

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu
Beograd 2013

Žarko Mijajlović

Teorija relativnosti i kosmološki modeli

Drugo predavanje
Rotaciono kretanje

Sadržaj

2	Rotaciono kretanje	47
2.1	Osnovi klasične mehanike	47
2.2	Inercijalni sistemi	49
2.3	Princip homogenosti i izotropnosti	50
2.4	Princip ekvivalencije	51
2.5	Princip kauzalnosti	51
2.6	Koriolisova sila	51
2.7	O prirodi vektora ω	57
2.8	Napomene	60
2.9	Fukoovo klatno	64

2

Rotaciono kretanje

2.1 Osnovi klasične mehanike

Osnovi klasične mehanike čine Njutnovi zakoni:

1. *Zakon inercije.* Svako telo zadržava stanje mirovanja ili ravnomernog pravoliniskog kretanja sve dok neka sila ne primora telo da napusti zatečeno stanje.
2. $\mathbb{F} = m \cdot \mathbf{a}$ m je masa tela, \mathbb{F} je sila koja dejstvuje na telo.
U slučaju više spoljnih sila za \mathbb{F} se uzima njihova rezultanta.
3. *Zakon akcije i reakcije.* Ako neko telo deluje na neko drugo telo silom određenog pravca, intenziteta i smera, onda i to drugo telo deluje na prvo telo silom istog intenziteta i pravca ali suprotnog smera.

Isak Njutn (Isaac Newton 1643-1727, Whoolsthorp-by-Closterworth, Englend) formulisao je ove zakone u svom delu "*Philosophie*

Naturalis Principia Mathematica” 1687 godine. Ovom knjigom postavljani su temelji klasične mehanike i ona se smatra jednim od najvažnijih dela u istoriji nauke.

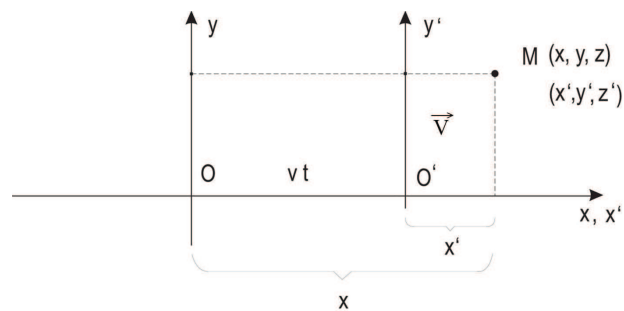
Uzima se da Njutnovi zakoni važe jedino u okviru nekog referentnog sistema koji se naziva njutnovskim ili *inercijalnim sistemom*. To je sistem koordinata koji predstavljaju prostor i vreme homogeno i izotropno. Vreme je predstavljeno realnom pravom (uređenim poljem realnih brojeva), fizički prostor vektorskim prostorom \mathbb{R}^3 . Inercijalni sistem je onaj na koji nema dejstva spoljnih sila. Otuda, ako imamo dva sistema $Oxyz$ i $O'x'y'z'$, sistem $O'x'y'z'$ je inercijalan u odnosu na $Oxyz$ ako kretanje $O'x'y'z'$ nije ubrzano u odnosu na $Oxyz$. Dakle sistem $O'x'y'z'$ (koordinatni početak O') miruje ili se kreće konstantnom brzinom u odnosu na $Oxyz$ (koordinatni početak O). Vreme, tj. merenje vremena, u oba sistema je isto.

U nauci do 16-tog veka uglavnom je vladalo Aristotelovo učenje o kretanju. Prema Aristotelu, svako telo koje se kreće bez dejstva spoljnog uticija posle nekog vremena se zaustavlja. Ovo učenje bilo je odraz svakodnevnog iskustva o kretanju. Bačen kamen u vis pao bi na tlo posle nekog vremena. Zakotrljan kamen ipak bi se posle nekog vremena zaustavio. Pojmovi sile, mase, gravitacije i inercije bili su nepoznati ili nejasni. Nove teorije koje su vremenom nastajale ipak su bile samo dopune Aristotelovog učenja.

Stevin Simon izvodi eksperimenat tri godine pre Galileja kojim dokazuje da tela različitih težina padaju istom brzinom. Galilej (Galileo Galilei, 1564-1642, Piza) ponavlja eksperiment i formuliše *Zakon inercije*:

Telo koje se kreće po ravnoj površini nastavlja kretanje u istom pravcu konstantnom brzinom sve do poremećaja nekim dejstvom.

Ubrzo je Galilej formulisao princip prema kojem je nemoguće utvrditi da li se telo kreće ili je u miru bez nekog spoljnog referentnog sistema: ”Putnik u potpalublju broda (dakle onaj koji ne vidi more) ne može izmeriti da li njegov brod plovi ili stoji u miru”. Ovaj Galilejev princip relativnosti utvrđuje da su fundamentalni zakoni fizike isti u svim inercijalnim sistemima.



Dijagram. 7.

Galilejeve transformacije: $(G) \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.1)$

Galilejev princip relativnosti bitno je uticao krajem 19. i početkom 20. veka na razvitak specijalne teorije relativnosti. U čast Galileja formule translacije (2.1) nazivaju se Galilejevim transformacijama.

2.2 Inercijalni sistemi

Inercijalni sistem u klasičnoj mehanici je onaj sistem na koji ne djeluju spoljne sile, dakle u kojem važe osnovni Njutnovi zakoni. Galilejev princip relativnosti predstavlja osnovu Njutnove mehanike u kojoj se pretpostavlja:

1. Postoji apsolutni prostor u kojem su Njutnove aksiome istinite. Inercijalni sistem kreće se konstantnom brzinom u odnosu na apsolutni prostor. Dakle, inercijalni sistemi su Galilejevi brodovi, tj. oni referentni sistemi koji putuju apsolutnim prostorom konstantnim brzinama.
2. Svi sistemi imaju isto – apsolutno vreme.
3. Dva inercijalna sistema vezana su Galilejevim transformacijama.

Da u inercijalnom sistemu važi, na primer, Drugi Njutnov zakon, možemo se uveriti ovako:

Neka se sistem $O'x'y'z'$ kreće konstantnom brzinom \mathbf{v} u odnosu na $Oxyz$, vidi dijagram u (2.1). S obzirom da je $\mathbf{v} = \text{const}$ u odnosu na vreme t , iz transformacija (G) nalazimo:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = a.$$

Dakle ubzanje je isto u oba sistema pa $\mathbb{F} = m \cdot \mathbf{a}$ važi u oba sistema. Dakle Drugi Njutnov zakon važi u inercijalnim sistemima.

Navodimo ostale principe koji se pretpostavljaju u Njutnovoj mehanici. Neki od ovih principa se uzimaju i u njenim proširenjima, specijalnoj i opštoj teoriji relativnosti.

2.3 Princip homogenosti i izotropnosti

Ovaj princip odnosi se na vreme i fizički prostor. Uzima se da je vreme linearno uređeno i neprekidno. Svakom trenutku (događaju) prethodi beskonačna prošlost i beskonačna budućnost. U tom smislu, realni kontinuum je dobar model vremena. Sa vremenskim intervalima mogu se izvoditi aritmetičke operacije na isti način kao sa realnim brojevima. Imamo ovaj princip homogenosti: Svaka dva intervala iste dužine na vremenskoj osi su ravnopravna - tačka koja se kreće konstantnom brzinom \mathbf{v} u oba slučaja prelazi istu dužinu puta. Ovu osobinu ima realna prava: dužina intervala na R invarijantna je u odnosu na translaciju. Dakle polje realnih brojeva je dobar aritmetički model za vreme.

U mehanici se pretpostavlja da je realni prostor homogen i izotropan. Uzimamo da je euklidski prostor dobar matematički model fizičkog prostora. Homogenost kaže da se početak referentnog sistema (koordinatni početak) može postaviti u bilo koju tačku euklidskog prostora \mathbf{E}^3 . Izotropnost znači da se orijentacija osa može izabrati

proizvoljno. Svetlosni zrak iz bilo kojeg izvora prostire se istom brzinom u svim pravcima.

2.4 Princip ekvivalencije

Ovaj princip kaže da je gravitaciona masa jednaka inercijalnoj masi. Gravitaciona masa je veličina m_g pridružena telu T na koju dejstvuje gravitacija ili proizvodi gravitaciju - to nam tvrdi Njutnov zakon gravitacije. S druge strane, inercijalna masa je veličina m pridružena telu T na koju se odnosi Drugi Njutnov zakon. Uzima se da je masa m otpornost koja telo pruža dejstvu bilo kojoj sili, na primer centrifugalnoj sili. Dakle Princip ekvivalencije tvrdi $m_g = m$. Odavde sledi da referentni sistem u slobodnom padu u konstantnom gravitacionom polju na koji ne deluju druge sile, jeste inercijalni sistem.

2.5 Princip kauzalnosti

Neka je t_A na vremenskoj osi trenutak događanja događaja A . Neka je $A \models B$ oznaka za činjenicu da je događaj A uzrok događaja B . Tada iz $A \models B$ sledi $t_A \leq t_B$. U Njutnovo mehanici $\Delta t = t_B - t_A$ je isto u svim referentnim sistemima. U Specijalnoj teoriji relativnosti uverićemo se da dužina intervala Δt varira od jednog sistema do drugog i da se može učiniti proizvoljno malom.

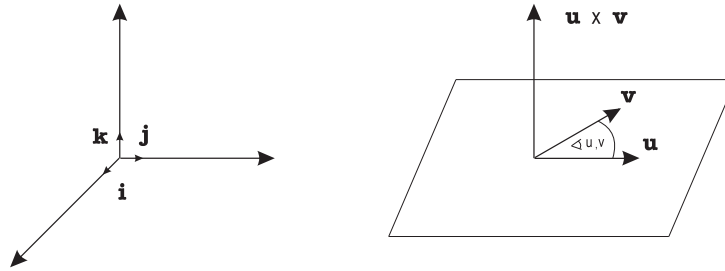
2.6 Koriolisova sila

Ključno mesto u Njutnovskoj mehanici imaju pojmovi apsolutnog prostora i inercijalnog sistema. Podsetimo se da su inercijalni sistemi referentni (koordinatni) sistemi koji miruju u apsolutnom prostoru, odnosno kreću se ravnomernom - konstantnom brzinom u odnosu na apsolutni prostor. Po definiciji, Njutnovi zakoni važe u inercijalnim sistemima. Otuda se postavlja prirodno pitanje da li se negde u real-

nom fizičkom prostoru može postaviti inercijalni sistem. S obzirom na Zemljinu rotaciju, ispostaviće se da na Zemlji nema inercijalnog sistema. U izvođenju ove činjenice važno mesto ima vektorski proizvod.

Podsetimo da se vektorski proizvod $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektora $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ u \mathcal{R}^3 može uvesti na sledeći način:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ je ortonormirana baza prostora } \mathcal{R}^3.$$



Dijagram. 8.

Kao što vidimo sa priloženog dijagrama, vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ normalan je na vektore \mathbf{u} i \mathbf{v} . Takođe, ako su \mathbf{u} i \mathbf{v} nekolinearni vektori, tada \mathbf{u} , \mathbf{v} i $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ čine referentni sistem leve orijentacije. Navodimo neke važnije osobine koje ima vektorski proizvod:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \\ (\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} &= \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad \alpha \in R, \\ \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= -\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}, \\ \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| &= \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\angle \mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Sledeća lema imaće ključno mesto u izvođenju sila, odnosno ubrzanja koja se javljaju u sfernom kretanju.

2.6.1 Lema *Neka je $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ortonormiran sistem vektora i neka su $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in R^3$ proizvoljni vektori takvi da je $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j + \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_i = 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Tada postoji vektor $\boldsymbol{\omega}$ takav da je $\mathbf{b}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Dokaz Vektori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ čine bazu prostora \mathbb{R}^3 , pa imamo predstavljajne $\mathbf{b}_i = \sum_k \beta_i^k \mathbf{a}_k$, odakle

$$\mathbf{a}_i \sum_k \beta_j^k \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_j \sum_k \beta_i^k \mathbf{a}_k = 0, \text{ tj. } \sum_k \beta_j^k \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k + \sum_k \beta_i^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_j = 0.$$

Kako je $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k = \delta_k^i$ to je

$$0 = \sum_k \beta_j^k \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k + \sum_k \beta_i^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_j = \sum_k (\delta_k^i \beta_j^k + \delta_k^j \beta_i^k) = \beta_j^i + \beta_i^j.$$

Otuda $\beta_i^i = 0$ i $\beta_j^i = -\beta_i^j$, za $i \neq j$, dakle:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = & +\beta_1^2 \mathbf{a}_2 + \beta_1^3 \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_2 = -\beta_1^2 \mathbf{a}_1 & + \beta_2^3 \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_3 = -\beta_1^3 \mathbf{a}_1 - \beta_2^3 \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Neka je $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{a}_1 + \omega_2 \mathbf{a}_2 + \omega_3 \mathbf{a}_3$. Tada

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_3 \mathbf{a}_2 - \omega_2 \mathbf{a}_3.$$

Slično nalazimo $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_2 = -\omega_3 \mathbf{a}_1 + \omega_1 \mathbf{a}_3$, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_3 = \omega_2 \mathbf{a}_1 - \omega_1 \mathbf{a}_2$.

Iz uslova $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2$, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3$, sledi

$$\omega_1 = \beta_2^3, \quad \omega_2 = -\beta_1^3, \quad \omega_3 = \beta_1^2,$$

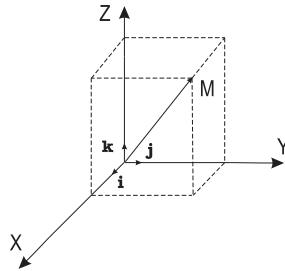
tj. $\boldsymbol{\omega} = \beta_2^3 \mathbf{a}_1 - \beta_1^3 \mathbf{a}_2 + \beta_1^2 \mathbf{a}_3$. Takođe

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ -\beta_1^2 & 0 & \beta_2^3 \\ -\beta_1^3 & -\beta_2^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je A koso-simetrična matrica i da je vektor $\boldsymbol{\omega}$ jedinstveno određen uslovima leme. \square

Brzina \mathbf{v} materijalne tačke M u inercijalnom sistemu definiše se kao promena puta u vremenu, tj. $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Za ubrzanje \mathbf{a} tačke M u inercijalnom sistemu uzimamo promenu njene brzine u vremenu, prema tome $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

Neka je $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$ koja se kreće u nekom referentnom sistemu $Oxyz$. Tada su koordinate vektora r funkcije vremena, tj. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Uobičajeno je da se u mehanici izvodi funkcija x , y i z takođe označavaju redom simbolima \dot{x} , \dot{y} i \dot{z} .



Dijagram. 9.

Brzinu i ubrzanje tačke M u bilo kojem $S = Oxyz$ sistemu koordinata uvodimo na sledeći način:

$$\text{Brzina: } \dot{\mathbf{r}}_S = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}.$$

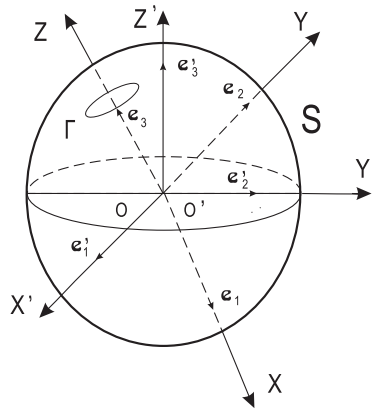
$$\text{Ubrzanje: } \ddot{\mathbf{r}}_S = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}.$$

Ako je sistem S inercijalan, biće $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_S$ i $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}_S$. Ako S nije inercijalan, na primer vezan je za neko kruto telo koje recimo ubrzava, ili rotira u odnosu na neki inercijalan sistem, tada ove jednakosti neće važiti. Naime, u ovom drugom slučaju bazni vektori sistema S su vektorske funkcije vremena i menjaju položaj, te se u određivanju brzine tačke M u inercijalnom sistemu moraju uzeti u obzir brzine, odnosno izvodi baznih vektora sistema S .

Ako je u datom razmatranju referentni sistem S fiksiran, uobičajeno je da se indeks S u $\dot{\mathbf{r}}_S$ i $\ddot{\mathbf{r}}_S$ ispušta. Dakle, umesto $\dot{\mathbf{r}}_S$ i $\ddot{\mathbf{r}}_S$ pišemo jednostavno $\dot{\mathbf{r}}$ i $\ddot{\mathbf{r}}$.

Neka je $O'x'y'z'$ inercijalan referentni sistem u \mathbb{R}^3 i $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ jedna njegova ortonormirana baza. Dakle, za $\mathbf{r} \in R^3$ imamo

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 + z'\mathbf{e}'_3.$$



Dijagram. 10.

Neka je $Oxyz$ drugi referentni sistem sa ortonormiranom bazom $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i $O = O'$. Pretpostavićemo da se $Oxyz$ kreće ali ostavljaajući $O = O'$. Takvo kretanje sistema $Oxyz$ nazvaćemo sfernim kretanjem. Primer takvog kretanja je rotacija sistema $Oxyz$ oko neke ose koja prolazi kroz tačku O .

U sfernom kretanju vrhovi jediničnih vektora \mathbf{e}_i šaraju po jediničnoj sferi S sa centrom u O . Na primer vrh vektora \mathbf{e}_3 iscrtava krivulju Γ na sferi S , vidi Dijagram 10. Dakle, kretanje sistema $Oxyz$ u odnosu na inercijalni sistem $O'x'y'z'$ je sferno. Za $\mathbf{r} \in R^3$ imamo $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ali i $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3(t)$, jer vektori \mathbf{e}_i menjaju položaj u vremenu u odnosu na $O'x'y'z'$. Podsetimo se da je $d\mathbf{e}_i/dt$ brzina vektora \mathbf{e}_i u sistemu $Ox'y'z'$.

Kako je $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, δ_{ij} je Kronekerov δ - simbol, nalazimo $\mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j/dt + d\mathbf{e}_i/dt \cdot \mathbf{e}_j = 0$. Prema Lemi 2.6.1, strana 52, uzimajući $\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b}_i = d\mathbf{e}_i/dt$ postoji vektor $\boldsymbol{\omega}$ takav da je

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Vektor $\boldsymbol{\omega}$ nazivaćemo vektorom sfernog kretanja.

Neka je $\mathbf{r} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$ vektor položaja u koordinatnom sistemu $Oxyz$ tačke M koja se kreće u \mathbb{R}^3 . Brzina tačke M u sistemu $Ox'y'z'$ je $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_i (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt})$, odakle je prema 2.3

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.4)$$

Vektor $\dot{\mathbf{r}} = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i$ je brzina tačke M u sistemu $Oxyz$, odakle

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.5)$$

Primitimo da je prema ovoj formuli $\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$. Otuda sledi

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt} \quad (2.6)$$

$$= \ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.7)$$

$$= \ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (2.8)$$

dakle,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Ovde je

$$1^\circ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \text{ubrzanje tačke } M \text{ u } O'x'y'z'.$$

2° $\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \ddot{x}_i \mathbf{e}_i$ – ubrzanje tačke M u $Oxyz$.

3° $2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ – Koriolisovo ubrzanje tačke M u $Oxyz$.

4° $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ – centrifugalno ubrzanje tačke M u $Oxyz$.

5° $\boldsymbol{\omega}' = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ – ugaono ubrzanje tačke M u $O'x'y'z'$ nastalo iz kretanja vektora $\boldsymbol{\omega}$ u $O'x'y'z'$.

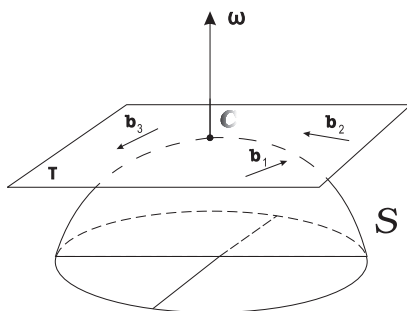
Dakle rotacioni sistem $Oxyz$ ne može biti inercijalan. Svako telo koje se u njemu kreće trpi efekte ubrzanja koji su posledice rotacije sistema $Oxyz$.

2.7 O prirodi vektora $\boldsymbol{\omega}$

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ -\beta_1^2 & 0 & \beta_3^2 \\ -\beta_1^3 & -\beta_2^3 & 0 \end{bmatrix}$$

matrica koja se javlja u dokazu Leme 2.6.1, strana 52. Odmah se izračunava da je $\det A = 0$, dakle vektori vrste matrice A su linearno zavisni, tj. vektori \mathbf{b}_i opisan jednakostima 2.2 su komplanarni. S obzirom da Lema 2.6.1 iskazuje $\mathbf{b}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i$, sledi da je vektor $\boldsymbol{\omega}$ normalan $\mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ i $\mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je shodno prethodnom ravan ili prava. U ovom drugom slučaju vektori \mathbf{b}_i su kolinearni odakle se odmah dobija $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 = 0$ pa i $\boldsymbol{\omega} = 0$. Pretpostavljajući $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, što je isto da su \mathbf{b}_i nekolinearni, vektori $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ leže u nekoj ravni τ . Tada je $\boldsymbol{\omega}$ normalan na ravan τ . Takođe nalazimo da je \mathbf{b}_i normalan na vektor \mathbf{a}_i , $i = 1, 2, 3$.



Dijagram. 11.

U nekoj tački C vektor $\boldsymbol{\omega}$ probija jediničnu sferu S , tj. $\boldsymbol{\omega}$ je normala sfere S u C , pa možemo uzeti da je τ je tangentska ravan sfere S u tački C i da $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ zapravo leže u ravni τ .

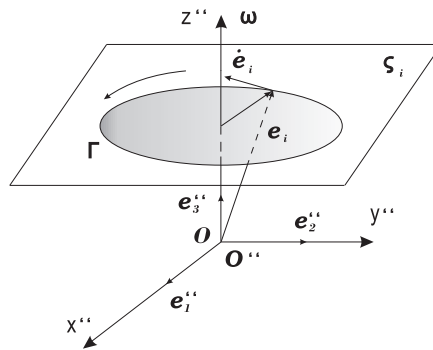
U sfernom kretanju $\mathbf{b}_i = d\mathbf{e}_i/dt$, dakle \mathbf{b}_i su vektori brzina vektora \mathbf{e}_i , tj. vrhova vektora \mathbf{e}_i (koji leže na jediničnoj sferi S). Dakle važi:

2.7.1 Teorema *Vektor sfernog kretanja normalan je na ravan određenu vektorima brzina $\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}$ sfernog kretanja jediničnih vektora \mathbf{e}_i u sistemu $O'x'y'z'$.*

Neka je $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ konstantan vektor u $O'x'y'z'$. Tada $\boldsymbol{\omega}' = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$ pa 2.9, strana 56, postaje

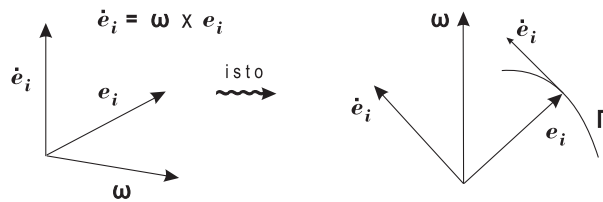
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.10)$$

Radi preglednijeg zapisa označimo brzinu $d\mathbf{e}_i/dt$ vektora \mathbf{e}_i u sistemu $Ox'y'z'$ sa $\dot{\mathbf{e}}_i$. Neka je $O''x''y''z''$ inercijalan sistem sa ortonormiranom bazom $\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3''$, kod kojeg je $O'' = O$ i vektor \mathbf{e}_3'' je istog pravca i smera kao $\boldsymbol{\omega}$. Vektori $\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3''$ miruju u $O'x'y'z'$ i $\dot{\mathbf{e}}_i$ normalni su na $\boldsymbol{\omega}$, tj. na \mathbf{e}_3'' , odakle sledi $\dot{\mathbf{e}}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'')$. Tada za razvoj $\mathbf{e}_i = u_i\mathbf{e}_1'' + v_i\mathbf{e}_2'' + w_i\mathbf{e}_3''$ nalazimo $\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{u}_i\mathbf{e}_1'' + \dot{v}_i\mathbf{e}_2'' + \dot{w}_i\mathbf{e}_3''$ pa kako $\dot{\mathbf{e}}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'')$ to je $\dot{w}_i = 0$ tj. $w_i = \text{const}$, dakle w_i ne zavisi od t .



Dijagram. 12.

Otuda vrh E_i vektora \mathbf{e}_i leže u ravni ζ_i datu jednačinom $z'' = w_i$ u sistemu $O''x''y''z''$ i naravno E_i leži na jediničnoj sferi S , pa je presek ove dve površi kružnica Γ u ravni ζ_i . Vrh E_i iscrtava luk kružnice Γ . Vektor brzine $\dot{\mathbf{e}}_i$ tačke E_i je tangenti vektor kružnice Γ , leži u ravni ζ_i i $\omega \perp \zeta_i$ i $\alpha = \angle \omega, \mathbf{e}_i = \text{const}$.

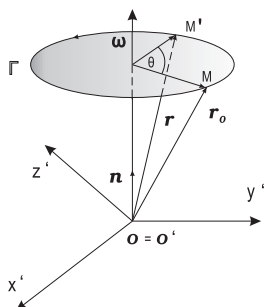


Dijagram. 13.

Neka je $\Omega = \|\omega\|$. Tada $\omega = \Omega \mathbf{e}_3''$, pa kako je $\dot{\mathbf{e}}_i = \omega \times \mathbf{e}_i$ to je $\|\dot{\mathbf{e}}_i\| = \|\omega \times \mathbf{e}_i\| = \|\omega\| \cdot \|\mathbf{e}_i\| \sin(\angle \omega, \mathbf{e}_i) = \Omega \sin \alpha = \text{const}$. Dakle ako je ω konstantan vektor, tj. $\omega(t) = \omega_0$, tada je sferno kretanje \mathcal{K}_ω zapravo ravnomerna rotacija.

S druge strane, ako sistem $Oxyz$ ravnomerno rotira ugaonom brzinom Ω oko ose date jediničnim vektorom \mathbf{n} u inercijalnom sistemu $O'x'y'z'$, dokazuje se da vektor $\omega = \Omega \mathbf{n}$ zadovoljava $\dot{\mathbf{e}}_i = \omega \times \mathbf{e}_i$. Važi sledeća formula rotacije (u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu), za oznake videti dijagram 14.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cos \theta + (1 - \cos \theta)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0)\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_0) \sin \theta$$



Dijagram. 14.

Dakle važi:

2.7.2 *Sferno kretanje je ravnomerna rotacija ako i samo ako je ω konstantan vektor.*

2.8 Napomene

2.8.1 U mehanici se uzima da je rotacija sistema $Oxyz$ u inercijalnom sistemu $O'x'y'z'$ zapravo rotacija krutog tela; vektori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ su vektori osa tog tela.

2.8.2 Ako vektor ω zadržava pravac u vremenu, tj. $\{\omega(t) | t \in \mathbb{R}\}$ je jednodimenzionalni prostor odnosno $\omega(t) = \Omega(t)\omega_0$, ω_0 je konstantan jediničan vektor, $\Omega(t)$ je skalarna funkcija, tada vektori \mathbf{e}_i iscrtavaju kružnice na jediničnoj sferi S . Dakle sferno kretanje \mathcal{K}_ω je neravnomerna rotacija. Primeri takve rotacije su rotacija lopte u fluidu (rotacija koja usporava zbog trenja) ili rotacija krutog tela okačenog o upreden konac (vektor ω menja smer i \mathcal{K}_ω sadrži periodične komponente, slično klatnu).

2.8.3 Rotacija oko date ose \mathbf{n} može se objasniti i dejstvom grupe $\mathbf{G}_\mathbf{n} < \mathcal{SO}(3)$ na \mathbb{R}^3 . Uzmimo da je $\omega = \mathbf{n} = \mathbf{e}'_3$. Tada su elementi grupe $\mathbf{G}_\mathbf{n}$ matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Dejstvo je dato sa $\Phi(A) = L_A$, $A \in G_n$, $L_A(\mathbf{r}) = A \cdot \mathbf{r}$, $\mathbf{r} \in R^3$, tj.

$$\left(\Phi(A_\alpha)\right)(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Putanja tačke M je orbita

$$\mathbf{r}_M^\Phi = \{(\Phi(A))(\mathbf{r}_M) : A \in G_n\} = \{A\mathbf{r}_M : A \in G_n\}$$

vektora položaja \mathbf{r}_M tačke M . Primetimo da je $\mathbf{G}_n \cong ([0, 2\pi), +_{2\pi}, 0)$ gde je $+_{2\pi}$ sabiranje realnih brojeva po mod 2π .

Podsetimo se da je dejstvo grupe \mathbf{G} na skup S je formalan pojam iz teorije grupa. U ovoj teoriji simbol $\mathbf{Sym}(S)$ koristi se da se označi simetrična grupa skupa S . Primetimo da je $\mathbf{Sym}(S)$ zapravo grupa permutacija skupa S . Dejstvo grupe \mathbf{G} na skup S je svaki homomorfizam $\theta: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{Sym}(S)$. Ako je u datom razmatranju dejstvo θ fiksirano, vrednost $(\theta(g))(s)$, $g \in G$ i $s \in S$, kraće obeležavamo sa s^g . Dakle $s^g = (\theta(g))(s)$. Orbita elementa $s \in S$ dejstva θ je

$$s^G \stackrel{\text{def}}{=} \{s^g : g \in G\}.$$

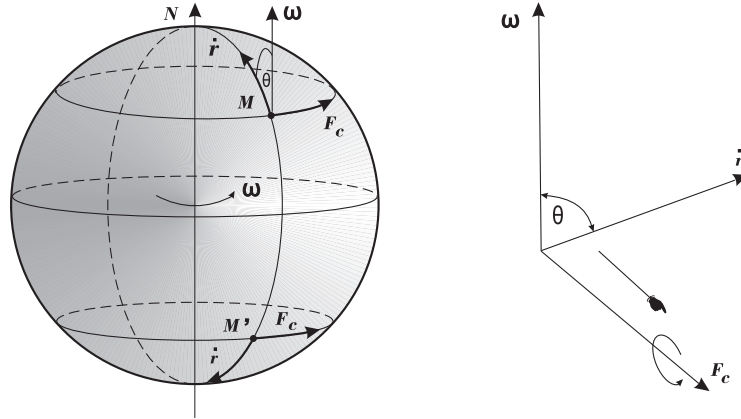
2.8.4 Skalar Ω je ugaona brzina rotacije, dok je $T = 2\pi/\Omega$ period rotacije. Dakle, T je vreme potrebno da telo koje rotira oko ose ω učini pun krug. Frekvencija rotacionog kretanja $f = 1/T = \Omega/2\pi$ je broj punih okretaja oko ose (u slučaju ravni oko fiksne tačke) u jedinici vremena - uzima se najčešće u sekundi¹⁾. Za ugaonu brzinu Ω koristi se takođe oznaka ω .

2.8.5 Postoje razni fenomeni koji nastaju usled dejstva Koriolisova sile na Zemljinu atmosferu, tok reke (na severnoj polulopti desna obala

¹⁾Za jedinicu mere uzima se hertz, 1 Hz = 1/sec, u čast nemačkog fizičara Heinricha Hertza (1857-1894). Zanimljivo je da je definicija sekunde i hertza zapravo simultana i bazirana je na tranziciji elektrona sa jedne na drugu orbitu u atomu cezijuma 133.

reke se više podriiva), skretanje od vertikale prema istoku tela koja slobodno padaju i odstupanje ravni oscilovanja klatna, pritisak voza koji se kreće na jednu od šina (desna šina trpi veći pritisak od leve na severnoj polulopti). Ispod polutara, na južnoj hemisferi, efekti su suprotni od onih koji se dešavaju na severnoj polulopti.

2.8.6 Neka sistem $Oxyz$ ravnomerno rotira u inercijalnom sistemu $O'x'y'z'$. Tada formula (2.10) daje vezu između ubrzanja tačke M u sistemima $Oxyz$ i $O'x'y'z'$. Ako tačka M miruje u $Oxyz$, tada brzina tačke M iznosi $\dot{\mathbf{r}} = 0$. Dakle Koriolisovo ubrzanje je $2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$. Koriolisovo ubrzanje postoji samo za tačke koje se kreću u sistemu $Oxyz$. Iz tog razloga uobičajeno je da se umesto Koriolisova sila koristi termin *Koriolisov efekat*. Prema formuli 2.10 nalazimo:



Dijagram. Koriolisova sila.

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \ddot{\mathbf{r}} + 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})). \quad (2.11)$$

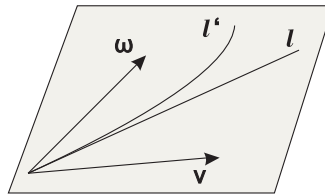
$O'x'y'z'$ je prema pretpostavci inercijalan pa je $\mathbb{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ sila koja deluje na tačku M . Otuda nalazimo:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbb{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \quad (2.12)$$

tj. posmatrač P u sistemu $Oxyz$, onom koji se vrti oko ose $\boldsymbol{\omega}$ (P je nepokretan u $Oxyz$) pored sile \mathbb{F} vidi (meri) dejstvo i druge dve sile,

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_c &= -2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) && \text{– Koriolisova sila,} \\ \mathbb{F}_f &= -m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) && \text{– centrifugalna sila.}\end{aligned}$$

Ako je vrednost $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ mala, kao što je slučaj kod rotacije Zemlje, tada se u većini praktičnih situacija ove sile mogu zanemariti. Zemlja napravi jedan obrt za 24 časa, tačnije za 86164 sekundi, što za ugaonu brzinu daje $\omega = \frac{2\pi}{86164} \text{sec}^{-1} = 0,0000729 \text{sec}^{-1}$. Kako je $\|\mathbb{F}_c\| \sim \omega$, $\|\mathbb{F}_f\| \sim \omega^2$, efekti ovih sila nastalih usled rotacije Zemlje su mali na tela malih masa i brzina. U napomeni 2.8.5 navedeni su primeri dejstva Koriolisove sile na većoj skali. Centrifugalno ubrzanje usled rotacije Zemlje najveće je na ekvatoru. S obzirom na veličinu poluprečnika Zemlje ($R = 6370 \text{ km}$) i da na ekvatoru ima smer suprotan sili gravitacije, dejstvo gravitacije je nešto oslabljeno pa za tela velike mase \mathbb{F}_f tamo daje vidljive efekte. Na primer, elipsoidni oblik Zemlje potiče usled dejstva ove sile. Mesta za lansiranje kosmičkih brodova grade se blizu ekvatora jer je tamo potrebna manja energija za podizanje tereta u odnosu na druga mesta na Zemlji.



Dijagram. 15.

Pretpostavimo da se telo M kreće na severnoj Zemljinoj hemisferi duž meridijana. Da nema Koriolisove sile, telo M kretalo bi se u ravni određenj vektorima $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ i $\boldsymbol{\omega}$ putanjom l . Pod dejstvom sile \mathbb{F}_c telo M izlazi iz te ravni i iscrtava izvijenu putanju l' . Ako se telo M kreće prema severu, tada usled dejstva Koriolisove sile skreće prema zapadu. Ako se kreće prema istoku, onda skreće prema jugu. U to se čitalac može neposredno uveriti na priloženom dijagramu, naravno imajući u vidu definiciju sile \mathbb{F}_c .

Dakle Galilejev princip inercije ne važi u referentnom sistemu koji rotira. Sistem $Oxyz$ nije inercijalan.

Rotacija ima smisla samo u odnosu na druga tela, tj. može se konstatovati samo u odnosu na druga tela. Prema Njutnu, Koriolisova i centrifugalna sila posledice su rotacije u odnosu na apsolutni prostor. Ernst Mach kritikovao je ideju apsolutnog prostora i prema njemu ove sile su posledica rasporeda masa u Kosmosu. Drugim rečima, raspodela materije u Kosmosu deluje na svaki lokalni referentni sistem. Ajnštajn je imao u vidu ovaj princip u postavljanju opšte teorije relativnosti. On kritikuje ideju apsolutnog prostora i uzima stanovište da samo relativna kretanja imaju fizičkog smisla.

2.9 Fukoovo klatno

Eksperiment Fukoovog klatna predstavlja važan dokaz da se na Zemljinoj površini ne može postaviti inercijalan sistem. Tokom ovog eksperimenta sredinom 19. veka, tačnije 1851 godine u Parizu, posmatrano je po prvi put skretanja ravni oscilovanja klatna pod dejstvom Koriolisove sile. Eksperiment je dao direktan, laboratorijski dokaz da Zemlje rotira oko svoje ose. Ovaj eksperiment imao je veliki odjek kod fizičara tog vremena naročito u raspravama o ideji inercijalnog sistema i apsolutnog prostora.

Pretpostavimo da površina Zemlje ima oblik idealne sfere. Neka je $O'x'y'z'$ inercijalan referentni sistem čiji je početak O' postavljen negde na Zemljinoj osi rotacije određenu vektorom rotacije ω . U aproksimaciji možemo uzeti da je referentni sistem inercijalan ukoliko njegove ose miruju prema udaljenim zvezdama. Neka je početak O drugog sistema $Oxyz$ koji prati rotaciju Zemlje postavljen na površini Zemlje na geografskoj širini φ . Možemo precizirati položaj tačke O' tako što ćemo izabrati da je vektor \mathbf{r}_0 položaja tačke O u sistemu $O'x'y'z'$ normalan na osu Zemljine rotacije.

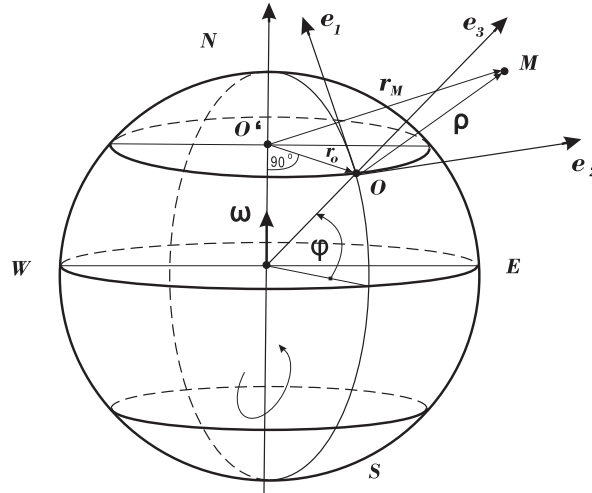
Uzećemo da se koordinatni vektori \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 nalaze u tangentnoj ravni τ koja dodiruje Zemljinu sferu u tački O , dok je \mathbf{e}_3 normalan na τ .

Prema priloženom dijagramu $\mathbf{r}_M = \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}$, gde je

\mathbf{r}_M je vektor položaja tačke M u $O'x'y'z'$,

$\boldsymbol{\rho}$ je vektor položaja tačke M u $Oxyz$,

\mathbf{r}_0 je vektor položaja tačke O u $O'x'y'z'$.



Dijagram. Fukoovo klatno.

Otuda nalazimo

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} \quad (2.13)$$

gde je

$$\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} = -\Omega^2\mathbf{r}_0, \quad \Omega = \|\boldsymbol{\omega}\|, \quad \boldsymbol{\omega} \text{ je vektor rotacije Zemlje.}$$

$$\Omega = 1 \text{ obrt/dan.}$$

Pretpostavimo da Zemlja ravnomerno rotira, dakle i da su $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{r}_0 konstantni vektori u sistemu $Oxyz$. Drugim rečima, ako uzmemo da je $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + x_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3$ predstavljanje vektora \mathbf{r}_0 u sistemi $Oxyz$,

tada su koordinate x_0 , y_0 i z_0 konstante, tj. ne menjaju se u vremenu. Otuda

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{x}_0 \mathbf{e}_1 + \dot{y}_0 \mathbf{e}_2 + \dot{z}_0 \mathbf{e}_3 = 0.$$

Slično nalazimo da je i $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Onda prema 2.10 za vektor \mathbf{r}_0 važi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_0)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_0 = -\Omega^2 \mathbf{r}_0. \end{aligned}$$

Takođe imamo

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}). \quad (2.14)$$

Gravitaciono ubrzanje usmereno je prema centru Zemlje, odakle je $\mathbf{G} = -g\mathbf{e}_3$. Intenzitet $\|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})\|$ centrifugalnog ubrzanja je reda Ω^2 i ima malu vrednost u odnosu na druga ubrzanja u jednakosti 2.14, pa se centrifugalno ubrzanje u daljem razmatranju može zanemariti.

Sile $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ i $m\mathbf{G}$ se uravnotežuju i s obzirom da je vektor \mathbf{e}_3 usmeren prema zenitu imamo $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{G}$. Izveli smo da je $\frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = -\Omega^2 \mathbf{r}_0$, te prema 2.13 i 2.14 važi

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} - \Omega^2 \mathbf{r}_o = \mathbf{G}. \quad (2.15)$$

S obzirom na primedbu o intenzitetu centrifugalne sile možemo uzeti da je $\Omega^2 \mathbf{r}_o \approx 0$, pa dobijamo

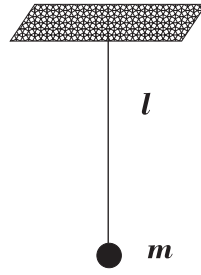
$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = -g\mathbf{e}_3. \quad (2.16)$$

Jednačina običnog klatna je

$$m\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -mg\mathbf{e}_3 - T\boldsymbol{\rho}/l. \quad (2.17)$$

U kretanju klatna mora se uzeti u obzir Koriolisova sila, dakle jednačina klatna postaje

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = -g\mathbf{e}_3 - T\boldsymbol{\rho}/lm \quad (2.18)$$



Dijagram. 16.

Ovde je

- l – dužina klatna (konca),
- m – masa tega,
- T – napon konca koji drži teg klatna.

Vektori $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{e}_3 leže u istoj ravni π koja sadrži meridijanski krug koji prolazi kroz tačku O , pa možemo uzeti da \mathbf{e}_1 isto leži u ravni π , dakle na preseku ravni π i tangentne ravni τ . Zaključujemo da je $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Otuda jednostavnim računom dobijamo

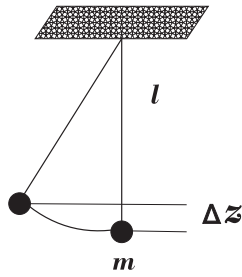
$$\boldsymbol{\omega} = \Omega(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_3 \sin \varphi).$$

Na osnovu 2.18 odmah nalazimo

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega(\sin \varphi)\dot{y} &= -Tx/lm \\ \ddot{y} + 2\Omega(\sin \varphi)\dot{x} + 2\Omega(\sin \varphi)\dot{z} &= -Ty/lm \\ \ddot{z} + 2\Omega(\sin \varphi)\dot{y} &= -g - Tz/lm \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ove jednačine predstavljaju opšte jednačine kretanja klatna koje uzimaju u obzir Koriolisovu silu. Kako je $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ i za male oscilacije $z \approx l$, u kretanju klatna možemo uzeti da je Δz beskonačna mala veličina drugog reda u odnosu na Δx i Δy . Otuda takođe možemo uzeti da su vertikalne komponente brzine i ubrzanja u kretanju klatna zanemarljive veličine, tj. da je $\dot{z} \approx 0$ i $\ddot{z} \approx 0$. Tada jednačine 2.19 postaju

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega(\sin \varphi)\dot{y} &= -Tx/lm \\ \ddot{y} + 2\Omega(\sin \varphi)\dot{x} &= -Ty/lm \\ 2\Omega(\cos \varphi)\dot{y} &= -g - T/lm \end{aligned} \quad (2.20)$$



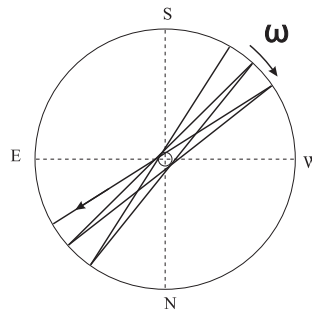
Dijagram. 17.

Uvodeći smenu $w = x + iy$ za prve dve jednačine u 2.20 nalazimo:
 $\ddot{w} + 2(i\Omega \sin \varphi)\dot{w} = -(T/lm)w$. Uvodeći opet smene

$$w = ve^{-i\Omega t \sin \varphi}, \quad lmp^2 = T, \quad (2.21)$$

nalazimo $\ddot{v} + p^2 v = 0$, odakle $v = Ae^{ipt} + Be^{-ipt}$ tj.

$$w = x + iy = e^{-i\Omega t \sin \varphi} (Ae^{ipt} + Be^{-ipt}). \quad (2.22)$$



Dijagram. Kretanje Fukoovog klatna.

U opštem slučaju, poslednja jednačina predstavlja jednačinu elipse koja rotira ugaonom brzinom $\Omega \sin \varphi$. Ova putanja Fukoovog klatna može se realno uočiti, kao što je prikazano na dijagramu *Kretanje Fukoovog klatna*.