pi \perp x$, i sa p pravu koja je u tački O upravna na ravni π, biće

$$\mathcal{S}_O(x) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi(x) = \mathcal{S}_p(x) = x'.$$

Budući da u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_p$ pravoj x koja zadovoljava relacije $x \parallel p$ i $x \cap p = \emptyset$ odgovara druga prava x' koja zadovoljava relacije $x' \parallel p$ i $x' \cap p = \emptyset$, imamo da je $x \parallel x'$ i $x \cap x' = \emptyset$. □

Teorema 4.8.4. U centralnoj refleksiji $\mathcal{S}_O$ prostora E^3 ravni π koja sadrži tačku O odgovara ta ista ravan, ravni π koja ne sadrži tačku O odgovara ravan π' takva da je $\pi \parallel \pi'$ i $\pi \cap \pi' = \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $O \in \pi$. Ako obeležimo sa p pravu koja je u tački O upravna na ravni π, biće $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi$, pa je

$$\mathcal{S}_O(\pi) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi(\pi) = \mathcal{S}_p(\pi) = \pi.$$

Pretpostavimo sad da je $O \notin \pi$. Ako obeležimo sa p pravu određenu relacijama $O \in p$ i $p \perp \pi$ i sa δ ravan koja je u tački O upravna na pravoj p, biće

$$\mathcal{S}_O(\pi) = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_p(\pi) = \mathcal{S}_\delta(\pi) = \pi'.$$

Iz relacija $\mathcal{S}_\delta(\pi) = \pi'$ i $\pi \cap \delta = \emptyset$ sledi da su ravni π i π' sa raznih strana ravni δ, pa je $\pi \parallel \pi'$ i $\pi \cap \pi' = \emptyset$. □

Teorema 4.8.5. Ako je $\mathcal{S}_O$ centralna refleksija i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija prostora E^3, zatim O' tačka takva da je $\mathcal{I}(O) = O'$, tada je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{O'}.$$

Dokaz. Obeležimo sa p proizvoljnu pravu koja sadrži tačku O i sa π ravan koja je u tački O upravna na pravoj p. Ako u transformaciji $\mathcal{I}$ pravoj p odgovara prava p', a ravni π odgovara ravan π', biće $p' \perp \pi'$ u nekoj tački O'. Stoga je

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} \\ &= (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}) \\ &= \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_{p'} = \mathcal{S}_{O'} \end{aligned}$$

□

Teorema 4.8.6. Centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ i ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako tačka O pripada ravni π, naime biće

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \iff O \in \pi.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$(*) \qquad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_{\pi'} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_O.$$

Ako obeležimo sa O' tačku određenu relacijom $\mathcal{S}_\pi(O) = O'$, prema zakonu transmutacije centralne refleksije $\mathcal{S}_O$ ravanskom refleksijom $\mathcal{S}_\pi$ imamo da je

$$(**) \qquad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{O'}.$$

Iz jednakosti $(*)$ i $(**)$ sledi da je $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_{O'}$, i prema tome da je $O = O'$, što je moguće samo u slučaju kada se tačka O nalazi u ravni π.

Obratno, pretpostavimo sad da je $O \in \pi$. Iz ove relacije sledi da je $\mathcal{S}_\pi(O) = O$, te prema zakonu za transmutaciju centralne refleksije $\mathcal{S}_O$ ravanskom refleksijom $\mathcal{S}_\pi$ nalazimo da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_O \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi.$$

□

Teorema 4.8.7. Centralna refleksija $\mathcal{S}_O$ i osna refleksija $\mathcal{S}_p$ prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako tačka O pripada pravoj p, naime biće

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p \iff O \in p.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$(*) \qquad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O.$$

Ako obeležimo sa O' tačku određenu relacijom $\mathcal{S}_p(O) = O'$, prema zakonu transmutacije centralne refleksije $\mathcal{S}_O$ osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ imamo da je

$$(**) \qquad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{O'}.$$

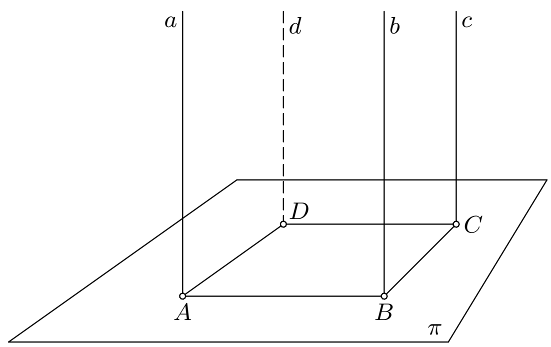
Iz jednakosti ($*$) i ($**$) sledi da je $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_{O'}$, i prema tome da je $O = O'$, što je moguće samo u slučaju kada se tačka O nalazi na pravoj p.

Obratno, pretpostavimo sad da je $O \in p$. Iz ove relacije sledi da je $\mathcal{S}_p(O) = O$, te prema zakonu transmutacije centralne refleksije $\mathcal{S}_O$ osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ nalazimo da je

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p.$$

□

Teorema 4.8.8. Kompozicija triju centralnih refleksija prostora E^3 predstavlja takođe centralnu refleksiju tog prostora.



Sl. 4.8.8

Dokaz. Neka su date tri centralne refleksije $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$ euklidskog prostora E^3. Ako je pri tome $A = B$ ili $B = C$, tada neposredno sleduje da kompozicija $\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ predstavlja takođe centralnu refleksiju. Razmotrimo slučaj kada je $A \neq B$ i $B \neq C$ (Sl. 4.8.8). Ako obeležimo sa π ravan koja sadrži tačke A, B, C i sa a, b, c prave koje su u tim tačkama upravne i na ravni π, nalazimo da je

$$\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_c) \circ (\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_a) = \mathcal{S}_\pi \circ (\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a)$$

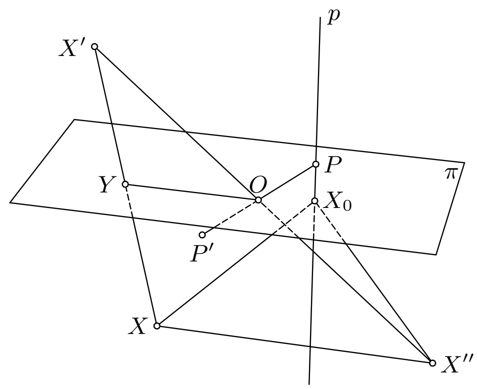
S obzirom da su prave a, b, c upravne na ravni π, prema ranije dokazanoj teoremi, kompozicija $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ kojoj je osa d upravna na ravni π. Ako prodornu tačku te ose sa ravni π obeležimo sa D, biće

$$\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_\pi \circ (\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a) = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_D.$$

□

Teorema 4.8.9. Središta duži koje spajaju odgovarajuće tačke indirektne izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ prostora E^3 pripadaju jednoj ravni.

Dokaz. Neka je $P \in E^3$, $P' = \mathcal{I}(P)$ i O središte duži PP' (Sl. 4.8.9). S obzirom da su $\mathcal{I}$ i $\mathcal{S}_O$ indirektne izometrijske transformacije prostora E^3, kompozicija $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju. U toj direktnoj izometrijskoj transformaciji tačka P je invarijantna, te prema Dalamberovoj teoremi predstavlja neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{p,\omega}$ pri čemu je $P \in p$.



Sl. 4.8.9

Neka je π ravan određena relacijama $O \in \pi$ i $\pi \perp p$. Ako obeležimo sa X bilo koju tačku prostora E^3, različitu od tačke P, i sa X' tačku takvu da je $\mathcal{I}(X) = X'$, biće središte Y duži XX' u ravni π. Zaista, stavimo li da je $\mathcal{S}_O(X') = X''$, biće $\mathcal{R}_{p,\omega}(X) = X''$. Stoga medijalna ravan δ duži XX'' sadrži pravu p. Prava određena središtima O i Y duži $X'X''$ i $X'X$ paralelna je sa duži XX'', i prema tome upravna na ravni δ, dakle i na pravoj $p \subset \delta$. Otuda sleduje relacija $Y \in \pi$. □

Definicija 4.8.2. Ravan π kojoj pripadaju središta duži određenih odgovarajućim tačkama indirektne izometrijske transformacije $\mathcal{I}$ prostora E^3 nazivamo *osnovom* te izometrijske transformacije.

Zadaci

Zadatak 4.20. Ako su $\mathcal{S}_O$ i $\mathcal{S}_{O'}$ centralne refleksije prostora E^3 i $\mathcal{I}$ neka izometrijska transformacija tog istog prostora, dokazati da je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{O'} \iff \mathcal{I}(O) = O'.$$

Zadatak 4.21. Ako su $\mathcal{S}_M$ i $\mathcal{S}_N$ centralne refleksije prostora E^3, dokazati da je

$$\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \iff M = N.$$

Zadatak 4.22. Ako su $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B$ dve razne centralne refleksije i $\mathcal{S}_\gamma$ ravanska refleksija prostora E^3, dokazati da kompozicija $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_A$ predstavlja neku ravansku refleksiju $\mathcal{S}_\delta$ ako i samo ako je $AB \perp \gamma$, naime biće

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_\delta \iff AB \perp \gamma.$$

Zadatak 4.23. Ako su $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\beta$ ravanske refleksije i $\mathcal{S}_C$ centralna refleksija prostora E^3, dokazati da kompozicija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_\alpha$ predstavlja neku centralnu refleksiju $\mathcal{S}_D$ ako i samo ako su ravni α i β među sobom paralelne, naime biće

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_D \iff \alpha \parallel \beta.$$

Zadatak 4.24. Dokazati da kompozicija sastavljena iz neparnog broja centralnih refleksija prostora E^3 predstavlja takođe centralnu refleksiju tog prostora.

Zadatak 4.25. Ako su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dva podudarna suprotnosmerna tetraedra prostora E^3, dokazati da središta duži AA', BB', CC', DD' pripadaju jednoj ravni.

Zadatak 4.26. Ako su Φ i Φ' dva podudarna suprotnoorijentisana poliedra prostora E^3, dokazati da središta duži koje spajaju njihova odgovarajuća temena pripadaju jednoj ravni.

4.9 Translacija prostora E^3

Sem osnih rotacija postoji još jedna vrsta izometrijskih transformacija prostora E^3 koje se mogu predstaviti kao kompozicija dveju ravanskih refleksija; to su tzv. translacije prostora E^3.

Definicija 4.9.1. Neka su $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ dve ravanske refleksije prostora E^3 kojima su osnove α i β upravne na nekoj pravoj s u dvema raznim tačkama A i B i neka je $A' = \mathcal{S}_\beta(A)$. *Paralelnim pomeranjem* ili *translacijom* po pravoj s za orijentisanu duž $PP' \subset s$ nazivamo transformaciju

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} : E^3 \to E^3,$$

određenu relacijom

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$$

Niz svojstava kojima raspolažu translacije prostora E^3 može se izvesti neposredno iz definicije. S obzirom da je ravanska refleksija prostora E^3 indirektna izometrijska transformacija, kompozicija dveju ravanskih refleksija, prema tome i translacija tog prostora, predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju. Budući da je $\alpha \cap \beta = \emptyset$, kompozicija $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, prema tome i translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ prostora E^3 nema invarijantnih tačaka. Translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ prostora E^3 prevodi svaku pravu $x \parallel PP'$ u tu istu pravu, ne menjajući njenu orijentaciju. Dokaz tog tvrđenja izvodi se potpuno analognim postupkom kao u geometriji ravni E^2, te ga stoga nećemo navoditi.

Teorema 4.9.1. Izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 predstavlja translaciju tog prostora ako i samo ako se može predstaviti kao kompozicija dveju raznih centralnih refleksija tog istog prostora.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da izometrijska transformacija prostora E^3 predstavlja neku translaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ tog prostora. Ako obeležimo sa Q središte duži PP', sa s pravu određenu tačkama P i P', a sa α i β ravni upravne na pravoj s u tačkama P i Q, primenom teoreme 4.6.1 nalazimo da je

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P$$

Obratno, pretpostavimo sada da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 predstavlja kompoziciju dveju raznih centralnih refleksija; neka je npr.

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P.$$

Ako obeležimo sa s pravu određenu tačkama P i Q, sa α i β ravni koje su u tačkama P i Q upravne na pravoj s i sa P' tačku takvu da je $\mathcal{S}_\beta(P) = P'$, primenom teoreme 4.6.1 nalazimo da je

$$\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}.$$

□

Teorema 4.9.2. Skup $\mathcal{T}$ koji se sastoji iz identične transformacije i svih translacija prostora E^3 predstavlja podgrupu grupe $G(\mathcal{I}^+)$ svih direktnih izometrijskih transformacija tog istog prostora.

Dokaz. Obeležimo sa $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ i $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ bilo koje dve translacije iz skupa $\mathcal{T}$. Ako je E tačka koja u translaciji $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ odgovara tački B, imamo da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}}$. Ako su M i N središta duži AB i BE, a M' tačka simetrična tački M u odnosu na tačku N, biće

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}} \in \mathcal{T}.$$

Na taj način kompozicija svake dve transformacije iz skupa $\mathcal{T}$ predstavlja takođe transformaciju iz skupa $\mathcal{T}$.

Ako je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ proizvoljna transformacija iz skupa $\mathcal{T}$ i R središte duži PQ, imamo da je

$$\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{PQ}} = (\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_R)^{-1} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_Q = \mathcal{T}_{\overrightarrow{QP}} \in \mathcal{T}.$$

Stoga inverzna transformacija bilo koje transformacije iz skupa $\mathcal{T}$ predstavlja takođe transformaciju iz skupa $\mathcal{T}$.

S obzirom da transformacije iz skupa $\mathcal{T}$ predstavljaju elemente iz grupe $G(\mathcal{I}^+)$, iz dokazanih svojstava sleduje da skup $\mathcal{T}$ predstavlja podgrupu te grupe. □

Definicija 4.9.2. Grupu ustanovljenu ovom teoremom nazivamo *grupom translacija prostora* E^3 i simbolički obeležavamo sa $G(\mathcal{T})$.

Teorema 4.9.3. Grupa translacija $G(\mathcal{T})$ prostora E^3 je komutativna; drugim rečima, za svake dve translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ i $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ prostora E^3 važi relacija

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$$

Dokaz. Obeležimo sa E tačku koja u translaciji $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ prostora E^3 odgovara tački B. Prema ranije dokazanoj teoremi imamo da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}}$. Ako obeležimo sa M i N središta duži AB i BE, primenom teoreme 4.9.1 nalazimo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} &= \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M, \\
\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} &= \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B.
\end{aligned}$$

Prema ranije dokazanoj teoremi, kompozicija $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N$ predstavlja centralnu refleksiju ravni E^2, dakle involucionu transformaciju. Stoga kvadrat te kompozicije predstavlja koincidenciju, naime biće

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N = \mathcal{E} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M$$

Iz ove i prethodnih dveju jednakosti sledi da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ □

Teorema 4.9.4. Ako je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ translacija i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrijska transformacija prostora E^3, zatim M' i N' tačke koje u izometriji $\mathcal{I}$ odgovaraju respektivno tačkama M i N, tada važi relacija

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$$

Dokaz. Ako obeležimo sa μ ravan koja je u tački M upravna na pravoj MN i sa ν medijalnu ravan duži MN, biće $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$. Ako zatim obeležimo sa μ' i ν' ravni koje u izometriji $\mathcal{I}$ odgovaraju respektivno ravnima μ i ν, biće ravan μ' u tački M' upravna na pravoj $M'N'$ a ravan ν' medijalna ravan duži $M'N'$, pa je

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu) \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&= \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\mu) \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&= (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{I}^{-1}) \\
&= \mathcal{S}_{\nu'} \circ \mathcal{S}_{\mu'} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.9.5. Translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ i ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako je prava MN paralelna sa ravni π. Naime biće

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_\pi \iff MN \parallel \pi.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_\pi, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}.$$

Ako obeležimo sa M' i N' tačke koje u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\pi$ odgovaraju respektivno tačkama M i N, prema prethodnoj teoremi imamo da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$$

Iz ove i prethodne jednakosti sledi da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$, pa je i $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$, što je moguće samo u slučaju kada je $MN \parallel \pi$.

Obratno, pretpostavimo da je $MN \parallel \pi$. Ako obeležimo sa M' i N' tačke koje u ravanskoj refleksiji $\mathcal{S}_\pi$ odgovaraju respektivno tačkama M i N, biće orijentisane duži $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$ podudarne i istosmerne, pa je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$. Stoga, primenom poznate teoreme, nalazimo da je

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_\pi$$

□

Teorema 4.9.6. Translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ i osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako su prave s i MN među sobom paralelne, naime biće

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \iff MN \parallel s$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}.$$

Ako obeležimo sa M' i N' tačke koje u osnoj rotaciji $\mathcal{R}_{s,\omega}$ odgovaraju respektivno tačkama M i N, prema poznatoj teoremi imamo da je

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$$

Iz ove i prethodne jednakosti sledi da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$, pa su orijentisane duži $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$ jednake i istovetne, što je moguće samo ako je $MN \parallel s$.

Obratno, pretpostavimo sad da je $MN \parallel s$. Ako obeležimo sa M' i N' tačke koje u osnoj rotaciji $\mathcal{R}_{s,\omega}$ odgovaraju respektivno tačkama M i N, biće orijentisane duži $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$ među sobom podudarne i istosmerne, pa je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$. Stoga primenom poznate teoreme nalazimo da je

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$$

□

Zadaci

Zadatak 4.27. Ako su A i B dve razne tačke prostora E^3, dokazati da važe sledeće relacije:

$$\text{(a) } (\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}; \qquad \text{(b) } \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}.$$

Zadatak 4.28. Ako su A, B, C tri razne tačke prostora E^3, dokazati da važe sledeće relacije:

$$\text{(a) } \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}; \quad \text{(b) } \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}.$$

Zadatak 4.29. Ako je $ABCD$ paralelogram prostora E^3, dokazati da važe sledeće relacije:

$$\text{(a) } \mathcal{T}_{\overrightarrow{AD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}; \quad \text{(b) } \mathcal{T}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}}$$

Zadatak 4.30. Dokazati da kompozicija parnog broja ravanskih refleksija prostora E^3, kojima su osnove upravne na nekoj pravoj s, predstavlja translaciju ili koincidenciju.

Zadatak 4.31. Dokazati da kompozicija parnog broja osnih refleksija prostora E^3, kojima su ose upravne na nekoj ravni π, predstavlja translaciju ili koincidenciju.

Zadatak 4.32. Dokazati da kompozicija parnog broja centralnih refleksija prostora E^3, predstavlja translaciju ili koincidenciju.

Zadatak 4.33. Date su u prostoru E^3 dve podudarne sfere σ_1 i σ_2 i dve tačke P_1 i P_2. Konstruisati dve među sobom paralelne ravni π_1 i π_2 od kojih prva sadrži tačku P_1 i dodiruje sferu σ_1, a druga sadrži tačku P_2 i dodiruje sferu σ_2.

Zadatak 4.34. Date su u prostoru E^3 dve sfere σ_1 i σ_2, prava p i duž d. Konstruisati pravu s koja je paralelna sa pravom p i koja dodiruje sfere σ_1 i σ_2 respektivno u tačkama X_1, Y_1 i X_2, Y_2 takvim da je $X_1Y_1 \cong X_2Y_2 \cong d$.

Zadatak 4.35. Date su u prostoru E^3 dve sfere σ_1, σ_2 i ravan π. Konstruisati ravan ψ koja je paralelna sa ravni π i koja seče sfere σ_1, σ_2 po među sobom podudarnim krugovima k_1, k_2.

Zadatak 4.36. Date su u prostoru E^3 dve sfere σ_1, σ_2, ravan π i duž d. Konstruisati dve ravni ψ_1 i ψ_2 koje su paralelne sa ravni π, kojima je međusobno rastojanje jednako duži d i koje seku sfere σ_1 i σ_2 respektivno po podudarnim krugovima k_1 i k_2.

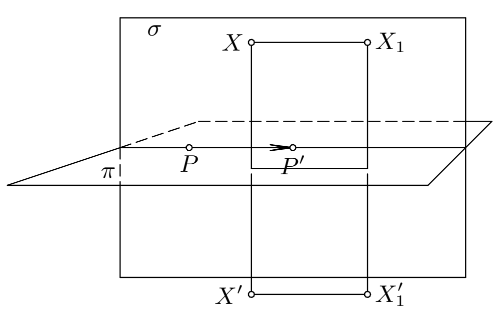
4.10 Klizajuća refleksija prostora E^3

U prethodnim izlaganjima proučavane su samo indirektne izometrijske transformacije prostora E^3 koje poseduju jednu ili više invarijantnih tačaka. Proučavanju indirektnih izometrijskih transformacija prostora E^3 koje uopšte nemaju invarijantnih tačaka prethodi uvođenje specifične vrste izometrijskih transformacija tog prostora; to su tzv. klizajuće refleksije prostora E^3.

Definicija 4.10.1. *Klizajućom* ili *translatornom refleksijom* $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ *prostora* E^3 nazivamo kompoziciju sastavljenu iz translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ i ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ kojoj osnova π sadrži pravu PP'. S obzirom na relaciju $PP' \subset \pi$ možemo pisati da je

$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$$

Ravan π nazivamo *osnovom*, orijentisanu pravu PP' nazivamo *osom*, a orijentisanu duž PP' nazivamo *translacionom duži klizajuće refleksije* $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$.



Sl. def. 4.10.1

Iz definicije neposredno sleduje da je klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ prostora E^3 jednoznačno određena ako je zadata osnova π i translaciona duž PP'. S obzirom da je translacija prostora E^3 direktna, a ravanska refleksija indirektna izometrijska transformacija, kompozicija tih dveju transformacija, prema tome i klizajuća refleksija prostora E^3, predstavlja indirektnu izometrijsku transformaciju. Nije teško dokazati da klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ nema invarijantnih tačaka, da ona poseduje beskonačno mnogo invarijantnih pravih — to su prave koje pripadaju ravni π, a paralelne su sa osom PP', da poseduje samo dve invarijantne ravni — to je *osnova* π i tzv. *protivosnova* σ koja sadrži pravu PP', a upravna je na ravni π. Komutativnost transformacija iz kojih se po definiciji dobija klizajuća refleksija kazuje da prilikom konstruisanja lika Φ_1' koji u toj klizajućoj refleksiji odgovara nekom liku $\Phi \in E^3$ nije važno da li se najpre izvodi translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$, zatim ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$, ili obratno, najpre ravanska refleksija $\mathcal{S}_\pi$, zatim translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$. Ilustracije radi na sl.1 predstavljena su oba redosleda dobijanja tačke X_1' koja u klizajućoj refleksiji $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ odgovara nekoj tački X.

Teorema 4.10.1. Ako indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 nema invarijantnih tačaka, ona predstavlja klizajuću refleksiju.

Dokaz. Neka je X proizvoljna tačka prostora E^3 i $X' = \mathcal{I}(X)$. Ako obeležimo sa π_1 medijalnu ravan duži XX', tada kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju sa invarijantnom tačkom X. Prema Dalamberovoj teoremi takva transformacija predstavlja koincidenciju ili osnu rotaciju $\mathcal{R}_{s,\omega}$ kojoj osa s sadrži tačku X. Ne može predstavljati koincidenciju, jer bi iz relacije $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$ sledila relacija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$ te bi izometrija $\mathcal{I}$ imala invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Stoga je $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$, i prema tome

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}.$$

Pri tome je $s \cap \pi_1 = \emptyset$, jer bi u protivnom izometrija $\mathcal{I}$ posedovala invarijantnih tačaka, što je pretpostavkom isključeno. Obeležimo sa π_2 i π_3 ravni određene relacijama $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ i $\pi_2 \perp \pi_1$, a sa π_1' i π_2' ravni određene relacijama $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{S}_{\pi_2'}$ i $\pi_1' \perp \pi_3$. Pri tome je $\pi_2', \pi_3 \perp \pi_1'$ i $\pi_2' \cap \pi_3 = \emptyset$, te kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_2'} \circ \mathcal{S}_{\pi_3'}$ predstavlja neku translaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ kojoj je osa PP' paralelna sa ravni π_1'. Stoga je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{S}_{\pi_2'} \circ \mathcal{S}_{\pi_3'} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{G}_{\pi_1';\overrightarrow{PP'}}.$$

□

Teorema 4.10.2. Ako je $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ klizajuća refleksija prostora E^3 i q prava koja je u središtu Q duži PP' upravna na ravni π, tada je

$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_q.$$

Dokaz. Koristeći definiciju klizajuće refleksije prostora E^3, nalazimo da je

$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_P;$$
$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_q.$$

□

Zadaci

Zadatak 4.37. Ako su tačke A i B dve razne tačke neke ravni π koja se nalazi u prostoru E^3, dokazati da je

$$\text{(a) } (\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{AB}})^{-1} = \mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{BA}}; \quad \text{(b) } \mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}.$$

Zadatak 4.38. Ako su A, B, C tri razne tačke neke ravni π u prostoru E^3, dokazati da je

$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$$

Zadatak 4.39. Ako su A, B, C, D četiri razne tačke neke ravni π prostora E^3, dokazati da je

$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$$

Zadatak 4.40. Ako je u prostoru E^3 tačka O van prave p, dokazati da svaka od narednih dveju kompozicija

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O$$

predstavlja klizajuću refleksiju prostora E^3.

Zadatak 4.41. Ako u prostoru E^3 prava p i ravan π nemaju zajedničkih tačaka, dokazati da svaka od narednih dveju kompozicija

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p$$

predstavlja klizajuću refleksiju prostora E^3.

Zadatak 4.42. Ako osa s osne rotacije $\mathcal{R}_{s,\omega}$ i osnova π ravanske refleksije $\mathcal{S}_\pi$ prostora E^3 nemaju zajedničkih tačaka, dokazati da svaka od sledećih dveju kompozicija

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$$

predstavlja klizajuću refleksiju prostora E^3.

Zadatak 4.43. Ako u prostoru E^3 duž PP' nije upravna na ravni π, dokazati da svaka od kompozicija

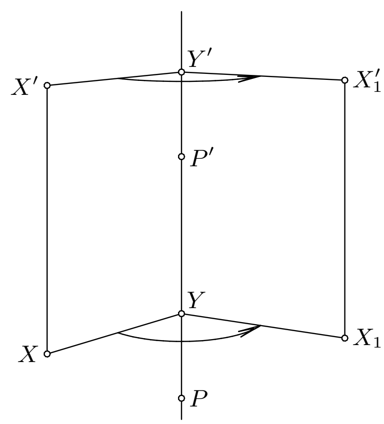
$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$$

predstavlja klizajuću refleksiju prostora E^3.

Zadatak 4.44. Dokazati da kompozicija sastavljena iz triju ravanskih refleksija kojima su osnove određene bočnim pljosnima bilo koje trostrane prizme $ABCA'B'C'$ zadate u prostoru E^3 predstavlja klizajuću refleksiju tog prostora.

4.11 Zavojno kretanje prostora E^3

U prethodnim izlaganjima razmatrane su tri vrste direktnih izometrijskih transformacija prostora E^3; bile su to koincidencije, osne rotacije i translacije. Minimalna simetrijska reprezentacija svake od njih sastojala se iz samo dveju ravanskih refleksija. Direktne izometrijske transformacije prostora E^3 kojima se minimalne simetrijske reprezentacije sastoje iz četiri ravanske refleksije do sada nisu razmatrane. Proučavanju takvih izometrijskih transformacija prethodi uvođenje specifičnih vrsta izometrija tzv. zavojnih kretanja prostora E^3.



Sl. def. 4.11.1

Definicija 4.11.1. *Zavojnim* ili *helikoidalnim kretanjem*

$$\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$$

prostora E^3 nazivamo kompoziciju sastavljenu iz translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ i osne rotacije $\mathcal{R}_{PP',\omega}$ tog prostora. Na taj način imamo da je

$$\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega} = \mathcal{R}_{PP',\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{R}_{PP',\omega}.$$

Orijentisanu pravu PP' nazivamo *osom*, orijentisanu duž PP' nazivamo *translacionom duži*, a orijentisani ugao ω nazivamo *uglom zavojnog kretanja* $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$. Specijalno, ako je ugao ω opružen, zavojno kretanje nazivamo *zavojnim poluobrtanjem.*

Iz definicije neposredno sleduje da je zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ prostora E^3 jednoznačno određeno translacionom duži PP' i uglom ω. Budući da su translacija i osna rotacija prostora E^3 direktne izometrijske transformacije, i njihova kompozicija, prema tome i zavojno kretanje predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju prostora E^3.

Teorema 4.11.1. Zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ prostora E^3 može se predstaviti kao kompozicija dveju osnih refleksija tog prostora; ose tih refleksija među sobom su mimoilazne.

Dokaz. Ako obeležimo sa s pravu određenu tačkama P i P', a sa π_1, π_2 i σ_1, σ_2 ravni takve da je

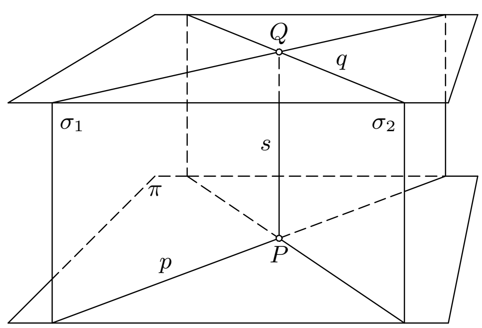
$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} \quad \text{i} \quad \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1}$$

biće $\pi_1, \pi_2 \perp s$ i $\sigma_1 \cap \sigma_2 = s$, pa je $\sigma_1 \perp \pi_1$ i $\sigma_2 \perp \pi_2$. Stavimo li da je $\sigma_1 \cap \pi_1 = s_1$ i $\sigma_2 \cap \pi_2 = s_2$, nalazimo da je

$$\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{S}_{s_2} \circ \mathcal{S}_{s_1}$$

□

Teorema 4.11.2. Kompozicija $\mathcal{I}$ sastavljena iz dveju osnih refleksija $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ prostora E^3, kojima su ose p i q mimoilazne, predstavlja zavojno kretanje.



Sl. 4.11.2

Dokaz. S obzirom da su prave p i q mimoilazne, postoji jedinstvena prava s koja ih seče pod pravim uglovima. Neka je $P{=}p \cap s$ i $Q{=}q \cap s$ (Sl. 4.11.2). Ako obeležimo sa π_1 i π_2 ravni upravne na pravoj s u tačkama P i Q, a sa σ_1 i σ_2 ravni od kojih je prva određena pravama p i s, a druga određena pravama q i s, imamo da je $\sigma_1 \cap \pi_1 = p$, $\sigma_2 \cap \pi_2 = q$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = s$ i σ_1, $\sigma_2 \perp \pi_1$, π_2. Stoga je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$$

Budući da su ravni π_1 i π_2 upravne na pravoj s u dvema raznim tačkama P i Q, kompozicija

$$\mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$$

predstavlja translaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ gde je $P' = \mathcal{S}_{\pi_2}(P)$. Kako je $\sigma_1 \cap \sigma_2 = s$, imamo da je

$$\mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{R}_{s,\omega},$$

gde je ω orijentisani ugao određen ravnima σ_1 i σ_2. Pri tome se osa translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ poklapa sa osom osne rotacije $\mathcal{R}_{s,\omega}$ pa je

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}.$$

□

Zadaci

Zadatak 4.45. Dokazati da zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ prostora E^3 nema invarijantnih tačaka.

Zadatak 4.46. Dokazati da zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ prostora E^3 poseduje jedinstvenu invarijantnu pravu, to je osa PP' tog zavojnog kretanja.

Zadatak 4.47. Dokazati da zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ prostora E^3 u opštem slučaju nema invarijantnih ravni. Specijalno, ako je ugao ω opružen, svaka ravan koja sadrži pravu PP' je invarijantna.

Zadatak 4.48. Ako je u prostoru E^3 tačka O van ravni π dokazati da svaka od narednih dveju kompozicija

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi$$

predstavlja zavojno poluobrtanje prostora E^3.

Zadatak 4.49. Dokazati da kompozicija sastavljena iz triju osnih refleksija $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$ prostora E^3, kojima ose a, b, c pripadaju jednoj ravni no ne pripadaju jednom pramenu, predstavlja zavojno poluobrtanje.

Zadatak 4.50. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke prostora E^3 i t tangenta u tački A na krugu k opisanom oko $\triangle$ABC, dokazati da je

$$\mathcal{Z}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t.$$

Zadatak 4.51. Dokazati da se svako zavojno kretanje prostora E^3 može predstaviti kao kompozicija jedne klizajuće i jedne ravanske refleksije.

Zadatak 4.52. Dokazati da se svako zavojno kretanje prostora E^3 može predstaviti kao kompozicija jedne osnorotacione i jedne ravanske refleksije.

Zadatak 4.53. Dokazati da se svako zavojno poluobrtanje prostora E^3 može predstaviti kao kompozicija jedne centralne i jedne ravanske refleksije.

Zadatak 4.54. Dokazati da kompozicija dvaju zavojnih poluobrtanja $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$ i $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}}$ prostora E^3, kojima su ose OP i OQ upravne među sobom, predstavlja osnu refleksiju tog prostora.

Zadatak 4.55. Ako su OP, OQ, OR tri među sobom ortogonalne duži prostora E^3, dokazati da kompozicija

$$\mathcal{I} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$$

predstavlja translaciju tog prostora.

4.12 Klasifikacija izometrijskih transformacija prostora E^3

U prethodnim razmatranjima upoznali smo se sa više različitih vrsta izometrijskih transformacija prostora E^3. Prirodno je postaviti pitanje da li su njima obuhvaćene sve postojeće vrste izometrijskih transformacija tog prostora. Odgovor na to pitanje dat je narednim dvema teoremama kojima se odvojeno izvode klasifikacije direktnih i indirektnih izometrijskih transformacija.

Teorema 4.12.1 (M. Šal, 1830). Svaka direktna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 predstavlja koincidenciju, translaciju, osnu rotaciju ili zavojno kretanje.

Dokaz. S obzirom da je $\mathcal{I}$ direktna izometrijska transformacija prostora E^3, prema ranije dokazanoj teoremi ona se može predstaviti u obliku kompozicije dveju osnih simetrija tog prostora; neka je npr.

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m.$$

U zavisnosti od toga kakav je uzajamni položaj osa m i n tih simetrija, razlikujemo sledeće četiri mogućnosti.

1° Ako su ose m i n istovetne, tada iz involutivnosti osne refleksije prostora E^3, neposredno zaključujemo da izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 predstavlja koincidenciju, tj. da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{E}.$$

2° Ako su ose m i n dve razne među sobom paralelne prave, one su komplanarne tj. sadržane u nekoj ravni π. Obeležimo sa μ i ν ravni određene relacijama

$$m \subset \mu \perp \pi \quad \text{i} \quad n \subset \nu \perp \pi$$

Budući da ravni i upravne na ravni seku ravan po pravama m i n, biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu) = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu.$$

Kako su ravni μ i ν upravne na ravni π, a prave $m{=}\mu \cap \pi$ i $n{=}\nu \cap \pi$ među sobom različite i paralelne, biće μ i ν dve razne među sobom paralelne ravni, te kompozicija $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ predstavlja neku translaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ prostora E^3, naime biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}.$$

3° Ako se ose m i n osnih refleksija $\mathcal{S}_m$ i $\mathcal{S}_n$ seku u nekoj tački S, one određuju neku ravan π. Obeležimo ponovo sa μ i ν ravni određene relacijama $m \subset \mu \perp \pi$ i $n \subset \nu \perp \pi$. Budući da ravni μ i ν upravne na ravni π seku ravan π po pravama m i n, biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu) = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu.$$

Kako ravni μ i ν seku ravan π po dvema raznim pravama m i n, one su različite među sobom. Tačka S pripada svakoj od pravih m i n koje se nalaze respektivno u ravnima μ i ν, pa je $S \in \mu$ i $S \in \nu$. Na taj način, dve razne ravni μ i ν imaju zajedničku tačku S, prema tome seku se po nekoj pravoj s koja sadrži tačku S. stoga kompozicija $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ predstavlja neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{s,\omega}$ prostora E^3, naime biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}.$$

4° Pretpostavimo sad da su prave m i n mimoilazne. Prema poznatoj teoremi, postoji jedinstvena prava s koja seče mimoilazne prave m i n pod pravim uglovima. Neka je $M = s \cap m$ i $N = s \cap n$. Ako obeležimo sa π_1 i π_2 ravni upravne na pravoj s u tačkama M i N, a sa σ_1 i σ_2 ravni od kojih je prva određena pravama m i s, a druga određena pravama n i s, imamo da je $\sigma_1 \cap \pi_1 = m$, $\sigma_2 \cap \pi_2 = n$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = s$ i $\sigma_1,\ \sigma_2 \perp \pi_1,\ \pi_2$. Stoga je

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m &= \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} \\ &= \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}. \end{aligned}$$

Budući da su ravni π_1 i π_2 upravne na pravoj s u dvema raznim tačkama M i N, kompozicija

$$\mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$$

predstavlja translaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}}$ gde je $M' = \mathcal{S}_{\pi_2}(M)$. Kako je $\sigma_1 \cap \sigma_2 = s$, imamo da je

$$\mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$$

gde je ω orijentisani ugao određen ravnima σ_1 i σ_2. Pri tome se osa MM' translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}}$ poklapa sa osom s osne rotacije $\mathcal{R}_{s,\omega}$, te kompozicija tih dveju transformacija u bilo kojem redu predstavlja zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{MM'},\omega}$, naime biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{MM'},\omega}.$$

□

Teorema 4.12.2. Svaka indirektna izometrijska transformacija $\mathcal{I}$ prostora E^3 predstavlja ravansku, osnorotacionu ili klizajuću refleksiju.

Dokaz. S obzirom da $\mathcal{I}$ indirektna i $\mathcal{E}$ direktna izometrijska transformacija, imamo da je $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, te postoji tačka $X \in E^3$ takva da je $\mathcal{I}(X) = X'$ i $X \neq X'$. Ako obeležimo sa π_1 medijalnu ravan duži XX', tada kompozicija

$$\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$$

predstavlja direktnu izometrijsku transformaciju sa invarijantnom tačkom X. Prema ranije dokazanoj Dalamberovoj teoremi, takva transformacija predstavlja koincidenciju $\mathcal{E}$ ili neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{s,\omega}$ kojoj osa s sadrži invarijantnu tačku X. Ako je $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, neposredno zaključujemo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1},$$

tj. da izometrijska transformacija predstavlja ravansku refleksiju. Ako je $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$, imamo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}.$$

Obeležimo sa π_2 i π_3 ravni određene relacijama $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ i $\pi_2 \perp \pi_1$, a sa π_1' i π_2' ravni određene relacijama $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{S}_{\pi_2'}$ i $\pi_1' \perp \pi_3$. U tom slučaju nalazimo da je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{S}_{\pi_2'} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}.$$

Ravni π_2' i π_3 različite su među sobom i upravne na ravni π_1', te kompozicija $\mathcal{S}_{\pi_2'} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ predstavlja neku osnu rotaciju $\mathcal{R}_{t,\theta}$ kojoj je osa t upravna na ravni π_1' ili neku translaciju $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ kojoj je osa MN paralelna sa ravni π_1'. Stoga je

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{R}_{t,\theta} = \mathcal{R}_{\pi_1';t,\theta} \quad \text{ili} \\ \mathcal{I} &= \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{G}_{\pi_3';\overrightarrow{MN}}. \end{aligned}$$

□

Prethodne dve teoreme omogućuju da klasifikaciju izometrijskih transformacija euklidskog prostora E^3 prikažemo u obliku sledeće sheme:

Izometrijske transformacije euklidskog prostora E^3

Direktne izometrijske transformacije				Indirektne izometrijske transformacije		
↙	↙	↘	↘	↙	↓	↘
Koincidencija	Translacija	Osne rotacije	Zavojna kretanja	Ravanska refleksija	Osnorotaciona refleksija	Klizajuća refleksija

Napominjemo da se u izvedenoj klasifikaciji izometrijskih transformacija euklidskog prostora E^3 posebno ne ističu osne simetrije reda n; njih svrstavamo među osne rotacije. Isto tako, nisu posebno pomenute ni osnorotacione simetrije reda n među kojima se nalazi i centralna refleksija prostora; njih svrstavamo među osnorotacione refleksije razmatranog prostora.

4.13 Simetrije likova u prostoru E^3

Izometrijske transformacije prostora E^3 omogućuju da u tom prostoru izgradimo geometrijsku teoriju simetrija. Nije nam cilj da ovde u potpunosti razradimo tu teoriju, već samo da izložimo neke njene elemente.

Definicija 4.13.1. *Simetrijom lika* Φ u prostoru E^3 nazivamo svaku izometrijsku transformaciju $\mathcal{I}$ te ravni takvu da je $\mathcal{I}(\Phi)=\Phi$.

Nije teško ustanoviti da skup svih simetrija lika $\Phi \subset E^3$ obrazuje grupu; tu grupu nazivamo *grupom simetrija* lika Φ i simbolički obeležavamo sa $\mathrm{G}(\mathcal{I}_\Phi)$. Broj elemenata grupe $\mathrm{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ nazivamo redom te grupe. Identična transformacija kao specifična izometrija prostora E^3 predstavlja simetriju svakog lika Φ u tom prostoru. Ako je red grupe $\mathrm{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ jednak jedinici, lik Φ nazivamo *asimetričnim*; ako je red grupe veći od jedan, lik Φ nazivamo *simetričnim*. S obzirom na orijentaciju, razlikujemo direktne simetrije koje ne menjaju orijentaciju prostora i indirektne koje menjaju njegovu orijentaciju. Skup direktnih simetrija nekog lika $\Phi \subset E^3$ predstavlja podgrupu grupe $\mathrm{G}(\mathcal{I}_\Phi)$; tu podgrupu nazivamo *grupom direktnih simetrija* lika Φ, i simbolički obeležavamo sa $\mathrm{G}(\mathcal{I}_\Phi^+)$.

S obzirom da razlikujemo sedam vrsta izometrijskih transformacija prostora E^3, razlikujemo i sedam vrsta simetrija likova u tom prostoru, to su: koincidencija, ravanska simetrija, osna simetrija reda n, osnorotaciona simetrija reda n, translaciona simetrija, klizajuća simetrija, zavojna simetrija. Sa ovako utvrđenim postojećim vrstama simetrija likova u prostoru E^3 može se pristupiti iznalaženju postojećih grupa simetrija u prostoru E^3. Taj problem veoma je složen, te ga nećemo ni razmatrati. Kao i u geometriji ravni E^2, i u geometriji prostora E^3 proučavaju se najpre *punktualne grupe simetrija*; to su grupe u kojima sve simetrije raspolažu najmanje jednom zajedničkom invarijantnom tačkom. Punktualne grupe koje se sastoje isključivo iz direktnih simetrija raspolažu jedino koincidencijom i osnim simetrijama, zbog čega se u literaturi i nazivaju *grupama rotacija*. Nije teško ustanoviti da npr. grupa rotacija pravilne n-tostrane piramide predstavlja cikličku grupu simetrija tipa C_n; npr. grupa rotacija pravilne n-tostrane prizme predstavlja diedarsku grupu simetrija tipa D_n. Narednom teoremom ustanovićemo grupe simetrija pravilnih poliedara u prostoru E^3.

Teorema 4.13.1. Ukupan broj simetrija pravilnog poliedra Φ u prostoru E^3 jednak je dvostrukom broju njegovih ivičnih uglova odnosno četvorostrukom broju njegovih ivica. Jednu polovinu tih simetrija čine direktne, a drugu polovinu čine indirektne izometrijske transformacije.

Dokaz. Ako obeležimo sa A, B, C i A', B', C' dve trojke uzastopnih temena jedne iste ili dveju raznih pljosni poliedra Φ i sa O središte tog poliedra, biće četvorke tačaka O, A, B, C i O, A', B', C' nekomplanarne. Štaviše, važe relacije

$$(O, A, B, C) \cong (O, A', B', C') \quad \text{i} \quad (O, A, B, C) \cong (O, C', B', A').$$

Stoga postoje dve izometrijske transformacije prostora E^3, obeležimo ih sa $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$, od kojih prva prevodi tačke O, A, B, C respektivno u tačke O, A', B', C', a druga prevodi tačke O, A, B, C respektivno u tačke O, C', B', A'. Budući da su tetraedri $OA'B'C'$ i $OC'B'A'$ suprotno orijentisani, jedna od izometrijskih transformacija $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ je direktna a druga je indirektna. Nije teško dokazati da svaka od izometrijskih transformacija $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ predstavlja simetriju poliedra Φ tj. da je

$$\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_2(\Phi) = \Phi.$$

Zaista, u transformaciji $\mathcal{I}_1$ pljosni $(ABC \cdots H)$ odgovara pljosan $(A'B'C' \cdots H')$. Iz podudarnosti svih diedara i pljosni poliedra Φ sleduje da u transformaciji $\mathcal{I}_1$ pljosnima susednim sa $(ABC \cdots H)$ odgovaraju pljosani susedne sa $(A'B'C' \cdots H')$. Istim rasuđivanjem zaključujemo da u izometriji $\mathcal{I}_1$ narednim susednim pljosnima odgovaraju naredne susedne pljosni. Nastavljajući ovaj postupak, nalazimo da je $\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi$. Na isti način dobijamo da je $\mathcal{I}_2(\Phi) = \Phi$. Ovim smo dokazali da svakom ivičnom uglu poliedra Φ odgovaraju dve razne simetrije tog poliedra od kojih je jedna direktna a druga indirektna. Stoga je ukupan broj svih simetrija poliedra Φ jednak dvostrukom broju njegovih ivičnih uglova, odnosno četvorostrukom broju njegovih ivica. Sem toga, jednu polovinu tih simetrija čine direktne, a drugu polovinu čine indirektne izometrijske transformacije. □

Ako pravilan poliedar Φ ima t temena, i ivica, p pljosni i ako svaka pljosan ima m stranica a svaki rogalj n ivica, iz dokazane teoreme neposredno zaključujemo da se red grupe $G_{\mathcal{I}}(\Phi)$ simetrija i red grupe $G_{\mathcal{I}^+}(\Phi)$ rotacija tog pravilnog poliedra mogu izraziti sledećim jednakostima:

$$\operatorname{red} G_{\mathcal{I}}(\Phi) = 2 \operatorname{red} G_{\mathcal{I}^+}(\Phi) = 2mp = 2nt = 4i.$$

Izvedena svojstva omogućuju da s obzirom na postojeće vrste pravilnih poliedara sačinimo sledeću tabelu:

	Vrsta poliedra Φ	$\operatorname{red} G_{\mathcal{I}}(\Phi)$	$\operatorname{red} G_{\mathcal{I}^+}(\Phi)$
1	Pravilan tetraedar	24	12
2	Pravilan heksaedar	48	24
3	Pravilan oktaedar	48	24
4	Pravilan dodekaedar	120	60
5	Pravilan ikosaedar	120	60

Ovim smo samo ustanovili koliki je red grupe simetrija i red grupe rotacija svakog od postojećih pet vrsta pravilnih poliedara. Prirodno je postaviti pitanje kojim vrstama simetrija raspolažu grupe. Bez dokaza navodimo vrste simetrija kojima raspolažu pravilan tetraedar i kocka.

Pravilan tetraedar raspolaže sa:

8 osnih simetrija reda tri koje su definisane u oba smera u odnosu na prave određene visinama tog tetraedra;

3 osne simetrija reda dva koje su definisane u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica;

1 identična transformacija;

6 ravanskih simetrija definisanih u odnosu na simetralne ravni unutrašnjih diedara;

6 osnorotacionih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica.

Pravilan heksaedar(kocka) raspolaže sa:

6 osnih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;

3 osne simetrije reda dva definisane u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;

6 osnih simetrija reda dva definisanih u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica;

8 osnih simetrija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima;

1 identična transformacija;

6 ravanskih simetrija definisanih u odnosu na simetralne ravni unutrašnjih diedara;

3 ravanske simetrije definisane u odnosu na medijalne ravni ivica;

6 osnorotacionih simetrija reda četiri, definisanih u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;

8 osnorotacionih simetrija reda šest, definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnih temenima;

1 centralna simetrija.

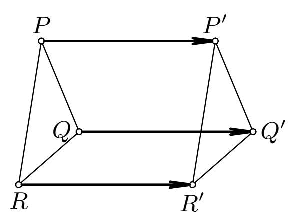
Glava 5

Vektori u geometriji

5.1 Vektori u prostoru E^n $(n = 1,\ 2,\ 3)$

Translacije prostora E^n omogućuju da u geometriji tog prostora uvedemo pojam vektora koji u rešavanju geometrijskih zadataka nalazi čestu primenu. Tom pojmu prethodi uvođenje jedne pomoćne relacije koju nazivamo relacijom istoznačnosti ili ekvipolencije.

Definicija 5.1.1. Kaže se da je u prostoru E^n uređen par tačaka $(P,\ P')$ *ekvipolentan* ili *istoznačan* s uređenim parom tačaka (Q, Q') ako u grupi translacija $G(\mathcal{T})$ prostora E^n postoji transformacija koja prevodi tačke P i Q respektivno u tačke P' i Q'.



Sl. def. 5.1.1

Iz definicije neposredno sledi da su ekvipolentni parovi tačaka (P, P') i (Q, Q') translatorno podudarni i prema tome orijentisane duži PP' i QQ' podudarne i istosmerne (Sl. def. 5.1.1). Štaviše, iz definicije neposredno sleduje da relacija ekvipolencije definisana na skupu uređenih parova tačaka prostora E^n predstavlja relaciju ekvivalencije. Stoga ona omogućuje da skup svih uređenih parova tačaka tog prostora razložimo na klase ekvivalencije kojih ima beskonačno mnogo.

Definicija 5.1.2. Klasu svih uređenih među sobom ekvipolentnih parova tačaka prostora E^n nazivamo *vektorom* u tom prostoru.

Vektore u prostoru E^n najčešće obeležavamo malim latinskim slovima iznad kojih stavljamo znak strelice, kao npr. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\,\ldots$ S obzirom da vektor $\vec{x}$ predstavlja čitavu klasu ekvipolentnih parova tačaka koja je jednoznačno određena bilo kojim uređenim parom tačaka (X, X') iz te klase, u geometriji je dopušteno taj vektor obeležavati i simbolom $\overrightarrow{XX'}$. U tom slučaju tačku X nazivamo *početnom*, a tačku X' *krajnjom tačkom vektora* $\overrightarrow{XX'}$. Pravac određen pravom XX' nazivamo *pravcem*, a smer određen orijentisanom duži XX' nazivamo *smerom vektora* $\overrightarrow{XX'}$. Za vektor $\overrightarrow{X'X}$ kažemo da je *suprotnosmeran* s vektorom $\overrightarrow{XX'}$. Rastojanje d između početne tačke X i krajnje tačke X' vektora $\vec{x} = \overrightarrow{XX'}$ nazivamo *dužinom*, *intenzitetom* ili *modulom* tog vektora i simbolički obeležavamo sa

$$|\vec{x}| \quad \text{ili} \quad |\overrightarrow{XX'}|.$$

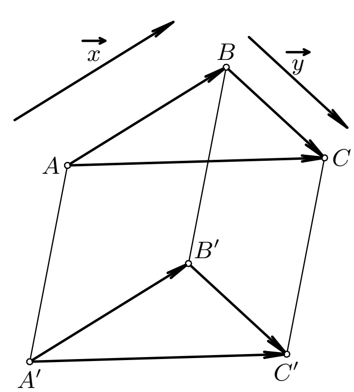
Specijalno, ako je dužina vektora $\overrightarrow{XX'}$ jednaka nuli, tada je $X = X'$, takav vektor nazivamo *nula vektorom* i simbolički obeležavano sa $\vec{o}$. Jasno je da nula vektor ne određuje nikakav pravac, niti smer. U izvesnim slučajevima dopušteno je bilo koji pravac smatrati pravcem nula vektora $\vec{o}$.

Vektore prostora E^n koji imaju isti pravac nazivamo *kolinearnim*; u protivnom slučaju, vektore nazivamo *nekolinearnim*. Vektore prostora E^n kojima su pravci paralelni sa nekom ravni π nazivamo *komplanarnim*; u protivnom slučaju vektore nazivamo *nekomplanarnim*. Jasno je da su dva vektora prostora E^n uvek komplanarna; međutim, tri vektora mogu biti nekomplanarna.

5.2 Linearne operacije nad vektorima

1. Nad skupom vektora u prostoru E^n, (n = 1, 2, 3) moguće je ustanoviti dve vrste tzv. *linearnih algebarskih operacija*; to su operacije sabiranja vektora i množenja vektora sa brojem. Ustanovimo najpre operaciju sabiranja vektora.

Definicija 5.2.1. U prostoru E^n, (n = 1, 2, 3) svakom uređenom paru vektora $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$ pridružen je jedan vektor $\vec{z} = \overrightarrow{AC}$ koji nazivamo *zbirom vektora* $\vec{x}$ i $\vec{y}$, i simbolički obeležavamo sa $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.



Sl. def. 5.2.1

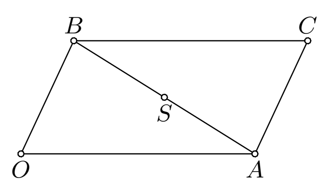
Nije teško dokazati da zbir dvaju vektora $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$ ne zavisi od položaja tačke A (Sl. def. 5.2.1). Zaista, ako obeležimo sa A' bilo koju drugu tačku prostora E^n i sa B', C' tačke takve da je $\vec{x} = \overrightarrow{A'B'}$ i $\vec{y} = \overrightarrow{B'C'}$, biće orijentisane duži AB i $A'B'$ podudarne i istosmerne, pa su i orijentisane duži AA' i BB' podudarne i istosmerne. Isto tako orijentisane duži BC i $B'C'$ su podudarne i istosmerne, pa su i orijentisane duži BB' i CC' podudarne i istosmerne. Sad su orijentisane duži AA' i BB' podudarne i istosmerne, te su i orijentisane duži AC i $A'C'$ podudarne i istosmerne. Stoga je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ i prema tome

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}.$$

Od svojstava kojima se odlikuje operacija sabiranja vektora ističemo najvažnija; ta svojstva kondenzovana su u jedinstvenoj teoremi koja glasi:

Teorema 5.2.1. Za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ prostora E^n važe sledeće relacije:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$

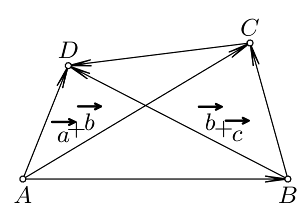


Sl. 5.2.1(a)

Dokaz. 1° Ako obeležimo sa O, A, B tačke takve da je $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ i sa C tačku simetričnu sa tačkom O u odnosu na središte S duži AB (Sl. 5.2.1(a)), imamo da je

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \quad \text{i} \quad \vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}.$$

Iz ovih jednakosti sledi da je $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Sl. 5.2.1(b)

2° Ako obeležimo sa A, B, C, D, tačke takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ (Sl. 5.2.1(b)), imamo da je

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD};$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Iz ovih jednakosti sladi da je $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

3° Ako su A i B tačke takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, biće

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB},$$

tj. $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$

4° Ako su A i B tačke takve da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, biće

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{o}.$$

□

S obzirom da je operacija sabiranja vektora u prostoru E^n asocijativna, u izrazima $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ i $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ mogu se izostaviti zagrade, te svaki od njih dobija oblik

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Indukcijom nalazimo da se operacija sabiranja vektora može proširiti i na veći broj sabiraka. Tako npr. zbir od m vektora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ predstavlja neki vektor $\vec{a}$ koji možemo napisati u obliku

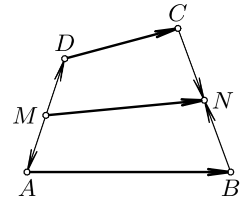
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n.$$

Zbir dvaju vektora $\vec{x}$ i $-\vec{y}$ predstavlja neki vektor $\vec{z}$ koji nazivamo razlika vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$, i simbolički obeležavamo sa

$$\vec{z} = \vec{x} + (-\vec{y}) = \vec{x} - \vec{y}.$$

Primer

Primer 5.1. Ako su M i N središta stranica AD i BC bilo kojeg četvorougla $ABCD$, dokazati da je $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.



Sl. Primer 5.1

Rešenje. Prema definiciji zbira vektora imamo da je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}. \end{aligned}$$

Sabiranjem odgovarajućih strana jednakosti, nalazimo da je

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NB} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}. \end{aligned}$$

□

2. Sem unutrašnje operacije sabiranja, na skupu vektora prostora E^n može se definisati i jedna spoljašnja operacija koju nazivamo *množenjem vektora sa brojem.*

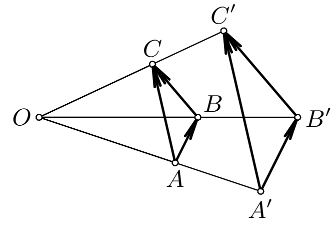
Definicija 5.2.2. Neka je $\vec{x} \in E^n$ i $k \in R$. *Proizvodom* $k\vec{x}$ *vektora* $\vec{x}$ *sa brojem* k nazivamo vektor $\vec{y} \in E^n$ koji zadovoljava sledeće uslove:

1. Intenzitet vektora $\vec{y}$ jednak je proizvodu iz apsolutne vrednosti broja k i intenziteta vektora $\vec{x}$ tj. $|\vec{y}| = |k||\vec{x}|$
2. Vektor $\vec{y}$ je istosmeran ili suprotosmeran s vektorom $\vec{x}$ u zavisnosti od toga da li je $k > 0$ ili $k < 0$.

Iz definicije neposredno sleduje da proizvod vektora $\vec{x}$ sa brojem k predstavlja nula vektor ako i samo ako je $\vec{x} = \vec{o}$ ili $k = 0$.

Teorema 5.2.2. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ proizvoljni vektori prostora E^n i k, k_1, k_2 realni brojevi, tada je

1. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
2. $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$;
3. $k_1(k_2\vec{a}) = (k_1 k_2)\vec{a}$;
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.



Sl. 5.2.2

Dokaz. 1° Ako je $k = 0$, tvrđenje sleduje neposredno iz definicije. Razmotrimo slučaj kada je $k \neq 0$ (Sl. 5.2.2). Ako obeležimo sa A, B, C tačke prostora E^n takve da je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, sa O tačku van pravih AB, BC, CA i sa A', B', C' tačke takve da je

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC'} = k\overrightarrow{OC},$$

tada važe sledeće jednakosti

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}.$$

Na taj način imamo da je

$$\begin{aligned} k(\vec{a} + \vec{b}) &= k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = k\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} \\ &= \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} \\ &= k\vec{a} + k\vec{b}. \end{aligned}$$

2° Ako je neki od brojeva k_1 i k_2 jednak nuli ili $\vec{a} = \vec{o}$, tvrđenje sleduje neposredno. Razmatramo slučaj kada brojevi k_1 i k_2 imaju isti znak, dok je $\vec{a} \neq \vec{o}$. Pri tome su vektori

$$(k_1 + k_2)\vec{a} \quad \text{i} \quad k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$$

istog smera i jednakih intenziteta. Prvo od ovih tvrđenja sleduje otuda što su oba ta vektora za $k_1 > 0$ i $k_2 > 0$ istosmerni s vektorom $\vec{a}$, a za $k_1 < 0$ i $k_2 < 0$ suprotni su sa vektorom $\vec{a}$. Drugo od pomenutih tvrđenja takođe važi, jer je

$$\begin{aligned} |(k_1 + k_2)\vec{a}| &= |k_1 + k_2||\vec{a}| = (|k_1| + |k_2|)|\vec{a}|, \\ |k_1\vec{a} + k_2\vec{a}| &= |k_1\vec{a}| + |k_2\vec{a}| = |k_1||\vec{a}| + |k_2||\vec{a}| = (|k_1| + |k_2|)\vec{a}. \end{aligned}$$

Stoga, prema definiciji jednakosti vektora, imamo da je

$$(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}.$$

Analogno rasuđivanje primenjuje se i u slučaju kada brojevi k_1 i k_2 imaju suprotne znakove, dok je $\vec{a} \neq \vec{o}$.

3° Vektori $k_1(k_2\vec{a})$ i $(k_1k_2)\vec{a}$ su istog smera i jednakih intenziteta. Prvo od ovih svojstava sleduje neposredno, jer ako brojevi k_1 i k_2 imaju isti znak, pomenuti vektori su istosmerni sa vektorom $\vec{a}$; ako brojevi k_1 i k_2 imaju suprotan znak, pomenuti vektori su suprotnosmerni s vektorom $\vec{a}$. Drugo svojstvo sleduje iz relacija

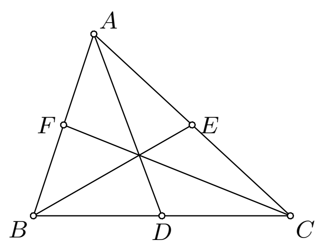
$$|k_1(k_2\vec{a})| = |k_1||k_2\vec{a}| = |k_1||k_2||\vec{a}| \quad \text{i} \quad |(k_1k_2)\vec{a}| = |k_1k_2||\vec{a}| = |k_1||k_2||\vec{a}|.$$

Stoga je $k_1(k_2\vec{a}) = (k_1k_2)\vec{a}$.

4° Budući da su vektori $1 \cdot \vec{a}$ i $\vec{a}$ istog smera i jednakih intenziteta, imamo da je $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. □

Primer

Primer 5.2. Dokazati da u ravni E^2 postoji trougao kojem su stranice podudarne sa medijanama zadatog trougla.



Sl. Primer 5.2

Rešenje. Neka su AD, BE, CF medijane zadatog $\triangle ABC$ zadatog u ravni E^2 (Sl. Primer 5.2). Pri tome je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Sabiranjem odgovarajućih strana nalazimo da je

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{o}.$$

Budući da su vektori $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ nekolinearni i da je njihov zbir nula vektor, u ravni E^2 postoji trougao kojem su stranice podudarne respektivno sa dužima AD, BE, CF. $\square$

Zadaci

Zadatak 5.1. Dokazati da za svake tri tačke A, B, C ravni E^2 važi relacija

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{o}.$$

Zadatak 5.2. Dokazati da za svaki konačan skup tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^3 važi relacija

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_mA_1} = \vec{o}.$$

Zadatak 5.3. Ako je O središte duži AB koja se nalazi u ravni E^2, dokazati da za svaku tačku $P \in E^2$ važi relacija $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PO}$.

Zadatak 5.4. Ako je O središte jednakostraničnog trougla ABC koji se nalazi u prostoru E^3, dokazati da za svaku tačku $P \in E^3$ važi relacija

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PO}.$$

Zadatak 5.5. Ako je O središte pravilnog m-tougla $A_1, \ldots, A_m$ koji se nalazi u prostoru E^3, dokazati da za svaku tačku $P \in E^3$ važi relacija

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_m} = m\overrightarrow{PO}.$$

Zadatak 5.6. Ako je O središte paralelograma $ABCD$ koji se nalazi u prostoru E^3, dokazati da za svaku tačku $P \in E^3$ važi relacija

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}.$$

Zadatak 5.7. Dokazati da četiri nekolinearne tačke A, B, C, D prostora E^3 određuju paralelogram $ABCD$ ako i samo ako za svaku tačku $P \in E^3$ važi relacija

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}.$$

Zadatak 5.8. Dokazati da četiri nekolinearne tačke A, B, C, D ravni E^2 određuju paralelogram $ABCD$ ako i samo ako je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Zadatak 5.9. Ako središta P, Q, R, S stranica AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$ u ravni E^2 ne pripadaju jednoj pravoj, dokazati da je četvorougao $PQRS$ paralelogram.

Zadatak 5.10. Dokazati da središta P, Q, R, S stranica AB, BC, CD, DA nekomplanarnog četvorougla $ABCD$ u prostoru E^3 određuju paralelogram $PQRS$.

Zadatak 5.11. Ako su M i N središta neparalelnih stranica AD i BC trapeza $ABCD$ u ravni E^2, dokazati da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Zadatak 5.12. Nad stranicama trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2 konstruisani su proizvoljni paralelogrami ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Dokazati da je

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{o}.$$

Zadatak 5.13. Ako su A, B, C, D četiri razne tačke ravni E^2 i P, Q, R, S, X, Y središta duži AB, BC, CD, DA, AC, BD, dokazati:

(a) da su vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{SR}$ među sobom jednaki;

(b) da duži PR, QS, XY imaju zajedničko središte.

5.3 Linearno zavisni i linearno nezavisni vektori

Linearne operacije nad vektorima omogućavaju uvođenje pojma linearno zavisnih i linearno nezavisnih vektora.

Definicija 5.3.1. Za sistem vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ kaže se da je *linearno zavisan* ako postoje brojevi $k_1, \ldots, k_m$, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \cdots + k_m\vec{a}_m = \vec{o} \qquad (*)$$

Ako takvi brojevi ne postoje, za sistem vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ kaže se da je *linearno nezavisan*.

Od svojstava koje se odnose na pojam linearne zavisnosti vektora ističemo najpre sledeću teoremu.

Teorema 5.3.1. Da bi sistem vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m (m > 1)$ bio linearno zavisan, potrebno je i dovoljno da se najmanje jedan od vektora tog sistema može linearno izraziti pomoću ostalih vektora tog sistema.

Dokaz. Utvrdimo najpre da je navedeni uslov potreban. Stoga pretpostavimo da je sistem vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ linearno zavisan, tj. da postoje brojevi $k_1, \ldots, k_m$ koji zadovoljavaju jednakost $(*)$ i nisu svi jednaki nuli. Ako je npr. $k_m \neq 0$, iz jednakosti $(*)$ nalazimo da je

$$\vec{a}_m = -\frac{k_1}{k_m}\vec{a}_1 - \frac{k_2}{k_m}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{k_{m-1}}{k_m}\vec{a}_{m-1}.$$

Da bi smo dokazali da je navedeni uslov dovoljan, pretpostavimo da se neki od vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ npr. vektor $\vec{a}_m$ može linearno izraziti pomoću ostalih vektora. Neka je

$$\vec{a}_m = l_1\vec{a}_1 + l_2\vec{a}_2 + \ldots + l_{m-1}\vec{a}_{m-1}.$$

Ako u ovoj jednakosti sve sabirke sa desne strane prenesemo na levu stranu dobijamo jednakost oblika $(*)$. $\square$

Iz ove teoreme neposredno sleduje da se iz sistema linearno nezavisnih vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ nijedan vektor ne može linearno izraziti pomoću ostalih vektora; štaviše, nijedan od tih vektora ne može biti nula vektor.

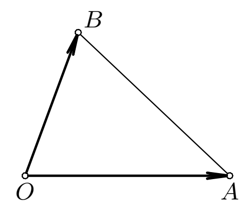
Razmotrimo sada geometrijski smisao linearne zavisnosti i linearne nezavisnosti nekog sistema vektora u prostoru E^n. Pre svega pomenimo da će sistem koji se sastoji iz samo jednog vektora biti linearno zavisan ako i samo ako je taj vektor nula vektor. Ako se sistem sastoji iz dvaju vektora, važi sledeća teorema.

Teorema 5.3.2. Da bi dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bila kolinearna potrebno je i dovoljno da oni budu linearno zavisni, tj. da postoji realan broj k takav da je $\vec{b} = k\vec{a}$.

Dokaz. Utvrdimo najpre da je navedeni uslov potreban. Stoga pretpostavimo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, tj. da je $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Pri tome su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istosmerni ili suprotnosmerni. U prvom slučaju pri $k = |\vec{a}| : |\vec{b}|$, a u drugom slučaju pri $k = -|\vec{a}| : |\vec{b}|$ imamo da je $\vec{b} = k\vec{a}$.

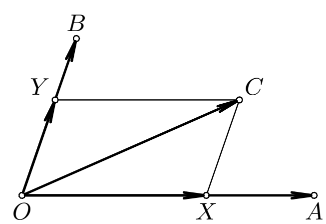
Da bi smo dokazali da je navedeni uslov dovoljan, pretpostavimo da postoji realan broj k takav da je $\vec{b} = k\vec{a}$. Iz definicije množenja vektora sa brojem sleduje da su vektori $\vec{a}$ i $k\vec{a}$, tj. vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. $\square$

Teorema 5.3.3. U ravni E^2 postoje dva linearno nezavisna vektora; svaka tri vektora te ravni su linearno zavisna.



Sl. 5.3.3(a)

Dokaz. Prema poznatom stavu, u ravni E^2 postoje tri nekolinearne tačke, obeležimo ih sa O, A, B (Sl. 5.3.3(a)). Pri tome su vektori $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ u ravni E^2 nekolinearni, i prema tome linearno nezavisni. Ovim smo dokazali da u ravni E^2 postoje dva vektora koji su među sobom linearno nezavisna.



Sl. 5.3.3(b)

Dokažimo sada da su svaka tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ravni E^2 međusobno linearno zavisna. Ako bi dva od tih vektora, npr. $\vec{a}$ i $\vec{b}$, bila među sobom paralelna, ta dva vektora bila bi među sobom linearno zavisna, te bi postojali realni brojevi k_a i k_b koji nisu istovremeno jednaki nuli pri čemu je $k_a\vec{a} + k_b\vec{b} = \vec{o}$. Stoga je

$$k_a\vec{a} + k_b\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{o},$$

te su i vetori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linearno zavisni.

Ako nikoja dva vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nisu među sobom paralelna, obeležimo sa O proizvoljnu tačku ravni E^2, sa A, B, C tačke takve da je $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ i sa X, Y tačke pravih OA, OB takve da je četvorougao $OXCY$ paralelogram

(Sl. 5.3.3(b)). S obzirom da su vektori $\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OY}$ kolinearni sa vektorima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, postoje brojevi x i y takvi da je $\overrightarrow{OX} = x\vec{a}$ i $\overrightarrow{OY} = y\vec{b}$. Otuda je

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

te su u ovom slučaju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linearno zavisni. □

Razmotrimo sada geometrijski smisao linearne zavisnosti i linearne nezavisnosti sistema koji se sastoji iz triju vektora prostora E^3. S tim u vezi dokažimo da važe sledeće dve teoreme.

Teorema 5.3.4. Da bi tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ prostora E^3 bila komplanarna, potrebno je i dovoljno da ta tri vektora budu među sobom linearno zavisna, tj. da postoje realni brojevi α, β, γ koji nisu istovremeno jednaki nuli pri čemu je

$$(*) \qquad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{o}.$$

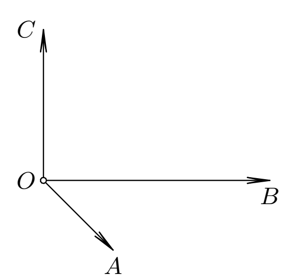
Dokaz. Utvrdimo najpre da je navedeni uslov potreban. Stoga pretpostavimo da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanarni. Na potpuno isti način kao u predhodnoj teoremi dokazuje se da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ među sobom linearno zavisni, tj. da postoje realni brojevi α, β, γ koji nisu istovremeno jednaki nuli i koji zadovoljavaju relaciju $(*)$.

Dokažimo da je navedeni uslov dovoljan. U tom cilju pretpostavimo da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ među sobom linearno zavisni, tj. da postoje realni brojevi α, β, γ koji nisu istovremeno jednaki nuli i koji zadovoljavaju relaciju $(*)$. Ako je npr. $\gamma \neq 0$ iz relacije $(*)$ nalazimo da je

$$\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{b} = \mu\vec{a} + \nu\vec{b}$$

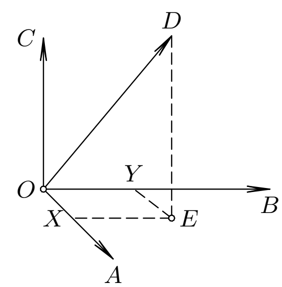
gde je $\mu = -\alpha/\gamma$ i $\nu = -\beta/\gamma$. Budući da vektor $\vec{c}$ predstavlja zbir dvaju vektora $\mu\vec{a}$ i $\nu\vec{b}$ koji su kolinearni sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su komplanarni. □

Teorema 5.3.5. U prostoru E^3 postoje tri vektora koji su među sobom linearno nezavisni; svaka četiri vektora tog prostora među sobom su linearno zavisna.



Sl. 5.3.5(a)

Dokaz. Prema poznatom stavu, u prostoru E^3 postoje četiri nekomplanarne tačke, obeležimo ih sa O, A, B, C (Sl. 5.3.5(a)). Pri tome su vektori $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ nekomplanarni i, prema tome, linearno nezavisni. Ovim smo dokazali da u prostoru E^3 postoje tri vektora koji su među sobom linearno nezavisna.



Sl. 5.3.5(b)

Dokažimo sad da su svaka četiri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ prostora E^3 među sobom linearno zavisna. Ako bi među tim vektorima postojava dva ili tri vektora koja su među sobom linearno zavisna. Obeležimo sa O proizvoljnu tačku prostora E^3 i sa A, B, C, D tačke takve da je

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{OD} = \vec{d}$$

(Sl. 5.3.5(a)). S obzirom da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linearno nezavisni, tačke O, A, B, C su nekomplanarne. Ako zatim obeležimo sa E tačku ravni OAB takvu da je $OC \parallel ED$ i sa X, Y tačke pravih OA i OB takve da je četvorougao $OXEY$ paralelogram, biće vektori $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{ED}$ kolinearni sa vektorma $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, te postoje i realni brojevi x, y, z takvi da je

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{a}, \quad \overrightarrow{OY} = y\vec{b}, \quad \overrightarrow{ED} = z\vec{d}.$$

Stoga je

$$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{ED} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

□

5.4 Lajbnicova vektorska funkcija. Baricentri sistema tačaka u prostoru E^n

U ovom odeljku razmatra se *sistem* sastavljen iz konačnog broja tačaka

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

prostora E^n ($n = 1$, 2, 3) kojima su respektivno pridruženi realni brojevi k_1, …, k_m. Takvi sistemi razmatraju se ne samo u geometriji već i u drugim naučnim oblastima. U mehanici se kaže da su u takvom sistemu tačke $A_1, \ldots, A_m$ opterećene masama čije se veličine izražavaju respektivno brojevima $k_1, \ldots, k_m$. Razmatranju ovakvih sistema u geometriji pristupa se uvođenjem tzv. Lajbnicove vektorske funkcije.

Definicija 5.4.1. *Lajbnicovom vektorskon funkcijom* sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^n kojima su respektivno pridruženi brojevi $k_1, \ldots, k_m$ nazivamo preslikavanje $f\colon E^n \to E^n$ određeno relacijom

$$f(P) = k_1\overrightarrow{PA_1} + \cdots + k_m\overrightarrow{PA_m}.$$

Teorema 5.4.1. Ako je f Lajbnicova vektorska funkcija sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^n kojima su respektivno pridruženi brojevi $k_1, \ldots, k_m$ tada za svake dve tačke P i Q prostora E^n važi relacija

$$f(P) = f(Q) + (k_1 + \cdots + k_m)\,\overrightarrow{PQ}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} f(P) &= k_1\,\overrightarrow{PA_1} + \cdots + k_m\,\overrightarrow{PA_m} \\ &= k_1\,(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_1}) + \cdots + k_m\,(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_m}) \\ &= k_1\,\overrightarrow{QA_1} + \cdots + k_m\,\overrightarrow{QA_m} + (k_1 + \cdots + k_m)\,\overrightarrow{PQ} \\ &= f(Q) + (k_1 + \cdots + k_m)\overrightarrow{PQ}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.4.2. Lajbnicova vektorska funkcija f sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^n kojima su respektivno pridruženi realni brojevi $k_1, \ldots, k_m$ takvi da je $k_1 + \cdots + k_m = 0$ predstavlja konstantu.

Dokaz. Ako obeležimo sa P i Q bilo koje dve tačke prostora E^n, prema prethodnoj teoremi imamo da je

$$f(P) = f(Q) + (k_1 + \cdots + k_m)\,\overrightarrow{PQ}.$$

Po pretpostavci je

$$k_1 + \cdots + k_m = 0,$$

pa je $f(P) = f(Q)$. Stoga je pri uslovu $k_1 + \cdots + k_m = 0$ Lajbnicova vektorska funkcija konstanta. □

Teorema 5.4.3. Lajbnicova vektorska funkcija f sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^n kojima su respektivno pridruženi brojevi $k_1, \ldots, k_m$ takvi da je $k_1 + \cdots + k_m \neq 0$ je bijektivna.

Dokaz. Svakoj tački $X \in E^n$ jednoznačno je korespondiran vektor $\vec{x} \in \overrightarrow{E^n}$ takav da je $f(x) = \vec{x}$. Ako obeležimo sa O fiksiranu tačku prostora E^n, prema teoremi 5.4.1 imamo da je

$$f(x) = f(O) + (k_1 + \cdots + k_m)\,\overrightarrow{XO} = \vec{x}.$$

Iz poslednjih jednakosti dobijamo relaciju

$$\overrightarrow{OX} = \frac{f(O) - \vec{x}}{k_1 + \cdots + k_m}$$

iz koje neposredno zaključujemo da je svaki vektor $\vec{x} \in \overrightarrow{E^n}$ slika samo jedne tačke $X \in E^n$. □

Iz ove teoreme neposredno sleduje da za sistem (A_1, k_1), (A_2, k_2), …, (A_m, k_m) u kojem brojevi k_1, …, k_m zadovoljavaju relaciju $k_1 + \cdots + k_m \neq 0$ postoji jedinstvena tačka $G \in E^n$ takva da je $f(G) = \vec{o}$, tj. da je

$$k_1\,\overrightarrow{GA_1} + \cdots + k_m\,\overrightarrow{GA_m} = \vec{o}.$$

Definicija 5.4.2. *Baricentrom* ili *težištem* sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka A_1, …, A_m prostora E^n kojima su respektivno pridruženi brojevi k_1, …, k_m takvi da je $k_1 + \cdots + k_m \neq 0$, nazivamo tačku $G \in E^n$ takvu da je

$$(*) \qquad f(G) = k_1\,\overrightarrow{GA_1} + \cdots + k_m\,\overrightarrow{GA_m} = \vec{o}.$$

Specijalno, ako je $k_i = 1$ za svako $i = 1, \ldots, m$ tada tačku G nazivamo *ekvibaricentrom* ili jednostavno *težištem skupa tačaka* A_1, …, A_m.

Nije teško ustanoviti da se baricentar G razmatranog sistema pomoću unapred fiksirane tačke O prostora E^n može odrediti relacijom

$$(**) \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{k_1\,\overrightarrow{OA_1} \cdots + k_m\,\overrightarrow{OA_m}}{k_1 + \cdots + k_m}.$$

Iz definicije neposredno sleduje da se baricentar sistema koji se sastoji iz samo jedne tačke poklapa sa tom tačkom. Ako se sistem sastoji iz dveju raznih tačaka A_1 i A_2 kojima su respektivno pridruženi realni brojevi k_1 i k_2 takvi da je $k_1 + k_2 \neq 0$, baricentar G tog sistema nalazi se na pravoj A_1A_2. Štaviše, ako je $k_1 > 0$ i $k_2 > 0$, tada se tačka G nalazi na duži (A_1A_2). Zaista, pod tim uslovima, iz relacije

$$k_1\,\overrightarrow{GA_1} + k_2\,\overrightarrow{GA_2} = \vec{o}$$

sledi da je

$$k_1\,\overrightarrow{GA_1} = -k_2\,\overrightarrow{GA_2}$$

Stoga su vektori $\overrightarrow{GA_1}$ i $\overrightarrow{GA_2}$ suprotnosmerni, te je $G \in (A_1A_2)$.

Teorema 5.4.4. Neka je G baricentar sistema tačaka $A_1, \ldots, A_m$ kojima su respektivno pridruženi brojevi $k_1, \ldots, k_m$. Ako su G_1 i G_2 baricentri komplementnih podskupova tačaka $A_1, \ldots, A_p$ i $A_{p+1}, \ldots, A_m$ kojima su pridruženi isti brojevi, tada se tačka G poklapa sa baricentrom skupa koji se sastoji iz tačaka G_1 i G_2 kojima su respektivno pridruženi brojevi $k_1 + \cdots + k_p$ i $k_{p+1} + \cdots + k_m$.

Dokaz. Prema definiciji težišta, imamo da je

$$k_1 \overrightarrow{GA_1} + \cdots + k_m \overrightarrow{GA_m} = \vec{o};$$

$$(k_1 + \cdots + k_p) \overrightarrow{GG_1} = k_1 \overrightarrow{GA_1} + \cdots + k_p \overrightarrow{GA_p};$$

$$(k_{p+1} + \cdots + k_m) \overrightarrow{GG_2} = k_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \cdots + k_m \overrightarrow{GA_m}.$$

Iz ovih triju jednakosti nalazimo da je

$$(k_1 + \cdots + k_p) \overrightarrow{GG_1} + (k_{p+1} + \cdots + k_m) \overrightarrow{GG_2} = \vec{o},$$

pa je tačka G baricentar skupa koji se sastoji iz tačaka G_1 i G_2 kojima su respektivno pridruženi brojevi $k_1 + \cdots + k_p$ i $k_{p+1} + \cdots + k_m$. □

Teorema 5.4.5. Baricentar G tačaka $A_1, \ldots, A_m$ kojima su respektivno pridruženi pozitivni brojevi $k_1, \ldots, k_m$ pripada svakoj konveksnoj figuri Φ koja sadrži tačke $A_1, \ldots, A_m$.

Dokaz. Ako je $m = 1$ i $m = 2$, tvrđenje sleduje neposredno. Dokažimo indukcijom da tvrđenje važi i za $m > 2$. U tom cilju pretpostavimo da svaka konveksna figura koja sadrži tačke $A_1, \ldots A_{m-1}$ sadrži i baricentar G tog skupa tačaka kojima su respektivno pridruženi brojevi $k_1, \ldots, k_{m-1}$. Prema definiciji težišta, imamo da je

$$k_1 \overrightarrow{GA_1} + \cdots + k_m \overrightarrow{GA_m} = \vec{o};$$

$$k_1 \overrightarrow{GA_1} + \cdots + k_m \overrightarrow{GA_{m-1}} = (k_1 + \cdots + k_{m-1}) \overrightarrow{GG'}.$$

Iz ovih dveju jednakosti nalazimo da je

$$(k_1 + \cdots + k_m - 1) \overrightarrow{GG'} + k_m \overrightarrow{GA_m} = \vec{o}.$$

Stoga je tačka G težište dveju tačaka G' i A_m kojima su respektivno pridruženi brojevi $k_1 + \cdots + k_{m-1}$ i k_m. Budući da su ti brojevi pozitivni, tačka G se nalazi između tačaka G' i A_m, naime biće $G \in (G'A_m)$. Po pretpostavci tačke G' i A_m pripadaju konveksnoj figuri Φ, te i tačka G pripada figuri Φ. □

Zadaci

Zadatak 5.14. Neka je u prostoru E^3 dat tetraedar $ABCD$. Ako su P, Q, R, P', Q', R' središta ivica AB, AC, AD, CD, DB, BC i G težište tog tetraedra, dokazati da je

$$\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = 2\overrightarrow{AG}.$$

Zadatak 5.15. Ako su (A, A') i (B, B') dva para tačaka prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$, zatim G i G' središta duži AB i $A'B'$, dokazati da je

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{GG'}.$$

Zadatak 5.16. Ako su (A, A'), (B, B') i (C, C') tri para tačaka prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ i G i G' težišta trojki A, B, C i A', B', C', dokazati da je

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Zadatak 5.17. Ako su (A_1, A_2'), (A_2, A_2'), $\ldots$, (A_m, A_m') parovi tačaka prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ i G i G' težišta m-torki $A_1, \ldots, A_m$ i $A_1', \ldots, A_m'$, dokazati da je

$$\overrightarrow{A_1A_1'} + \overrightarrow{A_2A_2'} + \cdots + \overrightarrow{A_mA_m'} = m\,\overrightarrow{GG'}.$$

Zadatak 5.18. Dokazati da dva tetraedra $ABCD$ i $A'B'C'D'$ u prostoru E^3 imaju zajedničko težište G ako i samo ako važi relacija

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{o}.$$

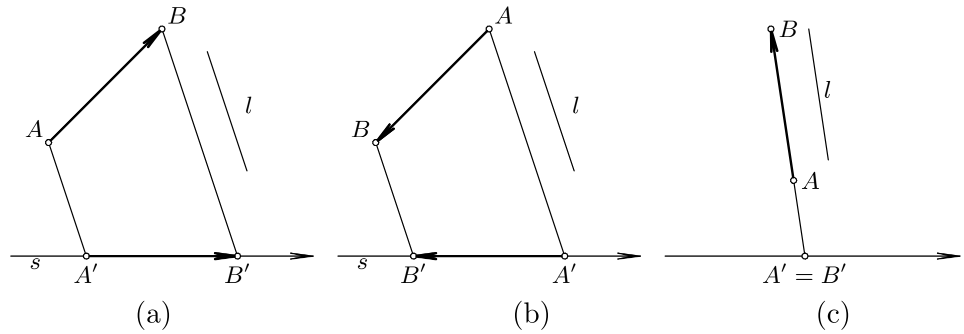
Zadatak 5.19. Dokazati da se težište G tetraedra $ABCD$ u prostoru E^3 poklapa sa težištem G' tetraedra $A'B'C'D'$ kojem su temena A', B', C', D' težišta trouglova BCD, CDA, DAB, ABC.

Zadatak 5.20. Neka su u prostoru E^3 zadate četiri razne tačke A, B, C, D. Ako su M i N središta duži AB i CD, dokazati da je

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right).$$

5.5 Paralelno projektovanje vektora na osu

U geometriji euklidske ravni mogu se razmatrati dve vrste paralelnih projekcija vektora na osu; to su tzv. paralelne vektor-projekcije i paralelne skalar-projekcije vektora na osu.



Sl. def. 5.5.1

Definicija 5.5.1. Neka su u ravni E^2 zadati: vektor $\overrightarrow{AB}$, osa s i prava l koja nije paralelna sa osom s (Sl. def. 5.5.1). *Parlelnom vektor-projekcijom* vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l nazivamo vektor $\overrightarrow{A'B'}$ određen tačkama A' i B' u kojima prave kroz tačke A i B uporedne sa pravom l seku osu s. *Paralelnom skalar-projekcijom* vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l nazivamo skalar kojem je apsolutna vrednost jednaka intenzitetu vektora $\overrightarrow{A'B'}$, a znak pozitivan ili negativan u zavisnosti od toga da li je vektor $\overrightarrow{A'B'}$ istosmeran ili suprotnosmeran sa osom s.

Iz definicije sleduje da paralelna skalar-projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s predstavlja broj koji može da bude pozitivan, negativan ili nula. Tako je na Sl. def. 5.5.1 predstavljen vektor $\overrightarrow{AB}$ kojem je paralelna skalar-projekcija

(a) pozitivna,

(b) negativna,

(c) jednaka nuli.

Paralelnu skalar-projekciju vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l simbolički obeležavamo sa

$$\mathrm{pr}_s^l\,\overrightarrow{AB}.$$

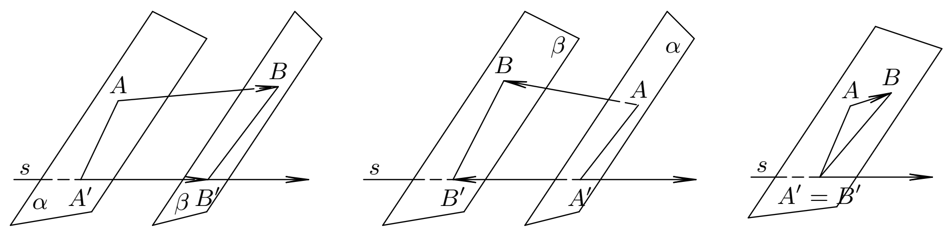
Ako je $\vec{e}$ jedinični vektor ose s, vektor-projekciju $\overrightarrow{A'B'}$ vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l možemo izraziti relacijom

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{e}\,\mathrm{pr}_s^l\,\overrightarrow{AB}.$$

U zavisnosti od toga da li je ugao što ga prava l zahvata sa osom s, kos ili prav, razlikujemo *kose* i *ortogonalne vektor-projekcije*, zatim *kose* i *ortogonalne skalar-projekcije*. Kada je reč o ortogonalnoj projekciji, nije potrebno isticati pravu l u odnosu na koju se izvodi projektovanje; ortogonalnu skalar-projekciju vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s simbolički obeležavamo sa

$$\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{AB}.$$

U geometriji euklidskog prostora mogu se razmatrati analogne vrste projekcije vektora na osu.



(a) (b) (c)

Sl. def. 5.5.2

Definicija 5.5.2. Neka su u prostoru E^3 zadati: vektor $\overrightarrow{AB}$, osa s i ravan λ koja nije paralelna sa osom s (Sl. def. 5.5.2). *Paralelnom vektor-projekcijom* vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na ravan λ nazivamo vektor $\overrightarrow{A'B'}$ određen tačkama A' i B' u kojima ravni kroz tačke A i B uporedne sa ravni λ seku osu s. *Paralelnom skalar-projekcijom* vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na ravan λ nazivamo skalar kojem je apsolutna vrednost jednaka intenzitetu vektora $\overrightarrow{A'B'}$, a znak pozitivan ili negativan u zavisnosti od toga da li je vektor $\overrightarrow{A'B'}$ istosmeran ili suprotnosmeran sa osom s.

Paralelna skalar-projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na ravan λ predstavlja broj koji može biti pozitivan, negativan ili nula. Tako je na Sl. def. 5.5.2 predstavljen vektor $\overrightarrow{AB}$ kojem je paralelna skalar-projekcija (a) pozitivna, (b) negativna, (c) jednaka nuli. Paralelna skalar-projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na ravan λ simbolički obeležavamo sa

$$\mathrm{pr}_s^\lambda \overrightarrow{AB}.$$

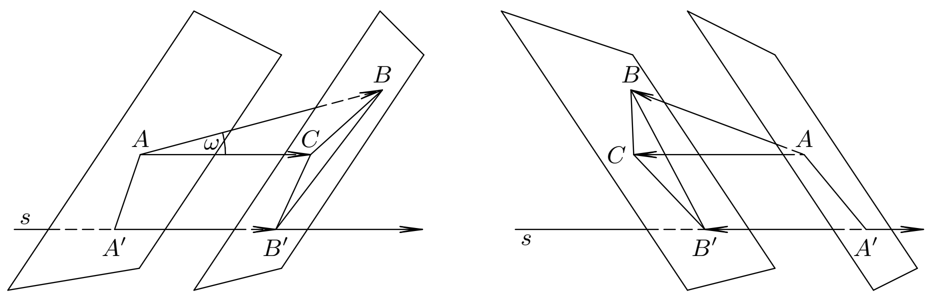
Ako je $\vec{e}$ jedinični vektor ose s i $\overrightarrow{A'B'}$ paralelna vektor-projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s u odnosu na ravan λ, imamo da je

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{e}\,\mathrm{pr}_s^\lambda \overrightarrow{AB}.$$

U zavisnosti od toga da li je ugao što ga ravan λ zahvata sa osom s kos ili prav, razlikujemo *kose* i *ortogonalne vektor-projekcije*, zatim *kose* i *ortogonalne skalar-projekcije*. Kada je reč o ortogonalnoj projekciji, nije potrebno isticati ravan λ u odnosu na koju se izvodi projektovanje. Kao i u euklidskoj ravni, ortogonalnu skalar-projekciju vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu s simbolički obeležavamo sa

$$\mathrm{pr}_s \overrightarrow{AB}.$$

Teorema 5.5.1. Ako vektor $\overrightarrow{AB}$ prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ zahvata sa osom $s \subset E^n$ ugao ω, tada je
$$\mathrm{pr}_s\, \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\omega.$$

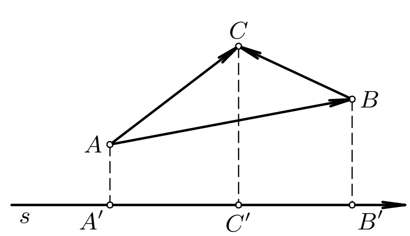


(a) (b)

Sl. 5.5.1

Dokaz. Ako je $\overrightarrow{AB} \parallel s$ ili $\overrightarrow{AB} \perp s$, tvrđenje sleduje neposredno. Razmotrimo sada slučaj kada je ugao ω oštar ili tup. U tom cilju obeležimo sa A' i B' podnožja upravnih iz tačaka A i B, na osu s i sa C tačku takvu da je $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AC}$. Pri tome tačke A, B, C određuju $\triangle ABC$ kojem je $\measuredangle C$ prav, a $\measuredangle A$ jednak ili suplementan sa uglom ω. U prvom slučaju vektor $\overrightarrow{A'B'}$ je istosmeran sa osom s (Sl. 5.5.1(a)), pa je
$$\mathrm{pr}_s\, \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \cos\omega.$$
U drugom slučaju vektor $\overrightarrow{A'B'}$ je suprotnosmeran sa osom s (Sl. 5.5.1(b)), te je po definiciji,
$$\mathrm{pr}_s\, \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{A'B'}| = -|\overrightarrow{AC}| = -|\overrightarrow{AB}| \cos(180^\circ - \omega) = |\overrightarrow{AB}| \cos\omega.$$
□

Teorema 5.5.2. Za svaka dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ prostora E^n $(n = 2, 3)$ i svaku osu $s \subset E^n$ važi relacija
$$\mathrm{pr}_s(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \mathrm{pr}_s\, \overrightarrow{AB} + \mathrm{pr}_s\, \overrightarrow{BC}.$$



Sl. 5.5.2

Dokaz. Ako obeležimo sa A', B', C' upravne projekcije tačaka A, B, C na pravoj s (Sl. 5.5.2) i sa $\vec{e}$ jedinični vektor ose s, imamo da je:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'C'} &= \vec{e}\,\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{AC} = \vec{e}\,\mathrm{pr}_s(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC});\\ \overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'} = \vec{e}(\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{AB}+\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{BC}).\end{aligned}$$

Iz ovih dveju jednakosti nalazimo da je

$$\mathrm{pr}_s\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\,\vec{e} = (\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{AB}+\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{BC})\,\vec{e}.$$

Da bi vektori koji sačinjavaju levu i desnu stranu ove jednakosti bili jednaki, moraju biti među sobom jednaki i skalarni množitelji sa leve i desne strane ove jednakosti, pa je

$$\mathrm{pr}_s\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{AB}+\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{BC}.$$

□

Teorema 5.5.3. Za svaki vektor $\overrightarrow{AB}$ prostora E^n, svaku osu s u tom prostoru i svaki realan broj k važi relacija

$$\mathrm{pr}_s(k\overrightarrow{AB}) = k\,\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{AB}.$$

Dokaz. Obeležimo sa ω ugao što ga vektor $\overrightarrow{AB}$ zahvata sa osom s. Ako je $k>0$, vektor $k\overrightarrow{AB}$ zahvata sa osom s takođe ugao ω, pa je u tom slučaju

$$\mathrm{pr}_s(k\overrightarrow{AB}) = |k\overrightarrow{AB}|\cos\omega = k|\overrightarrow{AB}|\cos\omega = k\,\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{AB}.$$

Ako je $k<0$, vektor $k\overrightarrow{AB}$ zahvata sa osom s ugao $180^\circ-\omega$, pa je

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_s(k\overrightarrow{AB}) &= |k\overrightarrow{AB}|\cos(180^\circ-\omega)\\ &= (-k|\overrightarrow{AB}|)(-\cos\omega)\\ &= k|\overrightarrow{AB}|\cos\omega\\ &= k\,\mathrm{pr}_s\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

□

5.6 Skalarni proizvod dva vektora

1. Sem operacije sabiranja vektora i množenja vektora sa brojem, na skupu vektora moguće je definisati i operaciju skalarnog množenja vektora.

Definicija 5.6.1. *Skalarnim* ili *unutrašnjim proizvodom* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ prostora E^n nazivamo broj koji je jednak proizvodu dužina a i b tih vektora i kosinusa ugla ω između njih. Na taj način imamo da je:

$$(*)\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) = ab\cos\omega$$

Iz definicije neposredno sleduje da skalarni proizvod dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ može da bude pozitivan, negativan ili jednak nuli. On je pozitivan ili negativan samo u slučaju kada je svaki od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nenulti, a ugao između njih oštar ili tup. Naprotiv, skalarni proizvod dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je nuli ako i samo ako važi najmanje jedna od relacija:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \omega = 90^\circ.$$

Imajući u vidu da se za smer nenultog vektora može uzeti bilo koji smer, relaciju $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ možemo smatrati uslovom ortogonalnosti ne samo nenultih već bilo kojih dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u prostoru E^n.

Napomenimo da se skalarni proizvod dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u prostoru E^n može izraziti i na drugi način. Ako obeležimo sa ω ugao tih dvaju vektora i sa a i b ose određene vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, biće

$$|\vec{a}|\cos\omega = \mathrm{pr}_b\,\vec{a} \quad \text{i} \quad |\vec{b}|\cos\omega = \mathrm{pr}_a\,\vec{b},$$

pa je

$$(**) \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,\mathrm{pr}_a\,\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{pr}_b\,\vec{a}.$$

Teorema 5.6.1. Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektori prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ i k realan broj, tada važe sledeće relacije:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3. $(k\,\vec{a}) \cdot \vec{b} = k\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$; jednakost važi samo u slučalju kada je $\vec{a}$ nula vektor.

Dokaz. 1° Ako obeležimo sa ω ugao određen vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, prema definiciji 5.6.1, imamo da je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\omega$$

i

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}|\,|\vec{a}|\cos\omega.$$

Poređenjem ovih jednakosti nalazimo da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2° Ako je $\vec{a} = \vec{o}$, tada važe relacije $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ iz kojih neposredno sledi da je

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Ako je $\vec{a} \neq \vec{o}$, obeležimo sa a osu određenu vektorom $\vec{a}$. Primenom obrasca $(**)$ i teoreme 5.5.2 nalazimo da je

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= |\vec{a}|\ \mathrm{pr}_a\,(\vec{b}+\vec{c})\\ &= |\vec{a}|\,(\mathrm{pr}_a\ \vec{b}+\mathrm{pr}_a\ \vec{c})\\ &= |\vec{a}|\ \mathrm{pr}_a\,\vec{b}+|\vec{a}|\ \mathrm{pr}_a\,\vec{c}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

3° Ako je $\vec{b} = \vec{o}$, tvrđenje sleduje neposredno. Ako je $\vec{b} \neq \vec{o}$, obeležimo sa b osu određenu vektorom $\vec{b}$. Primenom obrasca $(**)$ i teoreme 5.5.3 nalazimo da je

$$(k\,\vec{a})\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{pr}_b\,(k\,\vec{a}) = k\,|\vec{b}|\ \mathrm{pr}_b\,\vec{a} = k\,(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

4° Tvrđenje sleduje neposredno iz definicije 5.6.1. □

Napomena. Svojstva 1°, 2°, 3°, 4° iz ove teoreme nazivamo respektivno svojstvima *komutativnosti*, *distributivnosti*, *homogenosti* i *nenegativnosti*.

2. Skalarni proizvod dvaju vektora u prostoru E^n $(n = 1, 2, 3)$ omogućuje da pristupimo razmatranju bilinearnih metričkih svojstava proizvoljnih skupova tačaka zadatih u tom prostoru. Značajnu ulogu u tome ima tzv. Lajbnicova skalarna funkcija sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^n kojima su respektivno pridruženi realni brojevi $k_1, \ldots, k_m$.

Definicija 5.6.2. *Lajbnicovom sklarnom funkcijom* sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^n kojima su respektivno pridruženi realni brojevi $k_1, \ldots, k_m$, nazivamo preslikavanje $\Psi\colon E^n \to R$ određeno relacijom

$$\Psi(P) = k_1\,PA_1^2 + \cdots + k_m\,PA_m^2.$$

Teorema 5.6.2. Ako je Ψ Lajbnicova skalarna funkcija i f Lajbnicova vektorska funkcija sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^n kojima su respektivno pridruženi realni brojevi $k_1, \ldots, k_m$, tada za svake dve tačke P i Q prostora E^n važi relacija

$$\Psi(P) = \Psi(Q) + 2\,\overrightarrow{PQ}\,f(Q) + (k_1 + \cdots + k_m)\,PQ^2.$$

Dokaz. Saglasno definiciji Lajbnicove skalarne i vektorske funkcije, imamo da je

$$\begin{aligned}\Psi(P) &= k_1\,PA_1^2 + \cdots + k_m\,PA_m^2\\ &= k_1\,(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QA_1})^2 + \cdots + k_m\,(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QA_m})^2\\ &= \Psi(Q) + 2\,\overrightarrow{PQ}\,f(Q) + (k_1+\cdots+k_m)\,PQ^2.\end{aligned}$$

□

Teorema 5.6.3 (Lajbnic). Ako je Ψ Lajbnicova skalarna funkcija i G baricentar sistema sastavljenog iz konačnog broja tačaka $A_1, \ldots, A_m$ prostora E^n kojima su respektivno pridruženi realni brojevi $k_1, \ldots, k_m$ takvi da je $k_1 + \cdots + k_m \neq 0$, tada za svaku tačku $P \in E^n$ važi relacija

$$\Psi(P) = \Psi(G) + (k_1 + \cdots + k_m)\, PG^2.$$

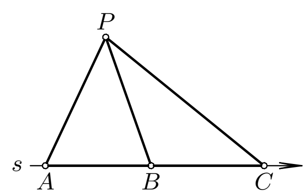
Dokaz. Koristeći definiciju Lajbnicove skalarne funkcije Ψ i baricentra, nalazimo da je

$$\begin{aligned} \Psi(P) &= k_1\, PA_1^2 + \cdots + k_m\, PA_m^2 \\ &= k_1\, (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA_1})^2 + \cdots + k_m\, (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA_m})^2 \\ &= \Psi(G) + (k_1 + \cdots + k_m)\, PG^2. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.6.4 (Stjuart). Ako su A, B, C tri tazne tačke orjentisane prave $s \subset E^n$, tada za svaku tačku $P \in E^n$ važi relacija:

$$\overline{BC}\ PA^2 + \overline{CA}\ PB^2 + \overline{AB}\ PC^2 + \overline{AB}\ \overline{BC}\ \overline{CA} = 0.$$



Sl. 5.6.4

Dokaz. Razmotrimo sistem sastavljen iz tačaka A, B, C, kojima se respektivno pridružuju realni brojevi $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. S obzirom da tačake A, B, C pripadaju jednoj osi, imamo da je

$$\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0.$$

Stoga je Lajbnicova vektorska funkcija f pomenutog sistema konstantna, pa je $f(P) = f(A)$. Nije teško dokazati da je $f(A)$ nula vektor. Zaista, ako obeležimo sa $\vec{e}$ jedinični vektor ose s, nalazimo da je (Sl. 5.6.4)

$$\begin{aligned} f(A) &= \overline{BC}\ \overrightarrow{AA} + \overline{CA}\ \overrightarrow{AB} + \overline{AB}\ \overrightarrow{AC} \\ &= \overline{CA}\ \overline{AB}\ \vec{e} + \overline{AB}\ \overline{AC}\ \vec{e} \\ &= \overline{AB}\ (\overline{CA} + \overline{AC})\, \vec{e} = \vec{o} \end{aligned}$$

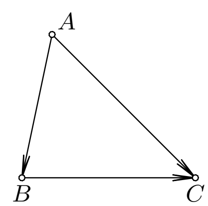
Primenom teoreme 5.6.2 nalazimo da se Lajbnicova skalarna funkcija Ψ razmatranog sistema može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \Psi(P) &= \Psi(A) + 2\,\overline{PA}\ f(A) = \Psi(A) \\ &= \overline{CA}\ AB^2 + \overline{AB}\ AC^2 \\ &= \overline{AB}\ \overline{CA}\ (AB + CA) \\ &= -\overline{AB}\ \overline{BC}\ \overline{CA}. \end{aligned}$$

□

Primeri

Primer 5.3. (Kosinusna teorema) Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako su a, b, c dužine stranica BC, CA, AB i ω mera ugla A, dokazati da je $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\omega$.



Sl. Primer 5.3

Rešenje. Koristeći relaciju $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (Sl. Primer 5.3) i svojstva skalarnog proizvoda dvaju vektora, nalazimo da je

$$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\omega.$$

□

Primer 5.4. Neka je dat konačan skup tačaka $A_1, \ldots, A_m$ ravni E^2 i konačan skup realnih brojeva $k_1, \ldots, k_m$ i l takvih da je $k_1 + \cdots + k_m \neq 0$. Odrediti skup Φ svih tačaka $P \in E^2$ za koje je

$$k_1\,PA_1^2 + \cdots + k_m\,PA_m^2 = l.$$

Rešenje. Ako obeležimo sa G baricentar sistema (A_1, k_1), (A_2, k_2), $\ldots$, (A_m, k_m), primenom Lajbnicove teoreme nalazimo da je

$$k_1\,PA_1^2 + \cdots + k_m\,PA_m^2 = k_1\,GA_1^2 + \cdots + k_m\,GA_m^2 + k\,PG^2$$

gde je $k = k_1 + \cdots + k_m$. Budući da je tačka G jednoznačno određena, zbir

$$k_1\,GA_1^2 + \cdots + k_m\,GA_m^2$$

obeležimo sa d. U tom slučaju imamo da je $l = d + k\,PG^2$, tj. $PG^2 = \frac{1}{k}(l-d)$. Prema znaku razlikujemo tri slučaja

1° Ako je $\frac{1}{k}(l-d) > 0$ skup Φ predstavlja krug kojem je središte tačka G, a poluprečnik $r = \sqrt{\frac{1}{k}(l-d)}$.

2° Ako je $\frac{1}{k}(l-d) = 0$ skup Φ se sastoji iz samo jedne tačke, to je tačka G.

3° Ako je $\frac{1}{k}(l-d) < 0$ biće $\Phi = \emptyset$.

□

Zadaci

Zadatak 5.21. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako je tačka A_1 središte stranice BC, dokazati da je

$$AA_1^2 = \frac{1}{4}\,(2\,AB^2 + 2\,AC^2 - BC^2).$$

Zadatak 5.22. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB, dokazati da je

$$AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = \frac{3}{4}\,(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Zadatak 5.23. Ako je G težište trougla $\triangle ABC$ koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da je

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Zadatak 5.24. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako je T težište, H ortocentar i O središte opisanog kruga tog trougla, dokazati da je

(a) $OT^2 = OA^2 - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$;

(b) $OH^2 = 9OA^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Zadatak 5.25. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako je T težište, H ortocentar i O središte opisanog i O_1 središte Ojlerovog kruga tog trougla, dokazati da je

(a) $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 3OA^2 + OH^2$;

(b) $AO_1^2 + BO_1^2 + CO_1^2 = 3OA^2 - 9TO_1^2$.

Zadatak 5.26. Ako je P proizvoljna tačka kruga opisanog oko jednakostraničnog $\triangle ABC$ koji se nalazi u ravni E^2, dokzati da je

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2AB^2.$$

Zadatak 5.27. Dokazati da kod svakog paralelograma $ABCD$ koji se nalazi u ravni E^2 važi relacija

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2.$$

Zadatak 5.28. Ako je u ravni E^2 dat pravougaonik $ABCD$, dokazati da za svaku tačku $P \in E^2$ važi relacija

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

Zadatak 5.29. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako je D tačka stranice BC takva da je $BD = 2DC$, dokazati da je

$$AB^2 + 2AC^2 = 3AD^2 + 6CD^2.$$

Zadatak 5.30. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako su X i Y tačke stranice BC takve da je $BX \cong XY \cong YC$, dokazati da je

$$AB^2 + AC^2 = AX^2 + AY^2 + 4XY^2.$$

Zadatak 5.31. Neka je u ravni E^2 dat pravilan petougao $ABCDE$. Ako je O središte kruga opisanog oko tog petougla, dokazati da je

$$AB^2 + AC^2 = 5OA^2.$$

Zadatak 5.32. Neka je u ravni E^2 dat četvorougao $ABCD$. Ako je G težište tog četvorougla i P bilo koja tačka njegove ravni, dokazati da je

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 4PG^2.$$

Zadatak 5.33. Neka je u ravni E^2 dat četvorougao $ABCD$. Ako su P i Q središta dijagonala AC i BD tog četvorougla, dokazati da je

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

Zadatak 5.34. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako je H ortocentar i O_1 središte Ojlerovog kruga tog trougla, dokazati da je tačka O_1 težište sistema sastavljenog od tačaka A, B, C, H.

Zadatak 5.35. Neka je u ravni E^2 dat tetivan četvorougao $ABCD$ kojem su dijagonale upravne među sobom. Ako je O središte kruga opisanog oko tog četvorougla, dokazati da je

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = 4OA^2.$$

Glava 6

Transformacije sličnosti i inverzija

6.1 Transformacije sličnosti prostora E^n

Izometrijske tranformacije prostora E^n predstavljaju samo specijalan slučaj mnogo opštijih transformacija tog prostora, tzv. transformacija sličnosti.

Definicija 6.1.1. Neka je k pozitivan realan broj. *Transformacijom sličnosti* sa koeficijentom k nazivamo bijektivnu transformaciju

$$\mathcal{P}\colon E^n \to E^n \ (n = 1, 2, 3)$$

koja prevodi svake dve tačke X, $Y \in E^n$ u tačke X', $Y' \in E^n$ takve da je

$$X'Y' = k\,XY.$$

Iz definicije neposredno sleduje da izometrijska transformacija prostora E^n predstavlja transformaciju sličnosti tog prostora kojoj je koeficijent sličnosti jednak jedinici.

Teorema 6.1.1. U transformaciji sličnosti $\mathcal{P}$ prostora E^n kolinearnim tačkama A, B, C odgovaraju kolinearne tačke A', B', C'. Štaviše,

$$\mathcal{B}(A, B, C) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}(A', B', C')$$

Dokaz. Ako je k koeficijent sličnosti transformacije $\mathcal{P}$, prema definiciji te transformacije imamo da je $A'B' = k\,AB$, $B'C' = k\,BC$, $A'C' = k\,AC$. Iz ovih jednakosti i relacije $\mathcal{B}(A, B, C)$ nalazimo da je

$$A'B' + B'C' = k\,AB + k\,BC = k\,(AB + BC) = k\,AC = A'C'$$

Stoga su i tačke A', B', C' kolinearne; štaviše, zadovoljavaju relaciju $\mathcal{B}(A', B', C')$. □

Teorema 6.1.2. U transformaciji sličnosti $\mathcal{P}$ prostora E^n kongruentnim parovima tačaka odgovaraju kongruentni parovi tačaka.

Dokaz. Neka su A, B, C, D četiri tačke prostora E^n takve da je $(A, B) \cong (C, D)$ i A', B', C', D' njihove odgovarajuće slike u transformaciji $\mathcal{P}$. Ako je k koeficijent te transformacije sličnosti, tada je $A'B' = k\, AB$ i $C'D' = k\, CD$. Stoga iz relacije $(A, B) \cong (C, D)$ sledi relacija $(A', B') \cong (C', D')$. □

Teorema 6.1.3. Skup svih transformacija sličnosti prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ predstavlja nekomutativnu grupu.

Dokaz. Neka su $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ bilo koje dve transformacije sličnosti prostora E^n. Ako obeležimo sa X i Y dve proizvoljne tačke prostora E^n, sa X_1, Y_1, X_2, Y_2 tačke određene relacijama

$$\mathcal{P}_1(X) = X_1, \quad \mathcal{P}_1(Y) = Y_1, \quad \mathcal{P}_2(X_1) = X_2, \quad \mathcal{P}_2(Y_1) = Y_2$$

i sa k_1, k_2 koeficijente sličnosti transformacija $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ imamo da je $X_1Y_1 = k_1\, XY$ i $X_2Y_2 = k_2\, X_1Y_1$, pa je $X_2Y_2 = k_1k_2\, XY$. Stoga kompozicija $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ predstavlja transformaciju sličnosti prostora E^n kojoj je koeficijent $k = k_1k_2$.

Ako je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti prostora E^n, biće i $\mathcal{P}^{-1}$ transformacija sličnosti tog prostora. Zaista, ako obeležimo sa k koeficijent sličnosti transformacije $\mathcal{P}$, tada svakom paru tačaka X, $Y \in E^n$ odgovara par tačaka X', $Y' \in E^n$ takvih da je $X'Y' = k\, XY$. Stoga je $XY = (1/k)\, X'Y'$, te je i $\mathcal{P}^{-1}$ transformacija sličnosti prostora E^n.

Budući da transformacije sličnosti prostora E^n predstavljaju elemente grupe svih transformacija prostora E^n, iz izvedenih osobina sleduje da skup svih transformacija sličnosti prostora E^n predstavlja grupu. Nekomutativnost te grupe sledi neposredno iz nekomutativnosti njene podgrupe $G(\mathcal{I})$ svih izometrijskih transformacija prostora E^n. □

Definicija 6.1.2. Grupu koja se sastoji iz svih transformacija sličnosti prostora E^n nazivamo *grupom transformacija sličnosti* tog prostora i simbolički obeležavamo sa $G(\mathcal{P})$.

Nije teško ustanoviti da transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ prostora E^n prevodi jednako orijentisane likove u jednako orijentisane likove, a suprotno orijentisane likove u suprotno orijentisane likove. Stoga smo u mogućnosti da razlikujemo dve vrste transformacija sličnosti prostora E^n, to su *direktne transformacije sličnosti* koje ne menjaju orijentaciju tog prostora i *indirektne transformacije sličnosti* koje menjaju njegovu orijentaciju. Jasno je da kompozicija dveju direktnih ili dveju indirektnih transformacija sličnosti uvek predstavlja direktnu transformaciju sličnosti, a da kompozicija dveju transformacija sličnosti od kojih je jedna direktna, a druga indirektna uvek predstavlja indirektnu transformaciju sličnosti. To svojstvo omogućuje da ustanovimo da skup svih direktnih transformacija sličnosti prostora

E^n predstavlja podgrupu $G(\mathcal{P})$ svih transformacija sličnosti tog prostora. Tu podgrupu nazivamo *grupom direktnih transformacija sličnosti* prostora E^n i simbolički obeležavamo sa $G(\mathcal{P}^+)$.

6.2 Homotetija prostora E^n

Daljem proučavanju transformacija sličnosti prostora E^n prethodi uvođenje jedne specifične klase tih transformacija koje nazivamo homotetijama tog prostora.

Definicija 6.2.1. Neka je O proizvoljna tačka prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ i k realan broj različit od nule. *Homotetijom* sa središtem O i koeficijentom k nazivamo transformaciju

$$\mathcal{H}_{O,k}\colon E^n \to E^n \ (n = 1, 2, 3)$$

koja svaku tačku $X \in E^n$ prevodi u tačku $X' \in E^n$ takvu da je $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$.

Iz definicije neposredno sleduje da je $\mathcal{H}_{O,k}$ prostora E^n bijektivna transformacija i da je jednoznačno određena središtem O i koeficijentom k. Štaviše, iz definicije neposredno sleduje da homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ prostora E^n za $k \neq 1$ ima jedinstvenu invarijantnu tačku — to je tačka O, da za $k = 1$ predstavlja koincidenciju, a za $k = -1$ centralnu refleksiju $\mathcal{S}_O$.

Teorema 6.2.1. Homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ prostora E^n predstavlja transformaciju sličnosti tog prostora kojoj je koeficijent sličnosti $k' = |k|$.

Dokaz. Ako obeležimo sa X i Y bilo koje dve tačke prostora E^n, a sa X' i Y' njihove odgovarajuće tačke, imamo da je $\overrightarrow{OX'} = k\,\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OY'} = k\,\overrightarrow{OY}$. Primenom ovih jednakosti nalazimo da je

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k\,\overrightarrow{OY} - k\,\overrightarrow{OX} = k\,(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = k\,\overrightarrow{XY}$$

Stoga je $|\overrightarrow{X'Y'}| = |k|\,|\overrightarrow{XY}|$, i prema tome $X'Y' = |k|\,XY$. Iz ove jednakosti sledi da je homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ transformacija sličnosti sa koeficijentom $k' = |k|$. $\square$

Teorema 6.2.2. Ako je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti prostora E^n kojoj je koeficijent k, i O fiksirana tačka tog prostora, tada postoje dve i samo dve izometrijske transformacije prostora E^n takve da je

$$\mathcal{P} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{H}_{O,k} \quad \text{i} \quad \mathcal{P} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}_2$$

Dokaz. Ako u transformaciji $\mathcal{P}$ dvema raznim tačkama P, $Q \in E^n$ odgovaraju respektivno tačke P', $Q' \in E^n$, a u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tačkama P, $Q \in E^n$ odgovaraju respektivno tačke P'', $Q'' \in E^n$, biće $P'Q' = k\,PQ$ i $P''Q'' = k\,PQ$, pa je $P'Q' \cong P''Q''$. Pri tome, kompozicija $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1}$ prevodi svake dve tačke P'', $Q'' \in E^n$ respektivno u tačke P', $Q' \in E^n$, te predstavlja neku izometrijsku transformaciju $\mathcal{I}_1$. Iz jednakosti $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1} = \mathcal{I}_1$ sledi da je $\mathcal{P} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{H}_{O,k}$. Drugi deo teoreme dokazuje se analognim postupkom. $\square$

Teorema 6.2.3. Neka je $\mathcal{H}_{O,k}$ homotetija prostora E^n. Ako je n paran broj, tada homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ predstavlja direktnu transformaciju sličnosti; ako je n neparan broj, tada homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ predstavlja direktnu ili indirektnu transformaciju sličnosti u zavisnosti od toga da li je $k > 0$ ili $k < 0$.

Dokaz. Razmotrimo najpre slučaj kada je $n = 2$. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ dvema tačkama P i Q nekolinearnim s tačkom O odgovaraju respektivno tačke P' i Q', tada za $k > 0$ uglu POQ odgovara taj isti ugao $P'OQ'$, a za $k < 0$ uglu POQ odgovara njemu centralnosimetričan ugao $P'OQ'$. U oba slučaja uglu POQ odgovara njemu istosmeran ugao $P'OQ'$. Iz te osobenosti neposredno zaključujemo da u toj homotetiji svakom uglu odgovara njemu istosmeran ugao, pa je homotetija ravni E^2 direktna transformacija sličnosti.

Pretpostavimo da je $n = 3$. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ trima tačkama P, Q, R nekomplanarnim s tačkom O odgovaraju respektivno tačke P', Q', R', tada za $k > 0$ triedru $O(PQR)$ odgovara taj isti triedar $O(P'Q'R')$, a za $k < 0$ triedru $O(PQR)$ odgovara njemu centralnosimetričan triedar $O(P'Q'R')$. Stoga homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ za $k > 0$ ne menja, a za $k < 0$ menja orijentaciju prostora E^3. □

Teorema 6.2.4. Skup $\mathcal{H}_O$ svih homotetija prostora E^n ($n = 1, 2, 3$) koje imaju zajedničko središte O predstavlja komutativnu grupu.

Dokaz. Neka su $\mathcal{H}_{O,k_1}$ i $\mathcal{H}_{O,k_2}$ bilo koje dve homotetije iz skupa $\mathcal{H}_O$. Ako obeležimo sa X proizvoljnu tačku prostora E^n i sa X_1, X_2 tačke takve da je $\mathcal{H}_{O,k_1}(X) = X_1$ i $\mathcal{H}_{O,k_2}(X_1) = X_2$, biće $\overrightarrow{OX_1} = k_1\,\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OX_2} = k_2\,\overrightarrow{OX_1}$, pa je $\overrightarrow{OX_2} = k_1k_2\,\overrightarrow{OX}$. Stoga je $\mathcal{H}_{O,k_2} \circ \mathcal{H}_{O,k_1} = \mathcal{H}_{O,k}$, gde je $k = k_1k_2$.

Ako je $\mathcal{H}_{O,k}$ homotetija iz skupa $\mathcal{H}_O$, biće i $\mathcal{H}^{-1}_{O,k}$ homotetija iz skupa $\mathcal{H}_O$. Zaista, ako obeležimo sa X proizvoljnu tačku prostora E^n i sa X' tačku takvu da je $\mathcal{H}_{O,k}(X) = X'$, imamo da je $\overrightarrow{OX'} = k\,\overrightarrow{OX}$, pa je $\overrightarrow{OX} = (1/k)\,\overrightarrow{OX'}$, i prema tome $\mathcal{H}^{-1}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,1/k}$.

Budući da homotetije iz skupa $\mathcal{H}_O$ predstavljaju elemente grupe $G(\mathcal{P})$ svih transformacija sličnosti prostora E^n, iz dokazanih svojstava sleduje da skup $\mathcal{H}_O$ predstavlja podgrupu grupe $G(\mathcal{P})$. Komutativnost ustanovljene grupe sleduje neposredno iz definicije homotetije. □

Definicija 6.2.2. Grupu koja se sastoji iz svih homotetija prostora E^n sa zajedničkim središtem O nazivamo *grupom homotetija sa središtem* O i simbolički obeležavamo sa $G(\mathcal{H}_O)$.

Teorema 6.2.5. Ako su $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ i $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ dve homotetije prostora E^n sa raznim središtima O_1 i O_2 tada je

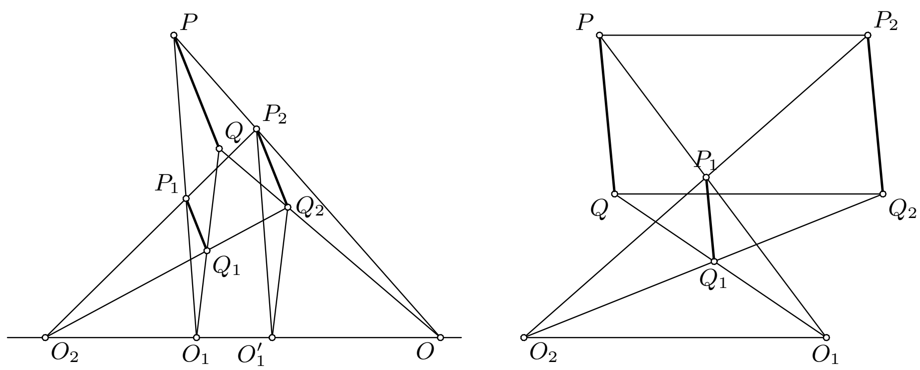
$$\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} = \begin{cases} \mathcal{H}_{O,k} & \text{ako je } k_1k_2 \neq 1; \\ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP_2}} & \text{ako je } k_1k_2 = 1. \end{cases}$$

U prvom slučaju biće $k = k_1k_2$ i O tačka prave O_1O_2 takva da je

$$O_1O : OO_2 = (k_2 - 1) : k_2(k_1 - 1),$$

a u drugom slučaju biće

$$PP_2 \parallel O_1O_2 \quad \text{i} \quad PP_2 = (1 - k_2)\, O_1O_2.$$



(a) (b)

Sl. 6.2.5

Dokaz. Ako obeležimo sa P i Q dve razne tačke prostora E^n, sa P_1 i Q_1 tačke koje u homotetiji $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ odgovaraju tačkama P i Q, a sa P_2 i Q_2 tačke koje u homotetiji $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ odgovaraju tačkama P_1 i Q_1, biće $P_1Q_1 \parallel PQ$ i $P_2Q_2 \parallel P_1Q_1$, pa je $P_2Q_2 \parallel PQ$. Sem toga je $P_1Q_1 = k_1 PQ$ i $P_2Q_2 = k_2 P_1Q_1$, pa je $P_2Q_2 = k\, PQ$, gde je $k = k_1k_2$. Stoga se za $k \neq 1$ prave PP_2 i QQ_2 seku u nekoj tački O (Sl. 6.2.5(a)), dok su za $k = 1$ prave PP_2 i QQ_2 među sobom paralelne (Sl. 6.2.5(b)). Primenom teoreme 5.2.2, nalazimo da je u ovim slučajevima respektivno

$$\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} = \mathcal{H}_{O,k} \quad \text{i} \quad \mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP_2}}.$$

U prvom slučaju biće tačke O, O_1, O_2 kolinearne. Zaista, ako obeležimo sa O_1' tačku koja u homotetiji $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ odgovara tački O_1, tada u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tački O_1 odgovara tačka O_1'. Stoga su trojke tačaka O_2, O_1, O_1' i O, O_1, O_1' kolinearne, pa su kolinearne i tačke O, O_1, O_2. Odredimo i vrednost razmere $O_1O : OO_2$. S obzirom da je O invarijantna tačka homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$, biće

$$\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1}(O) = O \quad \text{tj.} \quad \mathcal{H}_{O_1,k_1}(O) = \mathcal{H}_{O_2,\frac{1}{k_2}}(O) = O'.$$

Iz ovih jednakost i relacije $\overrightarrow{O_1O'} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O'}$ nalazimo da je

$$k_1\, \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OO_2} + \frac{1}{k_2}\, \overrightarrow{O_2O}, \quad \text{pa je} \quad \frac{\overrightarrow{O_1O}}{\overrightarrow{OO_2}} = \frac{k_2 - 1}{k_2(k_1 - 1)}.$$

U drugom slučaju biće $k_1 = 1/k_2$, pa je $O_1P_1 : O_1P = O_2P_1 : O_2P_2$, dakle i $PP_2 \parallel O_2O_1$. Stoga je $PP_2 : O_1O_2 = P_1P : P_1O_1$, i prema tome

$$\overrightarrow{PP_2} = (1 - \frac{1}{k_1})\, \overrightarrow{O_1O_2} = (1 - k_2)\, \overrightarrow{O_1O_2}.$$

□

Teorema 6.2.6. Ako je $\mathcal{H}_{O,k}$ homotetija i $\mathcal{I}$ izometrijska transformacija prostora E^n, tada je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{\mathcal{I}(O),k}.$$

Dokaz. Neka u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tački $X \in E^n$ odgovara tačka $X' \in E^n$, a u izometriji $\mathcal{I}$ tačkama O, X, $X' \in E^n$ odgovaraju respektivno tačke O_1, X_1, X_1'. S obzirom da je $\overrightarrow{OX'} = k\,\overrightarrow{OX}$, biće i $\overrightarrow{O_1X_1'} = k\,\overrightarrow{O_1X_1}$. Na taj način, u kompoziciji

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1}$$

svakoj tački $X_1 \in E^n$ odgovara tačka $X_1' \in E^n$ takva da je $\overrightarrow{O_1X_1'} = k\,\overrightarrow{O_1X_1}$. Stoga je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{\mathcal{I}(O),k}.$$

□

Teorema 6.2.7. Homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ i izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n su komutativne transformacije ako i samo ako je središte O homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$ invarijantna tačka izometrije $\mathcal{I}$, drugim rečima biće

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I} \iff \mathcal{I}(O) = O.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{O,k}.$$

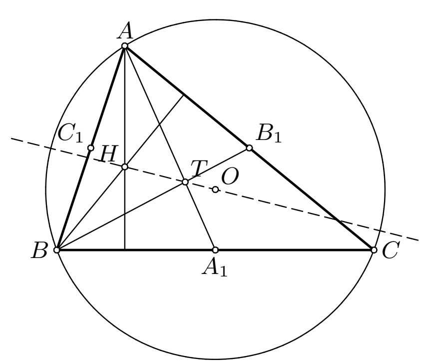
Iz ove jednakosti i prethodne teoreme neposredno sleduje da je $\mathcal{I}(O) = O$. Obratno, ako je $\mathcal{I}(O) = O$, prema prethodnoj teoremi imamo da je

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{O,k} \quad \text{tj.} \quad \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}.$$

□

Primer

Primer 6.1 (Ojler, 1765). Dokazati da ortocentar H, težište T i središte O opisanog kruga $\triangle ABC$ zadatog u ravni E^2 pripadaju jednoj pravoj pri čemu je $\overrightarrow{HT} : \overrightarrow{TO} = 2 : 1$.



Sl. Primer 6.1

Rešenje. Ako obeležimo sa A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, prema poznatom stavu imamo da je (Sl. Primer 6.1) $\mathcal{H}_{T,-\frac{1}{2}}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$. Iz ove jednakosti sleduje da u homotetiji $\mathcal{H}_{T,-\frac{1}{2}}$ ortocentru H trougla ABC odgovara ortocentar H_1 trougla $A_1B_1C_1$. No $H_1 = O$, pa su tačke H, T i O kolinearne i štaviše $\overrightarrow{HT} : \overrightarrow{TO} = 2 : 1$. □

Napomena. Pravu koja sadrži ortocentar H, težište T i središte O opisanog kruga trougla u ravni E^2 nazivamo *Ojlerovom pravom* tog trougla.

Zadaci

Zadatak 6.1. Dokazati da su dve homotetije $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ i $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ prostora E^n komutativne transformacije ako i samo ako je $O_1 = O_2$; drugim rečima biće

$$\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} = \mathcal{H}_{O_1,k_1} \circ \mathcal{H}_{O_2,k_2} \iff O_1 = O_2$$

Zadatak 6.2. Ako su $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ i $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ dve homotetije prostora E^n sa raznim središtima O_1 i O_2, dokazati da kompozicija

$$\mathcal{P} = \mathcal{H}_{O_1,k_1} \circ \mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O_1,k_1} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O_2,k_2}$$

predstavlja translaciju duž prave O_1O_2.

Zadatak 6.3. Date su u prostoru E^n tri tačke O, P, Q i realan broj $k \neq 1$. Dokazati da svaka od kompozicija

$$\mathcal{P} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}} \circ \mathcal{H}_{O,k} \quad \text{i} \quad \mathcal{P} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$$

predstavlja homotetiju sa koeficijentom k i da su središta O_1 i O_2 tih homotetija određena relacijama

$$\overrightarrow{OO_1} = -\frac{1}{k-1}\overrightarrow{AB} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OO_2} = -\frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB}.$$

Zadatak 6.4. Date su dve homotetije $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ i $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ prostora E^n. Konstruisati invarijantne tačke kompozicija

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} \quad \text{i} \quad \mathcal{P}_2 = \mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O_2,k_2}.$$

Zadatak 6.5. Date su tri homotetije $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$, $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$, $\mathcal{H}_{O_3,k_3}$ prostora E^n. Konstruisati invarijantne tačke funkcije

$$\mathcal{P} = \mathcal{H}_{O_3,k_3} \circ \mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1}.$$

Zadatak 6.6. Neka su ravni E^2 dati $\triangle ABC$ i prava s koja ne sadrži nijedno teme tog trougla a seče prave BC, CA, AB u tačkama P, Q, R. Ako je pri tome $BP : PC = p$, $CQ : QA = q$, $AR : RB = r$, dokazati da kompozicija

$$\mathcal{P} = \mathcal{H}_{R,r} \circ \mathcal{H}_{Q,q} \circ \mathcal{H}_{P,p}$$

predstavlja izometrijsku transformaciju.

Zadatak 6.7. Date su u ravni E^2 dve prave p i q, dve duži m i n, i tačka S. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku S i seče prave p i q u tačkama P i Q takvim da je
$$SP : PQ = m : n.$$

Zadatak 6.8. Date su u ravni E^2 tri konkurentne prave p, q, r, dve duži m, n i tačka S. Kontruisati pravu s koja sadrži tačku S i seče prave p, q, r u tačkama P, Q, R takvim da je $PQ\colon QR = m : n$.

Zadatak 6.9. Date su u ravni E^2 tri prave p, q, r, dve tačke $P \in p$ i $Q \in q$ i dve duži m, n. Kontruisati pravu s koja je paralelna s pravom r i koja seče prave p, q u tačkama X, Y takvim da je $PX\colon QY = m : n$.

Zadatak 6.10. Date su u ravni E^2 dve prave p, q, dve tačke $P \in p$, $Q \in q$ i tri duži l, m, n. Konstruisati pravu s koja seče prave p i q u tačkama X i Y takvim da je
$$XY \cong l \quad \text{i} \quad PX : QY = m : n.$$

Zadatak 6.11. Date su u ravni E^2 dve prave p, q, dve tačke $P \in p$, $Q \in q$ i tri duži l, m, n. Konstruisati pravu s koja seče prave p i q u tačkama X i Y takvim da je
$$PX : XY : YQ = l : m : n.$$

Zadatak 6.12. Date su u ravni E^2 pet pravih p, q, r, s, t i dve duži m, n. Konstruisati pravu x koja je paralelna s pravom t i koja seče prave p, q, r, s respektivno u tačkama P, Q, R, S takvim da je $PQ : RS = m : n$.

Zadatak 6.13. Data su u ravni E^2 dva kruga k_1, k_2, koja se seku u dvema tačkama P, Q i dve duži m, n. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku P i seče krugove k_1 i k_2 u tačkama X i Y takvim da je $PX : XY = m : n$.

Zadatak 6.14. Date su u ravni E^2 dve prave a, b i tačka P. Konstruisati krug koji sadrži tačku P i dodiruje prave a, b.

Zadatak 6.15. Date su u ravni E^2 dve razne prave a, b, i krug l. Konstruisati krug koji dodiruje prave a, b i krug l.

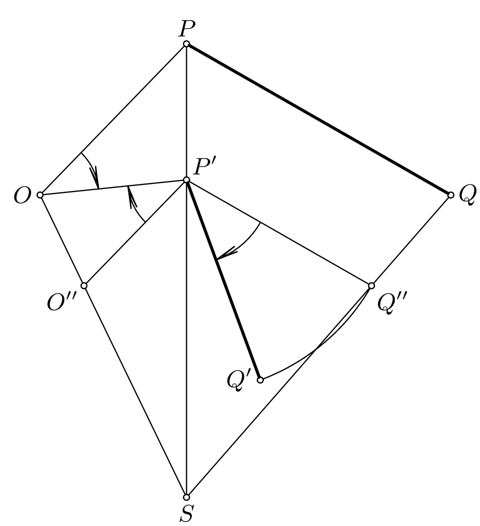
Zadatak 6.16. Date su u ravni E^2 dve prave p, q, dve duži m, n i tačka S. Konstruisati dva kruga k_1 i k_2 koji se među sobom dodiruju u tački S, kojima su poluprečnici srazmerni dužima m i n, i od kojih prvi dodiruje pravu p a drugi pravu q.

6.3 Predstavljanje transformacija sličnosti ravni E^2 u kanonskom obliku

Teoremom 6.2.2 ustanovili smo da se svaka transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2, kojoj je koeficijent sličnosti $k \neq 1$, može na beskonačno mnogo načina predstaviti kao kompozicija jedne homotetije i jedne izometrijske transformacije te ravni. Transformacije iz kojih je sastavljena ta kompozicija u opštem slučaju nisu komutativne. Naš cilj biće da u ovom odeljku transformaciju sličnosti $\mathcal{P}$ predstavimo u obliku kompozicije sastavljene iz dveju komutativnih transformacija od kojih jedna predstavlja homotetiju, a druga izometrijsku transformaciju. Takvo predstavljanje transformacije sličnosti, nazivaćemo *kanonskim.* Da bi se dokazala mogućnost takvog predstavljanja, neophodno je najpre ustanoviti da transformacija sličnosti ravni E^2, kojoj je koeficijent sličnosti $k \neq 1$, poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku.

Teorema 6.3.1. Svaka direktna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 kojoj je koeficijent sličnosti $k \neq 1$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku.

Dokaz. Najpre ustanovimo da transformacija $\mathcal{P}$ ne može da ima dve ili više raznih invarijantnih tačaka. Ako bi transformacija $\mathcal{P}$ imala dve razne invarijantne tačke O_1 i O_2, tada bi koeficijent sličnosti $k = O_1O_2 : O_1O_2$ bio jednak jedinici, što je pretpostavkom isključeno. Stoga transformacija $\mathcal{P}$ ne može da ima dve ili više invarijantnih tačaka. Pristupimo dokazu egzistencije invarijantne tačke.



Sl. 6.3.1

Neka u transformaciji sličnosti $\mathcal{P}$ dvema raznim tačkama P i Q odgovaraju tačke P' i Q'. Ako je pri tome $P = P'$ ili $Q = Q'$, tvrđenje sledi neposredno. Razmotrimo slučaj kada je $P \neq P'$ i $Q \neq Q'$ (Sl. 6.3.1). Neka je $\mathcal{H}_{S,k}$ homotetija ravni E^2 u kojoj tački P odgovara tačka P', a $\mathcal{R}_{P',\omega}$ centralna rotacija ravni E^2 u kojoj tački $Q'' = \mathcal{H}_{S,k}(Q)$ odgovara tačka Q'. U tom slučaju imamo da je

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}_{P',\omega} \circ \mathcal{H}_{S,k}.$$

Ako pretpostavimo da transformacija $\mathcal{P}$ poseduje invarijantnu tačku O i obeležimo sa O'' tačku takvu da je $\mathcal{H}_{S,k}(O) = O''$, biće $\measuredangle Q''P'Q' \cong \measuredangle O''P'O \cong \measuredangle POP'$. Stoga tačka O zadovoljava relacije

$$(*) \qquad \measuredangle POP' \cong \omega \quad \text{i} \quad P'O : PO = k$$

Nije teško ustanoviti da postoji tačka O koja zadovoljava obe relacije $(*)$. Prepuštamo čitaocu da to tvrđenje dokaže sam. Dokažimo da je $\mathcal{P}(O) = O$. Ako obeležimo sa O'' takvu da je $\mathcal{H}_{S,k}(O) = O''$, biće

$$SP' : SP = SO'' : SO \Longrightarrow O''P' \parallel OP \Longrightarrow \measuredangle POP' \cong \measuredangle O''PO \cong \omega.$$

Sem toga, iz relacija $P'O'' : PO = k$ i $P'O : PO = k$ sledi da je $P'O'' \cong P'O$, pa je

$$\mathcal{R}_{P',\omega}(O'') = O.$$

Stoga je $\mathcal{P}(O) = O$. □

Definicija 6.3.1. Jedinstvenu invarijantnu tačku direktne transformacije sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2, kojoj je koeficijent $k \neq 1$, nazivano *središtem* ili *centrom sličnosti* te transformacije.

Teorema 6.3.2. Svaka direktna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2, koja ne predstavlja izometriju niti homotetiju, može se na dva i samo dva različita načina predstaviti kao kompozicija dveju komutativnih transformacija od kojih jedna predstavlja homotetiju a druga izometriju.

Dokaz. Da bi se transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ mogla predstaviti kao kompozicija dveju komutativnih transformacija od kojih jedna predstavlja homotetiju, a druga izometriju, prema teoremi 6.2.7, potrebno je i dovoljno da središte te homotetije bude invarijantna tačka te izometrije, i prema tome transformacije $\mathcal{P}$. Budući da transformacija $\mathcal{P}$ sa koeficijentom $k \neq 1$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku O, postoje dve i samo dve homotetije $\mathcal{H}^{-1}_{O,k}$ i $\mathcal{H}^{-1}_{O,-k}$ ravni E^2 takve da kompozicije

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O,k} \quad \text{i} \quad \mathcal{P} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O,-k}$$

predstavljaju izometrijske transformacije. Obe te izometrije su direktne sa invarijantnom tačkom O, te predstavljaju centralne rotacije, obeležimo ih sa $\mathcal{R}_{O,\omega}$ i $\mathcal{R}_{O,\omega'}$. Pri tome su uglovi ω i ω' suplementni i suprotnosmerni, te znajući jednu od tih rotacija — znamo i drugu. Na taj način imamo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \quad \text{i} \\ \mathcal{P} &= \mathcal{R}_{O,\omega'} \circ \mathcal{H}_{O,-k} = \mathcal{H}_{O,-k} \circ \mathcal{R}_{O,\omega'}. \end{aligned}$$

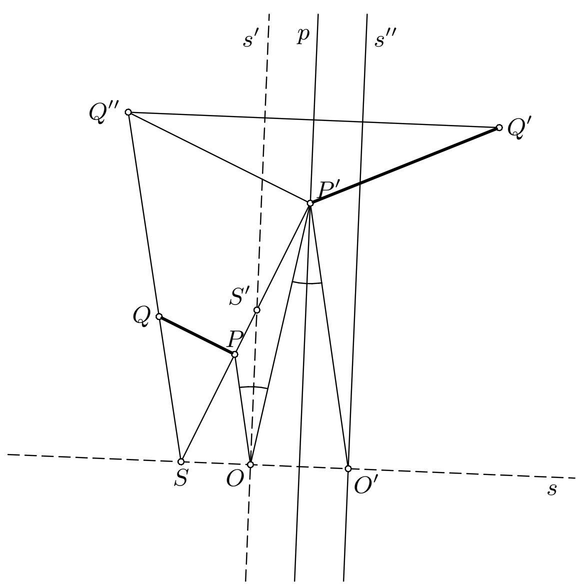
□

Definicija 6.3.2. Reprezentacije ustanovljene prethodnom teoremom nazivamo *kanoničkim reprezentacijama* transformacije $\mathcal{P}$. Onu od tih reprezentacija u kojoj homotetija ima pozitivan koeficijent nazivamo *prvom* ili *neposrednom kanoničkom reprezentacijom*; onu od tih reprezentacija u kojoj homotetija ima negativan koeficijent nazivamo *drugom* ili *posrednom kanoničkom reprezentacijom* transformacije $\mathcal{P}$. Tačku O, ugao ω i broj k nazivamo respektivno *središtem*, *uglom* i *koeficijentom sličnosti* transformacije $\mathcal{P}$.

Iz definicije neposredno sleduje da je direktna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 jednoznačno određena ako su joj poznati središte, ugao i koeficijent sličnosti. Stoga takvu transformaciju simbolički obeležavamo sa $\mathcal{P}_{O,\omega,k}$.

Teorema 6.3.3. Svaka indirektna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 kojoj je koeficijent sličnosti $k \neq 1$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku i dve invarijantne prave koje se seku u invarijantnoj tački pod pravim uglom.

Dokaz. Kao prilikom dokazivanja teoreme 6.3.1, ustanovljuje se da transformacija $\mathcal{P}$ ne može da ima dve ili više raznih invarijantnih tačaka. Dokažimo da transformacija $\mathcal{P}$ poseduje invarijantnu tačku i dve invarijantne prave koje se seku u toj tački pod pravim uglom.



Sl. 6.3.3

Neka u transformaciji sličnosti $\mathcal{P}$ dvema raznim tačkama P i Q odgovaraju respektivno tačke P' i Q', pri čemu je $P \neq P'$ i $Q \neq Q'$ (Sl. 6.3.3). Ako obeležimo sa $\mathcal{H}_{S,k}$ homotetiju ravni E^2 u kojoj tački P odgovara tačka P', a sa $\mathcal{S}_p$ osnu refleksiju u kojoj tački $\mathcal{H}_{S,k}(Q) = Q''$ odgovara tačka Q', biće $P'Q' \cong P'Q''$, pa je $P' \in p$. S obzirom da svaka od dveju indirektnih transformacija $\mathcal{P}$ i $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{S,k}$ ravni E^2 prevodi P i Q u tačke P' i Q', one su istovetne, naime biće

$$\mathcal{P} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{S,k}.$$

Ako pretpostavimo da transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ poseduje invarijantnu tačku O i ako obeležimo sa O' tačku da je $\mathcal{H}_{S,k}(O) = O'$, biće $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{S,k}(O) = O$, tj. $\mathcal{S}_p(O') = O$, pa je prava p medijatrisa duži OO', i prema tome tačka O na pravoj s koja sadrži tačku S a upravna je na pravoj p. Neka je S_1 tačka prave PP', takva da je $S'P' : S'P = -k$. Iz relacije $P'S' : S'P = P'O : PO$ sledi da je prava s' određena tačkama O i S' simetrala ugla POP'. Kako su uglovi POP' i $O'P'O$ naizmenični sa paralelnim kracima OP i $O'P'$, simetrale s' i p tih uglova među sobom su paralelene, pa je $s' \perp s$. Na taj način, ako postoji invarijantna tačka O transformacije $\mathcal{P}$, ona se nalazi u presku dveju pravih s i s' određenih relacijama $S \in s \perp p \quad \text{i} \quad S' \in s' \parallel p$.

Obratno, ako su s i s' prave određene relacijama $S \in s \perp p$ i $S' \in s' \parallel p$, biće tačka $O = s \cap s'$ invarijantna u transformaciji $\mathcal{P}$. Zaista, iz relacije $s \perp s'$ sleduje da tačka O pripada krugu l kojem je duž SS' prečnik, pa je $OP' : OP = k$. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{S,k}$ tački O odgovara tačka O', biće $O'P' : OP = k$, pa je $OP' \cong O'P'$, i prema tome $\mathcal{S}_p(O') = O$. Stoga je i $\mathcal{P}(O) = O$.

Transformacija $\mathcal{P}$ poseduje dve invarijantne prave; to su prave s i s'. Zaista, iz relacija $\mathcal{H}_{S,k}(s) = s$ i $\mathcal{S}_p(s) = s$ sledi da je $\mathcal{P}(s) = s$. Ako je s'' prava određena relacijama $O' \in s'' \parallel p$, biće $\mathcal{H}_{S,k}(s') = s''$ i $\mathcal{S}_p(s'') = s'$, pa je i $\mathcal{P}(s') = s'$. □

Definicija 6.3.3. Jedinstvenu invarijantnu tačku O indirektne transformacije sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 kojoj je koeficijent $k \neq 1$ nazivamo *središtem* ili *centrom* dotične transformacije sličnosti. Invarijantne prave s i s' nazivamo *osama* te transformacije sličnosti.

Teorema 6.3.4. Svaka indirektna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 kojoj je koeficijent $k \neq 1$ može se na dva i samo dva različita načina predstaviti kao kompozicija dveju komutativnih transformacija od kojih jedna predstavlja homotetiju, a druga izometriju.

Dokaz. Da bi se transformacija $\mathcal{P}$ mogla predstaviti kao kompozicija dveju komutativnih transformacija od kojih jedna predstavlja homotetiju a druga izometriju, prema teoremi 6.2.7 potrebno je i dovoljno da središte te homotetije bude invarijantna tačka te izometrije, i prema tome transformacije $\mathcal{P}$. Budući da transformacija $\mathcal{P}$ poseduje jedinstvenu invarijantnu tačku O, postoje dve i samo dve homotetije $\mathcal{H}^{-1}_{O,k}$ i $\mathcal{H}^{-1}_{O,-k}$ ravni E^2 takve da kompozicije $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O,k}$ i $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}^{-1}_{O,-k}$ predstavljaju izometrijske transformacije. Obe te izometrije su indirektne sa invarijantnom tačkom O, te predstavljaju osne refleksije $\mathcal{S}_s$ i $\mathcal{S}_{s'}$ ravni E^2 kojima ose s i s' sadrže tačku O. Te ose jedine su invarijantne prave transformacije $\mathcal{P}$, prema tome, one su istovetne sa osama te transformacije. Na taj način imamo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{S}_s \quad i \\ \mathcal{P} &= \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{H}_{O,-k} = \mathcal{H}_{O,-k} \circ \mathcal{S}_{s'}. \end{aligned}$$

□

Definicija 6.3.4. Reprezentacije ustanovljene ovom teoremom nazivamo *kanoničkim reprezentacijama indirektne transformacije sličnosti* $\mathcal{P}$ ravni E^2. Onu od tih reprezentacija u kojoj homotetija ima pozitivan koeficijent nazivamo *prvom* ili *neposrednom kanoničkom reprezentacijom*; onu od tih reprezentacija u kojoj homotetija ima negativan koeficijent nazivamo *drugom* ili *posrednom kanoničkom reprezentacijom* transformacije $\mathcal{P}$. Tačku O, pravu s i broj k nazivamo respektivno *središtem*, *osom* i *koeficijentom sličnosti* transformacije $\mathcal{P}$.

Iz definicije neposredno sleduje da je indirektna transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ ravni E^2 jednoznačno određena ako su joj poznati središte O, osa s, i koeficijent k sličnosti. Stoga takvu transformaciju simbolički obeležavamo sa $\mathcal{P}_{O,s,k}$.

6.4 Sličnost likova u prostoru E^n

Transformacija sličnosti prostora E^n omogućuje da na skupu tog prostora ustanovimo relaciju sličnosti likova.

Definicija 6.4.1. Kaze se da je u prostoru E^n (n=1, 2, 3) lik Φ *sličan* sa likom Φ' i simbolički obeležava sa $\Phi \sim \Phi'$ ako postoji transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ prostora E^n takva da je $\mathcal{P}(\Phi) = \Phi'$. Invarijantnu tačku O transformacije sličnosti $\mathcal{P}$ kojoj je koeficijent sličnosti $k \neq 1$ nazivamo *središtem* ili *centrom sličnosti* likova Φ i Φ'.

Od svojstava kojima se odlikuje relacija sličnosti geometrijskih likova izvodimo najvažnija; to su nam svojstva izražena narednom teoremom.

Teorema 6.4.1. Relacija sličnosti likova u prostoru E^n (n=1, 2, 3) predstavlja relaciju ekvivalencije.

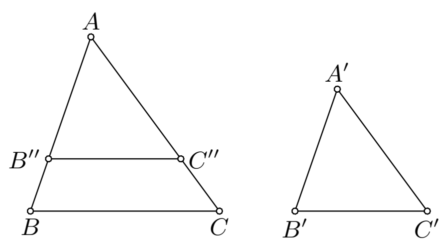
Dokaz. S obzirom da identična transformacija prostora E^n predstavlja izometrijsku transformaciju tog prostora, a izometrijska transformacija tog prostora predstavlja transformaciju sličnosti, za svaki lik Φ prostora E^n imamo da je $\Phi \sim \Phi$. Stoga je relacija sličnosti likova refleksivna.

Ako su Φ i Φ' dva lika prostora E^n takva da je $\Phi \sim \Phi'$, tada po definiciji 6.4.1 postoji transformacija sličnosti prostora E^n takva da je $\mathcal{P}(\Phi) = \Phi'$. S obzirom da je racipročna transformacija $\mathcal{P}^{-1}$ takođe transformacija sličnosti prostora E^n, iz jednakosti $\mathcal{P}^{-1}(\Phi') = \Phi$ sledi da je $\Phi' \sim \Phi$, pa je relacija sličnosti likova simetrična.

Ako su Φ, Φ', Φ'' tri lika prostora E^n takva da je $\Phi \sim \Phi'$ i $\Phi' \sim \Phi''$, tada po definiciji 6.4.1 postoje transformacije sličnosti $\mathcal{P}'$ i $\mathcal{P}''$ prostora E^n takve da je $\mathcal{P}'(\Phi) = \Phi'$ i $\mathcal{P}''(\Phi') = \Phi''$. S obzirom da kompozicija $\mathcal{P} = \mathcal{P}'' \circ \mathcal{P}'$ predstavlja takođe transformaciju sličnosti prostora E^n, iz jednakosti $\mathcal{P}(\Phi) = \mathcal{P}'' \circ \mathcal{P}'(\Phi) = \Phi''$ sledi da je $\Phi \sim \Phi''$, pa je relacija sličnosti tranzitivna. $\square$

S obzirom da je relacija sličnosti geometrijskih likova relacija ekvivalencije, ona omogućuje razvrstavanje skupa svih likova prostora E^n na klase ekvivalencije. Jasno je da takvih klasa ima beskonačno mnogo. Primera radi navodimo klase sličnih trouglova, klase sličnih četvorouglova, klase sličnih poligona, klase sličnih poliedara, itd. Elementi iste klase sličnih likova u prostoru E^n imaju isti oblik, tj. formu. Uslovi iz kojih se ustanovljuje da neka dva lika Φ i Φ' prostora E^n imaju istu formu, odnosno da su među sobom slični, nisu uvek dati na idealan način transformacijom sličnosti $\mathcal{P}\colon E^n \to E^n$ koja lik Φ prevodi na lik Φ'. Ti uslovi se i kod najjednostavnijih likova kao što su trouglovi mogu izraziti na više načina. Radi ilustracije, a i zbog česte primene prilikom dokazivanja raznih geometrijskih tvrđenja, izvedimo postojeća četiri stava sličnosti trouglova.

Teorema 6.4.2. Dva trougla u prostoru E^n $(n = 2, 3)$ su slična ako su dve stranice jednog trougla srazmerne sa odgovarajućim stranicama drugog trougla, a uglovi zahvaćeni tim stranicama podudarni (*I stav sličnosti trouglova*).



Sl. 6.4.2

Dokaz. Neka su u prostoru E^n data dva trougla ABC i $A'B'C'$ takva da je $A'B'\colon AB = A'C'\colon AC$ i $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ (Sl. 6.4.2). Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ tačkama B i C odgovaraju respektivno tačke B'' i C'', biće $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$. Stoga postoji izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n koja prevodi tačke A, B'', C'' respektivno u tačke A', B', C'. Pri tome, u transformaciji sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ tačkama A, B, C odgovaraju respektivno tačke A', B', C', pa je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. □

Teorema 6.4.3. Dva trougla su u prostoru E^n $(n = 2, 3)$ slična ako su dva ugla jednog trougla podudarna sa odgovarajućim uglovima drugog trougla (*II stav sličnosti trouglova*).

Dokaz. Neka su u prostoru E^n data dva trougla ABC i $A'B'C'$ takva da je $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ i $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ (Sl. 6.4.2). Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ prostora E^n, gde je $k = A'B'\colon AB$, tačkama B i C odgovaraju tačke B'' i C'', biće $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$ te postoji izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n u kojoj tačkama A, B'', C'' odgovaraju tačke A', B', C'. Pri tome, u transformaciji sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ tačkama A, B, C odgovaraju respektivno tačke A', B', C', pa je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. □

Teorema 6.4.4. Dva trougla u prostoru E^n $(n = 2, 3)$ su slična ako su sve stranice jednog trougla srazmerne sa odgovarajućim stranicama drugog trougla (*III stav sličnosti trouglova*).

Dokaz. Neka su u prostoru E^n data dva trougla ABC i $A'B'C'$ takva da je $A'B'\colon AB = B'C'\colon BC = C'A'\colon CA = k$ (Sl. 6.4.2). Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ prostora E^n tačkama B i C odgovaraju tačke B'' i C'', biće $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$.

Stoga postoji izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n koja prevodi tačke A, B'', C'' respektivno u tačke A', B', C'. $\square$

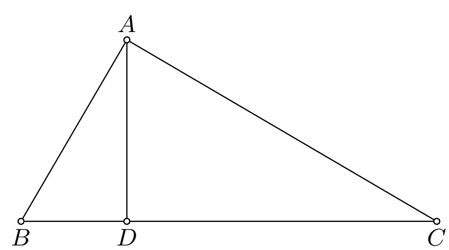
Teorema 6.4.5. Dva trougla u prostoru E^n $(n = 2, 3)$ su slična ako su dve stranice jednog trougla srazmerne sa odgovarajućim stranicama drugog trougla, uglovi naspram dveju od tih odgovarajućih stranica su podudarni, a naspram drugih dveju od tih odgovarajućih stranica su oba oštra, oba prava ili oba tupa (*IV stav sličnosti trouglova*).

Dokaz. Neka su u prostoru E^n data dva trougla ABC i $A'B'C'$ takva da je $A'B' \colon AB = A'C' \colon AC = k$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, a uglovi C i C' oba oštra, oba prava ili oba tupa. Ako u homotetiji $\mathcal{H}_{A,k}$ tačkama B i C odgovaraju respektivno tačke B'' i C'', biće $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$. Stoga postoji izometrija $\mathcal{I}$ prostora E^n koja prevodi tačke A, B'', C'' respektivno u tačke A', B', C'. Na taj način, transformacija sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ H_{A,k}$ prostora E^n prevodi tačke A, B, C respektivno u tačke A', B', C', pa je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. $\square$

Relacija sličnosti trouglova nalazi čestu primenu u rešavanju raznovrsnoh geometrijskih zadataka. Narednim primerima ilustrovaćemo samo neke od tih primena.

Primeri

Primer 6.2 (Pitagora, VI v. pre n. e.). Zbir kvadrata kateta pravouglog trougla u ravni E^n jednak je kvadratu njegove hipotenuze.



Sl. Primer 6.2

Rešenje. Neka je u ravni E^n dat $\triangle ABC$ kojem je $\measuredangle A$ prav (Sl. Primer 6.2). Ako obelezimo sa D podnožje visine iz temena A, biće $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ i $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ pa je

$$AB : BC = BD : AB \quad \text{i} \quad AC : BC = CD : AC$$

i, prema tome,

$$AB^2 = BC \cdot BD \quad \text{i} \quad AC^2 = BC \cdot CD.$$

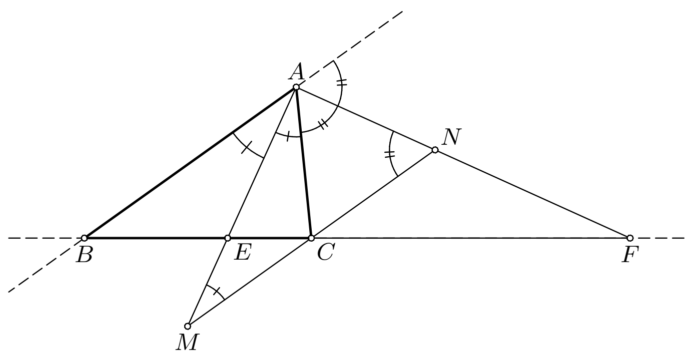
Sabiranjem odgovarajućih strana ovih jednakosti nalazimo da je

$$AB^2 + AC^2 = BC.$$

□

Primer 6.3. Ako su E i F tačke u kojima simetrale unutršnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC, dokazati da je

$$BE\colon CE = BF\colon CF = AB\colon AC$$



Sl. Primer 6.3

Rešenje. Ako obeležimo sa M i N tačke u kojima prava kroz tačku C uporedna sa pravom AB seče prave AE i AF (Sl. Primer 6.3) biće $\measuredangle MAC \cong \measuredangle AMC$ i $\measuredangle NAC \cong \measuredangle ANC$, pa je $MC \cong AC$ i $NC \cong AC$. Sem toga je $\triangle ABE \sim \triangle MCE$ i $\triangle ABF \sim NCF$, pa je

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{MC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{i} \quad \frac{BF}{CF} = \frac{AB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

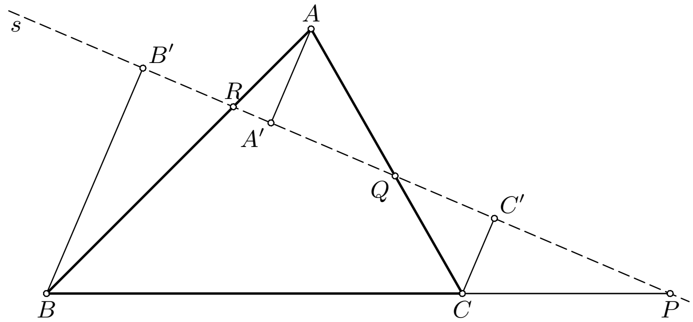
□

Primer 6.4 (Menelaj, I vek n.e). Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Dokazati da tačke P, Q, R koje se nalaze respektivno na pravama BC, CA, AB i različite su od temena $\triangle ABC$ pripadaju jednoj pravoj ako i samo ako

$$(*) \qquad \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

Rešenje. Pretpostavimo najpre da tačke P, Q, R pripadaju nekoj pravoj s. Budući da prava s ne sadrži ni jedno teme $\triangle ABC$, tačke P, Q, R su na produženjima stranica BC, CA, AB ili se dve nalaze na stranicama, a treća na produženju. Stoga su sva tri odnosa na levoj strani relacije $(*)$ negativna ili su dva odnosa pozitivna dok je treći negativan, pa je i proizvod tih odnosa negativan. Ako obeležimo sa A', B', C' podnožja upravnih iz tačaka A, B, C na pravoj s (Sl. Primer 6.4), biće

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{CC'}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{AA'}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{BB'}} = -1.$$



Sl. Primer 6.4

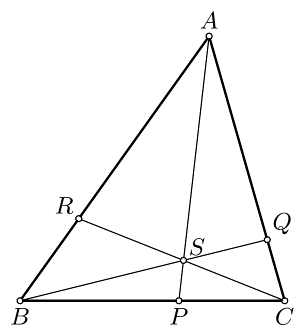
Obratno, pretpostavimo li da važi relacija $(*)$ i da prava PQ seče pravu AB u tački R', tada prema dokazanom delu imamo da je

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = -1.$$

Stoga je $\overrightarrow{AR} \colon \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AR'} \colon \overrightarrow{R'B}$ i, prema tome, $R' = R$. $\square$

Primer 6.5 (Đ. Čeva, 1678). Neka je u ravni E^n dat $\triangle ABC$. Dokazati da prave određene temenima A, B, C i tačkama P, Q, R koje se nalaze na pravama BC, CA, AB pripadaju jednom pramenu ako i samo ako je

$$(*) \qquad \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$



Sl. Primer 6.5

Rešenje. Pretpostavimo najpre da se prave AP, BQ, CR seku u nekoj tački S, (Sl. Primer 6.5). Primenom Menelajeve teoreme najpre za $\triangle ABP$ i pravu RC, zatim $\triangle ACP$ i pravu BQ, nalazimo da je

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}} \cdot \frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1; \quad \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SP}} = -1.$$

Množenjem odgovarajućih strana ovih jednakosti nalazimo da je $(*)$.

Obratno, ako važi relacija $(*)$ i ako prava određena tačkama A i $S = BQ \cap CR$ seče pravu BC u tački P', prema dokazanom delu ove teoreme imamo da je

$$\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1,$$

pa je $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP'} : \overrightarrow{P'C}$, i prema tome $P' = P$. S obzirom da Menelajeva teorema važi i kada je neki od odnosa na levoj strani jednak -1, Čevina teorema važi i za slučaj kada su prave AP, BQ, CR među sobom paralelne. □

Zadaci

Zadatak 6.17. Ako je E tačka u kojoj simetrala ugla A seče stranicu BC trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da središta S i S_a upisanih krugova tog trougla koji dodiruju stranicu BC zadovoljavaju relaciju

$$AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC.$$

Zadatak 6.18. Ako je F tačka u kojoj simetrala spoljašnjeg ugla A seče pravu određenu stranicom BC trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da središta S_b i S_c spolja upisanih krugova koji dodiruju stranice CA i AB zadovoljavaju relacije

$$AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AB - AC) : BC.$$

Zadatak 6.19. Neka je u ravni E^2 dat paralelogram $ABCD$. Ako su E i F tačke u kojima krug opisan oko $\triangle ABC$ seče prave AD i CD, dokazati da je $\triangle EBC \sim \triangle EFD$.

Zadatak 6.20. Neka su u ravni E^2 dati krug k i van kruga k tačka S. Ako su P i Q dodirne tačke tangenata iz S na krugu k, a X i Y presečne tačke neke prave s kroz S sa krugom k, dokazati da je $XP : YP = XQ : YQ$.

Zadatak 6.21. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$ i na stranici BC tačka D. Ako su O_1 i O_2 središta krugova opisanih oko trouglova ABD i ACD, dokazati da je $\triangle ABC \sim \triangle AO_1O_2$

Zadatak 6.22. Neka je u ravni E^2 dat prav ugao POQ. Ako obeležimo sa A proizvoljnu tačku poluprave OP i sa B, C, D tačke poluprave OQ takve da je

$$\mathcal{B}(O, B, C, D) \quad \text{i} \quad OA \cong OB \cong BC \cong CD,$$

dokazati da je $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.

Zadatak 6.23. Neka je u ravni E^2 dat paralelogram $ABCD$. Ako su P, Q, R tačke u kojima proizvoljna prava kroz tačku A seče prave BC, CD, BD, dokazati da je $AR^2 = PR \cdot QR$.

Zadatak 6.24. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako je t tangenta u tački A na krugu l opisanom oko $\triangle ABC$ i D tačka prave AC takva da je $BD \parallel t$, dokazati da je $AB^2 = AC \cdot AD$.

Zadatak 6.25. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$ kojem je $\measuredangle A$ prav. Ako upravna kroz proizvoljnu unutrašnju tačku hipotenuze BC seče prave AC i AB u tačkama Q i R, a opisani oko $\triangle ABC$ u tački S, dokazati da je $PS^2 = PQ \cdot PR$.

Zadatak 6.26. Ako prava određena visinom AD trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2 dodiruje opisani krug tog trougla, dokazati da je $AD^2 = BD \cdot CD$.

Zadatak 6.27. Ako su A, B, C tri razne tačke nekog kruga k koji se nalazi u ravni E^2, a B' i C' podnožja upravnih iz tačaka B i C na pravoj t koja u tački A dodiruje krug k, dokazati da je visina AD trougla ABC određena obrascem $AD^2 = BB' \cdot CC'$.

Zadatak 6.28. Ako su M i N tačke u kojima prava kroz presek O dijagonala AC i BD uporedna sa osnovicama AB i CD trapeza $ABCD$ koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da je tačka O središte duži MN.

Zadatak 6.29. Ako su AB i CD osnovice jednakokrakog trapeza $ABCD$ opisanog oko kruga poluprečnika r koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da je $AB \cdot CD = 4r^2$.

Zadatak 6.30. Ako je kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 zbir ili razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao i ako je r poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, dokazati da je
$$AB^2 + BC^2 = 4r^2.$$

Zadatak 6.31. Ako je D podnožje visine iz temena A trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da je zbir ili razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao ako i samo ako je
$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2}.$$

Zadatak 6.32. Ako su tačke P i Q na kracima AD i BC trapeza $ABCD$, koji se nalazi u ravni E^2, takve da je $AP\colon PD = BQ\colon QC = m\colon n$, dokazati da je
$$PQ = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}.$$

Zadatak 6.33. Neka je T težiste $\triangle ABC$ koji se nalazi u ravni E^2 i s bilo koja prava u toj ravni. Ako su A', B', C', T' podnožja upravnih iz tačaka A, B, C, T na pravoj s, dokazati da je
$$\overrightarrow{TT'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$$

Zadatak 6.34. Dokazati da je kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 simetrala spoljašnjeg ugla A i simetrale unutrašnjih uglova B i C seku prave određene naspramnim stranicama u kolinearnim tačkama.

Zadatak 6.35. Dokazati da kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 simetrale spoljašnjih uglova seku prave određene naspramnim stranicama u kolinearnim tačkama.

Zadatak 6.36. Dokazati da kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 tangente opisanog kruga u temenima A, B, C seku prave određene naspramnim stranicama u kolinearnim tačkama.

Zadatak 6.37. Dokazati da su kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 središte visine AD, središte upisanog kruga i dodirna tačka stranice BC sa spolja upisanim krugom tri kolinearne tačke.

Zadatak 6.38. Dokazati da podnožja upravnih iz bilo koje tačke kruga opisanog oko $\triangle ABC$ koji se nalazi u ravni E^2 na pravama BC, CA, AB pripadaju jednoj pravoj.

Zadatak 6.39. Primenom Čevijeve teoreme dokazati da se prave određene visinama $\triangle ABC$ u ravni E^2 seku u jednoj tački.

Zadatak 6.40. Dokazati da se kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 prave određene temenima i dodirnim tačkama naspramnih stranica sa upisanim krugom seku u jednoj tački, tzv. *Žergonovoj tački* tog trougla.

Zadatak 6.41. Dokazati da se kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 prave određene temenima i dodirnim tačkama spolja upisanog kruga sa pravama koje sadrže naspramne stranice seku u jednoj tački.

Zadatak 6.42. Dokazati da se kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 prave određene temenima i dodirnim tačkama spolja upisanih krugova sa naspramnim stranicama seku u jednoj tački, tzv. *Nagelovoj tački* tog trougla.

6.5 Harmonijske četvorke tačaka

Pri rešavanju raznovrsnih geometrijskih zadataka čestu primenu nalaze harmonijski spregnute tačke, harmonijski spregnute prave i harmonijski spregnute ravni.

Definicija 6.5.1. Neka su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke. Kaže se da je par tačaka A, B *harmonijski spregnut* sa parom tačaka C, D i simbolički obeležava sa $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ako je zadovoljena relacija

$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD}$$

Ako je par tačaka A, B harmonijski spregnut s parom tačaka C, D kaže se takođe da su A, B, C, D *četiri harmonijske tačke.* Pri tome moramo strogo voditi računa o poretku kojim navodimo te tačke. Izvedimo najvažnija svojstva uvedene relacije.

Teorema 6.5.1. Ako su A, B, C, D četiri harmonijske tačke jedne prave, tada važe relacije $\mathcal{H}(A, B; D, C)$ i $\mathcal{H}(C, D; A, B)$.

Dokaz. Koristeći definiciju harmonijski spregnutih tačaka na jednoj pravoj, nalazimo da

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) \quad &\Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} \\ &\Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{H}(A, B; D, C); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) \quad &\Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} \\ &\Rightarrow \quad \overrightarrow{CA} : \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CB} : \overrightarrow{DB} \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{H}(C, D; A, B); \end{aligned}$$

□

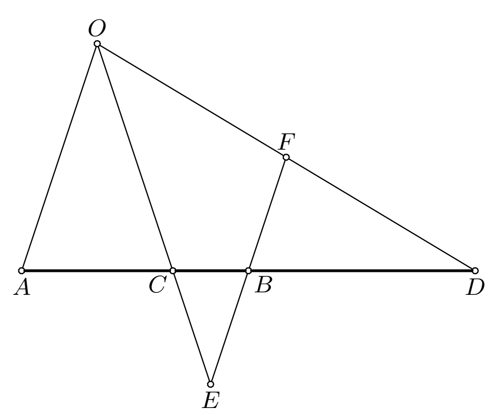
Teorema 6.5.2. Ako su A, B, C, D četiri razne tačke neke prave, O tačka van te prave, a E i F tačke u kojima prava kroz tačku B paralelna sa pravom OA seče prave OC i OD, tada je

$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff \mathcal{S}_B(E) = F.$$

Dokaz. Ako je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ tada je $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} = k$. Iz ovih jednakosti nalazimo da je

$$\mathcal{H}_{D,-k}^{-1} \circ \mathcal{H}_{C,k} = \mathcal{S}_B$$

pri čemu je $\mathcal{S}_B(E) = F$ (Sl. 6.5.2).



Sl. 6.5.2

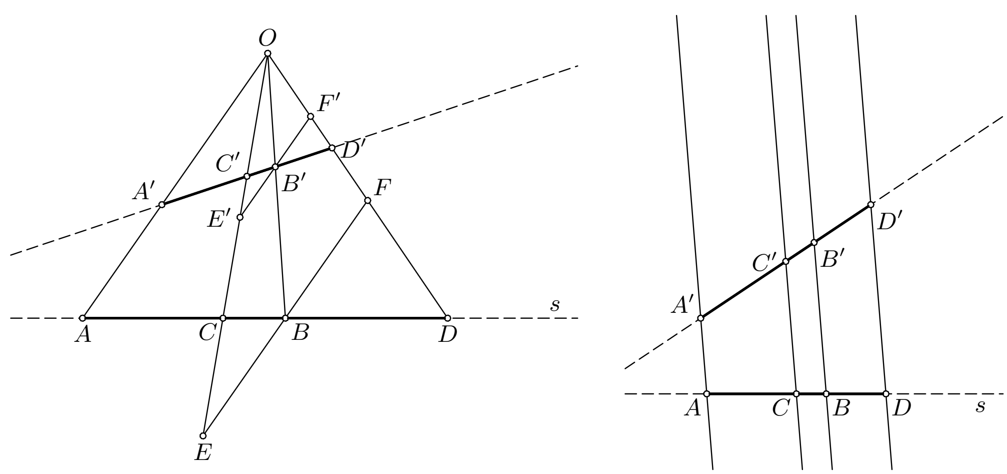
Obratno, ako je $\mathcal{S}_B(E) = F$ i $\overrightarrow{AC} \colon \overrightarrow{BC} = k$, tada u kompoziciji $\mathcal{H}_{C,k} \circ \mathcal{S}_B$ tačkama B i F odgovaraju tačke A i O, pa je

$$\mathcal{H}_{C,k} \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{H}_{D-k}.$$

Stoga je $\overrightarrow{AC} \colon \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \colon \overrightarrow{BD} = k$ pa je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. $\square$

Definicija 6.5.2. Za četiri prave a, b, c, d kaže se da su *harmonijski spregnute* i simbolički obeležava sa $\mathcal{H}(a, b; c, d)$ ako pripadaju jednom pramenu i ako postoji prava koja ih seče u harmonijskim tačkama. Isto tako, za četiri ravni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kaže se da su *harmonijski spregnute* i simbolički obeležava sa $\mathcal{H}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \vDash n$ ako pripadaju jednom pramenu i ako postoji prava koja ih prodire u harmonijskim tačkama.

Teorema 6.5.3. (Papos, III vek n. e.) Ako neka prava s seče četiri harmonijske prave a, b, c, d ravni E^2 u raznim tačkama A, B, C, D tada je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.



(a) (b)

Sl. 6.5.3

Dokaz. Iz relacije $\mathcal{H}(a, b;\, c, d)$ sleduje da prave a, b, c, d pripadaju jednom pramenu $\mathcal{X}$ i da postoji prava s' koja ih seče u tačkama A', B', C', D' takvim da je $\mathcal{H}(A', B';\, C', D')$. Neka je $\mathcal{X}$ pramen konkurentnih pravih sa središtem O (Sl. 6.5.3(a)). Ako obeležimo sa E i F tačke u kojima prava kroz tačku B paralelna sa pravom a seče prave c i d, sa E' i F' tačke u kojima prava kroz tačku B' paralelna sa pravom a seče prave c i d, i sa k odnos $\overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OB}$, tada u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ tačkama B, E, F odgovaraju respektivno tačke B', E', F'. Prema teoremi 6.5.2 tačka B' je srediste duži $E'F'$, pa je i tačka B središte duži EF, pa je prema istoj teoremi $\mathcal{H}(A, B;\, C, D)$. Slučaj kada je $\mathcal{X}$ pramen paralelnih pravih (Sl. 6.5.3(b)) je jednostavan, prepuštamo čitaocu da dokaže sam. $\square$

Zadaci

Zadatak 6.43. Dokazati da su dva para kolinearnih tačaka A, B i C, D među sobom harmonijski spregnuti ako i samo ako središte O duži CD zadovoljava relaciju

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2.$$

Zadatak 6.44. Dokazati da su dva para kolinearnih tačaka A, B i C, D među sobom harmonijski spregnuti ako i samo ako orijentisane duži $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ određuju *harmonijsku progresiju*, naime biće

$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff \frac{1}{\overrightarrow{AC}} + \frac{1}{\overrightarrow{AD}} = \frac{2}{\overrightarrow{AB}}.$$

Zadatak 6.45. Neka kod $\triangle ABC$ koji se nalazi u ravni E^2 simetrala unutrašnjeg i simetrala spoljašnjeg ugla A seku pravu BC u tačkama E i F. Ako obeležimo sa S središte upisanog kruga i sa S_a, S_b, S_c središta spolja upisanih krugova tog trougla, dokazati da je

a) $\mathcal{H}(B, C; E, F)$,

b) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ i

c) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$.

Zadatak 6.46. Date su na pravoj s tri razne tačke A, B, C. Konstruisati tačku D takvu da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Zadatak 6.47. U ravni E^2 dati su $\triangle ABC$ i tačka S. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku S i seče prave AB, AC, BC respektivno u tačkama P, Q, R takvim da je $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Zadatak 6.48. U ravni E^2 konstruisati $\triangle ABC$ kojem su stranica BC, visina AD i poluprečnik upisanog kruga podudarni s datim dužima a, h_a, ρ.

Zadatak 6.49. U ravni E^2 konstruisati $\triangle ABC$ kojem su zbir (razlika) stranica AB i AC, visina iz temena A i poluprečnik upisanog kruga podudarni s datim dužima s, h_a, ρ.

Zadatak 6.50. U ravni E^2 konstruisati $\triangle ABC$ kojem su visina iz temena A, težišna linija iz temana A i poluprečnik upisanog kruga podudarni s datim dužima h_a, m_a, ρ.

Zadatak 6.51. U ravni E^2 konstruisati $\triangle ABC$ kojem su visina iz temena A, poluprečnik opisanog kruga i poluprečnik upisanog kruga podudarni s datim dužima h_a, r, ρ.

Zadatak 6.52. U ravni E^2 date su dve razne tačke A, B i duž l. Odrediti na pravoj AB tačke C i D takve da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ i $CD \cong l$.

Zadatak 6.53. U ravni E^2 dat je konveksan ugao $\measuredangle PAQ$ i na njegovoj bisektrisi tačka E. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku E seče poluprave AP i AQ u tačkama B i C takvim da duž BC bude podudarna s datom duži a.

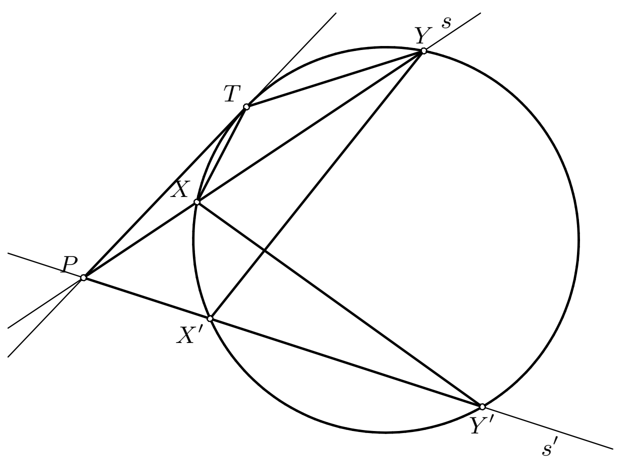
Zadatak 6.54. U ravni E^2 konstruisati $\triangle ABC$ kojem su stranica BC, visina AD i simetrala AE ugla A podudarne s datim dužima a, h_a, l_a.

6.6 Potencija tačke u odnosu na krug

Transformacije sličnosti prostora E^n omogućuju da u geometrijama raznovrsnih likova razotkrijemo njihova metrička svojstva. Od posebnog su značaja svojstva što ih pomoću tih transformacija dobijamo u geometriji kruga i sfere. Uvođenjem potencije tačke u odnosu na kruh i na sferu pokušaćemo da izvedemo samo neka od njih. Da bismo definisali potenciju tačke u odnosu na krug neophodno je najpre dokazati sledeću teoremu:

Teorema 6.6.1. Ako su u ravni E^2 dati krug k tačka P, tada za svaku pravu s koja seče krug k u tačkama X i Y važi relacija $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = const$. Ako je tačka P van kruga k i T dodirna tačka jedne od tangenata iz tačke P na krugu k, tada je

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2.$$



Sl. 6.6.1

Dokaz. Neka su s i s' dve razne prave od kojih prva sadrži tačku P i seče krug k u tačkama X i Y, a druga sadrži tačku P i seče krug k u tačkama X' i Y' (Sl. 6.6.1). Pri tome je $\triangle PXY' \sim \triangle PX'Y$, pa je $PX : PY' = PX' : PY$, i prema tome

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX'} \cdot \overrightarrow{PY'}.$$

Specijalno, ako je tačka P izvan kruga k i T dodirna tačka neke tangente iz tačke P na krugu k, tada je $\triangle PXT \sim \triangle PTY$, pa je

$$PX : PT = PT : PY,$$

i prema tome

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2.$$

$\square$

Definicija 6.6.1. Konstantan proizvod $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY}$ ustanovljen dokaznom teoremom nazivamo *potencijom tačke u odnosu na krug* k, i simbolički obeležavamo sa $p(P,k)$.

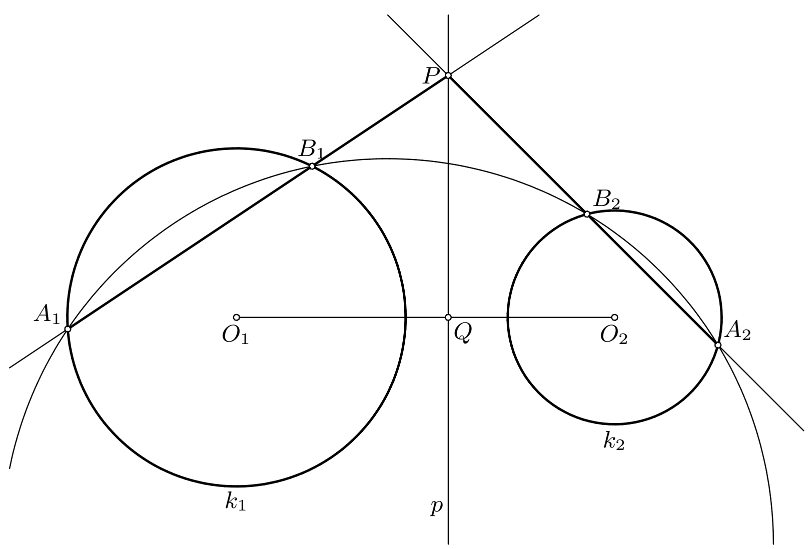
Iz definicije neposredno sleduje da za tačku P i krug $k(O,r)$ u ravni E^2 imamo da je

$$p(P,k) \begin{cases} < 0, & \text{ako je} \quad OP < r \\ = 0, & \text{ako je} \quad OP \cong r \\ > 0, & \text{ako je} \quad OP > r \end{cases}$$

Sem toga, ako je $OP = d$ i $l(O,P) \cap k = \{A,B\}$, biće

$$p(P,k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2.$$

Teorema 6.6.2. Skup svih tačaka ravni E^2 kojima su potencije u odnosu na dva ekscentrična kruga $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ među sobom jednaki predstavlja jednu pravu upravnu na pravoj O_1O_2.



Sl. 6.6.2

Dokaz. Ako je P tačka takva da je $p\,(P,k_1) = p\,(P,k_2)$ biće

$$O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2,$$

pa je

$$O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Iz ove jednakosti sleduje da je razlika kvadrata duži O_1P i O_2P konstantna, pa se tačka P nalazi na pravoj p koja je upravna na pravoj O_1O_2 (Sl. 6.6.2) u tački Q za koju je

$$O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Obratno, ako je $P \in p$ tada je

$$O_1P^2 = O_1Q^2 + PQ^2 \quad \text{i} \quad O_2P^2 = O_2Q^2 + PQ^2,$$

pa je

$$O_1P^2 - O_2P^2 = O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1 - r_2.$$

Stoga je

$$O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2$$

tj.

$$p(P, k_1) = p(P, k_2).$$

□

Definicija 6.6.2. Pravu p koja predstavlja skup svih tačaka ravni E^2 čije su potencije u odnosu na dva ekscentrična kruga k_1 i k_2 među sobom jednake nazivamo *potencijalnom* ili *radikalnom osom* krugova k_1 i k_2.

Nije teško ustanoviti da je radikalna osa krugova k_1 i k_2 koji se seku u tačkama A i B prava određena tačkama A i B, da je radikalna osa krugova k_1 i k_2 koji se dodiruju u tački A prava koja u toj tački dodiruje krugove k_1 i k_2. Da bi se izvela konstrunkcija radikalne ose dvaju disjunktnih ekscentričnih krugova $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, dovoljno je odrediti jednu tačku te ose, zatim kroz istu konstruisati pravu upravnu na pravoj O_1O_2. U tom cilju, konstruiše se proizvoljan krug koji seče krugove k_1 i k_2 respektivno u tačkama A_1, B_1 i A_2, B_2. Tačka P u kojoj se seku prave A_1B_1 i A_2B_2, pripada radikalnoj osi krugova k_1 i k_2.

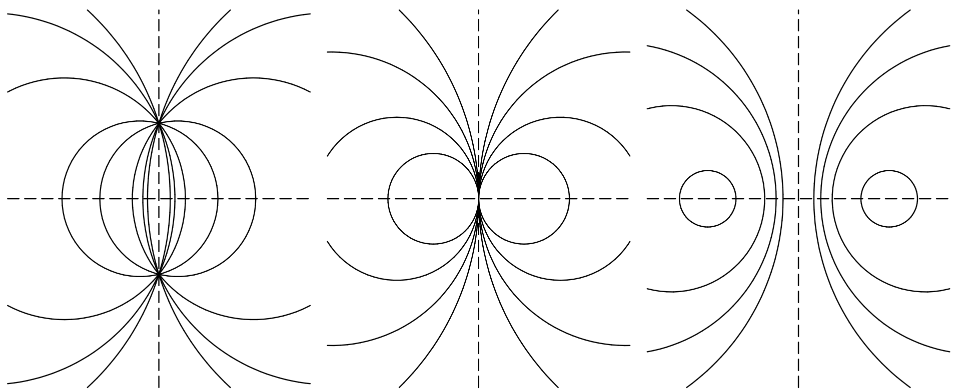
Teorema 6.6.3. Potencijalne ose triju krugova ravni E^2 pripadaju jednom pramenu pravih.

Dokaz. Neka su O_1, O_2, O_3 središta triju krugova k_1, k_2, k_3 koji se nalaze u ravni E^2 i p_1, p_2, p_3 potencijalne ose krugova k_2 i k_3, k_3 i k_1, k_1, i k_2. Ako tačke O_1, O_2, O_3 nisu kolinearne, prave O_2O_3 i O_3O_1 se seku, te se i prave p_1 i p_2 upravne na njima seku u nekoj tački O. Pri tome je $p(O, k_2) = p(O, k_3)$ i $p(O, k_3) = p(O, k_1)$, pa je $p(O, k_1) = p(O, k_2)$ i prema tome $O \in p_3$. Na taj način, ako tačke O_1, O_2, O_3 nisu kolinearne, potencijalne ose krugova k_1, k_2, k_3 seku se u jednoj tački. Ako tačke O_1, O_2, O_3 pripadaju pravoj s, biće prave p_1, p_2, p_3 upravne na pravoj s, i prema tome među sobom paralelne. □

Definicija 6.6.3. Tačku O u kojoj se seku potencijalne ose triju krugova ravni E^2 sa nekolinearnim središtem nazivamo *potencijalnim* ili *radikalnim središtem* tih krugova.

Pojam radikalne ose omogućuje da u geometriji ravni E^2 definišemo pramen krugova.

Definicija 6.6.4. Skup svih krugova ravni E^2 od kojih svaka dva imaju za radikalnu osu istu pravu s nazivamo *sistemom koaksijalnih krugova* ili *pramenom krugova*; pravu s nazivamo radikalnom osom tog pramena krugova.



(a) (b) (c)

Sl. def. 6.6.4

Iz ove definicije i definicije radikalne ose dvaju krugova neposredno zaključujemo da važi sledeće tvrđenje: Ako se u jednom pramenu krugova dva kruga seku u tačkama A i B, tada se svaka dva kruga tog pramena seku u tačkama A i B; ako se u jednom pramenu krugova dva kruga dodiruju u tački C, tada se svaka dva kruga tog pramena dodiruju u tački C; ako u jednom pramenu krugova dva kruga nemaju zajedničkih tačaka, tada nikoja dva kruga tog pramena nemaju zajedničkih tačaka. Ovo svojstvo omogućuje da u geometriji ravni E^2 razlikujemo tri vrste pramenova krugova. U zavisnosti od toga da li se krugovi jednog pramena seku u dvema raznim tačkama (Sl. def. 6.6.4(a)), dodiruju u istoj tački (Sl. def. 6.6.4(b)) ili uopste nemaju zajedničkih tačaka (Sl. def. 6.6.4(c)), dotični pramen krugova respektivno nazivamo *eliptičkim*, *paraboličkim* ili *hiperboličkim*.

Zadaci

Zadatak 6.55. Neka je u ravni E^2 dat $\triangle ABC$. Ako je $l(O, r)$ opisan krug, $k(S, \rho)$ upisan krug i $k(S_a, \rho_a)$ spolja upisani krug koji dodiruje stranicu BC tog trougla, dokazati da je

$$OS^2 = r_2 - 2r\rho \quad \text{i} \quad OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a.$$

Zadatak 6.56. Date su u ravni E^2 tri kolinearne tačke A, B, O. Koristeći potenciju tačke u odnosu na krug, odrediti na pravoj AB tačke C i D takve da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, a tačka O središte duži CD.

Zadatak 6.57. Date su u ravni E^2 dve razne tačke A, B i duž l. Koristeći potenciju tačke u odnosu na krug, odrediti na pravoj AB tačke C i D takve da je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ i $CD \cong l$.

Zadatak 6.58. Date su u ravni E^2 četiri kolinearne tačke A, B, C, D. Odrediti na njihovoj pravoj tačke E i F takve da je $\mathcal{H}(A, B; E, F)$ i $\mathcal{H}(C, D; E, F)$.

Zadatak 6.59. Ako su u ravni E^2 prave određene tetivama AB i CD dvaju krugova k_1 i k_2 seku na radikalnoj osi tih krugova, dokazati da tačke A, B, C, D pripadaju jednom krugu.

Zadatak 6.60. Ako u ravni E^2 neki krug k seče dva kruga k_1 i k_2, prvi u tačkama A i B a drugi u tačkama C i D, dokazati da se prave AB i CD seku na radikalnoj osi s krugova k_1 i k_2 ili su paralelne sa osom s.

Zadatak 6.61. Dokazati da u ravni E^2 prava određena visinom AD trougla ABC predstavlja radikalnu osu krugova kojima su prečnici težišne linije BB' i CC' tog trougla.

Zadatak 6.62. Dokazati da u ravni E^2 ortocentar H predstavlja radikalno središte krugova kojima su prečnici stranice tog trougla.

Zadatak 6.63. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da simetrala spoljašnjeg ugla A_1 trougla $A_1B_1C_1$ predstavlja radikalnu osu upisanih krugova $\triangle ABC$ koji dodiruju stranicu BC.

Zadatak 6.64. Ako su A_1, B_1, C_1 središta stanica BC, CA, AB trougla ABC koji se nalazi u ravni E^2, dokazati da simetrala unutrašnjeg ugla A_1 trougla $A_1B_1C_1$ predstavlja radikalnu osu spolja upisanih krugova koji odgovaraju temenima B i C trougla ABC.

Zadatak 6.65. Ako je s radikalna osa dvaju ekscentričnih krugova $k_1\,(O_1,\, r_1)$ i $k_2\,(O_2,\, r_2)$ ravni E^2, P proizvoljna tačka te iste ravni i Q podnožje upravne iz tačke P na pravoj s, dokazati da je

$$p(P, k_1) - p(P, k_2) = 2\overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Zadatak 6.66. U ravni E^2 zadata su dva ekscentrična kruga k_1 i k_2. Konstuisati skup svih tačaka $X \in E^2$ kojima je razlika $p(X, k_1) - p(X, k_2)$ konstanta.

Zadatak 6.67. Dokazati da skup središta svih krugova ravni E^2 ortogonalnih na datim krugovima k_1 i k_2 u toj ravni predstavljaju tačke radikalne ose tih krugova koje se nalaze izvan njih.

Zadatak 6.68. Dokazati da skup središta svih krugova ravni E^2 koje seče svaki od dvaju zadatih krugova k_1 i k_2 u dijametralno suprotnim tačkama predstavljaju tačke radikalne ose krugova k_1 i k_2 koje se nalaze u tim krugovima.

Zadatak 6.69. Dokazati da skup središta svih krugova u ravni E^2 koji seku svaki od dvaju datih krugova k_1 i k_2 u dijametralno suprotnim tačkama predstavlja *pseudoradikalnu osu* krugova k_1 i k_2, tj. pravu simetričnu s radikalnom osom tih krugova u odnosu na središte duži koja spaja njihove centre.

Zadatak 6.70. Dati su u ravni E^2 prava p i dve tačke A, B. Konstruisati u ravni E^2 krug k koji sadrži tačke A, B i dodiruje pravu p.

Zadatak 6.71. Date su u ravni E^2 krug k i dve tačke A, B. Konstruisati u toj ravni krug l koji sadrži tačke A, B i dodiruje krug k.

Zadatak 6.72. Dati su u ravni E^2 ekscentrični krugova k_1, k_2 i tačka A. Konstruisati u toj ravni krug k koji sadrži tačku A i ortogonalan je na svakom od krugova k_1 i k_2.

6.7 Inverzija u odnosu na krug

Potencija tačke u odnosu na krug omogućuje da u geometriji ravni E^2 ustanovimo naročitu transformaciju koju nazivamo inverzijom u odnosu na krug koji se nalazi u toj ravni.

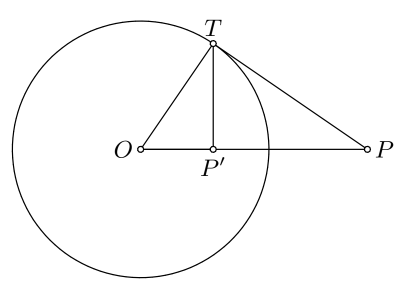
Definicija 6.7.1. Neka je $k(O, r)$ proizvoljan krug ravni E^2, zatim $E^2_* = E^2 \setminus \{O\}$. *Inverzijom* u odnosu na krug k nazivamo transformaciju

$$\psi_k \colon E^2_* \longrightarrow E^2_*,$$

koja svaku tačku $P \in E^2_*$ prevodi u tačku $P' \in E^2_*$ takvu da je

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2.$$

Tačku O nazivamo *centrom* ili *središtem inverzije*, duž r nazivamo *poluprečnikom*, veličinu r^2 nazivamo *stepenom*, a krug k nazivamo *krugom inverzije* ψ_k.



Sl. def. 6.7.1

Iz definicije neposredno sleduje da je inverzija o odnosu na krug $k \subset E^2$ bijektivna transformacija. To nije transformacija cele ravni E^2 već samo njenog dela E^2_*, jer u njoj nije definisana slika tačke O, niti je tačka O slika neke tačke ravni E^2 (Sl. def. 6.7.1). Narednom teoremom izvedimo najvažnija svojstva uvedene transformacije.

Teorema 6.7.1. Inverzija u odnosu na krug je involuciona transformacija.

Dokaz. Neka je $\psi\colon E^2_* \longrightarrow E^2_*$ inverzija u odnosu na krug $k(O,r)$. Ako je $P \in E^2_*$ biće $P' = \psi_k(P)$ tačka poluprave OP takva da je $OP \cdot OP' = r^2$. Stoga je i tačka P na polupravoj OP' takva da je $OP' \cdot OP = r^2$, pa je $\psi_k(P') = P$. □

Teorema 6.7.2. U inverziji $\psi\colon E^2_* \longrightarrow E^2_*$ tačka X je invarijantna ako i samo ako je $X \in k$.

Dokaz. Ako je tačka $X \in E^2_*$ invarijantna, imamo da je $OX \cdot OX = r^2$, pa je $OX = r$, i prema tome $X \in k$. Obratno, ako je $X \in k$ biće tačka $X' = \psi(X)$ na polupravoj OX takva da je $OX \cdot OX' = r^2, OX = r$ i prema tome $X = X'$. □

Teorema 6.7.3. U inverziji $\psi_k\colon E^2_* \longrightarrow E^2_*$ tački X koja se nalazi u krugu k odgovara tačka X' koja se nalazi izvan kruga k; i obratno, tački X koja se nalazi izvan kruga k odgovara tačka X koja se nalazi u krugu k.

Dokaz. Neka je O središte i r poluprečnik inverzije ψ_k. Ako je tačka X u krugu k, tada je $OX < r$, te iz relacije $OX \cdot OX' = r^2$ sledi da je $OX' > r$, pa je tačka X' izvan kruga. Obratno, ako je tačka X izvan kruga k, tada je $OX > r$, te je iz relacije $OX \cdot OX' = r^2$ sledi da je $OX' < r$, pa je tačka X' u krugu k. □

Teorema 6.7.4. Kompozicija dvaju inverzija ψ_{k_1} i ψ_{k_2} definisanih u odnosu na koncentrične krugove $k_1(O,r_1)$ i $k_2(O,r_2)$ predstavlja homotetiju

$$\mathcal{H}_{O,r_2^2\colon r_1^2}.$$

Dokaz. S obzirom da su krugovi k_1 i k_2 koncentrični, oni pripadaju istoj ravni E^2. Ako obeležimo sa X proizvoljnu tačku skupa E^2_* i sa X_1, X_2 tačke takve da je $\psi_{k_1}(X) = X_1$ i $\psi_{k_2}(X_1) = X_2$, tada je

$$\psi_{k_2} \cdot \psi_{k_1}(X) = X_2.$$

Tačke X_1 i X_2 pripadaju polupravama OX i OX_1, te je i tačka X_2 na polupravoj OX. Iz relacija

$$OX \cdot OX_1 = r_1^2 \quad \text{i} \quad OX_1 \cdot OX_2 = r_2^2$$

sledi da je

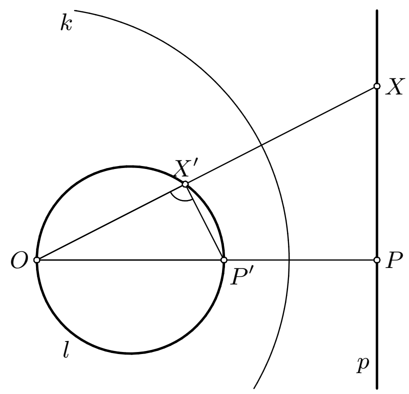
$$OX_2\colon OX = r_2^2\colon r_1^2.$$

□

Teorema 6.7.5. Neka su u ravni E^2 dati krug $k(O,r)$ i prava p. Pri tome, ako prava p sadrži tačku O, tada je $\psi_k(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$, ako prava p ne sadrži tačku O, tada lik $\psi_k(p)$ predstavlja krug kojem nedostaje tačka O.

Dokaz. Razmotrimo najpre slučaj kada je $O \in p$. Neka je $X \in E^2 \setminus \{O\}$ i $X' = \psi_k(X)$. Ako je $X \in p \setminus \{O\}$, biće tačka X' na polupravoj OX, pa je $X' \in p \setminus \{O\}$. Obratno, ako je $X' \in p \setminus \{O\}$, biće $X = \psi(X')$, pa je tačka X na polupravoj OX', i prema tome $X \in p \setminus \{O\}$. Stoga je u razmatranom slučaju

$$\psi(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}.$$



Sl. 6.7.5

Razmotrimo sad slučaj kada je $O \notin p$ (Sl. 6.7.5). Ako obeležimo sa P podnožje upravne iz tačke O na pravoj p, sa X bilo koju drugu tačku prave p, a sa P' i X' tačke koje u inverziji ψ_k odgovaraju tačkama P i X, biće

$$\measuredangle POX = \measuredangle X'OP' \quad \text{i} \quad OP \cdot OP' = OX \cdot OX'.$$

Stoga je $\triangle POX \sim \triangle X'OP'$, pa je i $\measuredangle OPX \cong \measuredangle OX'P'$. No ugao $\measuredangle OPX$ je prav, pa je i $\measuredangle OX'P'$ prav. Stoga tačka X' pripada krugu kojem je duž OP' prečnik.

Obratno, ako je $X' \in p' \setminus \{O, P\}$, tada je $\measuredangle X'OP'$ oštar te prava p upravna na kraku OP' seče krak OX' u nekoj tački X. Pri tome je

$$\measuredangle POX \cong \measuredangle X'OP' \quad \text{i} \quad \measuredangle OPX \cong \measuredangle OX'P',$$

pa je $\triangle POX \sim \triangle X'OP'$. Stoga je $OP \cdot OX = OX' \cdot OP'$, pa je

$$OP \cdot OP' = OX \cdot OX',$$

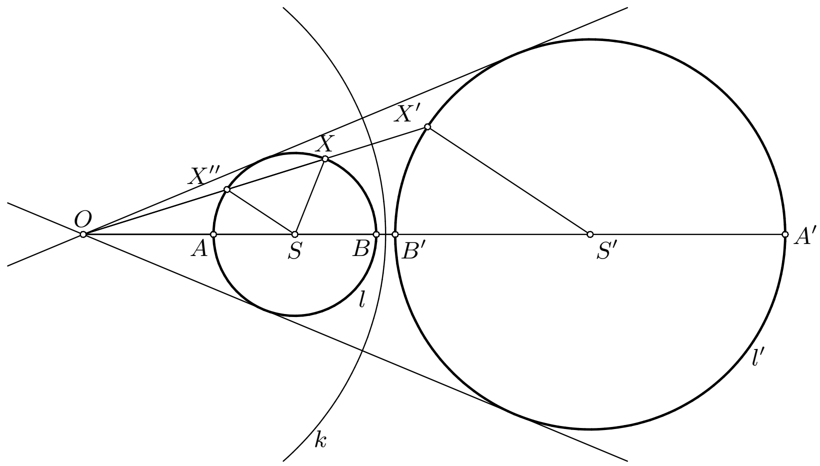
i prema tome $\psi_k(X) = X'$. □

Teorema 6.7.6. Neka su u ravni E^2 data dva kruga $k(O, r)$ i $l(S, \rho)$. Pri tome,

1° ako je $O \in l$, tada je $\psi_k(l \setminus \{O\})$ prava linija;

2° ako je $O \notin l$, tada je $\psi_k(l)$ takođe krug.

Dokaz. 1° Ako lik $\psi_k(l \setminus \{O\})$ obeležimo sa l', biće $\psi_k(l') = l \setminus \{O\}$. Stoga prema prethodnoj teoremi, lik l' predstavlja pravu liniju.



Sl. 6.7.6

2° Neka je $X \in l, X' = \psi_k(X)$ i X'' druga zajednička tačka prave OX i kruga l (Sl. 6.7.6). Ako obeležimo sa t stepen inverzije ψ_k i sa p potenciju tačke O u odnosu na krug l, imamo da je $OX \cdot OX' = t$ i $OX \cdot OX'' = p$. Deljenjem odgovarajućih strana ovih jednakosti, nalazimo da je

$$OX' \colon OX'' = t \colon p.$$

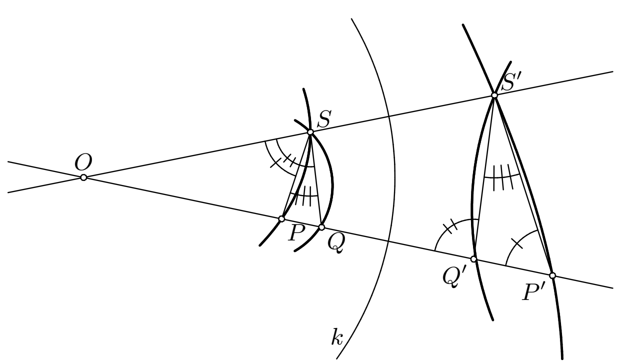
Stoga tačka X' pripada krugu l' koji u homotetiji $\mathcal{H}_{O,\, t\colon p}$ odgovara krugu l.

Obratno, neka je $X' \in l'$, $X'' = \mathcal{H}_{O,\, t\colon p}(X')$ i X druga zajednička tačka prave OX'' sa krugom l. Ako ponovo obeležimo sa t stepen inverzije ψ_k i sa p potenciju tačke O u odnosu na krug l, biće (Sl. 6.7.6)

$$OX' \colon OX'' = t \colon p \quad \text{i} \quad OX \cdot OX'' = p.$$

Množenjem odgovarajućih strana ovih jednakosti nalazimo da je $OX \colon OX' = t$. Stoga je $X' = \psi_k(X)$. □

Teorema 6.7.7. Ugao pod kojim se seku dve linije p i q ravni E^2 u presečnoj tački S jednak je s uglom pod kojim se seku njima inverzne krive p' i q' u odgovarajućoj tački S'.



Sl. 6.7.7

Dokaz. Obeležimo sa O središte pomenute inverzije, sa P i Q tačke u kojima neka prava kroz tačku O, različita od prave OS, seče linije p i q, a sa P' i Q' tačke koje u toj inverziji odgovaraju tačkama P i Q (Sl. 6.7.7). Iz same konstrukcije sleduje da tačke P' i Q' pripadaju linijama p' i q'. S obzirom da je

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OS'},$$

biće četvorouglovi $SS'P'P$ i $SS'Q'Q$ tetivni, pa je

$$\measuredangle OSP \cong \measuredangle S'P'P \quad \text{i} \quad \measuredangle OSQ \cong \measuredangle S'Q'Q.$$

Stoga je

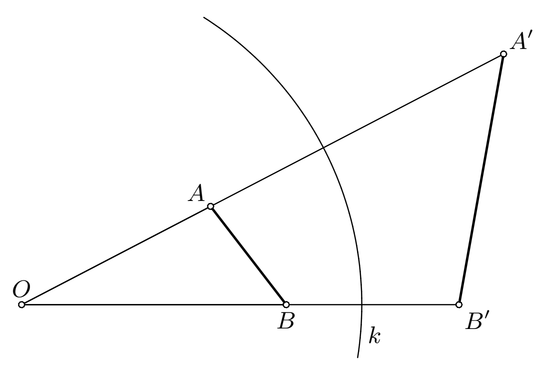
$$\measuredangle PSQ \cong \measuredangle P'S'Q'.$$

Ako se tačke P i Q kretajući se po linijama p i q približuju tački S, i njihove odgovarajuće tačke P' i Q' kretaju se po linijama p' i q' približujući se tački S'. U graničnom slučaju sečice SP i SQ predstavljaju tangente na linijama p i q u tački S, a sečice $S'P'$ i $S'Q'$ predstavljaju tangente na linijama p' i q' u tački S'. Stoga je i ugao koji je određen tangentama na linijama p i q u tački S jednak s uglom koji je određen tangenatama na linijama p' i q' u tački S'. $\square$

Primeri

Primer 6.6. Ako je ψ_k inverzija u odnosu na neki krug $k(O,r)$ i A, B bilo koji par tačaka različitih od tačke O, dokazati da je

$$\psi_k(A)\psi_k(B) = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB.$$



Sl. Primer 6.6

Rešenje. Prema definiciji inverzije imamo da je (Sl. Primer 6.6)

$$\frac{OB}{OA} = \frac{O\psi_k(A)}{O\psi_k(B)}.$$

Pri tome je O zajednički ugao trouglova OAB i $O\psi_k(B)\psi_k(A)$. Stoga su pomenuti trouglovi slični, pa je

$$\frac{AB}{OB} = \frac{\psi_k(A)\psi_k(B)}{O\psi_k(A)}$$

Iz dobijenih dveju relacija nalazimo da je

$$\psi_k(A)\psi_k(B) = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$$

$\square$

Primer 6.7. Dokazati da za svake četiri tačke A, B, C, D ravni E^2 važi relacija

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $ABCD$ konveksan tetivan četvorougao.

Rešenje. Ako obeležimo sa ψ_k inverziju u odnosu na proizvoljan krug $k(A, r)$, prema trougaonoj nejednakosti biće

$$\psi_k(B)\psi_k(C) + \psi_k(C)\psi_k(D) \geq \psi_k(B)\psi_k(D).$$

Iz ove relacije nalazimo primenom relacije iz prethodnog primera da je

$$\frac{r^2}{AB \cdot AC} BC + \frac{r^2}{AC \cdot AD} CD \geq \frac{r^2}{AB \cdot AD} BD.$$

Otuda neposredno dobijamo da je

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD.$$

Jednakost važi samo ako tačka $\psi_k(C)$ pripada zatvorenoj duži $[\psi_k(B)\psi_k(D)]$ tj. ako je tačka C na luku DB kruga $l(A, B, D)$ na kojem nije tačka A. $\square$

Zadaci

Zadatak 6.73. Ako su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke ravni E^2 i k krug kojem je duž AB prečnik, dokazati da je

$$\psi_k(C) = D \iff \mathcal{H}(A, B; C, D).$$

Zadatak 6.74. Ako u inverziji $\psi_k \colon E^2_* \to E^2_*$ tački $P \notin k$ odgovara tačka P', dokazati da je svaki krug l koji zadovoljava uslove $P, P' \in l$ i $l \subset E^2$, ortogonalan na krugu k.

Zadatak 6.75. Ako u inverziji $\psi_k \colon E^2_* \to E^2_*$ tačkama A i B koje su nekolinearne sa središtem kruga k odgovaraju tačke A' i B', dokazati da tačke A, B, A', B' pripadaju jednom krugu koji je ortogonalan na krugu k.

Zadatak 6.76. Ako u inverziji $\psi_k \colon E^2_* \to E^2_*$ tačkama A i B, koje su nekolinearne sa središtem O kruga k, odgovaraju tačke A' i B', dokazati da su trouglovi OAB i $OB'A'$ indirektno slični.

Zadatak 6.77. Neka je l opisani krug $\triangle ABC$ koji se nalazi u ravni E^2. Ako su P i Q tačke u kojima medijatrisa m stranice BC seče prave AB i AC, dokazati da je $\psi_l(P) = Q$

Zadatak 6.78. Neka je O središte kruga l opisanog oko $\triangle ABC$ koji se nalazi u ravni E^2. Ako su B' i C' tačke polupravih AB i AC takve da je

$$AB \cdot AB' = AC \cdot AC',$$

dokazati da je $OA \perp B'C'$.

Zadatak 6.79. Primenom inverzije konstruisati u ravni E^2 krug k koji sadrži dve date tačke A i B i dodiruje datu pravu p.

Zadatak 6.80. Primenim inverzije konstruisati u ravni E^2 krug k koji sadrži dve date tačke A i B i dodiruje dati krug l.

Zadatak 6.81. U ravni E^2 konstruisati krug k koji sadrži datu tačku A i dodiruje dva data kruga k_1 i k_2.

Zadatak 6.82. U ravni E^2 konstruisati krug k koji dodiruje tri data kruga k_1, k_2, k_3.

Glava 7

Neeuklidske geometrije

7.1 Sistem aksioma geometrije Lobačevskog

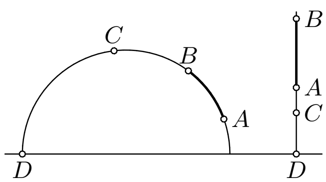
U prvom poglavlju ovog tečaja naveden je sistem aksioma na kojem se zasniva euklidska geometrija. Tom prilikom pomenuli smo da prve četiri grupe aksioma omogućuju da se izvedu brojna geometrijska tvrđenja koja ne zavise od Plejferove aksiome paralelnosti i njoj ekvivalentnih tvrđenja među kojima se nalazi i Euklidov peti postulat. Taj deo geometrije nazvali smo apsolutnom geometrijom. U okviru te apsolutne geometrije bili smo u mogućnosti da dokažemo tvrđenje prema kojem u jednoj ravni kroz tačku A van prave a postoji prava koja s pravom a nema zajedničkih tačaka. Međutim, u apsolutnoj geometriji nije moguće ustanoviti koliki je broj tih pravih. Uvođenjem aksiome prema kojoj kroz tačku A postoji samo jedna prava koja sa pravom a nema zajedničkih tačaka Plejfer je omogućio izgradnju euklidske geometrije. Polazeći od aksioma apsolutne geometrije i pretpostavke da postoje kroz tačku A dve prave koje s pravom a nemaju zajedničkih tačaka, Lobačevski je došao do potpuno nove tzv. hiperboličke geometrije. U ovom odeljku samo ćemo izložiti njenu aksiomatiku i ukazati na mogućnost njene realizacije.

Aksioma V.1.* Kroz tačku A van prave a postoje dve prave koje su komplanarne sa pravom a i koje s njom nemaju zajedničkih tačaka.

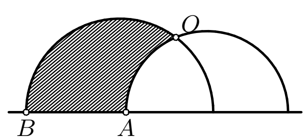
Teoriju zasnovanu na sistemu aksioma apsolutne geometrije i aksiomi Lobačevskog nazivamo *hiperboličkom geometrijom* ili *geometrijom Lobačevskog*. Ravan i prostor u kojima važe aksiome te geometrije nazivamo respektivno *hiperboličkom ravni* ili *ravni Lobačevskog* i *hiperboličkim prostorom* ili *prostorom Lobačevskog*.

Da bi se uverili u neprotivrečnost planimetrije Lobačevskog neophodno je konstruisati model te geometrije u nekoj teoriji za koju pretpostavljamo da je neprotivrečna. Model planimetrije Lobačevskog konstruisaćemo u euklidskoj ravni E^2. U tom cilju obeležimo sa x proizvoljnu pravu ravni E^2 i sa σ jednu od poluravni na koje je pravom x razložen skup ostalih tačaka ravni E^2. Saglasimo se da poluravan σ nazivamo *H-ravni*, a pravu x njenom *apsolutom*. Sem toga, saglasimo se da tačke poluravni σ nazivamo *H-tačkama*, a polukrugove poluravni σ kojima krajevi pripadaju pravoj x, kao i poluprave poluravni σ koje su u svojim krajnjim tačkama upravne na pravu x, nazivamo *H-pravama*. Smatraćemo da H-tačka P *pripada* H-pravoj p, a da H-prava p *sadrži* H-tačku P ako u skupovnom smislu tačka koja predstavlja H-tačku P pripada liniji koja predstavlja H-pravu p.

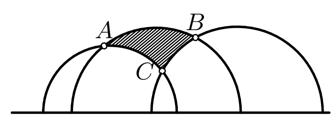
Nije teško ustanoviti da na ovako konstruisanom modelu važe sve aksiome incidencije planimetrije Lobačevskog. Zaista, s obzirom da svaki polukrug poluravni σ kojem krajevi pripadaju pravoj x, kao i svaka poluprava poluravni σ koja je u svojoj krajnjoj tački upravna na pravoj x, sadrži najmanje dve razne tačke, i svaka H-prava sadrži najmanje dve razne H-tačke. Kako kroz svake dve tačke poluravni σ postoji u toj poluravni polukrug kojem se krajevi nalaze na pravoj x ili pak poluprava koja je u svojoj krajnjoj tački upravna na pravoj x, postoji najmanje jedna H-prava koja sadrži bilo koje dve H-tačke. Jasno je da za svake dve razne H-tačke postoji jedinstvena H-prava. Budući da sve tačke poluravni σ ne pripadaju jednom polukrugu niti jednoj polupravoj, u H-ravni postoje tri H-tačke koje ne pripadaju jednoj H-pravoj. Ovim smo dokazali da na konstruisanom modelu važe sve aksiome incidencije planimetrije Lobačevskog.



(a)



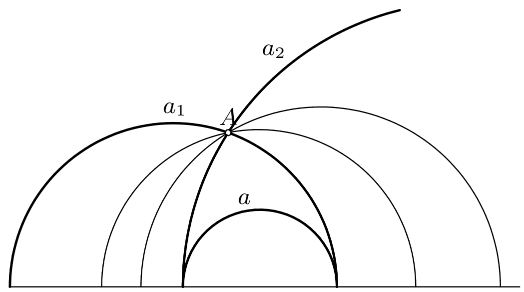
(b)



(c)

Sl. 7.1

Da bismo ustanovili da na konstruisanom modelu važe aksiome poretka geometrije Lobačevskog, neophodno je u tom modelu definisati relaciju između. Kaže se da je na H-pravoj p izvesna H-tačka C *između* H-tačaka A i B ako se u euklidskom smislu na liniji p tačka C nalazi između tačaka A i B. Kako na liniji p poluravni σ važe sve linearne aksiome poretka geometrije Lobačevskog, i na H-pravoj p važe sve linearne aksiome te geometrije. Dokaz kojim se ustanovljuje da na razmatranom modelu važi Pašova aksioma poretka nešto je složeniji, te ga ovde nećemo navoditi. Posle ovih razmatranja može se zaključiti da je u konstruisanom modelu *H-duž AB* predstavljena euklidskim lukom AB polukruga kojem se krajevi nalaze na pravoj x ili odsečkom AB euklidske poluprave koja je u svojoj krajnjoj tački D upravna na pravoj x (Sl. 7.1(a)). Sem toga, može se zaključiti da je na razmatranom modelu *H-poluprava CD* predstavljena euklidskim lukom CD polukruga čiji krajevi (od kojih se jedan poklapa sa tačkom D) nalaze se na pravoj x, odsečkom CD euklidske poluprave upravne na pravoj x u tački D ili pak ostatkom te poluprave (Sl. 7.1(a)). Znajući kako se na modelu predstavljaju H-poluprave i H-duži, čitalac može sam da zaključi kako se u dotičnom modelu predstavljaju *H-uglovi* (Sl. 7.1(b)), *H-trouglovi* (Sl. 7.1(c)) i drugi geometrijski likovi.



Sl. 7.1(d)

Da bismo ustanovili da u razmatranom modelu važe aksiome podudarnosti geometrije Lobačevskog, neophodno je definisati relaciju H-podudarnosti uređenih parova H-tačaka. Kaže se da je uređen par H-tačaka A i B *H-podudaran* sa uređenim parom H-tačaka C i D ako postoji konačan niz inverzija kojima niz kompozicija prevodi H-tačke A i B respektivno u H-tačke C i D. Sa ovako ustanovljenom relacijom H-podudarnosti uređenih parova H-tačaka, bez teškoća se dokazuje da na razmatranom modelu važe prve četiri aksiome podudarnosti geometrije Lobačevskog. Da bismo dokazali da važi aksioma III.5, pretpostavimo da su date dve H-prave p i p', na H-pravoj p dve H-tačke A, B i na H-pravoj p' H-tačka A'. Ako inverzijom prevedemo krug p na krug p', tačke A i B prevodimo u izvesne tačke A'' i B''. Ako zatim inverzijom krug p' prevedemo na taj isti krug tako da tačka A'' pređe u tačku A', tačka B'' prelazi u traženu tačku B''. Time je ustanovljeno da važi aksioma III.5. Verifikaciju III.6 i III.7 prepuštamo čitaocu da izvede sam. Verifikacija aksioma neprekidnosti nešto je složenija, te je ovde nećemo navoditi. Da u razmatranom modelu važi aksioma paralelnosti Lobačevskog, sleduje nepospedno, jer kroz H-tačku A van H-prave a postoje dve H-prave b i c koje sa H-pravom a nemaju zajedničkih H-tačaka (Sl. 7.1(d)).

Ovim je u ravni E^2 konstruisan tzv. *Poenkareov model* na kojem se realizuje geometrija Lobačevskog.

7.2 Sistem aksioma eliptičke geometrije

Kao i svaka deduktivna teorija, i eliptička geometrija se zasniva na izvesnom sistemu osnovnih pojmova i izvesnom sistemu osnovnih tvrđenja. Za osnovne pojmove eliptičke geometrije uzimamo proizvoljan neprazan skup R, dve klase $\mathcal{C}_e$ i $\mathcal{C}_\pi$ podskupova skupa R i dve relacije // i $\cong$. Skup R nazivaćemo *eliptičkim* ili *rimanskim prostorom* u užem smislu, a njegove elemente *eliptičkim tačkama* ili samo *tačkama* koje ćemo obeležavati velikim latinskim slovima $A, B, C, \ldots$. Elemente klase $\mathcal{C}_e$ nazivaćemo *eliptičkim pravama* ili samo *pravama* koje ćemo obeležavati malim latinskim slovima $a, b, c, \ldots$. Elemente klase $\mathcal{C}_\pi$ nazivaćemo *eliptičkim ravnima* ili samo *ravnima* koje ćemo obeležavati malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Relacije // i $\cong$ nazivaćemo respektivno relacijom *razdvojenosti parova tačaka* i relacijom *podudarnosti odsečka*.

Osnovna tvrđenja tj. aksiome eliptičke geometrije podeljene su u grupe; to su:

I Aksiome incidencije;

II Aksiome poretka;

III Aksiome neprekidnosti;

IV Aksiome podudarnosti.

Navodimo aksiome svake od ovih grupa ukazujući na samo neka svojstva koja se iz njih izvode.

1. Sem osnovnih relacija koje smo pomenuli, prilikom izgrađivanja eliptičke geometrije pretpostavlja se da su poznate i skupovne relacije „pripada“ i „sadrži“ koje nazivamo jednim imenom *relacijama incidencije.* Stoga i prvu grupu aksioma zasnovanu na ovim relacijama nazivamo *aksioma incidencije.* Pre navođenja ovih aksioma saglašavamo se da tri ili više tačaka nazivamo *kolinearnim* ako postoji prava koja ih sadrži, a četiri ili više tačaka nazivamo *komplanarnim* ako postoji ravan koja ih sadrži. Grupu aksioma incidencije čine sledeće aksiome:

I.1. Svaka prava sadrži najmanje tri razne tačke.

I.2. Postoji prava koja sadrži bilo koje dve tačke.

I.3. Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke.

I.4. Svaka ravan sadrži tri nekolinearne tačke.

I.5. Postoji ravan koja sadrži bilo koje tri tačke.

I.6. Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke.

I.7. Ako dve razne tačke neke prave pripadaju jednoj ravni, tada sve tačke te prave pripadaju toj ravni.

I.8. Ako dve ravni imaju jednu zajedničku tačku, tada one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku.

I.9. Postoje četiri nekomplanarne tačke.

I.10. Svake dve komplanarne prave imaju najmanje jednu zajedničku tačku.

Primetimo da se aksiome incidencije eliptičke geometrije razlikuju od aksioma incidencije euklidske i hiperboličke geometrije jedino u aksiomama I.1 i I.10. Dok se aksiomom I.1 euklidske i hiperboličke geometrije zahteva da svaka prava sadrži najmanje dve razne tačke, aksiomom I.1 eliptičke geometrije zahteva se da svaka prava sadrži najmanje tri razne tačke. Aksioma I.10 eliptičke geometrije nije na spisku aksioma euklidske i hiperboličke geometrije. Dok u ravnima E^2 i L^2 postoje disjunktne prave u ravni R^2 takve prave ne postoje.

2. Aksiome poretka eliptičke geometrije obrazlažu svojstva osnovne relacije „razdvojenosti parova tačaka“. To je četvoroelementna relacija koja se odnosi na tačke jedne prave. Relaciju prema kojoj je par tačaka A, B razdvojen sa parom tačaka C, D simbolički obeležavamo sa $A, B//C, D$. Grupu aksioma poretka eliptičke geometrije čine sledeće aksiome:

II.1. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $A, B//C, D$ tada su svake dve od tačaka A, B, C, D među sobom različite.

II.2. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $A, B//C, D$ tada je $A, B//D, C$ i $C, D//A, B$.

II.3. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $A, B//C, D$, tada je $A, C \not{/\!/} B, D$.

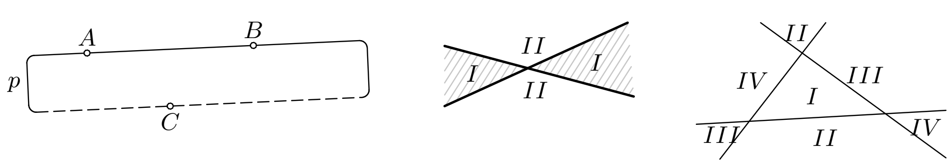
II.4. Ako su A, B, C tri razne tačke neke prave p, tada na pravoj p postoji tačka D takva da je $A, B//C, D$.

II.5. Ako su A, B, C, D razne kolinearne tačke tada važi najmanje jedna od relacija: $A, B//C, D, \quad A, C//B, D, \quad A, D//B, C$.

II.6. Ako su A, B, C, D, E razne kolinearne tačke takve da je $A, B \not{/\!/} C, D$ i $A, B \not{/\!/} C, E$, tada je $A, B \not{/\!/} D, E$.

II.7. Ako četiri konkurentne prave a, b, c, d seku dve prave s i s' respektivno u raznim tačkama A, B, C, D i A', B', C', D' i ako je $A, B//C, D$ tada je i $A', B'//C', D'$.

Dok se teorija poretka u euklidskoj i hiperboličkoj geometriji zasnivala na osnovnoj relaciji „između“, teorija poretka u eliptičkoj geometriji zasnovana je na osnovnoj relaciji „razdvojenosti parova tačaka“. Iz samih aksioma neposredno sleduje da je eliptička prava zatvorena linija. Jedna tačka eliptičke prave ne razlaže skup ostalih tačaka te prave na dve poluprave; jedna prava eliptičke ravni ne razlaže skup ostalih tačaka te ravni na dve poluravni; jedna ravan eliptičkog prostora ne razlaže skup ostalih tačaka tog prostora na dva poluprostora.



(a) (b) (c)

Sl. 7.2

Dve razne tačke A i B neke prave p razlazu skup ostalih tačaka te prave na dva tzv. *komplementna odsečka* (Sl. 7.2(a)). Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, zatvorenu duž $[AB]$ koja sadrži tačku C simbolički obeležavamo sa $[AB]_C$. Dve razne komplanarne prave a i b razlažu skup ostalih tačaka njihove ravni na dve oblasti koje nazivamo *eliptičkim uglovima* (Sl. 7.2(b)). Tri nekolinearne tačke u eliptičkoj ravni ne određuju jedan, već četiri *eliptička trougla* (Sl. 7.2(c)). Četiri nekomplanarne tačke u eliptičkom prostoru ne određuju jedan već osam *tetraedara*.

3. Grupu aksioma neprekidnosti sačinjava samo jedna aksioma, to je *Dedekindova aksioma neprekidnosti*.

III.1. Ako su sve unutrašnje tačke eliptičkog odsečka $[AB]_C$ podeljene na dve klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ pri čemu:

1^o Klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ nisu prazni skupovi tačaka;

2^o Za svaku tačku $P \in \mathcal{M}$ i svaku tačku $Q \in \mathcal{N}$ važi relacija $A, Q//P, B$;

tada u nekoj od klasa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ postoji tačka X takva da za svaku tačku $P \in \mathcal{M}/X$ i $Q \in \mathcal{N}/X$ važe relacije $A, X//P, B$ i $A, Q//X, B$.

4. Aksiome podudarnosti eliptičke geometrije obražlazu svojstva osnovne relacije „podudarnosti“ koju ovde jednostavnosti radi ne uzimamo na skupu uređenih parova tačaka već na skupu odsečaka. Ovu grupu sačinjavaju sledeće aksiome:

IV.1. Za svaku eliptičku duž AB važe relacije $AB \cong AB$ i $AB \cong BA$.

IV.2. Ako su AB i CD dve eliptičke duži takve da je $AB \cong CD$, tada je i $CD \cong AB$.

IV.3. Ako su AB, CD, EF tri eliptičke duži takve da je $AB \cong CD$ i $CD \cong EF$, tada je i $AB \cong EF$.

IV.4. Ako su AB i CD dve razne eliptičke duži takve da je $AB \supset CD$, tada nije $AB \cong CD$.

IV.5. Ako su AB i $A'B'$ dve podudarne duži i C unutrašnja tačka duži AB, tada unutar duži $A'B'$ postoji tačka C' takva da je $AC \cong A'C'$ i $CB \cong C'B'$.

IV.6. Komplementne duži podudarnih duži među sobom su podudarne.

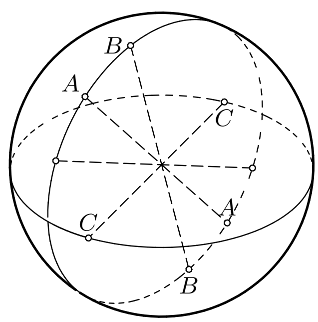
IV.7. Za svaku tačku A eliptičke prave p postoji na toj pravoj njoj *suprotna tačka* B, to je tačka za koju su komplementne duži određene tačkama A i B među sobom podudarne.

IV.8. Duži određene parovima suprotnih tačaka na bilo kojim dvema pravama među sobom su podudarne.

Poslednjoj aksiomi podudarnosti prethodi definicija podudarnih uglova. Ako su O_1 i O_2 tačke na kracima ugla AOB koje su suprotne temenu O, tada duž O_1O_2 sadržanu u tom uglu nazivamo *karakterističnom duži* tog ugla. Za dva ugla kažemo da su *podudarna* ako su im podudarne karakteristične duži.

IV.9. Ako su ABC i $A'B'C'$ dva trougla takva da je $AB \cong A'B'$ i $AC \cong A'C'$, tada je $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ ako i samo ako je $BC \cong B'C'$.

Da bismo se uverili u neprotivrečnost eliptičke planimetrije neophodno je konstruisati model te geometrije na nekoj površi prostora čiju geometriju smatramo neprotivrečnom. Učinimo to na sferi prostora E^3.



Sl. 7.2(d)

Pretpostavimo da je u prostoru E^3 data sfera σ jediničnog poluprečnika; neka je O njeno središte (Sl. 7.2(d)). Saglasimo se da svaki par dijametralno suprotnih tačaka te sfere nazivamo *eliptičkom* ili *E-tačkom*, da svaki veliki krug te sfere nazivamo *eliptičkom* ili *E-pravom*, a sferu σ *eliptičkom* ili *E-ravni*. Govorićemo da E-tačka A *pripada* E-pravoj a ili da E-prava a *sadrži* E-tačku A ako se tačke koje sačinjavaju E-tačku A nalaze na krugu koji predstavlja E-pravu a. Sa tako ustanovljenim relacijama incidencije lako se dokazuje da na konstruisanom modelu važe aksiome incidencije eliptičke planimetrije. Budući da svaki veliki krug sfere σ sadrži beskonačno mnogo parova dijametralno suprotnih tačaka, svaka E-prava sadrži najmanje tri E-tačke. Svaka dva para dijametralno suprotnih tačaka pripadaju izvesnom velikom krugu sfere σ, te i svake dve E-tačke pripadaju nekoj E-pravoj. Svaka dva različita para dijametralno suprotnih tačaka određuju jedinstven veliki krug sfere σ te i svake dve razne E-tačke određuju jedinstvenu E-pravu. Sve dijametralno suprotne tačke sfere σ ne pripadaju istom velikom krugu, te ni sve E-tačke ne pripadaju jednoj E-pravoj. Najzad, svaka dva velika kruga sfere σ seku se u dvema dijametralno suprotnim tačkama, te se i svake dve E-prave seku u jednoj E-tački. Ovim smo dokazali da u razmartanom modelu važe sve aksiome incidencije eliptičke planimetrije.

Kazaćemo da je u razmatranom modelu na nekoj E-pravoj p par E-tačaka A i B *razdvojen* s parom E-tačaka C i D ako je u euklidskom smislu za neku tačku P van kruga p par velikih krugova PA i PB razdvojen s parom velikih krugova PC i PD. Sa ovako ustanovljenom relacijom razdvojenosti parova E-tačaka na E-pravoj neposredno se verifikuju sve aksiome poretka i neprekidnosti eliptičke geometrije.

Smatraćemo da su u razmatranom modelu dva E-odsečka AB i CD među sobom podudarna ako postoji izometrija sfere σ koja kružne lukove što odgovaraju E-odsečku AB prevodi na kružne lukove što odgovaraju odsečku CD. Sa ovako ustanovljenom relacijom podudarnosti E-odsečka lako se u razmatranom modelu verifikuju sve aksiome podudarnosti eliptičke geometrije. Time se ustanovljuje i nepritivrečnost eliptičke planimetrije.

Napominjemo da se na konstruisanom modelu mogu izgrađivati novi pojmovi i nova tvrđenja eliptičke planimetruje. Tako se npr. ustanovljuje da *merom* E-odsečka AB u razmatranom modelu možemo smatrati meru ugla AOB u euklidskom smislu, da *merom* E-ugla u istom tom modelu možemo smatrati meru ugla diedra što ga u euklidskom smislu obrazuju ravni velikih krugova što odgovaraju kracima dotičnog E-ugla. Pozivajući se na tvrđenja iz sferne geometrije dokazuje se npr. da je zbir unutrašnjih uglova E-trougla veći od zbira dva prava ugla; da skup svih E-tačaka podjednako udaljenih od neke E-prave ne predstavlja E-pravu već krug, itd. Ovim samo ukazujemo na način kojim se na konkretnom modelu može izgraditi eliptička planimetrija.