Slobodne algebre

(Ž. Mijajlović 2013-14)

Neka je T algebarska teorija (skup identiteta) jezika L i $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T)$ pridruženi varijetet. Dakle, $\mathcal{M}$ je klasa algebri jezika L takva da je $\mathbb{A} \in \mathcal{M}$ akko $\mathbb{A}$ zadovoljava sve aksiome (identitete) iz T.

Podsetimo se da $\mathbb{A} \models u = v$, u, v su termi jezika L i $\mathbb{A}$ je algebra jezika L, označava činjenicu da algebra $\mathbb{A}$ zadovoljava identitet $u = v$. Drugim rečima, $\mathbb{A} \models u = v$ akko za sve valuacije μ domena A važi $u^{\mathbb{A}}[\mu] = v^{\mathbb{A}}[\mu]$. Ovde, valuacija domena A je bilo koje preslikavanje $\mu : V \longrightarrow A$, V je skup promenljivih.

Def. 1.1. Neka je L algebarski jezik, u, v termi jezika L, i $\mathbb{A}$ algebra za L.

1. $\mathbb{A} \models T$ akko za sve $(u = v) \in T$ važi $\mathbb{A} \models u = v$.
2. $T \models u = v$ akko za sve $\mathbb{A} \in \mathcal{M}(T)$ važi $\mathbb{A} \models u = v$.
   Ako $T \models u = v$ kažemo da je $u = v$ semantička posledica teorije T.

Jednačinska logika $\mathcal{J}$ odnosi se na algebarski jezik L. Ova logika određena je sledećim aksiomama i pravilima izvođenja:

Shema aksioma: $u = u$

Pravila izvođenja: $\dfrac{u = v}{v = u}$, $\dfrac{u = v,\ v = w}{u = w}$, $\dfrac{u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1, \dots, x_n)}{u(t_1, \dots, t_n) = v(t_1, \dots, t_n)}$, $\dfrac{t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n}{u(t_1, \dots, t_n) = u(s_1, \dots, s_n)}$

$u, v, w, t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in Term_L$ (Lajbnicovo pravilo)

Dokaz u logici $\mathcal{J}$ na osnovu aksioma teorije T je bilo koji niz identiteta

(1.1) $\quad u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$, $\quad u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ su termi jezika L

takav da je svaki član ovog niza ili aksioma teorije T, ili je dobijen iz prethodnih članova niza primenom pravila izvođenja logike $\mathcal{J}$. Za identitet $u = v$ jezika L kažemo da je teorema teorije T akko je $u = v$ poslednji član dokaza (1.1). Da je $u = v$ teorema teorije T u logici $\mathcal{J}$, zapisujemo

$$T \vdash_{\mathcal{J}} u = v.$$

i kažemo da je $u = v$ sintaktička posledica teorije T u jednakosnoj logici.

Za algebarski varijetet $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T)$ kažemo da je netrivijalan akko $\mathcal{M}$ sadrži algebru koja ima bar dva elementa. U suprotnom, kažemo da je $\mathcal{M}$ trivijalan.

Def. 1.2 1. Algebarska teorija T je protivurečna u logici $\mathcal{I}$ akko $T \vdash x = y$, x, y su različite promenljive (sintaktička neprotivurečnost). T je (sintaktički) neprotivurečna akko T nije protivurečna.

2. T je semantički neprotivurečna ako postoji algebra $\mathbb{A}$ jezika L takva da je $\mathbb{A} \models T$.

U vezi sa prethodnim pojmovima mogu se postaviti sledeća pitanja:

P1. Da li važi $T \models u = v$ akko $T \vdash u = v$

P1'. Da li je T sintaksno neprotivurečna akko je T semantički neprotivurečna.

Ključna svojstva algebarskog varijeteta $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T)$ u da je $\mathcal{M}$ zatvoren za sledeće konstrukcije:

- podalgebre, tj. ako $\mathbb{A} \in \mathcal{M}$ i $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ tada $\mathbb{B} \in \mathcal{M}$,
- homomorfne slike, tj. ako $h : \mathbb{A} \xrightarrow{na} \mathbb{B}$ i $\mathbb{A} \in \mathcal{M}$, tada $\mathbb{B} \in \mathcal{M}$,
- proizvod algebri, tj ako $\mathbb{A}_i \in \mathcal{M}$, $i \in I$, tada $\prod_i \mathbb{A}_i \in \mathcal{M}$.

P2. Da li su prethodna tri svojstva dovoljna da karakterišu pojam algebarskog varijeteta. Drugim rečima, ako je $\mathcal{K}$ klasa algebri jezika L koja je zatvorena za konstrukcije podalgebri, homomorfnih slika i proizvod algebri, da li postoji algebarska teorija T takva da je $\mathcal{K} = \mathcal{M}(T)$.

G. Birkhoff dao je pozitivan odgovor na ovo pitanje i taj rezultat poznat je pod nazivom HSP teorema.

U odgovorima na pitanja P1, P1' i P2 ključno mesto ima pojam slobodne algebre.

Def. 1.3 (Slobodna algebra) Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri jezika L. Algebra $\Omega_X \in \mathcal{K}$ je <u>slobodna algebra</u> nad skupom slobodnih generatora $X \subseteq \Omega$ za klasu $\mathcal{K}$ akko za svako preslikavanje $f: X \to B$ postoji jedinstven homomorfizam $h: \Omega_X \to B$ takav da je $h \circ i_X = f$.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega_X \arrow[r, dashed, "h"] & B \\
X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad (D)
$$

Drugim rečima da je dijagram (D) komutativan.

Ovde je $i_X : X \to \Omega$ inkluzivno preslikavanje, tj. $i_X : x \mapsto x$, $x \in X$.

Dakle, h je ekstenzija preslikavanja f, odnosno f je restrikcija preslikavanja h na X.

<u>Primer 1.1.</u> $\Omega_P = (N^+, \cdot, 1)$, $N^+ = \{1,2,3,\dots\}$ je slobodna algebra za klasu komutativnih monoida i to nad skupom slobodnih generatora $P = \{2,3,5,7,11,\dots\}$ prostih brojeva. Tvrđenje sledi iz Osnovne teoreme aritmetike.

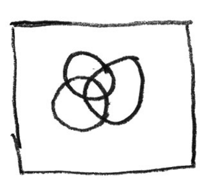
<u>Primer 1.2</u> $\Omega_A = (\mathcal{L}(A), \cdot, v)$; $\mathcal{L}(A)$ je skup reči nad nepraznim alfabetom A, operacija $\cdot$ je konkatenacija (dopisivanje reči), v je prazna reč, je slobodna algebra za klasu monoida.

<u>Primer 1.3.</u> $\Omega_n = \mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Z} = (Z, +, -, 0)$ je slobodna algebra za klasu Abelovih grupa. Skup slobodnih generatora je

$X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n = (0,0,\dots,0,1)$.

<u>Primer 1.4.</u> Ω_X Bulova algebra, $X \subseteq \Omega_X$, $\Omega_X = \langle X \rangle_{\Omega_X}$, gde X zadovoljava uslov Sikorskog:

$x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n} \neq 0$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $d_1, \dots, d_n \in \{0,1\}$.



Tada je Ω_X slobodna Bulova algebra nad X.

Na primer, tri kruga u ravni u opštem položaju (Venov dijagram) generišu slobodnu Bulovu algebru.

Teorema 1.1. Neka je Ω_X slobodna algebra nad X za klasu $\mathcal{K}$ i $u=v$ identitet jezika L.

a. Ako je $X=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ i $u=u(x_1,\dots,x_n)$, $v=v(x_1,\dots,x_n)$ i $\Omega_X \models u=v$ tada u svakoj $\mathbb{B}\in\mathcal{K}$ važi $\mathbb{B}\models u=v$.

b. Ako je X beskonačan skup tada za svaki identitet $u=v$ j. L, ako $\Omega_X\models u=v$ tada $\mathbb{B}\models u=v$, $\mathbb{B}\in\mathcal{K}$.

D. a. Pretpostavimo $\Omega_X\models u=v$ i neka je $\mathbb{B}\in\mathcal{K}$ proizvoljna. Neka su $b_1,\dots,b_n\in B$ i $f=\begin{pmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_n\\ b_1 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$. S obzirom da je Ω_X slobodna, postoji $h:\Omega_X\longrightarrow\mathbb{B}$, $f\subseteq h$, dakle $h(\omega_i)=b_i$, $i=1,\dots,n$. Prema pretpostavci $\Omega_X\models u=v$, dakle $u^{\Omega_X}(\omega_1,\dots,\omega_n)=v^{\Omega_X}(\omega_1,\dots,\omega_n)$, odakle

$$u^{\mathbb{B}}(b_1,\dots,b_n)=u^{\mathbb{B}}(h\omega_1,\dots,h\omega_n)=h\,u^{\Omega_X}(\omega_1,\dots,\omega_n)$$
$$=h\,v^{\Omega_X}(\omega_1,\dots,\omega_n)=v^{\mathbb{B}}(h\omega_1,\dots,h\omega_n)=v^{\mathbb{B}}(b_1,\dots,b_n).$$

S obzirom da je izbor elemenata $b_1,\dots,b_n\in B$ bio proizvoljan tvrđenje sledi. ■

b. je neposredna posledica od (a).

Detaljnijim uvidom u dokaz prethodne teoreme, takođe nalazimo (uz iste oznake):

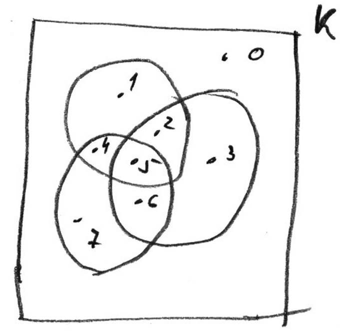
Teorema 1.2. a. Ako $\mathbb{B}=\langle b_1,\dots,b_n\rangle$ tada je $\mathbb{B}$ homomorfna slika algebre Ω_X, $\mathbb{B}=h\,\Omega_X$.

b. Ako $\mathbb{B}=\langle Y\rangle$ i $|X|=|Y|$ tada takođe $\mathbb{B}=h\,\Omega_X$.

Posledica 1.1. a. Za dokaz skupovnog identiteta

(1.1.1) $u(X,Y,Z,\cup,\cap,{}^c)=v(X,Y,Z,\cup,\cap,{}^c)$

dovoljna je provera na Venovom dijagramu.



b. Isto važi za (1.1.1) ako se umesto Venovog dijagrama uzmu skupovi $A=\{1,2,4,5\}$, $B=\{2,3,5,6\}$, $C=\{4,5,6,7\}$ i komplementiranje u odnosu na $K=\{0,1,\dots,7\}$.

2. Konstrukcija slobodne algebre za algebarske varijetete

U ovom odeljku dokazaćemo da svaki algebarski varijetet (sintaksno) neprotivurečne teorije ima slobodnu algebru nad skupom slobodnih generatora proizvoljne kardinalnosti $\kappa > 0$. U tom dokazu glavno mesto ima sledeći komutativan dijagram:

(D)
$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[dd, "k"'] \arrow[dr, "\nu"] & & V \arrow[ll, "i_V"'] \arrow[dl, dashed, "\mu"'] \arrow[dd, "k'"] \\
& \mathbb{B} & \\
\Omega/_{\sim} = \Omega_X \arrow[ur, dashed, "h"] & & X = V/_{\sim} \arrow[ll, "i_X"] \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

Neka je T sintaksno neprotivurečna algebarska teorija jezika L i $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(T)$. Dakle, za različite promenljive x, y, $T \nvdash x = y$. Konstrukciju slobodne algebre Ω_X sprovešćemo najpre za jedan specifičan skup X.

Neka je V skup nekih promenljivih, $|V| = \kappa$.

Neka je $\Omega = Term_L(V)$, tj. Ω je skup svih algebarskih izraza jezika L u kojima od promenljivih učestvuju jedino promenljive iz skupa V.

Apsolutno slobodna (ili term-algebra) je algebra Ω koja za domen ima skup Ω, dok su konstante i operacije u Ω definisane ovako:

$c^{\Omega} = c, \quad c \in Const_L$

$F^{\Omega}(t_1, \dots, t_n) = F(t_1, \dots, t_n), \quad F \in Fun_L^n, \quad t_1, \dots, t_n \in \Omega.$

Neka je binarna relacija $\sim$ domena Ω definisana na sledeći način:

$u \sim v$ akko $T \vdash_J u = v$, $\quad u, v \in Term_L$ (tj. $u, v \in \Omega$).

Lema 2.1. Relacija $\sim$ je relacija kongruencije algebre Ω.

D. S obzirom na svojstva jednakosti lako se dokazuje da je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Dokažimo da je $\sim$ saglasna sa operacijama algebre Ω.

Neka je $F \in Fun^n_L$ i neka su $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n \in \Omega$.

Pretpostavimo $u_1 \sim v_1, \ldots, u_n \sim v_n$. Tada $T \vdash u_1 = v_1, \ldots, T \vdash u_n = v_n$ te prema pravilu supstitucije za jednakosnu logiku sledi $T \vdash F(u_1, \ldots, u_n) = F(v_1, \ldots, v_n)$, tj. $F^\Omega(u_1, \ldots, u_n) \sim F^\Omega(v_1, \ldots, v_n)$. $\blacksquare$

Dakle postoji količnička algebra $\Omega/_\sim$ i kanonski homomorfizam $k: \Omega \longrightarrow \Omega/_\sim$. Za $t \in Term_L$ važi

(1) $k(t^\Omega(x_1, \ldots, x_n)) = t^{\Omega/_\sim}(kx_1, \ldots, kx_n) = t^{\Omega/_\sim}(x_1/_\sim, \ldots, x_n/_\sim)$.

S obzirom da je T sintaksno neprotivurečna, to za različite $x, y \in V$ imamo $T \nvdash x = y$, tj. $x \not\sim y$, ako se promenljive x, y gledaju kao termi. Dakle $x/_\sim \neq y/_\sim$ pa za $X = V/_\sim$ i $k' = k|V$ imamo

(2) $k': V \xrightarrow[1-1]{na} X$.

Označimo $\Omega/_\sim$ sa Ω_X. Tada prema (2)

(3) Ω_X je netrivijalna algebra.

Lema 2.2. $\Omega_X \in \mathcal{M}(T)$.

D. Neka je $(u = v) \in T$. Tada $T \vdash_J u = v$ pa $u \sim v$, odakle $u/_\sim = v/_\sim$. Neka je $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ i $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ i neka su $a_1, \ldots, a_n \in \Omega_X$ proizvoljni. Dokazujemo da je

$$u^{\Omega_X}(a_1, \ldots, a_n) \equiv v^{\Omega_X}(a_1, \ldots, a_n).$$

Postoje $t_1, \ldots, t_n \in \Omega$ tako da je $a_i = t_i/_\sim$, $i = 1, \ldots, n$.

Kako je $T \vdash_J u(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_n)$, to je $T \vdash_J u(t_1, \ldots, t_n) = v(t_1, \ldots, t_n)$, odakle $u(t_1, \ldots, t_n) \sim v(t_1, \ldots, t_n)$, tj. $u(t_1, \ldots, t_n)/_\sim = v(t_1, \ldots, t_n)/_\sim$. Otuda

$u^{\Omega_X}(a_1, \ldots, a_n) \equiv u^{\Omega_X}(t_1/_\sim, \ldots, t_n/_\sim) \equiv u^{\Omega_X}(kt_1, \ldots, kt_n) \equiv$
$k(u^\Omega(t_1, \ldots, t_n)) \equiv u(t_1, \ldots, t_n)/_\sim \equiv v(t_1, \ldots, t_n)/_\sim =$
$k(v^\Omega(t_1, \ldots, t_n)) \equiv v^{\Omega_X}(kt_1, \ldots, kt_n) \equiv v^{\Omega_X}(a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

Na osnovu (3) i prethodne leme odmah imamo pozitivan odgovor na pitanje P1':

Posledica 2.3. Ako je T sintaksno neprotivurečna teorija, tada je $\mathcal{M}(T)$ netrivijalan varijetet.

Neka su $i_V : V \longrightarrow \Omega$ i $i_X : X \longrightarrow \Omega_X$ inkluziona preslikavanja:
$i_V : x \longmapsto x,\ x \in V$, $\quad i_X : x \longmapsto x,\ x \in X$.

Tada imamo sledeći komutativan dijagram, spoljni okvir dijagrama (D)

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[d, "k"'] & V \arrow[l, "i_V"'] \arrow[d, "k'"] \\
\Omega_X & X \arrow[l, "i_X"]
\end{tikzcd}
\qquad k \circ i_V = i_X \circ k'$$

Dokazujemo da je Ω_X slobodna algebra za klasu $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T)$ nad skupom slobodnih generatora X. Neka je $\mathbb{B} \in \mathcal{M}$ i $f : X \longrightarrow B$.

$$(D')\qquad \begin{tikzcd}
\Omega_X \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{B} \\
X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad h \circ i_X = f$$

Dokazujemo da postoji homomorfizam $h : \Omega_X \longrightarrow \mathbb{B}$, $f \subseteq h$ tj. takav da dijagram (D') komutira. Primetimo da je (D') deo dijagrama (D).

Neka je $\mu = f \circ k'$. Tada je μ valuacija domena B.

Neka je $\nu : \Omega \longrightarrow B$ definisano sa $\nu(t) = t^{\mathbb{B}}[\mu]$, $t \in \Omega$.

Neka je $c \in Const_L$. Tada

$$\nu(c^{\Omega}) = \nu(c) = c^{\mathbb{B}}[\mu] = c^{\mathbb{B}}, \text{ tj. } \nu(c^{\Omega}) = c^{\mathbb{B}}.$$

Neka je $F \in Fun_L^n$ i $t_1, \dots, t_n \in \Omega$. Tada

$$\nu(F^{\Omega}(t_1, \dots, t_n)) = \nu(F(t_1, \dots, t_n)) = F^{\mathbb{B}}(t_1^{\mathbb{B}}[\mu], \dots, t_n^{\mathbb{B}}[\mu])$$
$$= F^{\mathbb{B}}(\nu(t_1), \dots, \nu(t_n)).$$

Dakle

(4) a. $\nu \circ i_V = \mu$,

b. $\nu : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$, tj. ν je homomorfizam iz algebre Ω u $\mathbb{B}$.

Neka su $u, v \in Term_L$ i $u/_\sim = v/_\sim$. Tada $T \vdash u = v$, pa $\mathbb{B} \models u = v$.

Dakle $u^{\mathbb{B}}[\mu] = v^{\mathbb{B}}[\mu]$. Otuda je preslikavanje $h : \Omega_X \longrightarrow B$

$h(t/_\sim) = t^{\mathbb{B}}[\mu]$ dobro definisano i takođe

(5) $h \circ k = \nu$.

S obzirom da su k i ν homomorfizmi i k je na, odmah sledi da je

(6) h takođe homomorfizam:

Ako je $c \in Const_L$, tada $h(c^{\Omega_X}) = (h \circ k)(c^{\Omega}) = \nu(c^{\Omega}) = c^{\mathbb{B}}$.

Ako je $F \in Fun_L^n$ i $t_1, \ldots, t_n \in Term_L$, tada

$$\begin{aligned} h(F^{\Omega_X}(t_1/_\sim, \ldots, t_n/_\sim)) &= h(F^{\Omega_X}(kt_1, \ldots, kt_n)) = h(k(F^{\Omega}(t_1, \ldots, t_n))) \\ &= (h \circ k)(F^{\Omega}(t_1, \ldots, t_n)) = \nu(F^{\Omega}(t_1, \ldots, t_n)) \\ &= F^{\mathbb{B}}(\nu t_1, \ldots, \nu t_n) = F^{\mathbb{B}}((h \circ k)(t_1), \ldots, (h \circ k)(t_n)) \\ &= F^{\mathbb{B}}(h(t_1/_\sim), \ldots, h(t_n/_\sim)). \end{aligned}$$

Najzad, neka je $x \in V$. Tada $x/_\sim \in X$ i

$h(x/_\sim) = (h \circ k)(x) = \nu(x) = \mu(x) = (f \circ k')(x) = f(x/_\sim)$, tj.

(7) $h|X = f$, tj. $h \circ i_X = f$ pa dijagram (D') komutira.

S obzirom na (1)-(7) i dijagram (D) je komutativan.

Ovim smo dokazali

<u>Lema 2.4.</u> Ω_X je slobodna algebra za varijetet $\mathcal{M}(T)$ nad skupom slobodnih generatora X.

Sada možemo dati odgovor na teži deo pitanja P1,:

Ako identitet $u = v$ jezika L važi u svim algebrama varijeteta $\mathcal{M}(T)$, da li je $u = v$ teorema teorije T u jednakosnoj logici, tj. da li

(8) $\mathcal{M}(T) \models u = v$ povlači $T \vdash_J u = v$.

Dokazaćemo kontrapoziciju tvrđenja (8).

Teorema 2.5 (Teorema potpunosti - teži deo za jednakosnu logiku). Neka je $u=v$ identitet jezika L i T algebarska teorija (skup identiteta) jezika L. Tada

$$\mathcal{M}(T) \models u=v \text{ povlači } T \vdash_J u=v.$$

Dokaz Pretpostavimo oznake i algebre kao u dijagramu (D), neka je $u=u(x_1,\dots,x_n)$, $v=v(x_1,\dots,x_n)$ i neka je V skup promenljivih takav da je $x_1,\dots,x_n\in V$. Pretpostavimo $T \nvdash_J u=v$. Tada $u \not\sim v$, tj. $u/_\sim \neq v/_\sim$ odakle $k(u)\neq k(v)$. Otuda

$$u^{\Omega_X}(x_1/_\sim,\dots,x_n/_\sim) = u^{\Omega_X}(kx_1,\dots,kx_n) = k(u^{\Omega}(x_1,\dots,x_n))$$
$$= k(u) \neq k(v) = v^{\Omega_X}(x_1/_\sim,\dots,x_n/_\sim)$$

dakle identitet $u=v$ ne važi u Ω_X. S obzirom da je $\Omega_X\in\mathcal{M}(T)$, to $\mathcal{M}(T)\not\models u=v$. Prema tome dokazali smo da

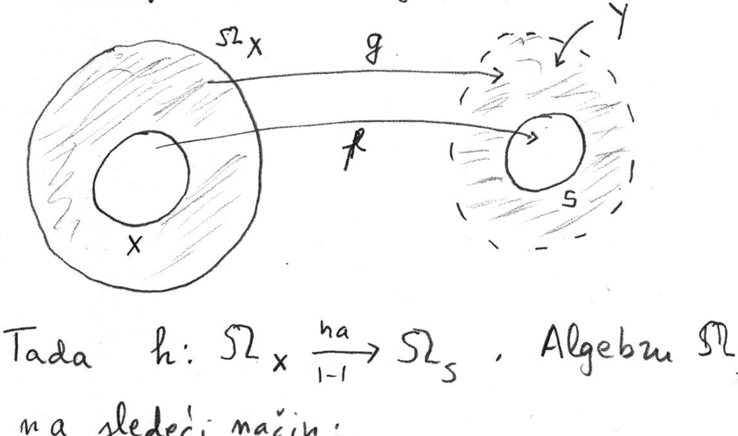
$$T\nvdash_J u=v \text{ povlači } \mathcal{M}(T)\not\models u=v$$

čime je Teorema dokazana. ∎

U sledećih nekoliko teorema opisujemo svojstva slobodnih algebri.

Teorema 2.6. Neka je $\mathcal{M}=\mathcal{M}(T)$ netrivijalan algebarski varijetet jezika L. Tada za svaki svaki $S\neq\emptyset$ postoji slobodna algebra Ω_S za $\mathcal{M}$ sa skupom S slobodnih generatora.

D. Neka je Ω_X slobodna algebra nad X opisana u dokazu Leme 2.4, $|X|=|S|$. Dokaz sprovodimo idejom prenosa struktura.



Neka je Y takav skup da je $Y\cap S=\emptyset$, $|Y|=|\Omega_X\setminus X|$,

$f: X \xrightarrow[1-1]{na} S$, $g:\Omega_X\setminus X \xrightarrow[1-1]{na} Y$ i

$h=f\cup g$, $\Omega_S = S\cup Y$.

Tada $h:\Omega_X \xrightarrow[1-1]{na}\Omega_S$. Algebru Ω_S sa domenom Ω_S definišemo na sledeći način:

Neka je $c\in Const_L$. Tada $c^{\Omega_S}\equiv h(c^{\Omega_X})$

Neka je $F\in Fun_L^n$ i $a_1,\dots,a_n\in\Omega_S$. Tada $F^{\Omega_S}(a_1,\dots,a_n)\equiv h(F^{\Omega_X}(h^{-1}a_1,\dots,h^{-1}a_n))$.

Tada $h : \Omega_X \cong \Omega_S$ i $h|X = f$. Dokažimo da je Ω_S slobodna algebra za varijetet $\mathcal{M}$ sa skupom slobodnih generatora S. U tom cilju konstruišemo sledeći komutativan dijagram, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}$,

$$\begin{tikzcd}
\Omega_X \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & & \Omega_S \arrow[dl, dashed, "\delta"] \\
& \mathbb{B} & \\
X \arrow[uu, "i_X"] \arrow[ur, dashed, "\beta"] \arrow[rr, "f"'] & & S \arrow[uu, "i_S"'] \arrow[ul, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

$h \circ i_X = i_S \circ f$ s obzirom da je $h|X = f$

Neka je $\alpha : S \longrightarrow B$ proizvoljno preslikavanje i neka je $\beta = \alpha \circ f$.

S obzirom da je Ω_X slobodna nad X, to postoji $\psi : \Omega_X \longrightarrow \mathbb{B}$ t.d. $\psi \circ i_X = \beta$.

Neka je $\delta = \psi \circ h^{-1}$! Tada $\delta : \Omega_S \longrightarrow \mathbb{B}$.

Dakle imamo:

$h \circ i_X = i_S \circ f$

$\beta = \alpha \circ f$

$\beta = \psi \circ i_X$

$\psi = \delta \circ h$

Dokažimo da iz ovih jednakosti sledi $\alpha = \delta \circ i_S$:

$\alpha \circ f = \beta = \psi \circ i_X = \delta \circ h \circ i_X = \delta \circ i_S \circ f$, tj.

$\alpha \circ f = \delta \circ i_S \circ f$, odakle $\alpha \circ f \circ f^{-1} = \delta \circ i_S \circ f \circ f^{-1}$, tj.

$\alpha \circ i_S = \delta \circ i_S \circ i_S$, pa $\alpha = \delta \circ i_S$.

Ovim smo dokazali da se ~~za~~ svaku algebru $\mathbb{B} \in \mathcal{M}$ i svako preslikavanje $\alpha : S \to B$ podiže do homomorfizma $\delta : \Omega_S \longrightarrow \mathbb{B}$, dakle Ω_S je zaista slobodna algebra za $\mathcal{M}$ nad S. ∎

Da je Ω_X slobodna algebra za klasu algebri $\mathcal{M}$ nad skupom slobodnih generatora X, koristićemo kraću frazu: Par (Ω, X) je slobodna algebra za klasu $\mathcal{M}$.

U literaturi može se naći i sledeća, nešto opštija varijanta slobodne algebre za klasu algebri $\mathcal{M}$. Neka je (Ω, X) slobodna algebra za $\mathcal{M}$ i neka je S skup i $g : S \xrightarrow[1-1]{na} X$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{B} \\
X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, dashed, "f'"] & S \arrow[u, "f"'] \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

(D_1)

$f' = f \circ g^{-1}$

$\mathbb{B} \in \mathcal{M}$

Tada $i_X \circ g = g$ i za $f' = f \circ g^{-1}$ postoji jedinstven $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ tako da je $h \circ i_X = f'$, pa i $h \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{B} \\
S \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

(D_2)

g je 1-1

Dakle svako preslikavanje $f : S \to \mathbb{B}$ podiže se do jedinstvenog dijagrama (D_2). Otuda se i trojka (Ω, S, g) naziva takođe slobodnom algebrom za $\mathcal{M}$ nad skupom slobodnih generatora S.

Teorema 2.7. Neka su (Ω, X), (Ω', Y) slobodne algebre za klasu algebri $\mathcal{M}$. Tada

$$|X| = |Y| \text{ povlači } \Omega \cong \Omega'$$

Dokaz Neka je $f : X \xrightarrow[1-1]{na} Y$. Tada postoje jedinstveni homomorfizmi α, β tako da su sledeći dijagrami komutativni.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, dashed, "\alpha"] & \Omega' \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "i_Y"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega' \arrow[r, dashed, "\beta"] & \Omega \\ Y \arrow[u, "i_Y"] \arrow[r, "f^{-1}"'] & X \arrow[u, "i_X"'] \end{tikzcd}$$

Dakle,

$\alpha \circ i_X = i_Y \circ f = f$

$\beta \circ i_Y = i_X \circ f^{-1}$

Otuda

$$\left.\begin{aligned} \alpha \circ i_X &= f \\ \beta \circ f &= i_X \end{aligned}\right\} \text{ pa } (\beta \circ \alpha) \circ i_X = i_X$$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\beta\circ\alpha"] & \Omega \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, "i_X"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "i_\Omega"] & \Omega \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, "i_X"'] & \end{tikzcd}$$

(D_1) $\qquad$ (D_2)

Dakle $i_X : X \longrightarrow \Omega$ produžuje se do $\beta \circ \alpha : \Omega \longrightarrow \Omega$ (dijagram (D_1)), ali i do $i_\Omega : \Omega \longrightarrow \Omega$ (dijagram (D_2)) odakle zbog jedinstvenosti produženja sledi $\beta \circ \alpha = i_\Omega$.

Slično nalazimo $\alpha \circ \beta = i_{\Omega'}$. Otuda su α, β 1-1 i na i $\beta = \alpha^{-1}$! ∎

Teorema 2.8 Neka je (Ω, X) slobodna algebra za klasu algebri $\mathcal{M}$. Tada je $\Omega = \langle X \rangle$, tj. Ω je generisana skupom X.

D. Neka je $\Omega' = \langle X \rangle_\Omega$, tada je $\Omega' \subseteq \Omega$ i (Ω', X) je takođe slobodna algebra za $\mathcal{M}$. Zaista, ako je $B \in \mathcal{M}$ i $f : X \to B$ i $h : \Omega \to B$ jedinstven homomorfizam koji širi f, tada je $h' = h|\Omega'$, $h' : \Omega' \to B$ takođe jedinstven homomorfizam koji širi f na Ω'. Tada imamo sledeće komutativne dijagrame

$$\begin{tikzcd} \Omega' \arrow[r, "{\alpha, i_{\Omega'}}"] & \Omega \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "i_X"'] & X \arrow[u, "i_X"'] \end{tikzcd}$$

α širi i_X
zbog jedinstvenosti
$\alpha = i_{\Omega'}$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\beta"] & \Omega' \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "i_X"'] & X \arrow[u] \end{tikzcd}$$

β širi i_X
$\alpha \circ \beta = i_\Omega$ zbog jedinstvenosti, jer i $\alpha \circ \beta$ i i_Ω šire i_X
Otuda je α na,
tj. $i_{\Omega'}$ je na, dakle $\Omega = \Omega'$. ∎

Posledica 2.9. Neka je (Ω, X) slobodna algebra za klasu algebri $\mathcal{M}$, i neka je $Y \subseteq X$, $\Omega' = \langle Y \rangle_{\Omega}$. Tada je (Ω', Y) slobodna algebra za klasu $\mathcal{M}$.

D. Neka je $\mathbb{B} \in \mathcal{M}$ i $f' : Y \longrightarrow \mathbb{B}$ i $f : X \longrightarrow B$ tako da $f' \subseteq f$. S obzirom da je Ω_X slobodna, postoji $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$, $h \supseteq f$. Neka je $h' = h | \Omega'$, tada $h' : \Omega' \longrightarrow \mathbb{B}$ i $h' \supseteq f'$. Takav homomorfizam h' je jedinstven s obzirom da Ω' generisano sa Y i na osnovu teoreme koja kaže da je homomorfizam jedinstveno određen svojim vrednostima na skupu generatora, što jeste u ovom slučaju jer $h'|Y = f'$.

Teorema 2.10 (Tarski–Jonson) Neka klasa algebri $\mathcal{M}$ ima konačnu algebru $\mathbb{B}$. Dalje, neka je (Ω, X) slobodna algebra za klasu $\mathcal{M}$ i neka je $Y \subseteq \Omega$ i $\Omega = \langle Y \rangle$. Ako su X, Y konačni tada $|X| \leq |Y|$.

Dokaz S obzirom da se proizvoljno preslikavanje $f : X \longrightarrow B$ širi do jedinstvenog homomorfizma $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$, to je

$$|\mathrm{Hom}(\Omega, \mathbb{B})| = |B^X|.$$

S druge strane, preslikavanje $f : Y \longrightarrow B$ širi se do najviše jednog homomorfizma $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ (vidi dokaz Posledice 2.9), a činjenica je da svaki $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ širi neko preslikavanje $g : Y \longrightarrow B$, to je $g = h|Y$. Dakle

$$|\mathrm{Hom}(\Omega, \mathbb{B})| \leq |B^Y|.$$ Otuda

$$|B^X| \leq |B^Y|, \text{ tj. } |B|^{|X|} \leq |B|^{|Y|}, \text{ pa } |X| \leq |Y|.$$ ∎

Posledica 2.11 Ako je (Ω, X) slobodna algebra za $\mathcal{M}$, uz uslove prethodne teoreme, X je generatorni skup algebre Ω sa najmanjim brojem elemenata.

Posledica 2.12 Uz uslove prethodne teoreme, ako su (Ω, X) i (Ω, Y) slobodne algebre za klasu $\mathcal{M}$, tada je $|X| = |Y|$.

Primer 2.13 Neka je $\mathbb{Z}=(Z,+,-,0)$ aditivna grupa celih brojeva. Tada za $m\neq n$, $m,n\in N$, $\mathbb{Z}^m\not\cong\mathbb{Z}^n$.

Dokaz Neka je $\mathcal{M}$ klasa Abelovih grupa i neka je $\mathbb{Z}_2$ ciklična grupa reda 2. Tada $\mathbb{Z}_2\in\mathcal{M}$. Takođe je $\mathbb{Z}^n$ slobodna algebra generisana sa $X=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, $e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,0,\dots,0,1)$. Prema prethodnoj teoremi $|Hom(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z}_2)|=|\mathbb{Z}_2^X|=2^n$. Otuda, ako $m\neq n$
$Hom(\mathbb{Z}^m,\mathbb{Z}_2)\neq (Hom(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z}_2)$ pa $\mathbb{Z}^m\not\cong\mathbb{Z}^n$. ∎

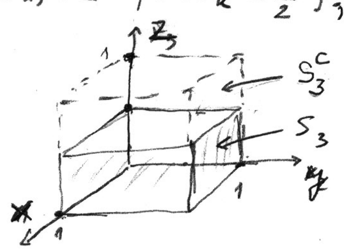
Jedan od zadataka predmeta Univerzalna algebra je da se opišu slobodne algebre za dati varijetet $\mathcal{M}(T)$.

Primer 2.14. Opis slobodnih Bulovih algebri.

Teorema Sikorskog Neka je $\mathbb{B}$ Bulova algebra i $X\subseteq B$, $\mathbb{B}=\langle X\rangle$. Skup X slobodno generiše $\mathbb{B}$ akko

(S) $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\neq 0$, $\alpha\in 2^n$, za sve različite $x_1,\dots,x_n\in X$, $n\in N^+$.

Dokaz 1. Pretpostavimo da je (B,X) slobodna Bulova algebra. S obzirom da klasa Bulovih algebri čini varijetet, prema Teoremi 2.6, nad proizvoljnim skupom X postoji slobodna BA $(\mathbb{B},X)$.
Neka je $n\geq 1$, $I=[0,1]$ realni interval i $S_k=\{(x_1,\dots,x_n)\in I^n\mid 0\leq x_k\leq\frac{1}{2}\}$, $n\leq|X|$.
i $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{P}(I^n)$ skupovna algebra
$\mathbb{K}=(K,\cup,\cap,^c,\emptyset,I^n)$ generisana skupovima $S_1,\dots,S_n$.
Koristimo oznake: $S^1=S$, $S^0=S^c=I^n\setminus S$.
Tada $b\in S_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap S_n^{\alpha_n}$, $\alpha\in 2^n$,
gde $b=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\beta_i=1/2$ ako $\alpha_i=1$
$\beta_i=1$ ako $\alpha_i=0$



$S_3^1=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq\frac{1}{2}, 0\leq y,z\leq 1\}$

$S_3^0=\{(x,y,z)\mid\frac{1}{2}<x\leq 1, 0\leq y,z\leq 1\}$

Dakle $S_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap S_n^{\alpha_n}\neq\emptyset$.
Neka je $f:X\longrightarrow\mathbb{K}$, $f(x_1)=S_1,\dots,f(x_n)=S_n$. S obzirom da je $\mathbb{B}$ slobodna nad skupom X, to postoji $h:\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{K}$, $f\subseteq h$, odakle
$h(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n})=h(x_1)^{\alpha_1}\cap\dots\cap h(x_n)^{\alpha_n}=S_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap S_n^{\alpha_n}\neq\emptyset$, pa $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\neq 0$.

2. Neka je Ω Bulova algebra $X \subseteq \Omega$, $\Omega = \langle X \rangle$ i pretpostavimo da X zadovoljava uslov Sikorskog (S).

Neka je $b \in \Omega$, $b \neq 0$. Kako je Ω generisana skupom X, postoji Bulov term t tako da je $b = t^{\Omega}(x_1, \dots, x_n)$ za neke $x_1, \dots, x_n \in X$.

S obzirom na Teoremu o savršenoj disjunktivnoj normalnoj formi za bulovske terme, postoji $\Gamma \subseteq 2^n$ tako da je

$$b = \sum_{\alpha \in \Gamma} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \left(\equiv \bigvee_{\alpha \in \Gamma} (x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n})\right).$$

Skup Γ je jedinstven u sledećem smislu. Ako je $\Gamma' \subseteq 2^n$ i

$$(*) \quad b = \sum_{\alpha \in \Gamma'} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

tada $\Gamma = \Gamma'$. Zaista, pretpostavimo suprotno, $\Gamma \neq \Gamma'$; recimo da je $\beta \in \Gamma \setminus \Gamma'$. Tada

$$b \wedge x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} = \sum_{\alpha \in \Gamma} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \neq 0$$

$$b \wedge x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} = \sum_{\alpha \in \Gamma'} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} = 0 \quad , \quad \text{kontradikcija.}$$

Neka je $\mathbb{B}$ proizvoljna Bulova algebra i $f : X \longrightarrow B$ takođe proizvoljno preslikavanje. Prema $(*)$, preslikavanje $h : \Omega \longrightarrow B$,

$$h(b) = f(x_1)^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge f(x_n)^{\alpha_n}) \ , \ b \in B$$

je dobro definisano i neposredno se proverava da je homomorfizam. ∎

<u>Zadatak 1.</u> (u vezi sa dokazom Teoreme 2.6.) Neka su S, X proizvoljni skupovi. Dokazati da postoji skup Y takav da je $|Y| = |X|$ i $Y \cap S = \emptyset$.

<u>Zadatak 2.</u> Neka je Ω apsolutno slobodna algebra (term algebra) za algebarski jezik L nad skupom promenljivih V. Dokazati da je (Ω, V) slobodna algebra za klasu svih algebri jezika L.

<u>Zadatak 3.</u> Neka je $u = v$ identitet jezika L i pretpostavimo da $u = v$ važi u svim algebrama jezika L. Dokazati da su u i v identični termi.

<u>Zadatak 4.</u> Neka je (Ω, X) slobodna algebra za klasu algebri jezika L. Dokazati da je $|\Omega| \leq \max(|X|, |L|, \aleph_0)$.

Jedan od važnih zadataka teorije slobodnih algebri je da se opišu slobodne algebre za datu klasu algebri. Pogledajmo nekoliko primera.

2.15. Slobodne Bulove algebre

Neka je (Ω, X) slobodna Bulova algebra. Razlikovaćemo dva slučaja. Prvi slučaj je ako je skup slobodnih generatora X konačan, drugi ako je X beskonačan.

1. Slučaj X je konačan. S obzirom da je Ω generisana skupom X, to je Ω konačno generisana, dakle Ω je konačna Bulova algebra. Neka je $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. Dokazaćemo da je $\Omega_n \cong 2^{2^n}$, $\Omega_n=\Omega$, gde je 2 dvočlana Bulova algebra. Podsetimo se da X zadovoljava uslov Sikorskog:

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}\neq 0,\quad \alpha\in 2^n.$$

Neka je $\mathbb{B}$ bilo koja Bulova algebra. Prema Teoremi 2.14, svako preslikavanje $f: X\to B$ može podignuti do komutativnog dijagrama:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{B} \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad f=h\circ i_X$$

Dokažimo da je $|\Omega| = 2^{2^n}$. Prema dokazu T. 2.14, za svaki $a\in\Omega$ postoji jedinstven $\Gamma\subseteq 2^n$ tako da je

$$a_\Gamma = \sum_{\alpha\in\Gamma} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$$

Dakle $\Omega=\{a_\Gamma \mid \Gamma\subseteq 2^n\}$, pa $|\Omega|=2^{2^n}$. S obzirom da proizvoljne konačne Bulove algebre $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ važi:

Ako $|A|=|A'|$ onda $\mathbb{A}\cong\mathbb{A}'\cong 2^m$ za neki m,

sledi $\Omega\cong 2^{2^n}$. $\boxtimes$

Posledica 1. Ako je $u=v$ Bulov identitet i $2\models u=v$, tada $BA\vdash_J u=v$

BA je teorija Bulovih algebri.

Zaista, pretpostav. $u=u(x_1,\dots,x_n)$, $v=v(x_1,\dots,x_n)$ i $2\models u=v$, tada $2^{2^n}\models u=v$ s obzirom da se identiteti prenose na proizvod algebri. S obzirom da je $\Omega_n = 2^{2^n}$ to prema T. 1.1. i Teoremi potpunosti za jednakosnu logiku sledi $\vdash_J u=v$.

Posledica 2. Neka je $u=v$ identitet u jeziku $L_D = \{\wedge, \vee\}$ distributivnih mreža. Primetimo da je L_D podjezik jezika $L_{BA} = \{\wedge, \vee, ', 0, 1\}$.

Dokazaćemo ~~da~~ Ako $2 \models u=v$, tada identitet $u=v$ važi u svim distributivnim mrežama. Ovde ćemo se pozvati na teoremu koja kaže da je svaka distributivna mreža $\mathbb{M}=(M,\vee,\wedge)$ podalgebra algebre $(B,\vee,\wedge)$ gde je $\mathbb{B}=(B,\vee,\wedge,',0,1)$ neka Bulova algebra. Pa ako $2 \models u=v$, tada prema prethodnoj posledici $\mathbb{B} \models u=v$ pa s obzirom da se identiteti prenose na podalgebre, sledi $\mathbb{M} \models u=v$.

Napomena Važi preciznije tvrđenje koje se odnosi na proširenje distributivnih mreža na Bulove algebre. Naime neka je $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{B}$, i $\mathbb{B}(M) = \langle M \rangle_{\mathbb{B}}$. Tada je $\mathbb{B}(M)$ jedinstveno određena, tj. ako $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{B}'$ tada $\mathbb{B}(M) \cong \mathbb{B}'(M)$. Takođe, $\mathbb{B}(M)$ je najmanja Bulova algebra koja sadrži mrežu $\mathbb{M}$, tj. za bilo koju Bulovu algebru $\mathbb{B}'$, utapanje $f: \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{B}'$ produžuje se do komutativnog dijagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}(M) \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{B}' \\ \mathbb{M} \arrow[u, "i_M"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$f = h \circ i_M$, h je homomorfizam.

Posledica 3. Bulova algebra 2^m generisana je nekim skupom X, $|X| \leq \lceil \log_2 m \rceil$. Ovde je $\lceil x \rceil$ najmanji prirodan broj n, $x \leq n$.

Dokaz Neka je $m \leq n$. Tada je 2^m homomorfna slika algebre 2^n. Homomorfizam se dobija odsecanjem koordinata:

$$h: 2^n \longrightarrow 2^m, \qquad h: (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_m), \quad (x_1, \dots, x_n) \in 2^n.$$

Na pr., $h: 2^4 \longrightarrow 2^2$, $\quad h: (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1, x_2)$.

S obzirom da je 2^m homomorfna slika algebre 2^{2^n} za $n = \lceil \log_2 m \rceil$, i $\Omega_n = 2^{2^n}$ je generisana skupom od n (slobodnih) generatora, tvrđenje sledi. ∎

Lindenbaumova algebra. Sledećom konstrukcijom utvrđuje se primer slobodne Bulove algebre nad proizvoljnim skupom $X \neq \emptyset$.

Neka je $\kappa = |X|$ i neka je L iskazna logika nad skupom iskaznih slova (promenljivih) $\mathcal{P}$, $|\mathcal{P}| = \kappa$. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih iskaznih formula nad ovim promenljivama, tj.

$$\mathcal{F} = \{ \varphi(p_1, \dots, p_n) \mid p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{N},\ \varphi \text{ je iskazna formula} \}.$$

Uvedimo binarnu relaciju $\sim$ na $\mathcal{F}$ na sledeći način:

$$\varphi \sim \psi \quad \text{akko} \quad \models_L \varphi \Leftrightarrow \psi, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{F}.$$

Dakle, $\varphi \sim \psi$ akko je $\varphi \Leftrightarrow \psi$ tautologija.

Lema 2.16. 1. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije skupa $\mathcal{F}$.

2. Neka su $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in \mathcal{F}$. Tada

a. Ako $\varphi \sim \psi$ tada $\neg\varphi \sim \neg\psi$

b. Ako $\varphi_1 \sim \psi_1$ i $\varphi_2 \sim \psi_2$ tada $\varphi_1 \vee \varphi_2 \sim \psi_1 \vee \psi_2$ i $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \sim \psi_1 \wedge \psi_2$.

Dokaz. Dokažimo, na primer, tranzitivnost relacije $\sim$. Ostali delovi iskaza leme dokazuju se na sličan način. Neka su $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{F}$ i pretpostavimo $\varphi \sim \psi$, $\psi \sim \theta$. Dakle $\models_L \varphi \Leftrightarrow \psi$, $\models_L \psi \Leftrightarrow \theta$, tj. za proizvoljne $d_1, \dots, d_n \in 2$, $\varphi[d_1, \dots, d_n] \equiv \psi[d_1, \dots, d_n]$ i $\psi[d_1, \dots, d_n] \equiv \psi[d_1, \dots, d_n]$, pa $\varphi[d_1, \dots, d_n] \equiv \theta[d_1, \dots, d_n]$, tj. $\models_L \varphi \Leftrightarrow \theta$, odakle $\varphi \sim \theta$. ∎

Neka je $\Omega_P = \mathcal{F}/\sim\ = \{ [\varphi] \mid \varphi \in \mathcal{F} \}$, $[\varphi] = \varphi/\sim$ i

$\Omega_P = (\Omega_P, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ gde je

$$[\varphi] \vee [\psi] \overset{\text{def}}{=} [\varphi \vee \psi],\ [\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi],\ [\varphi]' = [\neg\varphi],\ 0 = [\bot],\ 1 = [\top].$$

Prema Lemi 2.16.2, Ω_P je dobro definisana algebra. Takođe za različita iskazna slova p, q, imamo $[p] \neq [q]$. Zaista, ako bi bilo $[p] = [q]$ tada $p \sim q$ pa bi formula $p \Leftrightarrow q$ bila tautologija, što nije tačno.

Teorema 2.17. Ω_P je Bulova algebra.

Dokaz. Tvrđenje sledi na osnovu izbora odgovarajućih tautologija.

Na primer, asocijativni zakon $(x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z)$ proveravamo da važi u Ω_P na sledeći način. Neka su $a, b, c\in\Omega_P$ proizvoljni. Tada za neke iskazne formule φ, ψ, θ imamo $a=[\varphi]$, $b=[\psi]$ i $c=[\theta]$. Tada

$$(a\wedge b)\wedge c = ([\varphi]\wedge[\psi])\wedge[\theta] = [\varphi\wedge\psi]\wedge[\theta] = [(\varphi\wedge\psi)\wedge\theta]$$
$$= [\varphi\wedge(\psi\wedge\theta)] = [\varphi]\wedge[\psi\wedge\theta] = [\varphi]\wedge([\psi]\wedge[\theta]) = a\wedge(b\wedge c)$$

S obzirom na $\models_L ((\varphi\wedge\psi)\wedge\theta) \Leftrightarrow (\varphi\wedge(\psi\wedge\theta))$.

Slično se proveravaju ostale aksiome Bulovih algebri. ☒

Napomena $[\varphi]\wedge[\psi] = [\varphi\wedge\psi]$: tipografsko razlikovanje simbola po veličini, na primer.

Operacija preseka u Ω_P

Logička konjunkcija.

Ako je $\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_n)$ iskazna formula, odmah vidimo da je

$[\varphi] = t_\varphi([p_1],\dots,[p_n])$, gde je t_φ Bulov term dobijen iz φ supstitucijom logičkih operacija $\wedge, \vee, \neg, \top, \bot$ simbolima Bulovih operacija $\wedge, \vee, {}', 0, 1$ (strog dokaz: indukcijom po složenosti formule φ).

Dakle, $\Omega_P = \{[\varphi] \mid \varphi\in\mathcal{F}\} = \{t([p_1],\dots,[p_n]) \mid t \text{ je Bulov term}\}$, tj.

Lema 2.18 Ω_P je generisana skupom $X = P/\sim$.

Teorema 2.19 Ω_P je slobodna Bulova algebra nad skupom $X=P/\sim$.

Dokaz S obzirom da je prema prethodnoj lemi algebra Ω_P generisana skupom X, dosta je dokazati da za X važi uslov Sikorskog.

Neka su $x_1,\dots,x_n\in X$ i $d\in 2^n$, $d=(d_1,\dots,d_n)$. Dokazujemo da je

$$x_1^{d_1}\wedge x_2^{d_2}\wedge\dots\wedge x_n^{d_n}\neq 0.$$

Neka su $p_1,\dots,p_n\in P$ tako da je $x_1=[p_1],\dots,x_n=[p_n]$. Tada je

$$x_1^{d_1}\wedge\dots\wedge x_n^{d_n} = [\varphi], \text{ gde je } \varphi = p_1^{d_1}\wedge p_2^{d_2}\wedge\dots\wedge p_n^{d_n}$$

gde je $\theta^1 \overset{\text{def}}{=} \theta$, $\theta^0=\neg\theta$. S obzirom da je $0^0=1$, $0^1=0$, $1^0=0$, $1^1=1$, to je $\varphi(d_1,d_2,\dots,d_n)=1$, tj. φ nije kontradikcija, pa $[\varphi]\neq 0$, tj.

$x_1^{d_1}\wedge\dots\wedge x_n^{d_n}\neq 0$. ☒

Ovako konstruisanu Bulovu algebru Ω_P nezavisno su uveli matematičari Lindeman i Tarski 30-tih godina prošlog veka, pa se naziva i Lindeman-Tarski algebra i često se označava sa $\mathcal{L}_P$.
Ako je P konačan skup, tada prema 2.15, $\Omega_P \cong 2^{2^n}$, gde je $n=|P|$.
Ako je P beskonačan skup, tada $|\Omega_P| = |P|$.
Relaciju $\sim$ smo takođe mogli uvesti i na ovaj način:

$\varphi \sim \psi$ akko $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Leftrightarrow \psi$, tj.

$\varphi \sim \psi$ akko je $\varphi \Leftrightarrow \psi$ teorema iskazne logike. Podsetimo se da se iskazna logika kao formalna teorija uvodi izborom aksioma i pravila izvođenja. Na primer, Lukašijevičeva aksiomatika iskazne logike izgleda ovako:

$$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$$
$$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)) \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{F}$$
$$(\neg \varphi \Rightarrow \neg \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$$

Pravilo izvođenja: Modus ponens $\dfrac{\varphi,\ \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$

Takođe se uzima da je $\varphi \vee \psi$ zamena za $\neg\varphi \Rightarrow \psi$, dok je $\varphi \wedge \psi$ zamena za $\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$.
Tada isto važe prethodna tvrđenja za ovako uvedenu relaciju $\sim$, ali je na primer, Lemu 2.16. mnogo direktno dokazati. S druge strane iz Teoreme potpunosti za iskazni račun, $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ akko $\models_{\mathcal{L}} \varphi$, zapravo nema šta da se dokazuje.

Zadaci

Z1. Neka je za $a, b \in \Omega_P$ $a \le b$ akko (def.) $\models \varphi \Rightarrow \psi$, gde je $a = [\varphi]$, $b = [\psi]$, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$. Dokazati da je $\le$ relacija parcijalnog uređenja domena Ω_P i da je u odnosu na ovo uređenje $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$.

Z2. Neka je za $a, b \in \Omega_P$, $a < b$ akko $a \le b$ i $a \ne b$. Dokazati: ako $a < b$ tada postoji $c \in \Omega_P$ tako da $a < c < b$.

Z3*. Neka je $\mathbb{B} = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ beskonačna prebrojiva algebra i neka za indukovano uređenje $\le$ ($x \le y$ akko (def) $x = x \wedge y$) važi: $x < y$ povlači postoji z tako da $x < y < z$. Tada je $\mathbb{B}$ slobodna Bulova algebra nad prebrojivim skupom generatora.

3. HSP teorema

U ovom odeljku dokazaćemo HSP teoremu:

Ako je $\mathcal{K}$ klasa algebri jezika L zatvorena za homomorfne slike, podalgebre i proizvode, tada je $\mathcal{K}$ algebarski varijetet, tj. postoji algebarska teorija T tako da je $\mathcal{K} = \mathcal{M}(T)$.
Ovu teoremu dokazao je Garet Birkhof i time odgovorio na pitanje 2 iz uvoda.

Najpre ćemo uvesti pojam interpretacije promenljive u datom domenu.
Neka je V skup promenljivih i A domen (neprazan skup).
Podsetimo se da je valuacija domena A bilo koje preslikavanje

$$\mu : V \longrightarrow A.$$

Dakle $A^V = \{\mu \mid \mu \text{ je valuacija domena } A\}$.
Neka je u ovom odeljku $I = A^V$, dakle I je skup svih valuacija domena A. Ako je $a \in A$ i $\mu \in I$, tada $\mu(v) = a$ znači da je promenljivoj v dodeljena vrednost a.
Pojam interpretacije promenljive je dualan pojmu valuacije. Interpretacija promenljive v u domen A je preslikavanje

$$\hat{v} : I \to A, \quad \hat{v}(\mu) \overset{def}{=} \mu(v).$$

Dakle za projekciju $\bar{\pi}_\mu : \mathbb{A}^I \to \mathbb{A}$ važi $\bar{\pi}_\mu(\hat{v}) = \hat{v}(\mu) = \mu(v)$.

Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L. Tada je $\mathbb{A}^I \overset{def}{=} \prod_{\mu \in I} \mathbb{A}_\mu$, gde $\mathbb{A}_\mu = \mathbb{A}$, $\mu \in I$.

Lema 3.1. Neka su u, v termi jezika L, $\mathbb{A}$ algebra jezika L i $I = A^V$.
Tada identitet $u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1, \dots, x_n)$ važi u $\mathbb{A}$ akko
$u^{\mathbb{A}^I}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = v^{\mathbb{A}^I}(\hat{x}_1, \dots, x_n)$.

Dokaz ($\Rightarrow$) Ovaj deo tvrđenja važi s obzirom da se istinitost identiteta sa algebri prenosi na njihov proizvod.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo $u^{\mathbb{A}^I}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = v^{\mathbb{A}^I}(\hat{x}_1, \dots, x_n)$. Tada za proizvoljnu valuaciju $\mu \in I$ i projekciju $\bar{\pi}_\mu : \mathbb{A}^I \to \mathbb{A}$ imamo:

$$u^{\mathbb{A}}[\mu] = u^{\mathbb{A}}(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)) = u^{\mathbb{A}}(\bar{\pi}_\mu(\hat{x}_1), \dots, \bar{\pi}_\mu(\hat{x}_n)) = \bar{\pi}_\mu(u^{\mathbb{A}^I}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n))$$
$$= \bar{\pi}_\mu(v^{\mathbb{A}^I}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)) = v^{\mathbb{A}}(\bar{\pi}_\mu(\hat{x}_1), \dots, \bar{\pi}_\mu(\hat{x}_n)) =$$
$$= v^{\mathbb{A}}(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)) = v^{\mathbb{A}}[\mu]$$

$\boxtimes$

Lema 3.2 Neka je $\mathbb{A}$ algebra najviše prebrojivog jezika L. Tada postoji najviše prebrojiva algebra $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ takva da za svaki identitet jezika L važi: $\mathbb{A} \models u = v$ akko $\mathbb{B} \models u = v$.

Dokaz Ako je $\mathbb{A}$ najviše prebrojiva možemo uzeti $\mathbb{B} = \mathbb{A}$. Pretpostavimo da je $\mathbb{A}$ neprebrojiva algebra. Neka je I skup identiteta $u = v$ takvih da $\mathbb{A} \not\models u = v$. Ako je $u = u(x_1, \dots, x_n)$ i $v = v(x_1, \dots, x_n)$, čiji je $i \in I$ identitet $u = v$, tada postoji skup $S_i = \{a_1, \dots, a_n\}$ takav da $u^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) \neq v^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)$. Neka je $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. S obzirom da je L prebrojiv, to je i S prebrojiv (kao prebrojiva unija konačnih skupova), pa je i algebra $\mathbb{B} = \langle S \rangle_{\mathbb{A}}$, podalgebra generisana skupom S takođe prebrojiva i $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$. Tada, ako $\mathbb{A} \models u = v$, $u = v$ je bilo koji identitet $j.$ L, onda i $\mathbb{B} \models u = v$. Dokažimo obrat: Ako $\mathbb{B} \models u = v$, tada $\mathbb{A} \models u = v$. Pretpostavimo $\mathbb{B} \models u = v$ ali $\mathbb{A} \not\models u = v$. Dakle $i \in I$, gde je i indeks identiteta $u = v$ i za $S_i = \{a_1, \dots, a_n\}$ imamo $u^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) \neq v^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)$. Dalje $S_i \subseteq S \subseteq \mathbb{B}$, tj. $a_1, \dots, a_n \in B$. S obzirom da je $u^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n) = u^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)$ i slično za $v^{\mathbb{A}}, v^{\mathbb{B}}$, nalazimo $u^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n) \neq v^{\mathbb{B}}(a_1, \dots, a_n)$, tj. $\mathbb{B} \not\models u = v$, suprotno pretpostavci. ▨

HSP teorema Neka je $\mathbb{K}$ klasa algebri najviše prebrojivog jezika L i pretpostavimo da je $\mathbb{K}$ zatvorena za podalgebre i proizvod algebri, tj:

1. $\mathbb{A} \in \mathbb{K}$ i $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ tada $\mathbb{B} \in \mathbb{K}$
2. Ako $\mathbb{A}_i \in \mathbb{K}, i \in I$, tada $\prod_{i \in I} \mathbb{A}_i \in \mathbb{K}$.

Tada nad svakim (nepraznim) skupom S postoji slobodna algebra $(\mathbb{F}, S)$ u $\mathbb{K}$.

Dokaz ove teoreme izvešćemo u nekoliko koraka, tj. niza lema.

S obzirom na lemu 3.2. i pretpostavku da je $\mathbb{K}$ zatvorena za podalgebre, postoji klasa $\mathbb{K}'$ najviše prebrojivih algebri, $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$, takva da je: za svaku algebru $\mathbb{A} \in \mathbb{K}$ postoji algebra $\mathbb{A}' \in \mathbb{K}'$ tako da $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$ zadovoljavaju iste identitete.

Relacija izomorfizma između algebri, $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$, je relacija ekvivalencije, pa se $\mathbb{K}'$ razbija na klase ekvivalencije koje se tačnije nazivaju tipovima izomorfizama klase $\mathbb{K}'$.

<u>Lema 3.3.</u> Klasa $\mathbb{K}'$ ima najviše $2^{\aleph_0}$ tipova izomorfizama.

<u>Dokaz</u> Neka je $\mathbb{A} \in \mathbb{K}'$. S obzirom da je prebrojiv skup, to postoji $B \subseteq N$ $(N = \{0, 1, 2, \dots\})$ i $f: A \xrightarrow[1-1]{na} B$. Uvedimo algebru $\mathbb{B}$ sa domenom B na sledeći način:

Ako je $c \in Const_L$, tada $c^{\mathbb{B}} \overset{def}{=} f(c^{\mathbb{A}})$

Neka je $F \in Fun_L^k$, Ako $b_1, \dots, b_k \in B$ tada postoje $a_1, \dots, a_k \in A$ takvi da je $b_1 = f(a_1), \dots, b_k = f(a_k)$. Za vrednosti funkcije $F^{\mathbb{B}}$ uzećemo $F^{\mathbb{B}}(b_1, \dots, b_k) = f(F^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k))$.

Iz ovakve definicije algebre $\mathbb{B}$ odmah nalazimo $f: \mathbb{A} \cong \mathbb{B}$. Dakle, dokazali smo da je svaka algebra klase $\mathbb{K}'$ izomorfna nekoj algebri sa domenom koji je podskup od N.

Otuda sledi da je broj tipova izomorfizama klase $\mathbb{K}'$ (neka je to $t\mathbb{K}'$) manji ili jednak od broja tipova izomorfizama skupa svih algebri koje kao domen imaju neki podskup od N. Dakle

(3.3.1) $\qquad t\mathbb{K}' \leq |\mathcal{A}|$

gde je $\mathcal{A}$ skup svih algebri jezika L koje kao domen imaju neki podskup od N. Izračunajmo $|\mathcal{A}|$. Svaka algebra $\mathbb{A} \in \mathcal{A}$ je zapravo jedna interpretacija jezika L u domen S, $S \subseteq N$.

Interpretacija J u domen S je preslikavanje

$$J: L \to S \cup S^{S^2} \cup S^{S^3} \cup \dots = \bigcup_{n \in N} S^{S^n},$$

gde za $c \in Const_L$, $\mathcal{J}(c) \in S$ i za $F \in Fun_L^k$, $\mathcal{J}(F) \in S^{S^k}$ jer $\mathcal{J}(F) = F^{\mathbb{A}} : S^k \to S$. S obzirom da je $|S| \le \aleph_0$,

$$\left|\bigcup_{k\in N} S^{S^k}\right| \le \sum_{k\in N} |S^{S^k}| = \sum_{k\in N} |S|^{|S|^k} \le \sum_{k\in N} \aleph_0^{\aleph_0^k} =$$

$$= \sum_{k\in N} \aleph_0^{\aleph_0} \le \sum_{k\in N} (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \sum_{k\in N} 2^{\aleph_0^2} = \sum_{k\in N} 2^{\aleph_0}$$

$$= \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Dakle, skup svih interpretacija $\mathcal{J}$ jezika L u domen S je podskup skupa $Y^L = \{\mathcal{J} \mid \mathcal{J} : L \to Y\}$, $Y = \bigcup_{k\in N} S^{S^k}$.

Pa za broj i_S svih interpretacije u domen S važi:

$$i_S \le |Y^L| = |Y|^{|L|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Otuda je broj i svih interpretacija u neni podskup od N

$$i = \sum_{S \subseteq N} i_S = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Prema 3.3.1. sledi $t\mathcal{K}' \le i$, tj. $t\mathcal{K}' \le 2^{\aleph_0}$ ▨

<u>Napomena</u> Može biti $t\mathcal{K}' = 2^{\aleph_0}$. Na primer, ako je $\mathcal{B}'$ klasa prebrojivih Bulovih algebri tada $t\mathcal{B}' = 2^{\aleph_0}$, tj. ima kontinuum mnogo međusobno neizomorfnih Bulovih algebri.

Primenom aksiome izbora (istina treba nam nešto jača forma, tzv. globalna aksioma izbora koja tvrdi da se može dobro urediti univerzum svih skupova) ili pretpostavljajući da je naša klasa $\mathcal{K}$ apstraktna (tj. zatvorena za izomorfne slike), možemo izabrati predstavnike iz svakog tipa izomorfizma klase $\mathcal{K}'$, tj. postoji skup $\mathcal{K}'' \subseteq \mathcal{K}$, $\mathcal{K}'' = \{\mathbb{A}_i \mid i \in I\}$, $|I| \le 2^{\aleph_0}$ tako da je

1° Algebra $\mathbb{A}_i$, $i \in I$ je najviše prebrojiva.

2° Za svaku algebru $\mathbb{A} \in \mathcal{K}'$ postoji $i \in I$ tako da je $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}_i$.

3° S obzirom na lemu 3.2, za svaku algebru $\mathbb{A} \in \mathcal{K}$ postoji $i \in I$ tako da $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}_i$ zadovoljavaju iste identitete.

<u>Napomena</u> Ako je $\mathcal{K}$ apstraktna klasa, možemo uzeti da su domeni algebri $\mathbb{A}_i$ podskupovi od N.

Neka je $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i = \prod_{\mathbb{B} \in \mathcal{K}''} \mathbb{B}$. S obzirom da je $\mathcal{K}$ zatvorena za proizvod algebri, primetimo da je $\mathbb{A} \in \mathcal{K}$.

Lema 3.4. Neka je $u = v$ identitet jezika L. Tada $u = v$ važi u svim algebrama iz klase $\mathcal{K}$ akko $\mathbb{A} \models u = v$.

Dokaz ($\Rightarrow$) Ako $u = v$ važi u svim algebrama iz $\mathcal{K}$ tada $\mathbb{A} \models u = v$ s obzirom da $\mathbb{A} \in \mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo $\mathbb{A} \models u = v$, tj. $\prod_{i \in I} \mathbb{A}_i \models u = v$. Tada $u = v$ važi u svakoj algebri $\mathbb{A}_i$, $i \in I$, s obzirom da je $\mathbb{A}_i$ homomorfna slika algebre $\mathbb{A}$, tj. $\mathbb{A}_i = \pi_i \mathbb{A}$. Dakle $u = v$ važi u svim prebrojivim algebrama iz klase $\mathcal{K}$ jer je svaka takva algebra izomorfna nekoj algebri $\mathbb{A}_i$. S obzirom na Lemu 3.2, identitet $u = v$ važi u svim algebrama iz $\mathcal{K}$. ∎

Neka je V bilo koji skup promenljivih, recimo beskonačne kardinalnosti i neka je $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ iz prethodne leme. Neka je $\mathbb{B} = \mathbb{A}^V$.

Lema 3.5. Identitet $u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1, \dots, x_n)$ važi u svim algebrama iz klase $\mathcal{K}$ akko $u^{\mathbb{B}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \equiv v^{\mathbb{B}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, $x_1, \dots, x_n \in V$ različite.

Dokaz ($\Rightarrow$) Ako $u = v$ važi u svim algebrama iz $\mathcal{K}$, tada $u = v$ važi u $\mathbb{B}$ jer $\mathbb{A} \in \mathcal{K}$ i $\mathcal{K}$ je zatvorena za proizvod algebri. Tada, naravno $u^{\mathbb{B}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \equiv v^{\mathbb{B}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ jer $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n \in A^V$. ($x_1, \dots, x_n$ su različite promenljive)

($\Leftarrow$) Pretpostavimo $u^{\mathbb{B}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \equiv v^{\mathbb{B}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$. Tada prema Lemi 3.1, $\mathbb{A} \models u = v$, pa prema Lemi 3.4, $u = v$ važi u svim algebrama iz $\mathcal{K}$. ∎

Neka je Ω podalgebra od $\mathbb{B}$ generisana skupom $S = \{\hat{v} \mid v \in V\}$, tj. $\Omega = \langle \hat{v} \mid v \in S \rangle$. Dokazujemo da je (Ω, S) slobodna algebra za $\mathcal{K}$.

Najpre primetimo da je $\Omega \in \mathcal{K}$ jer $\mathbb{B} \in \mathcal{K}$, $\Omega \subseteq \mathbb{B}$ i $\mathcal{K}$ je zatvorena za podalgebre. Neka je $\mathbb{A} \in \mathcal{K}$ bilo koja algebra i $f : S \longrightarrow A$ bilo koje preslikavanje. Dokazujemo

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{A} \\ S \arrow[u, "i_S"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad (D)$$

da se f podiže do homomorfizma h tako da prikazani dijagram komutira. Radi jednostavnosti notacije, uzećemo da je jezik $L = \{\cdot\}$, $\cdot$ je simbol binarne operacije. Uzmimo da je $w_i = \hat{v}_i$, v_i su promenljive.

Neka je $w \in \Omega$. Tada $w = u^{\Omega}(w_1, \dots, w_n)$ za neki term u jeziku L. Ako je h homomorfizam takav da je (D) komutativan dijagram, tada $hw = h(u^{\Omega}(w_1, \dots, w_n)) = u^{\mathbb{B}}(hw_1, \dots, hw_n) = u^{\mathbb{B}}(fw_1, \dots, fw_n))$. Dakle, forsirano je $hw = u^{\mathbb{B}}(hw_1, \dots, hw_n)$. Dokažimo da je ovom jednakošću funkcija h dobro definisana. Pretpostavimo $u^{\Omega}(w_1, \dots, w_n) \equiv v^{\Omega}(w_1, \dots, w_n)$, $u, v \in Term_L$, tj. $u^{\Omega}(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) = v^{\Omega}(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$. Tada $u^{\mathbb{B}}(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n) \equiv v^{\mathbb{B}}(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$ jer $\Omega \subseteq \mathbb{B}$, $\mathbb{B}$ je algebra iz Leme 3.5. Prema istoj lemi tada $u = v$ važi u svim algebrama iz $\mathcal{K}$ pa i u $\mathbb{A}$ (koja je bila $\mathbb{A} \in \mathcal{K}$, vidi vrh ove strane). Dakle $u^{\mathbb{B}}(fw_1, \dots, fw_n) = v^{\mathbb{B}}(fw_1, \dots, fw_n)$, tj. preslikavanje $h : \Omega \to A$ je dobro definisano. Dokažimo da je h homomorfizam.

Neka su $a, b \in \Omega$, $a = u^{\Omega}(w_1, \dots, w_n)$, $b = v^{\Omega}(w_1, \dots, w_n)$ i neka je $w = u \cdot v$ kombinovani term. Tada

$$\begin{aligned} h(a \cdot_{\Omega} b) &= h(u^{\Omega}(w_1, \dots, w_n) \cdot_{\Omega} v^{\Omega}(w_1, \dots, w_n)) = h(w^{\Omega}(w_1, \dots, w_n)) \\ &= w^{\mathbb{B}}(fw_1, \dots, fw_n) = u^{\mathbb{B}}(fw_1, \dots, fw_n) \cdot_{\mathbb{B}} v^{\mathbb{B}}(fw_1, \dots, fw_n) \\ &= h(a) \cdot_{\mathbb{B}} h(b). \end{aligned}$$

Jasno je da je $f \subseteq h$: za term u kojeg čini jedna promenljiva x, imamo $h(w_i) = h(u^{\Omega}(w_i)) = u^{\mathbb{B}}(fw_i) = fw_i$. Dakle D komutira ∎

Dokazali smo da klasa $\mathcal{K}$ ima slobodnu algebru ~~nad~~ nad $\hat{V}$, V je beskonačan skup promenljivih. Prema Posledici 2.9, $\mathcal{K}$ ima slobodnu algebru nad $\hat{V}$ za proizvoljan neprazan skup promenljivih V. Ako je $\mathcal{K}$ apstraktna klasa, slično dokazu Teoreme 2.6, ~~dokazuje se~~ da $\mathcal{K}$ ima slobodnu algebru nad proizvoljnim nepraznim skupom S.

Najzad dokazujemo glavno tvrđenje. Ako je $\mathcal{K}$ klasa algebri jezika L zatvorena za homomorfizme, podalgebre i proizvod algebri (HSP), tada je $\mathcal{K}$ algebarski varijetet, tj. postoji skup T algebarskih identiteta takav da je $\mathcal{K} = \mathcal{M}(T)$.

Pa pretpostavimo da je $\mathcal{K}$ HSP klasa. Tada je naravno $\mathcal{K}$ apstraktna klasa algebri. Neka je T skup identiteta $u=v$ jezika L takvih da $u=v$ važi u svim algebrama iz $\mathcal{K}$. Neka je (Ω, S) slobodna algebra za klasu $\mathcal{K}$, S je proizvoljno velik skup generatora $\neq \emptyset$. Ova slobodna algebra postoji jer je $\mathcal{K}$ zatvorena za podalgebre i proizvod algebri.

Ako $\mathbb{B} \in \mathcal{K}$ tada naravno $\mathbb{B} \models T$ jer je T skup identiteta koji važi u svim algebrama iz $\mathcal{K}$, dakle i u $\mathbb{B}$. Dakle $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}(T)$.

Pretpostavimo $\mathbb{B} \in \mathcal{M}(T)$, tj. $\mathbb{B} \models T$.

Izaberimo S tako da je $|S| = |\mathbb{B}|$ i neka je $f : S \xrightarrow{na} \mathbb{B}$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{B} \\ S \arrow[u, "i_S"] \arrow[ur, "na", "f"'] & \end{tikzcd}$$

Preslikavanje f možemo podići do homomorfizma $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ uzimajući kao u prethodnom dokazu da je $h(\omega) = u^{\mathbb{B}}(f\omega_1, \dots, f\omega_n)$, gde je $\omega = u^{\Omega}(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Preslikavanje h je dobro definisano jer iz $u^{\Omega}(\omega_1, \dots, \omega_n) = v^{\Omega}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ sledi da $u=v$ važi u svim algebrama iz $\mathcal{K}$, dakle, $(u=v) \in T$, pa i $\mathbb{B} \models u=v$, odakle $u^{\mathbb{B}}(f\omega_1, \dots, f\omega_n) = v^{\mathbb{B}}(f\omega_1, \dots, f\omega_n)$. Ostatak dokaza (da je h homomorfizam) je isti kao malopre. Kako je f na to je i h na, tj. $\mathbb{B} = h(\Omega)$ pa $\mathbb{B} \in \mathcal{K}$. ∎

Zadaci: Uraditi najmanje 8 zadataka.

1 – 4 na strani 14. | 7 zadataka
1 – 3 na strani 19.

8. Dokazati da je dužina maksimalnog lanca u Bulovoj algebri 2^n jednaka $n+1$.

9.* Neka je S antilanac Bulove algebre 2^n. Dokazati da je $|S| \le \binom{n}{[n/2]}$ (Špernerova lema). Gde $[x] \stackrel{def}{=}$ ceo deo od x.

10.* Znamo da je $\Omega_n = 2^{2^n}$ slobodna Bulova algebra generisana sa n slobodnih generatora. Nazovimo slobodnom bazom bilo koji skup slobodnih generatora za Ω_n. Neka je $\mathbb{B}$ skup svih slobodnih baza algebre Ω_n. Dokazati da je $|\mathbb{B}| = \frac{2^n!}{n!}$

11. Dokazati da je $\mathbb{Z}^n$ slobodna Abelova grupa sa n slobodnih generatora.

12. Koristeći rešenja zadataka 9 i 10 dokazati

$$2^n - 2 \le (n-1)\binom{n}{[n/2]}, \quad n \ge 1.$$

13. Dokazati da slobodna distributivna mreža sa 3 generatora ima 18 elemenata.

14. Dokazati da je grupa G određena prezentacijom $G = \langle a, b; a^2 = 1, b^2 = 1 \rangle$ beskonačna.

15. Opisati slobodne algebre za klasu grupa koje zadovoljavaju identitet $x^2 = 1$.

16. Neka je $\mathcal{M}$ algebarski varijetet u kojem sve algebre zadovoljavaju $u_1 = v_1 \vee u_2 = v_2$. Dokazati da ako za neku algebru $\mathbb{A} \in \mathcal{M}$, $\mathbb{A} \not\models u_1 = v_1$ tada $u_2 = v_2$ važi u svim algebrama iz $\mathcal{M}$.

17. Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri jezika L. Algebra $\mathbb{P} \in \mathcal{K}$ naziva se projektivnom ako za sve algebre $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{K}$, svaki homomorfizam $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ i svaki epimorfizam $\beta : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ postoji homomorfizam $\kappa : \mathbb{P} \to \mathbb{A}$ tako da dijagram (D) komutira. Ako je $\Omega \in \mathcal{K}$ slobodna, dokazati da je Ω projektivna algebra.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P} \arrow[r, dashed, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbb{A} \arrow[d, "\beta"] \\ & \mathbb{B} \end{tikzcd} \quad (D)$$

18. Neka je $\mathbb{B} = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ Bulova algebra i $x + y \stackrel{def}{=} (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$. Dokazati da je $(B, +, \wedge, 0, 1)$ komutativan prsten sa jedinicom u kojem važi $x + x = 0$.

19. Ako je F filter Bulove algebre $\mathbb{B}$, dokazati $F = \bigcap_{P \in \mathbb{B}^*} P$, $\mathbb{B}^* = \{P \mid P$ je ultraf. u $\mathbb{B}\}$.

20. Teorema po izboru iz "Universal algebra", Cohn.