Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu
Beograd 2013

Žarko Mijajlović

Teorija relativnosti i kosmološki modeli

Četvrto predavanje
Opta teorija relativnosti

4

Opšta teorija relativnosti

4.1 Uvod

Možemo reći da je glavni cilj Opšte teorije relativnosti da se objasni gravitacija. Otuda potiče i drugi naziv ove teorije, *Teorija gravitacije*. Nastavak Opšte teorije relativnosti vezuje se za radove Hilberta i Ajnštajna iz 1915 godine i ona predstavlja prirodan nastavak Specijalne teorije relativnosti. Osnove Opšte teorije relativnosti (GR) leže u sledećim pretpostavkama

1° Gravitacija je predstavljena pomoću zakrivljenosti prostora, a ne *silom* kao u Njutnovoj mehanici. Tačnije, gravitacija je posledica zakrivljenosti četvorodimenzionog kontinuuma prostor-vreme.

2° Prostorno-vremenski kontinuum je zakrivljen pseudo-Rimanov prostor (mnogostrukost) koji ima metriku signature $(-,+,+,+)$, odnosno $(+,-,-,-)$ u drugom rasporedu prostornih i vremenskih koordinata.

3° Glavni matematički aparat čini tenzorski račun.

4° Prostor-vreme isto kao u Specijalnoj teoriji relativnosti predstavlja jedinstven entitet.

5° Pretpostavlja se da lokalno važe zakoni Specijalne teorije relativnosti. Drugim rečima, ako je u nekom delu, na primer okolini neke tačke, prostorno-vremenski kontinuum gravitaciono homogen, dakle prostorni deo je ravan, tada se čestice kreću kako je opisano u Specijalnoj teoriji relativnosti.

Glavno mesto u GR ima Ajnštajnova jednačina, poznata i pod nazivom Hillbert-Ajnštanova jednačina, koja opisuje odnos između materije i zakrivljenosti prostor-vremena:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu} = 8 \, \pi \, G \, T_{\mu\nu}, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq 4. \tag{4.1}$$

U ovoj jednačini, koja se takođe naziva Ajnštanovom jednačinom polja, uvedene oznake imaju sledeća značenja:

$R_{\mu\nu}$	–	Ričijev tenzor
R	–	Ričijev skalar
$g_{\mu\nu}$	–	metrički tenzor
G	–	gravitaciona konstanta
$T_{\mu\nu}$	–	tenzor energije - impulsa

Indeksi μ, ν uzimaju vrednosti 1, 2, 3, 4, saglasno broju koordinata (komponenti) navedenih tenzora i dimenziji koju ima vremensko-prostorni kontinuum $\mathcal{M}$, $\dim\mathcal{M} = 4$. Prostor $\mathcal{M}$ ima dve komponente, vremensku, dimezije jedan i prostornu, dimenzije tri.

Važno mesto u ovoj teoriji ima tenzor $G_{\mu\nu}$ koja se uvodi pomoću jednakosti

$$G_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu}. \tag{4.2}$$

Veličina $G_{\mu\nu}$ poznata je pod nazivom Ajnštajnov tenzor.

Ajnštanova jednačina opisuje zakon kretanja čestice u gravitacionom polju, pa se otuda naziva i Jednačinom kretanja. Leva strana jednačine (4.1) daje zakrivljenost prostora, desna strana opisuje energiju i impuls. Bez dejstva drugih sila, čestice unutar gravitacionog polja kreću se duž geodezijskih linija - najkraćih putanja između dve tačke prostora. Jednačina geodezijskih linija glasi:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \cdot \frac{dx^\rho}{d\lambda} \cdot \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \ \mu, \rho, \sigma = 1, 2, 3, 4. \tag{4.3}$$

Ovde su $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ koordinate četvoro-vektora (x^0, x^1, x^2, x^3) u prostoru $\mathcal{M}$ parametrizovane parametrom λ. Veličina x^0 je vremenska koordinata, (x^1, x^2, x^3) su prostorne koordinate čestice. Oznake $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ su takozvani Kristofelovi simboli.

Geodezijske linije možemo takođe shvatiti kao one putanje na kojima je potrebno najmanje energije da čestica pređe put između neke dve tačke. U euklidskoj ravni, generalno u euklidskom prostoru, geodezijske linije su prave. Geodezijske linije na sferi su lukovi kružnica na sferi čiji centar leži u centru sfere. Euklidski prostori, ravni i hiperravni u n-dimenzionom euklidskom prostoru, zatim, sfera, elipsoid i hiperboloid predstavljaju primere Rimanovih mnogostrukosti. Svaka mnogostrukost ima svoju unutrašnju geometriju koja je određena metričkim tenzorom $g_{i\,j}$. Ta geometrija data je diferencijalnom formom, načinom kako se računa rastojenje s između dve tačke prostora:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j, \ g_{ij} = g_{ji} \tag{4.4}$$

Ako su g_{ij} konstante, prostor je ravan (linearan) i tada se može postaviti globalan koordinantni sistem koji prostor čini u osnovi običnim vektorskim prostorom. Ako je prostor zakrivljen tada $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)$, tj. koficijenti g_{ij} takođe opisuju zakrivljenost prostora u svakoj njegovoj tački. Kako se ta zakrivljenost menja od tačke do tačke, metrika (4.4) prikazuje se u diferencijalnoj formi. Gravitacija u GR predstavljena je zakrivljenošću prostorno-vremenskog kontinuuma. Dakle jedan od glavnih zadataka ove teorije je odrediti diferencijalnu formu (4.4).

Ako parametar λ u jednačini 4.3 predstavlja vreme, tada 4.3 određuje ubrzanje nastalo usled dejstva gravitacije. Naime, neka je L leva strana jednačine 4.3. Ako na česticu dejstvuje neka sila F, tada za opis kretanja čestice pod dejstvom sile F u gravitacionom polju jednačina 4.3 prelazi u $mL = F$, m je masa čestice.

4.2 Dualnost

U matematici mnogi pojmovi javljaju se u parovima P i Q i nekad za P i Q uzimamo da su dualni pojmovi. Nema precizne definicije, ali postoje mnogobrojni primeri. Na primer, u logici to su kvantori $\forall x$ i $\exists x$. U geometriji to su tangentna ravan – normala i prostor leve orijentacije – prostor desne orijentacije. U algebri, ako je $L\colon U \to V$, tada možemo uzeti da su domen (U) i kodomen (V) dualni pojmovi. U analizi to su

$$(dx, dy, dz) \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

U fizici imamo, na primer, dualnost materije: čestica – talas. Kod tenzora dualni su pojmovi kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata.

Dualnost je povezana sa suprotnošću, ali to nisu isti koncepti. Pojmovi P i Q su suprotni ako su komplementarni: ako iskaz φ definiše P, tada $\neg\varphi$ definiše Q. Jedan primer suprotnih pojmova su pojmovi konačnog i beskonačnog skupa.

4.3 Tenzori

Osnovni matematički aparat Opšte teorije relativnosti čini tenzorski račun. Tenzori s jedne strane predstavljaju uopštenje vektora i formalno gledano jesu vektori određenog vektorskog prostora. S druge strane, tenzori uključuju koncept dualnosti. Tenzor je algebarsko-geometrijski pojam definisan u okviru nekog konačno dimenzionalnog prostora $\mathcal{V}$ dimenzije n. Ako je T tenzor nad $\mathcal{V}$, slično kao i vektor, T je predstavljen svojim koordinatama

$$T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}.$$

u okviru izabranog dualnog para baza e, e^* prostora $\mathcal{V}$.

Niz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazivamo kontravarijantnm indeksima, dok su $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ kovarijantni indeksi.

Glavno mesto u definiciji tenzora ima način kako se menjaju njegove koordinate prelaskom iz jednog koordinantnog sistema u drugi. Pogledajmo kako to izgleda na primeru vektora nekog vektorskog prostora.

Podsetimo se da svaka baza $\mathbf{e}$ prostora $\mathcal{V}$ određuje sistem koordinata. Ako su $\mathbf{e}$ i $\mathbf{e}'$ dve baze prostora $\mathcal{V}$ i $\mathbf{x} \in V$ vektor, tada za $\mathbf{x}_e = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $\quad \mathbf{x}_{e'} = (x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)$ tj.

$$\mathbf{x} = \sum_i x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} = \sum_i x'^i \mathbf{e}'_i$$

važi $\mathbf{x}_{\mathbf{e}'} = P\mathbf{x}_{\mathbf{e}}$, gde je P matrica prelaza iz baze $\mathbf{e}$ u bazu $\mathbf{e}'$. U skalarnom obliku, s obzirom da su koordinate vektora u datoj bazi jedinstveno određene, ove jednakosti prelaze u $x'^i = \sum\limits_i p^i_j x^j$, gde je

$$P = ||p^i_j|| = \begin{bmatrix} p^1_1\ p^1_2 \ldots p^1_n \\ \vdots \\ p^n_1\ p^n_2 \ldots p^n_n \end{bmatrix}.$$

U Ajnštanovoj konvenciji ove jednakosti izgledaju

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} = x'^i \mathbf{e}'_i \quad x'^i = p^i_j x^j, \tag{4.5}$$

Vektor $\mathbf{x}$ ne menja se promenom baze, menjaju se samo njegove koordinate primenom linearne transformacije 4.5. Slično važi i za tenzore, ali u ovom slučaju za sve indekse α_i, β_j:

$$T^{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n}_{\beta'_1\beta'_2\ldots\beta'_n} = p^{\beta_1}_{\beta'_1} p^{\beta_2}_{\beta'_2} \cdots p^{\beta_n}_{\beta'_n} s^{\alpha'_1}_{\alpha_1} s^{\alpha'_2}_{\alpha_2} \cdots s^{\alpha'_n}_{\alpha_n} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$$

$p^{\alpha_i}_{\beta_j}$ je matrica prelaza iz baze $\mathbf{e}$ u bazu $\mathbf{e}'$
$s^{\alpha_i}_{\beta_j}$ je matrica prelaza iz dualne baze $\mathbf{e}^*$ u bazu $\mathbf{e}'^*$.

4.3.1 Zasnivanje tenzorskog računa

Tenzorski račun može se zasnovati na nekoliko načina, na primer

a) Uvođenjem dualne baze.

b) Uvođenjem dualnog prostora.

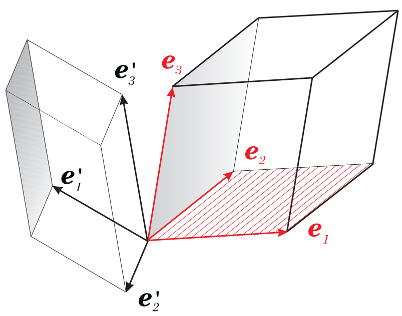
Ovde ćemo uvesti tenzore koristeći pojam dualne baze.

4.3.2 Dualna baza

Neka su $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ vektori u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^n$, $k \leq n$. Determinantu

$$G = \det ||\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle|| = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_k \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_k \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle \end{vmatrix} \tag{4.6}$$

nazivamo Gramovom determinantom. Ovde je $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$.



Dijagram. 38.

4.3.2.1 Teorema *Neka su* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k \in R^n$. *Tada su* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ *linearno nezavisni ako i samo ako* $G \neq 0$.

Dokaz 1° Pretpostavimo da su vektori $\mathbf{e}_i$ linearno nezavisni. Dokazujemo da je $G \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, da je $G = 0$. Tada vrste u G čine linearno zavisan skup, dakle za neke skalare λ_i koji nisu svi jednaki 0, važi

$$\sum_i \lambda_i(\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1, \rangle, \ldots, \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n \rangle) = 0$$

odakle za vektor $\mathbf{a} = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i$ sledi

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Otuda je $\mathbf{a}$ normalan na svakom vektoru $\mathbf{e}_i$, dakle i na podprostor $V = \mathscr{L}(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_k})$. Vektori $\mathbf{e}_i$ su linearno nezavisni, pa je $\mathrm{dim} V = k$. S obzirom da je $\mathbf{a} \in V$, to je $\mathbf{a} = 0$, u suprotnom $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ je skup $k + 1$ linearno nezavisnih vektora prostora V, što je u kontradikciji sa $\mathrm{dim} V = k$. Dakle $G \neq 0$.
2° Pretpostavimo da je $G \neq 0$. Dokazujemo da su vektori $\mathbf{e}_i$ linearno nezavisni. Pretpostavimo suprotno, da su linearno zavisni. Tada je neki od vektora $\mathbf{e}_i$ linearna kombinacija ostalih vektora. Recimo da je $i = 1$. Tada za neke skalare λ_i, $i = 2, \ldots, n$ važi

$$\mathbf{e}_1 = \sum_{2 \leq i} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

odakle

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{2 \leq i} \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle, \quad j = 1, 2, \ldots k.$$

Iz poslednje jednakosti odmah sledi da je prva vrsta determinante G linearna kombinacija ostalih njenih vrsti, što je u kontradikciji sa $G \neq 0$. Dakle, vektori $\mathbf{e}_i$ su linearno nezavisni. □

Gramova determinanta ima sledeće geometrijsko tumačenje. Paralelopiped P (hiper-paralelopiped u slučaju $k > 3$) određen vektorima $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ je skup

$$P = \{\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_k \mathbf{e}_k \colon 0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_k \leq 1\}.$$

Tada je Gramova determinanta G jednaka kvadratu zapremine paralelopipeda P. Primetimo da iz ove činjenice odmah sledi prethodna teorema.

Uvedimo pojam dualne baze. Neka je $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ baza prostora $\mathbf{R}^n$. Ako je $\mathbf{x} \in R^n$, tada $\mathbf{x} = \sum_i x^i \mathbf{e}_i$, u Ajnštajnovoj konvenciji $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$.

4.3.2.2 Teorema *Postoje jedinstveni vektori* $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n \in R^n$ *takvi da je* $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j \rangle = \delta_i^j$, $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, δ_i^j *je Kronekerov* δ*-simbol.*

Dokaz Neka je indeks j fiksiran i uzmimo

$$\mathbf{e}^j = \lambda_j^1 \mathbf{e}_1 + \lambda_j^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_j^n \mathbf{e}_n,$$

λ_j^i su nepoznate. Skalarnim množenjem ove jednakosti redom vektorima $\mathbf{e}_i$, imamo

$$\lambda_j^1 (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) + \lambda_j^2 \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_2 \rangle + \cdots + \lambda_j^n \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j \rangle \equiv \delta_i^j \tag{4.7}$$

Za fiksirano j ovaj sistem ima n jednačina i n nepoznatih.

Determinanta sistema 4.7 je Gramova determinanta G. Kako je $\mathbf{e}_i$ sistem linearno nezavisnih vektora to je $G \neq 0$, pa ovaj sistem ima tačno jedno rešenje λ_j^i i to za svako $j = 1, \ldots, n$. Da su vektori $\mathbf{e}^i$ linearno nezavisni vidimo iz sledećeg:

Pretpostavimo $\lambda_1 \mathbf{e}^1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}^n = 0$. Množenjem ove jednakosti vektorom $\mathbf{e}_i$, dobijamo

$$0 = \lambda_i \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{e}_i \rangle + \cdots + \lambda_i \langle \mathbf{e}^n, \mathbf{e}_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{e}_i \rangle = \lambda_i,$$

pa $\lambda_i = 0$. □

Neka je $\mathbf{e}^* = \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$. Prema prethodnom, $\mathbf{e}^*$ je takođe baza prostora R^n. Bazu $\mathbf{e}^*$ nazivamo dualnom bazom za $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Skalare x^i u razvoju $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ nazivamo kontravarijantnim koordinatama vektora $\mathbf{x}$, dok razvoj $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i$ određuje kovarijantne koordinate x_i istog vektora.

4.3.3 Definicija tenzora

Pogledajmo kako se menjaju kontravarijantne i kovarijantne koordinate vektora promenom para dualnih baza. Po istom principu menjaće se i koordinate bilo kojeg tenzora. U ovom odeljku koristićemo Ajnštajnovu notaciju.

Neka su $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i$ i $\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'^i$ dva para dualnih baza prostora R^n. Dakle $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j \rangle = \delta_i^j$, $\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'^j \rangle = \delta_i^j$. Tada za $\mathbf{x} \in R^n$ važe razvoji

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, & \mathbf{x} = x'^i \mathbf{e}'_i \\ \mathbf{x} = x_j \mathbf{e}^j, & \mathbf{x} = x'_j \mathbf{e}'^j \end{array} . \tag{4.8}$$

Sistem kontravarijantnih koordinata x^i vektora $\mathbf{x}$ reprezentovaćemo vektorom kolonom $\mathbf{x}_\mathbf{e} = [x^1, x^2, \ldots, x^n]^\top$, dok ćemo kovarijantne koordinate x_i predstaviti vektorom vrstom $\mathbf{x}_{\mathbf{e}^*} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Dakle u vektoru koloni menja se gornji indeks, dok se u vektoru vrste menja donji indeks. Isti princip primenjujemo i na ostale konstrukte nad skalarima i vektorima. Tako, za par dualnih uređenih baza $\mathbf{e}, \mathbf{e}^*$ uzimamo

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n], \quad \mathbf{e}^* = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n]^\top.$$

Neka je $P = ||p_j^i||$ matrica prelaza iz baze $\mathbf{e}_i$ u bazu $\mathbf{e}'_i$, tj. iz $\mathbf{e}$ u $\mathbf{e}'$. Isto, neka je $S = ||s_j^i||$ matrica prelaza iz baze $\mathbf{e}^i$ u bazu $\mathbf{e}'^i$, odnosno iz $\mathbf{e}^*$ u $\mathbf{e}'^*$. Tada:

$$P = \begin{bmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \ldots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \ldots & p_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1^n & p_2^n & \ldots & p_n^n \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \ldots & s_n^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \ldots & s_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1^n & s_2^n & \ldots & s_n^n \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Uzimajući u obzir opisanu modifikaciju o zapisivanju kontravarijantnih i kovarijatnih koordinata u vektore kolone i vektore vrsti, prema jednakostima izvedenim u prvom poglavlju imamo

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}P,\ \mathbf{x}_\mathbf{e} = P\mathbf{x}_{\mathbf{e}'}, \quad \mathbf{e}'^* = S\mathbf{e}^*,\ \mathbf{x}_{\mathbf{e}^*} = \mathbf{x}_{\mathbf{e}'^*}S. \tag{4.10}$$

Neka je $\widetilde{P} = P^{-1} = ||\widetilde{p}_i^j||$ i $\widetilde{S} = s^{-1} = ||\widetilde{s}_i^j||$. Tada jednakosti 4.10 u razvijenom obliku i Ajnštajnovoj notaciji glase

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}'_i = p_i^j \mathbf{e}_j, & \mathbf{e}_i = \widetilde{p}_i^j \mathbf{e}'_j & x^i = p_j^i x'^j, & x'^i = \widetilde{p}_j^i x^j \\ \mathbf{e}'^i = s_j^i \mathbf{e}^j, & \mathbf{e}^j = \widetilde{s}_k^j \mathbf{e}'^k & x_j = s_j^i x'_i, & x'_j = \widetilde{s}_j^i x_i \end{array} . \tag{4.11}$$

Na osnovu uvedenih pretpostavki dalje dobijamo

1° $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle = \langle x_i \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle = x_i \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle = x_i \delta_j^i = x_j$ tj. $x_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle$. Slično, $x^i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}^i \rangle$.

S obzirom na razvoje 4.8, ovim smo izveli Gibsove formule

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}^i \rangle \mathbf{e}_i. \tag{4.12}$$

2° Iz 4.8 i 4.11 takođe izvodimo

$$\begin{array}{l} \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}^k \rangle = \langle p_i^j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k \rangle = p_i^j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k \rangle = p_i^j \delta_j^k = p_i^k, \text{ tj. } p_i^k = \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}^k \rangle. \\ \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}'_i \rangle = \langle \widetilde{s}_k^j \mathbf{e}'^k, \mathbf{e}'_i \rangle = \widetilde{s}_k^j \langle \mathbf{e}'^k, \mathbf{e}'_i \rangle = \widetilde{s}_k^j \delta_i^k = \widetilde{s}_i^j \text{ tj. } \widetilde{s}_i^k = \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}^k \rangle. \end{array}$$

Odavde odmah dobijamo sledeće tvrđenje:

4.3.3.1 Teorema $S_i^j = \widetilde{P}_i^j$, *dakle matrice* P *i* S *su uzajamno inverzne.*

Prema tome važi

$$x'_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}'_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \widetilde{s}_i^j \mathbf{e}_j \rangle = \widetilde{s}_i^j \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle = \widetilde{s}_i^j x_j = p_i^j x_j,$$

dakle $x'_i = \widetilde{p}_i^j x_j$. Otuda imamo sledeće formule prelaza sa jednog na drugi sistem koordinata.

$$\begin{array}{lll} x'_i & = p_i^j x_j & - \text{ kovarijantni prelaz} \\ x'^i & = \widetilde{p}_j^i x^j & - \text{ kontravarijantni prelaz.} \end{array} \tag{4.13}$$

Pojam tenzora dobijamo generalizacijom prethodnog razmatranja. Tenzor će biti konstrukt nad datim vektorskim prostorom koji je predstavljen svojim koordinatama - sistemom skalara u obliku više dimenzionalne matrice $T^{i_1 i_2 \ldots i_q}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$. Koordinate tenzora menjaju po linearnom zakonu, slično 4.13.

4.3.3.2 Definicija Tenzora *Tenzor T tipa (p,q) nad prostorom R^n je preslikavanje određeno sa n^{p+q} komponenti (koordinata)*

$$T^{i_1 i_2 \dots i_q}_{j_1 j_2 \dots j_p} \tag{4.14}$$

koje se menjaju u odnosu na parove $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ i $\mathbf{e}'_i$, $\mathbf{e}'^i$ dualnih baza na sledeći način:

$$T'^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = b^{l_1}_{i_1} b^{l_2}_{i_2} \cdots b^{l_q}_{i_p} c^{j_1}_{k_1} c^{j_2}_{k_2} \cdots c^{j_q}_{k_p} T^{k_1 k_2 \dots k_q}_{l_1 l_2 \dots l_p}. \tag{4.15}$$

Broj $p+q$ je rang tenzora T. Ovde je b^l_i matrica prelaza iz baze $\mathbf{e}_i$ u bazu $\mathbf{e}'_i$, dok je c^j_k matrica prelaza iz baze $\mathbf{e}^i$ u bazu $\mathbf{e}'^i$. Dakle matrice b^l_i i c^j_k su uzajamno inverzne.

U prethodnoj definiciji, komponente tenzora T u parovima dualnih baza $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ i $\mathbf{e}'_i$ i $\mathbf{e}'^i$ redom su

$$T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad T'^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

Ako to kontekst dozvoljava, nekad se umesto $T'^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ koristi oznaka $T^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}$.

Vidimo da komponente tenzora T čine jednu multidimenzionalnu tablicu $A\colon S^p \times S^q \to R$, $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Otuda kontravarijantni i kovarijantni ideksi $i, j, k, l, \dots$ u tenzorksim komponentama uzimaju celobrojne vrednosti $1, 2, \dots, n$, n je dimenzija prostora R^n. Elementi tablice A su skalari - realni brojevi. Kao što matrica $[L]_\mathbf{e}$ reprezentuje dati linearni operator L u bazi $\mathbf{e}$, tako A reprezentuje tenzor T u paru dualnih baza $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}^*$. Drugim rečima $A = [T]_{\mathbf{e},\mathbf{e}^*}$. Kao što za $[L]_\mathbf{e} = ||a^j_i||$ u Ajnštajnovoj notaciji kažemo da je operator L dat svojom matricom a^j_i (u bazi $\mathbf{e}$), isto kažemo da je tenzor T dat svojim komponentama $T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ (u dualnom paru baza $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}^*$). Kao što se operator L često identifikuje sa svojom reprezentacijom, matricom $[L]_\mathbf{e}$, na primer ako je u datom razmatranju baza $\mathbf{e}$ fiksirana, tako se i tenzor T identifikuje sa svojom "matricom" A, odnosno komponentama $T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$.

Priroda linearnog operatora L ne menja se izborom novog koordinantnog sistema (baze). Ako je, na primer, L rotacija oko neke ose, to će isto biti gledano iz bilo kojeg koordinantnog sistema (baze). Promenom baze menjaju se samo njegove koordinate, tj. matrica $[L]_{\mathbf{e}}$. Kao što znamo, matrice operatora L u različitim koordinantnim sistemima su slične. Tako je i kod tenzora, "sličnost" njegovih tablica komponenti u različitim parovima dualnih baza ostvaruje se linearnim vezama 4.15.

Znamo da se na skupu $\mathcal{H} = \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ i skupu njihovih matričnih reprezentacija $\mathbb{M}_n$ uvode razne algebarske operacije i algebarske strukture. Na primer, $\mathcal{H}$ prirodno nasleđuje strukturu vektorskog prostora sa baznog prostora nad istim skupom skalara. Slično važi i za tenzore istog tipa.

Na prirodan način definiše se zbir tenzora, množenje tenzora skalarom, kompozicija (proizvod) tenzora, pa tako i tenzori istog tipa čine vektorski prostor nad poljem skalara, u našem slučaju to su realni brojevi. Naravno, nad tenzorima postoje i druge operacije, na primer kontrakcija po datom indeksu i. Kada se u tenzor stavi ista kontravarijantna i kovarijantna indeksna promenljiva i, to prema Ajnštajnovoj konvenciji označava sumu komponenti po tom indeksu. Ova konstrukcija naziva se kontrakcijom tenzora po indeksu i. Novodobijeni konstrukt takođe je tenzor, nižeg ranga. Pa i za ovaj primer možemo reći da je inspirisan konstrukcijom iz matričnog računa. To je trag matrice a_i^j, $\mathrm{tr}||a_i^j|| = a_i^i = a_1^1 + \dots a_n^n$, važna invarijanta pripadnog linearnog operatora

Kao što ćemo videti iz primera, tenzori reprezentuju pojmove algebarsko-geometrijske prirode koji su definisani nad vektorskim prostorima i imaju skalarnu reprezentaciju 4.14, koje se u odnosu na linearne transformacije menjaju prema zakonu 4.15. Pored vektora, glavni primeri tenzora biće linearni operatori i skalarni proizvod. U drugom zasnivanju, tenzor nad prostorom V je vektor prostora U dobijenog konstrukcijom tenzorskog proizvoda iz prostora V i njegovog duala V^*. Tada su koordinate tenzora u prostoru U, gledanog kao vektora u prostoru U, date izrazom 4.14. Naravno, u obe vrste zasnivanja račun sa tenzorima je isti.

Spomenimo da se tenzori ranga 2 često zapisuju kao matrice. Elementi matrice su u tom slučaju komponente tenzora. Prilikom korišćenja matričnog zapisa tenzora treba biti pažljiv s obzirom da ovaj zapis briše tip tenzora.

4.3.4 Primeri tenzora

1° **Nula tenzor**, $T = \mathbf{0}$. T je tenzor ranga 0.

2° **Kronekerov simbol**, δ^i_j. Zaista, neka su oznake i pretpostavke kao u definiciji tenzora 4.3.3.2 Tada,

$$b^i_{i'} c^{k'}_k \delta^k_i = b^i_{i'} (c^{k'}_k \delta^k_i) = b^i_{i'} c^{k'}_i = \delta^{k'}_{i'}$$

s obzirom da su $b^i_{i'}$ i $c^{k'}_i$ uzajamno inverzne matrice. Dakle δ^k_i je tenzor tipa (1,1).

3° **Bilinearna forma** je svako preslikavanje $a(\mathbf{x}, \mathbf{y})\colon R^n \times R^n \to R$, linearno po svakoj svojoj promenljivoj $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Otuda u bazama $\mathbf{e}$ i $\mathbf{e}'$ i za matricu prelaza b^i_j iz baze e_i u $\mathbf{e}'_i$ važi

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= a(x^k \mathbf{e}_k, y^l \mathbf{e}_l) = x^k y^l a(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) \\ &= a_{kl} x^k y^l = a_{kl} b^k_i b^l_j x'^i x'^j \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dakle, $a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{kl} x^k y^l$. Ovde je $a_{kl} = a(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)$ matrica bilinearne forme a u bazi $\mathbf{e}$ i ona jedinstveno određuje $a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. U bazi $\mathbf{e}'$ isto je

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(x'^i \mathbf{e}'_i, y'^j \mathbf{e}'_j) = x'^i y'^j a(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = a'_{ij} x'^i y'^j.$$

S obzirom na jedinstvenost, na osnovu 4.16 sledi

$$a'_{ij} = b^k_i b^l_j a_{kl},$$

tj. a je tenzor tipa $(2, 0)$.

4° **Linearni operator** $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ reprezentovan je u bazi $\mathbf{e}$ matricom $[L]_{\mathbf{e}} = A = ||a^i_j||$ i tada je $[Lx]_{\mathbf{e}} = A\mathbf{x}_{\mathbf{e}}$. U bazi $\mathbf{e}'$ slično važi $[L]_{\mathbf{e}'} = A'x_{\mathbf{e}'}$, $A' = ||a'^i_j||$. Neka je $B = ||b^i_j||$ matrica prelaza iz baze $\mathbf{e}$ u bazu $\mathbf{e}'$. Kao što znamo, matrice A i A' su slične, tj. $A' = B^{-1}AB$. Neka je $B^{-1} = C = ||c^i_j||$. U Ajnštajnovoj notaciji prethodne uslove možemo zapisati na sledeći način.

$$a'^i_j = c^i_k a^k_l b^l_j = b^l_j c^i_k a^k_l.$$

Dakle L je tenzor tipa $(1,1)$.

5° **Metrički tenzor** g_{ij}. Neka je skalarni proizvod $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ u realnom vektorskom prostoru R^n određen simetričnom bilinearnom formom $a(x,y)$, tj. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a(x,y)$. Neka je $\mathbf{e}_i$ i e^i par dualnih baza prostora R^n. Neka su

$$g_{ij} = a(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle, \quad g^{ij} = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j \rangle = a(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j). \tag{4.17}$$

Prema trećem primeru, g_{ij} i g^{ij} su tenzori. S obzirom da je $a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ simetrična forma, važi $g_{ij} = g_{ji}$ i $g^{ij} = g^{ji}$, tj. g_{ij} i g^{ij} su simetrični tenzori. Tenzor g_{ij} naziva se metričkim tenzorom. Ovaj fundamentalni tenzor jedinstveno određuje skalarni proizvod, dakle geometriju prostora:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a(x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j) = x^i y^j a(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} x^i y^j$$

i slično $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = g^{ij} x_i y_j$. Otuda imamo ove formule reprezentacije skalarnog proizvoda preko metričkog tenzora.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = g^{ij} x_i y_j. \tag{4.18}$$

S obzirom na Gibsove formule, dobijamo

$$\mathbf{e}_i = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}^j = g_{ij} \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j \rangle \mathbf{e}_j = g^{ij} \mathbf{e}_j \tag{4.19}$$

Otuda $\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_k \rangle = g^{ij} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle$, odakle sledi $g^{ik} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = \delta^i_j$. Prema tome važi sledeće tvrđenje

4.3.4.1 Teorema *Matrice $||g^{ij}||$ i $||g_{ij}||$ su uzajamno inverzne.*

S obzirom na Gibsove formule takođe nalazimo

$$\mathbf{x} = \langle x, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}^i = \langle x^j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}^i = g_{ij} x^j \mathbf{e}^i = x_i \mathbf{e}^i$$

Slično izvođenje važi za x^i, pa imamo

Pravila podizanja i spuštanja indeksa

$$x_i = g_{ij} x^j, \quad x^i = g^{ij} x_j. \tag{4.20}$$

Tenzori g_{ij} i g^{ij} koriste se na sličan način za dizanje i spuštanje indeksa kod proizvoljnih tenzora.

5°.1 U prostoru $\mathbf{R}^n$, $g_{ii} = 1$, i $g_{ij} = 0$ za $i \neq j$. Dakle

$$||g_{ij}|| = \mathrm{diag}[1, 1, \ldots, 1], \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x^i y^i \tag{4.21}$$

5°.2 U prostoru Minkovskog $||g_{ij}|| = \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1]$, dok je

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3. \tag{4.22}$$

6° **Diskriminatni kososimetrični tenzor** ε. Neka je S_n skup permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, $p \in S_n$ i neka je

$$\varepsilon(p) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} \frac{p_i - p_j}{i - j} = (-1)^{I(p)},$$

$I(p)$ = broj inverzija u permutaciji p. Prelikavanje ε može se proširiti na sve funkcije

$$p : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, -1, 0\}$$

uzimajući $\varepsilon(p) = 0$ ako $p \notin S_n$. Dokazuje se da je ε tenzor. Tenzor ε zapisujemo pomoću koordinata $\varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_m}$

Napomena Ako je $A = ||a_{ij}||$ kvadratna matrica, tada je

$$\det(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{p \in S_n} \varepsilon(p) a_{1p_1} \cdots a_{np_n}. \tag{4.23}$$

Nad tenzorima se mogu primeniti konstrukcije koje proizvode nove tenzore. Jedan primer je kontrakcija tenzora po datom indeksu.

a) $T_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{\alpha \in S_n} T_\alpha$

b) Alternirajuća simetrizacija:

$$T_{[i_1 i_2 \ldots i_n]} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha \in S_n} \varepsilon(\alpha) T_\alpha. \tag{4.24}$$

Ovde je $\alpha = i_1, \ldots, i_n$ permutacija indeksa $i_1, \ldots, i_n$.

4.4 Tenzori na mnogostrukostima

Prelaskom na zakrivljen prostor-vreme nismo u mogućnosti da više koristimo Dekartove koordinate. Dakle, moramo koristiti krivoliniski sistem koordinata. Ipak, i dalje želimo da jednačine koje opisuju fizičke zakone, kao druge veličine (vektori, skalarni proizvod,...) budu invarijante u odnosu na promenu sistema koordinata.

Ako su $x^1, x^2, \ldots, x^n$ i $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$ dva sistema koordinata, prelazak iz jednog u drugi sistem beležimo sa

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad \text{u kraćem zapisu } x^{i'} = x^{i'}(x^i).$$

U Opštoj teoriji relativnosti $n = 4$, pa će biti $x^{i'} = x^{i'}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, gde je x^0-vremenska koordinata i x^1, x^2, x^3 su prostorne koordinate).

Koordinate sistema biramo tako da jednoznačno možemo prelaziti iz jednog u drugi koordinantni sistem. Dakle funkcije prelaza

$$\begin{aligned}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) &= F(x^0, x^1, x^2, x^3)\\ (x^0, x^1, x^2, x^3) &= G(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})\end{aligned}$$

moraju biti invertibilne u svim tačkama mnogostrukosti, osim eventualno u nekoliko tačaka (singulariteta).

Ova pretpostavka ekvivalentna je ispunjenosti uslova Teoreme o implicitnoj funkciji. Ovi uslovi predstavljeni su pomoću Jakobijana $||\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}||$:

$$||\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}|| \neq 0, \quad \text{odnosno}||\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}|| = 0. \tag{4.25}$$

Dakle, Jakobijan $||\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}||$ u ovom slučaju preuzima ulogu Gramove determinante kod linearnih prostora. Takođe se prepostavlja je da je mnogostrukosti glatke, tj. da njena jednačina ima neprekidne izvode (bar prvi i drugi). Tada se okolina tačke na mnogostrukosti može dobro aproksimirati tangentnim prostorom u toj tački. Na primer, okolina tačke na sferi dobro su aproksimira tangentnom ravni u toj tački.

Otuda, na primer za tenzore tipa $(2, 1)$, imamo sledeće pravilo za tenzorsku transformaciju:

$$T^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} T^i_{jk}. \tag{4.26}$$

Ostala pravila su slična onim kod tenzora u linearnim prostorima.

Glavno mesto kod tenzora nad mnogostrukostima ima metrički tenzor g_{ij}, odnosno g^{ij}, koji određuje geometriju mnogostrukosti. Kao i kod linearnih prostora za vektore u, v važi

$$\begin{array}{rclrcl} \langle u, v\rangle & = & g_{ij}u^iv^j, & & & \\ u_i & = & g_{ij}u^j, & u^i & = & g^{ij}u_j, \\ g_{ij} & = & g_{ji}, & g_{ik}g^{kj} & = & \delta^j_i. \end{array} \tag{4.27}$$

U Opštoj teoriji relativnosti za lokalni prostor uzima se prostor Minkovskog M. Drugim rečima, za tangentni prostor u tački A mnogostrukosti bira se prostor Minkovskog M. To znači da je za dati metrički tenzor g_{ij} moguće naći takav koordinantni sistem da je u zadatoj tački prostora metrika data matricom $\eta_{ij} = \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1]$. U opštem slučaju metrika je data diferencijalnom formom $ds^2 = g_{ij}x^iy^j$.

Primer:

$$t = t, \quad x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Neka je $g = det(g_{ij})$. U prostoru $\mathbf{R}^n$, u novom sistemu koordinata

$$||g'_{ij}|| = S^T E_n, \quad S \text{ je matrica prelaza,}$$

odakle $\det(g'_{ij}) = \det(S)^2$, tj. $g' = \det(S)^2 g$. U prostoru Minkovskog imamo $||\eta'_{ij}|| = S^T \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1]S$, odakle je $g' = \det(S)^2 g$, tj. $g' = \det(J)^2 g$, gde je $J = \|\dfrac{\partial x_{i'j'}}{\partial x_{ij}}\|$.