

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

Žarko Mijajlović

Teorija relativnosti i kosmološki modeli

Beograd 2011

Opis Kursa:

1. Matematičke osnove [5], [6], [4]
2. Klasična mehanika [4], [9]
3. Teorija specijalne relativnosti [4], [7], [6], [9], [8]
4. Kosmos na velikoj skali [1], [2]
5. Teorija opšte relativnosti [2], [3], [8]
6. Relativnost i Kosmologija [1], [2], [3]
7. Kosmološki modeli [1], [2]
8. Friedmann-ov model [1], [2]

Literatura

1. An Introduction to Modern Cosmology, Andrew Liddle, 2003.
2. An Introduction to Cosmology, Jayant Vishnu Narlikar, 2002.
3. The Road to Reality, Roger Penrose, 2004.
4. Teorijska fizika i struktura materije (I deo), Ivan Supek, 1960.
5. Linear algebra, Seymour Lipschutz, 1974. (Shaum's Outline Seies)
6. Linearna i geometrija, A.I. Kostrikin, Yu.I. Manin, 1986.
7. Special Relativity, Philip Harris. (Internet, slobodan pristup)
8. Motion Mountain - The Adventure of Physics, Christoph Schiller, 2010. (Internet, slobodan pristup)
9. Classical Mechanics, H. Goldstein, Ch. Poole, J. Safko, 2001.

Napomena: Dobar izvor informacija i literature je Internet, posebno Wikipedia.

1

Matematičke osnove

1.1 Grupe

Grupa je svaka algebarska struktura $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ gde je G neprazan skup (domen grupe $\mathbf{G}$), konstanta $1 \in G$ je neutralni element, $\cdot$ binarna operacija i $^{-1}$ unarna operacija domena G koje zadovoljavaju sledeće aksiome:

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, *asocijativni zakon*.
2. $1 \cdot x = x \cdot 1$, $x \cdot 1 = 1$, *zakoni jedinice*.
3. $x \cdot x^{-1} = 1$, $x^{-1} \cdot x = 1$, *zakon inverznog elementa*.

Primeri

- 1° Ako je R skup realnih brojeva i $R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}$, tada je $\mathbf{R}^+ = (R^+, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa. Ovde su $\cdot, ^{-1}$ uobičajene aritmetičke operacije.
- 2° Primer grupe u aditivnoj notaciji: $\mathbf{R} = (R, +, -, 0)$, aditivna grupa realnih brojeva.

Grupa $\mathbf{G}$ je *komutativna* (ili *Abelova*) ako zadovoljava komutativan zakon $x \cdot y = y \cdot x$. Prethodne grupe su komutativne. Grupa permutacija

$S_n = (S_n, \circ, ^{-1}, i)$, n je prirodan broj, za $n \geq 3$ je primer nekomutativne grupe. Ovde je S_n skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, dakle

$$S_n = \{\alpha \mid \alpha : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow[1-1]{na} \{1, 2, \dots, n\}\},$$

i je identičko preslikavanje, $\circ$ kompozicija funkcija i α^{-1} je inverzna funkcija preslikavanja α .

Neprazan podskup $H \subseteq G$ je *podgrupa* grupe G ako i samo ako restrikcije operacija grupe G na H čini H grupom tj. ako važi: $1 \in H$, $x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$ i $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$. Činjenicu da je H podgrupa grupe G zapisujemo $H < G$.

Primer $Q^+ < \mathbf{R}^+$ gde je Q skup racionalnih brojeva i

$$Q^+ = \{q \in Q \mid q > 0\}.$$

Podgrupa H grupe G je *normalna podgrupa* grupe G ako i samo ako za sve $g \in G$, $g^{-1}Hg \subseteq H$. Ako je G Abelova grupa tada je svaka podgrupa H grupe G normalna u G . Da je $H < G$ normalna u G zapisujemo pomoću $H \triangleleft G$.

U nešto slobodnijoj notaciji, često se grupa i njen domen označavaju na isti način. Tako, u Primeru 1, R^+ može označavati i grupu $\mathbf{R}^+$ i njen domen.

1.2 Polja

Algebra $F = (F, +, -, \cdot, 0, 1)$ je polje ako i samo ako:

- $(F, +, -, 0)$ je Abelova grupa,
- $(F^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ je Abelova grupa, gde je $F^* = F \setminus \{0\}$ i za $x \neq 0$
 $y = x^{-1} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \cdot y = 1$.
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (*distributivni zakon*).

Primeri polja Polje realnih brojeva $\mathbf{R}$; polje kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Konačno polje $\mathbf{Z}_p = \text{GF}(p)$ ima prostu karakteristiku p , tj. $p \cdot 1 = 0$.

1.3 Vektorski prostori

Glavno mesto u linearnoj algebri ima pojam vektorskog prostora. Struktura $\mathcal{V} = (\mathbf{V}, \mathbf{F}, \cdot)$ je *vektorski prostor* ako i samo ako:

1° $\mathbf{V} = (V, +, -, \mathbf{0})$ je Abelova grupa (aditivna grupa vektora). Elemente skupa V nazivamo vektorima.

2° $\mathbf{F}$ je polje. Elemente polja $\mathbf{F}$ nazivamo skalarima.

3° Operacija $\cdot$ je spoljašna operacija množenja vektora skalarima za koju važi:

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}, \quad \alpha, \beta \in F, \mathbf{x} \in V.$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}, \quad \alpha \in F, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}), \quad \alpha, \beta \in F, \mathbf{x} \in V.$$

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad 1 \text{ je jedinica polja } \mathbf{F} \text{ i } \mathbf{x} \in V.$$

Takođe kažemo da je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$.

Primeri vektorskih prostora

1° Vektorski prostori $\mathbf{E}^2$ i $\mathbf{E}^3$ orijentisanih duži (geometrijskih vektora) u euklidskoj ravni, odnosno u trodimenzionom euklidskom prostoru. Ovde je polje skalara polje realnih brojeva $\mathbf{R}$.

2° Prostor $\mathcal{R}^n = (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, \cdot)$ n-torki realnih brojeva nad poljem $\mathbf{R}$. Za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Ako je α skalar, tada $\alpha \cdot \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$.

3° Prostor $\mathcal{C}^n = (\mathbf{C}^n, \mathbf{C}, \cdot)$ n-torki realnih brojeva nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Operacije ovog prostora uvode se na sličan način kao u prethodnom primeru.

4° Neka je $\mathfrak{M}_{m \times n}(R)$ skup realnih matrica reda $m \times n$. Tada je $((\mathfrak{M}_{m \times n}(R), +, -, \mathbf{0}_{m \times n}), R, \cdot)$ vektorski prostor matrica nad poljem realnih skalara. Dakle, ovde su matrice vektori, sabiranje vektora je zapravo sabiranje matrica, dok je proizvod skalara $\alpha \in R$ i matrice $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|$, $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}_{m \times n}(R)$: $\alpha \cdot \mathbf{a} = \|\alpha a_{ij}\|$.

Neka je $U \neq \emptyset$. Tada je U vektorski potprostor prostora $\mathcal{V}$ ako je U podgrupa grupe $\mathcal{V}$ i $((U, +, -, \mathbf{0}), \mathbf{F}, \cdot)$ je vektorski prostor. Na primer $\mathbf{E}^2$ je potprostor prostora $\mathbf{E}^3$.

1.4 Baza i dimenzija

Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor i $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbf{V}$. Linearni pokrivač nad vektorima $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ je skup linearnih kombinacija

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \{\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F\}.$$

Ako je $V = \mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ tada kažemo da vektori $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ generišu prostor $\mathcal{V}$. Prostor $\mathcal{V}$ je konačno-dimenzionalan ukoliko je generisan nekim konačnim skupom vektora. Vektori $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ su *linearno nezavisni* akko za sve skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ važi:

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0.$$

Niz vektora $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ čini uređenu bazu vektorskog prostora $\mathcal{V}$ ako i samo ako važi:

$$a. V = \mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n). \quad b. \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \text{ su linearno nezavisni.}$$

1.4.1 Teorema:

1° Svaki vektorski prostor ima bazu.

2° Baze vektorskih prostora imaju isti broj elemenata.

Prethodna teorema omogućava da se uvede pojam *dimenzije* konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora.

Definicija: Neka je $\mathcal{V}$ konačno-dimenzionalan vektorski prostor. Tada, $\dim \mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \text{broj neke (bilo koje) baze prostora } \mathcal{V}$. Dakle, ako je $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ baza prostora $\mathcal{V}$, tada je $\dim \mathcal{V} = n$

Primer

1° Svaka dva nekolinearna vektora u $\mathbf{E}^2$ čine bazu prostora $\mathbf{E}^2$. Dakle $\dim \mathbf{E}^2 = 2$.

2° Svaka tri nekomplanarna vektora prostora $\mathbf{E}^3$ čine bazu prostora $\mathbf{E}^3$. Dakle, $\dim \mathbf{E}^3 = 3$.

3° Vektori $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ čine bazu prostora $\mathcal{R}^n$ jer su $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ linearno nezavisni i za $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_i x_i\mathbf{e}_i$.

Dakle $\dim \mathcal{R}^n = n$.

4° $\dim(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}, \cdot) = n$, ali $\dim(\mathbf{C}^n, \mathbf{R}, \cdot) = 2n$.

5° Neka je $\mathfrak{M}_{m \times n}(\mathbf{F})$ vektorski prostor matrica nad poljem $\mathbf{F}$ i neka je E_{ij} matrica koja u preseku i -te vrste i j -te kolone ima skalar 1, na ostalim mestima je 0. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = ||a_{ij}||_{m \times n},$$

tada $A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$. Na primer, za $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} A &= a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{23} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{23}E_{23}. \end{aligned}$$

Matrice E_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, čine bazu prostora $\mathfrak{M}_{m \times n}(F)$, dakle $\dim \mathfrak{M}_{m \times n}(F) = m \cdot n$.

Postoje vektorski prostori koji nisu konačno generisani, dakle nemaju konačnu bazu. Za njih se mogu uvesti slični pojmovi, ali u ovom kursu nećemo se njima baviti. Uбудućе pod vektorskim prostorom podrazumevamo pojam konačno-dimenzionalnog prostora ako se drugačije ne kaže.

Svaka baza $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ prostora $\mathcal{V}$ određuje sistem koordinata za vektore iz $\mathcal{V}$: ako je $\mathbf{x} \in V$ i $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{u}_i$, onda su $x_1, \dots, x_n$ jedinstvene koordinate vektora $\mathbf{x}$ u bazi $\mathbf{u}$ i pišemo $\mathbf{x}_u = (x_1, \dots, x_n)$, ali i kao vektore kolona, odnosno vrsti:

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{odnosno } \mathbf{x}_u = [x_1, \dots, x_n].$$

Primer U prostoru $\mathcal{R}^n$, za $\mathbf{x} \in R^n$ i bazu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, gde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1),$$

$$\mathbf{x}_e = (x_1, \dots, x_n).$$

Svaki vektor je svojim koordinatama jedinstveno određen, tj. ako $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ i $\mathbf{u}$ je baza za $\mathcal{V}$, tada iz $\mathbf{x}_u = \mathbf{y}_u$ sledi $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

U ovoj knjizi često ćemo se sretati sa pojmom slobodnog parametra. Generalno, *slobodan parametar* je promenljiva kojoj se mogu dodeliti bilo koje vrednosti iz nekog izabranog domena, na primer iz R ili nekog realnog intervala $[a, b]$, $a < b$. Broj slobodnih parametara koji uzimaju vrednosti u nekom skupu S direktno je vezan za pojam dimenzije skupa S . Ako je $S \subseteq R^n$, elemente skupa S često opisujemo analitičkim izrazima $x_i = x_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$.

Primer

1° Ako je $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, možemo uzeti koordinate x_i za parametre koji opisuju tačke prostora R^n .

2° Prava u R^3 : $x = a_1 t + b_1$, $y = a_2 t + b_2$, $z = a_3 t + b_3$, $t \in R$.

3° Ravan u R^3 : $x = a_1u + b_1v + c_1$, $y = a_2u + b_2v + c_2$,
 $z = a_3u + b_3v + c_3$, $u, v \in R$.

4° Sfera poluprečnika r u R^3 , $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$:
 $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$,
 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

5° Sferne koordinate tačaka u R^3 :
 $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$,
 $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

5° Trodimenzionalna sfera $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ u R^4 :
 $x_0 = \cos(\psi)$, $x_1 = \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\varphi)$,
 $x_2 = \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $x_3 = \sin(\psi) \cos(\theta)$,
 $0 \leq \theta, \psi \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Primer Ako je $L: R^n \rightarrow R^n$ linearni operator određen kvadratnom matricom $A = ||a_{ij}||$ reda n , tj. $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^n$, tada je skup $S = \text{Im}(L) = L(R^n) = \{A\mathbf{x}: \mathbf{x} \in R^n\}$ parametrizovan koordinatama $x_1, \dots, x_n$ vektora $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Kako je

$$\text{Im}(L) = \mathcal{L}(L\mathbf{e}_1, \dots, L\mathbf{e}_n) = \text{prostor kolona matrice } A,$$

to je $\dim S = \dim \text{Im}(L) = \text{rang } A$. Ako je A regularna matrica, tada $\dim S = \text{rang } A = n$, u suprotnom $\dim S < n$. Dakle u ovom drugom slučaju broj n parametara $x_1, \dots, x_n$ veći je od $\dim S$, ali nije najmanji. Ako je $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ baza potprostora $\text{Im}(L)$ tada

$$\dim S = \dim \text{Im}(L) = m \text{ i } S = \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{u}_m: \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R\}$$

tj. skup S parametrizuje m parametara. Promenljive $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ čine najmanji broj parametara koji parametrizuje S . $\square$

U svakom od navedenih primera broj upotrebljenih parametara je *najmanji* i jednak je dimenziji skupa koji ovi parametri opisuju. Na primer, dimenzija prave je 1, dimenzija ravni i sfere je 2, dimenzija trodimenzionalne sfere je 3. Kod skupa S "regularne" strukture najmanji broj parametara koji određuje skup S zaista se poklapa sa dimenzijom skupa S . Bliže pretpostavke i teorija date klase skupova precizno određuje pojam regularnosti. Na primer, kod pojma *ravne*

krive imamo jednoparametarsku definiciju, to je neprekidno preslikavanje $f: [0, 1] \rightarrow R^2$. *Putanja* je $P = \{f(t): 0 \leq t \leq 1\}$ ¹⁾. Intuicija nam kaže da je $\dim(P) = 1$. To ipak nije uvek tako, na primer Peanova krivulja P_0 ispunjava ceo jedinični kvadrat, dakle $\dim(P_0) = 2$. Vidimo da pretpostavka o neprekidnosti nije dovoljna. Ako pretpostavimo da je kriva *glatka*, tj. ima neprekidan prvi izvod, tada je zaista $\dim(P) = 1$.

U klasičnoj mehanici uzima se da je putanja čestice $x = x(t)$ glatka kriva: ako pretpostavimo da se čestica M kreće i ako se ona u trenutku t_0 nalazi u položaju P_0 , ne postoji fiksiran pozitivan broj r tako da je u svakom trenutku $t > t_0$ položaj P čestice na rastojanju r ili većem od položaja P_0 . Brzina čestice $\dot{x}(t)$ isto se neprekidno menja. Nije moguće da u nekom momentu telo ima brzinu 10 km/h, a u svakom sledećem trenutku ima brzinu veću od 100 km/h. Dakle, sve je na svom mestu, pretpostavka o glatkosti putanje $x(t)$, brzine $\dot{x}(t)$ i ubrzanja $\ddot{x}(t)$ je prirodna. Naravno i ovde ima izuzetaka, na primer kod udara ili bilijara. Ali takve pojave izučavaju se u pripadnim teorijama. Drugi primer "regularnih" skupova predstavljaju *mnogostrukosti*. U ovom kursu uglavnom se izučavaju takvi skupovi. Otuda za dati skup S često ćemo reći da je $\dim(S) = n$ ako je jasno da S određuju nekinajmanji broj n parametara. Precizna definicija dimenzije opštih skupova i svojstva ovog pojma daju se i dokazuju u topologiji.

1.5 Linearne transformacije koordinata

Neka su $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ i $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ dve baze prostora $\mathcal{V}$. Tada se vektori $\mathbf{v}_i$ mogu linearno izraziti pomoću baznih vektora $\mathbf{u}_i$, tj.

$\mathbf{v}_i = \sum_{ij} p_{ij} \mathbf{u}_j$, $i = 1, \dots, n$, odakle $\mathbf{v} = P \cdot \mathbf{u}$, što zapisujemo i ovako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}, \quad P = \|p_{ij}\| \text{ je kvadratna matrica reda } n.$$

¹⁾na nekim mestima uzima se da je putanja zapravo kriva.

Matricu P nazivamo *matricom prelaza* iz baze $\mathbf{u}$ u bazu $\mathbf{v}$. Neka je $\mathbf{x} \in V$ i $\mathbf{x}_u = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}_v = (y_1, \dots, y_n)$. Dalje, neka je $S = P^T$ transponovana matrica matrice P , tj.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{gde } s_{ij} = p_{ji}.$$

$$\text{Tada } \mathbf{x} = \sum_j y_j \mathbf{v}_j = \sum_j y_j \sum_i p_{ji} \mathbf{u}_i = \sum_i \left(\sum_j p_{ji} y_j \right) \mathbf{u}_i = \sum_i \left(\sum_j s_{ij} y_j \right) \mathbf{u}_i$$

Kako je $x = \sum_i x_i \mathbf{u}_i$, nalazimo $x_i = \sum_j s_{ij} y_j$, $i = 1, \dots, n$. Dakle

$$(L) \quad \begin{cases} x_1 = s_{11}y_1 + \dots + s_{1n}y_n \\ x_2 = s_{21}y_1 + \dots + s_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = s_{n1}y_1 + \dots + s_{nn}y_n \end{cases}, \quad \text{tj. } \mathbf{x}_u = S \cdot \mathbf{x}_v.$$

Jednakost (L) određuju linearnu transformaciju koordinata vektora $\mathbf{x}$ iz baze $\mathbf{v}$ u bazu $\mathbf{u}$. Matrice S i P su regularne, dakle $\det(S) \neq 0$, $\det(P) \neq 0$. Da su S i P regularne vidimo iz sledećeg razmatranja. Simetričnim argumentom nalazimo da postoje matrice Q i R takve da je $\mathbf{u} = Q\mathbf{v}$ i $\mathbf{x}_v = R\mathbf{x}_u$, $R = P^T$. Lako se proverava da je $SR = E_n$, gde je E_n jedinična matrica reda n . Otuda $\det(SR) = 1$, pa s obzirom na Bine-Košijevu teoremu²⁾ sledi $\det(S), \det(R) \neq 0$ i takođe $R = P^{-1}$, $Q = S^{-1}$.

Dakle, dve baze $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ određuju dva sistema koordinata $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ za dati vektor $\mathbf{x}$ prostora $\mathcal{V}$. Prelazak iz jednog sistema u drugi određen je nekom regularnom matricom. Važi i obrnuto. Ako je S regularna matrica i $\mathbf{u}$ baza prostora $\mathcal{V}$ tada je jednakostima (L) određen drugi sistem koordinata u novoj bazi $\mathbf{v} = P^{-1} \cdot \mathbf{u}$, $P = S^T$.

²⁾ $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, A, B su kvadratne matrice reda n . Teorema nosi naziv prema francuskim matematičarima Augustin-Louis Cauchy [1789-1857] i Jacques Philippe Marie Binet [1786-1856].

S obzirom da je prema Bine-Košijevoj teoremi proizvod dve regularne matrice takođe regularna matrica, skup

$$\text{GL}(n, \mathbf{F}) = \{\mathbf{a}: \mathbf{a} \text{ je kvadratna matrica reda } n \text{ nad poljem } \mathbf{F}, \det \mathbf{a} \neq 0\}$$

čini grupu u odnosu na množenje matrica, koju nazivamo opštom linearnom grupom. Ako je $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, pišemo $\text{GL}(n)$, tj. $\text{GL}(n) = \text{GL}(n, \mathbf{R})$. Dakle, možemo uzeti da je $\text{GL}(n)$ grupa linearnih transformacija sistema koordinata prostora $\mathcal{R}^n$. Ovde važno mesto ima specijalna linearna grupa

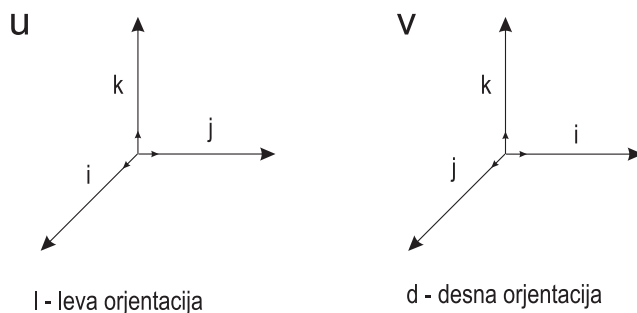
$$\text{SL}(n, \mathbf{F}) = \{\mathbf{a} \in \text{GL}(n, \mathbf{F}) : \det \mathbf{a} = 1\}; \quad \text{SL}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{SL}(n, \mathbf{R}).$$

Važi $\text{SL}(n) \triangleleft \text{GL}(n)$, tj. $\text{SL}(n)$ je normalna podgrupa grupe $\text{GL}(n)$.

1.6 Orientacija prostora

Neka su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ dve baze prostora $\mathcal{V}$ i neka je $\mathbf{v} = P \cdot \mathbf{u}$. Ako je $\det(P) > 0$, kažemo da su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ iste orijentacije. Ako je $\det(P) < 0$, kažemo da su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ suprotne orijentacije. Binarna relacija $\sim$ između baza prostora $\mathcal{V}$ definisana sa:

$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbf{v} = P \cdot \mathbf{u}$, P je matrica prelaza, $\det(P) > 0$ je relacija ekvivalencije. Ova relacija ekvivalencije ima tačno dve klase l i d . Svaka klasa l i d određuje jednu orijentaciju prostora.



Dijagram 1.

Ako je $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ standardna ortonormirana baza u prostoru $\mathcal{R}^3$ i $\mathbf{v} = \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}$. Tada

$$\begin{bmatrix} j \\ i \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\det(P) = -1$, te su baze $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ suprotne orijentacije. Leva orijentacija prostora $\mathcal{R}^3$ odgovara orijentaciji realnog prostora koja daju prva tri prsta leve ruke.

U klasičnoj mehanici, kretanjem kruto telo ne menja orijentaciju. Kod osobe M koja je putovala iz mesta A u mesto B leva i desna ruka nisu zamenile mesta. U mestu B lik osobe M u ogledalu identičan je njenom liku u ogledalu u mestu A . U matematici i fizici najčešće se bira leva orijentacija prostora.

1.7 Linearna preslikavanja

Neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ vektorski prostori nad istim poljem $\mathbf{F}$. Preslikavanje $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je linearno preslikavanje iz prostora $\mathcal{U}$ u prostor $\mathcal{V}$ ako važi

$$L(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha L\mathbf{x} + \beta L\mathbf{y}, \quad \alpha, \beta \in F, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}.$$

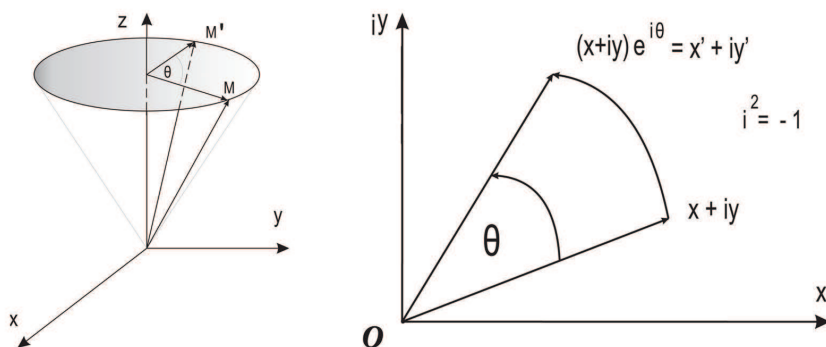
Zapis $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ označava činjenicu da je L linearno preslikavanje iz prostora $\mathcal{U}$ u prostor $\mathcal{V}$.

Primeri

1° $L : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^2$, $L(x, y, z) = (x, y)$, projekcija prostora $\mathcal{R}^3$ na $\mathcal{R}^2$.

2° Rotacija za ugao θ oko z – ose. $M' = \rho(M)$ koja je data sledećim formulama transformacija:

$$\begin{aligned} x' &= \cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot y \\ y' &= \sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y \\ z' &= z \end{aligned}$$



Dijagram 2.

što sledi iz:

$$\begin{aligned}
 x' + iy' &= (x + iy)e^{i\theta} \\
 &= (x + iy)(\cos \theta + i \sin \theta) \\
 &= (x \cos \theta - y \sin \theta) + (x \sin \theta + y \cos \theta)i.
 \end{aligned}$$

Linearno preslikavanje $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je *izomorfizam* između prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ ako je L 1-1 i na, tj. zadovoljava uslove:

$$1^\circ \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow L\mathbf{x} \neq L\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \text{ odnosno } L\mathbf{x} = L\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

$$2^\circ \forall \mathbf{y} \in V \exists \mathbf{x} \in U L\mathbf{x} = \mathbf{y}, \text{ tj. za svako } \mathbf{y} \in V \text{ jednačina } L\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ ima rešenje po } \mathbf{x}, \mathbf{x} \in U.$$

Da je $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ izomorfizam zapisujemo $L : \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$.

Prostori $\mathbf{E}^2$, R^2 su izomorfni: Izborom koordinatnog početka O i dva nekolinearna vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^2$, svaki vektor $\mathbf{x} \in E^2$ ima jedinstveno razlaganje $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, $\alpha, \beta \in R$. Preslikavanje $L : \mathbf{x} \mapsto (\alpha, \beta)$ određuje izomorfizam $L : \mathbf{E}^2 \cong \mathcal{R}^2$. Otuda kažemo da je $\mathcal{R}^2$ analitički model euklidskog prostora $\mathbf{E}^2$. Slično je $\mathcal{R}^3$ analitički model prostora $\mathbf{E}^3$. U ovoj konstrukciji pretpostavlja se

(HT) *Princip homogenosti i izotropnosti,*

da se za tačku O može izabrati bilo koja tačka ravni $\mathbf{E}^2$ (svojstvo homogenosti) i bilo koja dva nekolinearna vektora sa početkom u O (svojstvo izotropnosti u svakom pravcu i smeru).

Ovaj princip ima važno mesto u mehanici, teoriji relativnosti i kosmologiji, naravno formulisan na odgovarajući način.

1.7.1 Teorema: *Neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ prostori nad istim poljem skalara i neka su iste dimenzije, tj. $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$. Tada $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$.*

Ako je $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ linearno preslikavanje i $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ tada kažemo da je L linearni operator prostora $\mathcal{U}$. Takođe koristimo sledeće oznake:

$$1^\circ \text{ Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \{L \mid L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}\}.$$

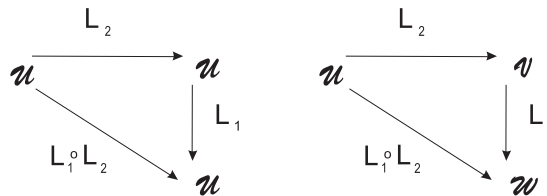
$$2^\circ \text{ End}(\mathcal{U}) = \mathcal{L}(\mathcal{U}) = \{L \mid L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}\}.$$

U specijalnoj teoriji relativnosti i generalno u mehanici linearni operatori imaju fundamentalnu ulogu. Ako su $L_1, L_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ linearni operatori i $\mathcal{U}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbf{F}$, tada oni za svaka dva skalara $\alpha, \beta \in F$ određuju nov linearni operator $L = \alpha L_1 + \beta L_2$. Ovde se vrednost $L(\mathbf{x})$ računa ovako:

$$L(\mathbf{x}) = (\alpha L_1 + \beta L_2)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha L_1(\mathbf{x}) + \beta L_2(\mathbf{x}).$$

1.7.2 Teorema: *$((\mathcal{L}(\mathcal{U}), +, \mathbf{0}), \mathbf{F}, \cdot)$ je vektorski prostor. Ovde je $\mathbf{0}$ oznaka za nula operator, tj. $\mathbf{0}(x) = 0, \mathbf{x} \in V$, 0 je nula vektor.*

Uvodimo još jednu operaciju u $\mathcal{L}(\mathcal{U})$, slaganje (kompozicija ili proizvod) operatora: Ako $L_1, L_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, tada $(L_1 \circ L_2)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} L_1(L_2(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Dakle $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Generalno, ako $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ i $L_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ tada $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$.



Dijagram 4.

Ako $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, I je identički operator i α je skalar, tada važi:

$$\begin{aligned}(L_1 \circ L_2) \circ L_3 &= L_1 \circ (L_2 \circ L_3) \\ L_1 \circ (L_2 + L_3) &= L_1 \circ L_2 + L_1 \circ L_3 \\ (L_1 + L_2) \circ L_3 &= L_1 \circ L_3 + L_2 \circ L_3 \\ L \circ I &= L, \quad I \circ L = L \\ \alpha(L_1 \circ L_2) &= (\alpha L_1) \circ L_2 = L_1 \circ (\alpha L_2).\end{aligned}$$

S obzirom na ove identitete vektorski prostor $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ nad poljem skalara F nazivamo *asocijativnom algebrom* nad poljem F .

Svaki linearni operator ima matricnu reprezentaciju u datoj bazi $\mathbf{u}$ prostora $\mathcal{U}$. Neka je $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ i $\mathbf{v}_i = L(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, \dots, n$. Tada vektor $\mathbf{v}_j$ ima razvoj $\mathbf{v}_j = \sum_i a_{ij} \mathbf{u}_i$ u bazi $\mathbf{u}$, $a_{ij} \in F$. Za $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{u}_j$, onda nalazimo

$$\begin{aligned}L(\mathbf{x}) &= L\left(\sum_j x_j \mathbf{u}_j\right) = \sum_j x_j L(\mathbf{u}_j) = \sum_j x_j \mathbf{v}_j \\ &= \sum_j x_j \sum_i a_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_j \sum_i x_j a_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \mathbf{u}_i\end{aligned}$$

odakle za $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}_{\mathbf{u}} = (y_1, \dots, y_n)$, nalazimo

$$(T) \quad y_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dakle, koordinate slike $L(\mathbf{x})$ vektora $\mathbf{x}$ određene su linearnom transformacijom (T) , tj. za matricu $[L]_{\mathbf{u}} = ||a_{ij}||$ važi:

1.7.3 Teorema:

$$L(\mathbf{x})_{\mathbf{u}} = [L]_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}_{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad L(\mathbf{u}) = [L]_{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{u}.$$

Neka je $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ baza prostora $\mathcal{V}$. Prema prethodnom, za svaki linearni operator $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ postoji jedinstvena kvadratna matrica $A = ||a_{ij}||$ reda n , to je $[L]_{\mathbf{e}}$, tako da je $L(\mathbf{x})_{\mathbf{e}} = A\mathbf{x}_{\mathbf{e}}$, $\mathbf{x} \in V$. Takođe važi obrat. Naime, ako je A kvadratna matrica reda n , tada je pomoću

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{y}_{\mathbf{e}} = A\mathbf{x}_{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

definisan jedinstven linearni operator $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Ovaj linearni operator u slobodnijoj notaciji zapisujemo $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Otuda odmah nalazimo, uz izbor bilo koje baze $\mathbf{e}$ prostora $\mathcal{V}$, da je algebra linearnih operatora prostora dimenzije n nad poljem $\mathbf{F}$ izomorfna algebri kvadratnih matrica nad poljem $\mathbf{F}$ reda n . Izomorfizam Φ dat je sa

$$\Phi: L \mapsto [L]_{\mathbf{e}}, \quad L \in \mathcal{L}(\mathcal{V}).$$

Dakle važi

$$[L_1 \circ L_2]_{\mathbf{e}} = [L_1]_{\mathbf{e}}[L_2]_{\mathbf{e}}, \quad [\alpha L]_{\mathbf{e}} = \alpha[L]_{\mathbf{e}}, \quad [L_1 + L_2]_{\mathbf{e}} = [L_1]_{\mathbf{e}} + [L_2]_{\mathbf{e}}.$$

Otuda odmah nalazimo da je $\dim \mathcal{L}(\mathcal{U}) = n^2$.

Spomenimo da je kod vektorskog prostora $\mathcal{U}$ konačne dimenzije, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ je $1-1$ (utapanje) ako i samo ako je L na (epimorfizam).

1.7.4 Teorema:

Neka su $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dve baze prostora $\mathcal{U}$ i $\mathbf{v} = P\mathbf{u}$, $S = P^T$. Tada:

$$[L]_{\mathbf{v}} = S^{-1}[L]_{\mathbf{u}}S, \text{ tj. matrice } [L]_{\mathbf{u}} \text{ i } [L]_{\mathbf{v}} \text{ su slične.}$$

Dokaz Neka je $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Tada $L(\mathbf{x})_{\mathbf{u}} = [L]_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_{\mathbf{u}}$ i $L(\mathbf{x})_{\mathbf{u}} = SL(\mathbf{x})_{\mathbf{v}}$. Takođe $L(\mathbf{x})_{\mathbf{v}} = [L]_{\mathbf{v}}\mathbf{x}_{\mathbf{v}}$ i $\mathbf{x}_{\mathbf{u}} = S\mathbf{x}_{\mathbf{v}}$. Otuda $SL(\mathbf{x})_{\mathbf{v}} = [L]_{\mathbf{u}}S\mathbf{x}_{\mathbf{v}}$, odakle $L(\mathbf{x})_{\mathbf{v}} = S^{-1}[L]_{\mathbf{u}}S\mathbf{x}_{\mathbf{v}}$. Stavljajući redom $\mathbf{x} = \mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, n$, nalazimo $[L]_{\mathbf{v}} = S^{-1}[L]_{\mathbf{u}}S$. $\square$

Operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ je *regularan* (negde se kaže i automorfizam ili invertibilan) ako je L $1-1$ (dakle i na, uz pretpostavku da je $\mathcal{U}$ prostor konačne dimenzije). Skup regularnih operatora čini grupu u odnosu na kompoziciju operatora i ta grupa, shodno matričnoj reprezentaciji linearnih operatora izomorfna je grupi $\text{GL}(n, F)$. Dakle imamo dva pogleda na grupu $\text{GL}(n)$ vezano za prostor $\mathcal{U}$ dimenzije n :

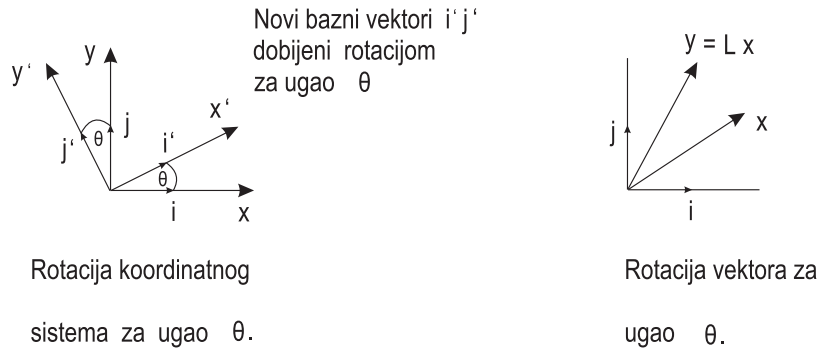
1° $\text{GL}(n)$ je grupa linearnih transformacija koordinata u različitim bazama prostora $\mathcal{U}$.

2° $\text{GL}(n)$ je grupa regularnih operatora prostora $\mathcal{U}$.

Te dve grupe jesu izomorfne (dakle sa algebarskog stanovništva iste su) ali ipak imaju različita dejstva na prostor $\mathcal{U}$. Neka je $\mathbf{u}$ baza za prostor $\mathcal{U}$, $\dim \mathcal{U} = n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Regularna matrica A reda $n \times n$ određuje novu bazu $\mathbf{v} = A^T \mathbf{u}$ i za sisteme koordinata vektora $\mathbf{x}$ važi: $\mathbf{x}_u = A \mathbf{x}_v$, tj. ova linearna transformacija menja koordinatne vektore ali ne i vektor $\mathbf{x}$. S druge strane, operator L određen matricom A , $L(\mathbf{x})_u = A \cdot \mathbf{x}_u$ pomera vektor $\mathbf{x}$. Na primer, ako je

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ tada } L\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

u bazi $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ prostora $\mathcal{R}^2$. Ovaj operator odgovara rotaciji u ravni oko koordinatnog početka za ugao θ .



Dijagram 5.

Ova dualnost vodi do pojmova kovarijantnosti i kontravarijantnosti.

1.8 Ajnštanova notacija

Albert Ajnštajn uveo je 1916. konvenciju o skraćenom zapisivanju suma i u vezi je sa tenzorskim računom. Ovu konvenciju nazivamo Ajnštajnovom notacijom i kraće je označavamo sa (An). U ovom zapisu važno mesto ima način kako se koriste gornji i donji indeksi. Pretpostavimo da je u datom računu n fiksiran prirodan broj. Neka su $a^1, a^2, \dots, a^n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ nizovi skalara. Vektore $(a^1, a^2, \dots, a^n)$

i $(b_1, \dots, b_n)$ tada kratko zapisujemo kao a^i , odnosno b_i dok sumu $\sum_{i=1}^n a^i b_i$ prema (An) zapisujemo kao $a^i b_i$.

U jednom od sledećih poglavlja uvešćemo tenzorski račun i dati preciznu definiciju tenzora. Ovde dajemo samo mali fragment ove teorije, dovoljan za račun sa vektorima i matricama.

Dakle, ako se jedan isti simbol α javlja kao gornji i donji indeks u nekom proizvodu indeksiranih skalara, tada taj izraz prema (An) zapravo predstavlja sumu tih izraza po indeksu α .

U sledećem razmatranju, u matrici $\mathbf{a} = \|a_j^i\|_{m \times n}$ nad nekim poljem skalara, na primer $\mathbf{R}$, za fiksiran indeks i , a_j^i su elementi i -tog vektora vrste. Dakle $\mathbf{a}^i = [a_1^i, \dots, a_n^i]$, $i = 1, \dots, m$. Slično, za fiksiran indeks j , skalari a_j^i su elementi j -tog vektora kolone $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, n$, matrice $\mathbf{a}$.

Sumu $x_i = \sum_j a_j^i y_j$ prema (An) zapisujemo $x_i = a_j^i y_j$. Ovaj dogovor važi i u slučaju da se isti indeks javlja kao gornji i donji uz isti skalar. Na primer, ako je $\mathbf{a} = \|a_j^i\|$ kvadratna matrica, tada a_j^i predstavlja *trag* matrice $\mathbf{a}$, $\text{tr}(\mathbf{a}) = \sum_i a_i^i$. Ova konvencija uključuje i nizove skalara (iste dužine po dogovarajućim indeksima) sa više indeksa. Primetimo da je $a_i^{jl} y_j = a_i^{kl} y_k$, ali $a_i^{jl} y_j \neq a_i^{jl} y_l$.

U ovom računu, matrice $\|a_j^i\|$, $\|a_{ij}\|$ i $\|a^{ij}\|$ slično kratko zapisujemo redom a_j^i , a_{ij} i a^{ij} .

Primer 1. (množenje matrica): Neka je $\mathbf{a} = \|a_j^i\|$, $\mathbf{b} = \|b_j^i\|$, $\mathbf{c} = \mathbf{ab} = \|c_j^i\|$. Tada je prema (An) $c_j^i = a_k^i b_j^k$, s obzirom da je $c_j^i = \sum_k a_k^i \cdot b_j^k$.

Prema (An) izraz $a_k^i (b_l^k c_j^l)$ predstavlja niz $u_j^i = \sum_k a_k^i (\sum_l b_l^k c_j^l)$.

1.8.1 Teorema (An): $(a_k^i b_l^k) c_j^l = a_k^i (b_l^k c_j^l)$.

Dokaz : $(a_k^i b_l^k) c_j^l \stackrel{(An)}{=} \sum_l (\sum_k a_k^i b_l^k) c_j^l = \sum_l \sum_k a_k^i b_l^k c_j^l = \sum_k \sum_l a_k^i b_l^k c_j^l$
 $= \sum_k a_k^i (\sum_l b_l^k c_j^l) \stackrel{(An)}{=} a_k^i (b_l^k c_j^l).$

Dakle možemo pisati $a_k^i b_l^k c_j^l$ umesto $(a_k^i b_l^k) c_j^l$ ili $a_k^i (b_l^k c_j^l)$.

Primer 2. Kronekerov δ -simbol definisan je uslovima $\delta_j^i = 1$ ako $i = j$, $\delta_j^i = 0$ ako $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Dakle, za jediničnu matricu E_n reda n važi $E_n = ||\delta_j^i||$. Neka su $A = ||a_j^i||$ i $B = ||b_j^i||$ kvadratne matrice reda n . Tada $\delta_j^i = a_k^i b_j^k$ izražava činjenicu $B = A^{-1}$.

Sličan dogovor važi i za mešovite sume vektora i skalara: ako je a_k^i niz skalara i $\mathbf{u}_i$ niz vektora iste dužine po odgovarajućem indeksu, tada je prema (An) $a_k^i \mathbf{u}_i$ zapis za $\sum_i a_k^i \mathbf{u}_i$.

Radi konzistentne primene Ajnštajnovke konvencije, na sličan način se uvode Kronekerovi simboli δ_{ij} i δ^{ij} . Mada imaju iste vrednosti, simboli δ_i^j , δ_{ij} i δ^{ij} predstavljaju različite objekte, primere *tenzora*. Koristimo ih za spuštanje i podizanje indeksa, tj. da niz vektora vrsti transformišemo u niz vektora kolona i obrnuto. Ako je $\mathbf{u}^i = [u_1^i, \dots, u_n^i]$, $1 \leq i \leq m$, niz vektora vrsti, tada za

$$v_{ij} = \delta_{ik} u_j^k \quad \text{i} \quad \mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{bmatrix} \quad \text{imamo} \quad \mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^n \end{bmatrix}.$$

Tenzori δ_{ij} i δ^{ij} su simetrični, tj. važi $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ i $\delta^{ij} = \delta^{ji}$.

Primer Neka je $A = ||a_j^i||$ i $B = A^\top = ||b_j^i||$. Tada je $b_j^i = \delta^{ik} \delta_{lj} a_k^l$. Neka je $A = ||a_{ij}||$ i $B = A^\top = ||b^{ij}||$. Tada je $b^{ij} = \delta^{ik} \delta^{jl} a_{kl}$.

1.8.2 Teorema (*Teorema o uvođenju i brisanju indeksa*). Neka su $\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i \in R^m$ i $a_j^i \in R$. Neka su $\mathbf{u}^i = (u_1^i, \dots, u_m^i)$, $\mathbf{v}^i = (v_1^i, \dots, v_m^i)$, $\mathbf{u}_i = (u_i^1, \dots, u_i^n)$, $\mathbf{v}_i = (v_i^1, \dots, v_i^n)$. Tada

1° Ako je $u_j^i = a_k^i v_j^k$ tada $\mathbf{u}^i = a_k^i \mathbf{v}^k$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{a}_k v_j^k$, gde $\mathbf{a}_k = (a_k^1, \dots, a_k^n)$.

2° Ako $\mathbf{u}^i = a_k^i \mathbf{v}^k$ tada $u_j^i = a_k^i v_j^k$. Ako $\mathbf{u}_j = a_j^k \mathbf{v}_k$, tada $u_j^i = a_j^k v_k^i$

Dokaz: 1° Pretpostavimo $u_j^i = a_k^i v_j^k$. Tada

$$\mathbf{u}^i = (u_1^i, u_2^i, \dots, u_m^i) = \left(\sum_k a_k^i v_1^k, \sum_k a_k^i v_2^k, \dots, \sum_k a_k^i v_m^k \right) =$$

$$\sum_k a_k^i(v_1^k, v_2^k, \dots, v_m^k) = \sum_k a_k^i \mathbf{v}^k \stackrel{An}{=} a_k^i \mathbf{v}^k.$$

Primer 3. Neka je $\mathbf{a} = \|a_j^i\|_{m \times n}$. Dakle matrica $\mathbf{a}$ ima m vrsta $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m$ i n kolona $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Dokazaćemo da je

$$\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

tj. dimenzije prostora vrsti i prostora kolona matrice $\mathbf{a}$ su iste. Neka je $p = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m)$ tj. $\mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m)$ ima bazu $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^p$. Tada $\mathbf{a}^i = c_k^i \mathbf{u}^k$ za neke skalare c_k^i . Otuda $a_j^i = c_k^i u_j^k$ pa $\mathbf{a}_j = u_j^k \mathbf{c}_k$ tj. $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_p)$, pa $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \leq p$ tj. $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \leq \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m)$. Simetričnim postupkom nalazimo $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m) \leq \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ pa

$$\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Podsetimo se da je $\text{rang}(\mathbf{a}) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m)$. Ako je $\mathbf{a} = \|a_j^i\|_{m \times n}$, odmah vidimo da je $\text{rang} \mathbf{a} \leq m, n$.

Primer 4. Neka su $\mathbf{a} = \|a_j^i\|_{m \times k}$ i $\mathbf{b} = \|b_j^i\|_{k \times n}$ i pretpostavimo oznake kao u prethodnom primeru. Dokazaćemo da je

$$\text{rang} \mathbf{ab} \leq \text{rang} \mathbf{a}, \text{rang} \mathbf{b}.$$

Neka je $\mathbf{c} = \|c_j^i\|_{m \times n} = \mathbf{ab}$. Tada $c_j^i = a_l^i b_j^l$, odakle $\mathbf{c}^i = a_l^i \mathbf{b}^l$, pa $\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^m \in \mathcal{L}(\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k)$, tj. $\mathcal{L}(\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^m) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k)$ odakle $\dim \mathcal{L}(\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^m) \leq \dim \mathcal{L}(\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k)$. Otuda nalazimo $\text{rang} \mathbf{c} \leq \text{rang} \mathbf{b}$. Slično $\text{rang} \mathbf{c} \leq \text{rang} \mathbf{a}$.

Primer 5. Neka je $\mathbf{a} = \|a_j^i\|$ realna kvadratna matrica reda n . Dokazaćemo da je $\mathbf{a}$ invertibilna matrica akko $\text{rang} \mathbf{a} = n$. Najpre pretpostavimo da je $\mathbf{a}$ invertibilna, tj. za neku kvadratnu matricu $\mathbf{b}$ reda n imamo $\mathbf{ab} = E_n$ gde je E_n jedinična matrica reda n . Tada prema

$$\text{rang} \mathbf{ab} = \text{rang} E_n = n \text{ i } \text{rang} \mathbf{ab} \leq \text{rang} \mathbf{a}, \text{rang} \mathbf{b} \leq n,$$

sledi $\text{rang} \mathbf{a} = n$. Za dokaz u suprotnom smeru neka je $\text{rang} \mathbf{a} = n$. S obzirom da su $\mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n)$ i R^n iste dimezije i $\mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n) \subseteq R^n$, sledi $R^n = \mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n)$. Neka je $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$, $\mathbf{e}^i = [\delta_1^i, \dots, \delta_n^i]$, osnovna baza prostora R^n . Dakle $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n \in \mathcal{L}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n)$, pa za neke skalare b_l^k imamo $\mathbf{e}^i = b_l^i \mathbf{a}^l$, tj. $b_l^i a_j^l = e_j^i = \delta_j^i$. Dakle $\mathbf{ba} = E_n$,

gde je $\mathbf{b} = \|\delta_j^i\|$. Slično, $R^n = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ i za osnovnu bazu koju sada zapisujemo $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, postoje skalari c_j^k takvi da je $\mathbf{e}_j = c_j^k \mathbf{a}_k$, tj. $a_k^i c_j^k = e_j^i = \delta_j^i$, odakle $\mathbf{ac} = E_n$ za $\mathbf{c} = \|c_j^i\|$. Iz jednakosti $\mathbf{ba} = E_n$, $\mathbf{ac} = E_n$ nalazimo $\mathbf{b} = \mathbf{b}E_n = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) = (\mathbf{ba})\mathbf{c} = E_n\mathbf{c} = \mathbf{c}$. Otuda $\mathbf{ab} = E_n$, $\mathbf{ba} = E_n$, te je $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$.

Prema prethodnom odmah sledi da skup svih invertibilnih (regularnih) matrica reda n čini grupu: ako je $\mathbf{a}$ regularna matrica, to je i $\mathbf{a}^{-1}$ regularna s obzirom da je $\mathbf{a}$ inverzna matrici $\mathbf{a}^{-1}$. Ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ regularne to je i $\mathbf{ab}$ regularna; $\mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1}$ je inverzna matrici $\mathbf{ab}$.

1.9 Euklidski prostori

U ovom odeljku pretpostavićemo da je $\mathcal{V}$ realni vektorski prostor tj. da je njegovo polje skalara polje realnih brojeva $\mathbf{R}$. Takođe, uzimamo da je $\mathcal{V}$ konačne dimenzije. Uvođenjem skalarnog proizvoda u $\mathcal{V}$ uvodi se geometrija na prostoru $\mathcal{V}$: mogu se definisati dužina vektora, rastojanje, ugao, ortogonalnost i izometrija.

Definicija. Preslikavanje $F : V \times V \rightarrow R$ je skalarni proizvod akko:

$$1^\circ \quad F(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta F(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad \alpha, \beta \in V.$$

$$2^\circ \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

$$3^\circ \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0, \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Umesto $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ najčešće pišemo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ili $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Obe ove notacije korist ćemo ravnopravno. U ovim oznakama aksiome $1^\circ - 3^\circ$ za vektore $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ izgledaju ovako:

$$1' \quad (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z});$$

$$\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

$$2' \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}; \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

$$3' \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ako u definiciji skalarnog proizvoda ispuštimo uslov 3^0 , tada se vektorski prostor sa ovakvim skalarnim proizvodom naziva pseudo-euklidskim prostorom. Primer pseudo-euklidskog prostora biće prostor Minkovskog koji predstavlja matematičku osnovu Specijalne teorije relativnosti.

Primer 1.

1° U prostorima $\mathbf{E}^2$ i $\mathbf{E}^3$ za vektore $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos \alpha$, $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$, $\alpha = \angle \mathbf{a}, \mathbf{b}$.

2° U $\mathcal{R}^n$ za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$
 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

3° U $\mathcal{R}^2$ za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$,
 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 6x_2 y_2$.

Primetimo da je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

4° Prethodni primer je poseban slučaj sledeće opšte konstrukcije.

Neka je $A = ||a_{ij}||$ simetrična matrica reda n , $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$,
 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$,

$$q(x, y) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

Izraz $q(x, y) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ naziva se *bilinearom formom*, $q_0(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$ *kvadratnom formom*. Za kvadratnu formu $q_0(\mathbf{x})$ kažemo da je *pozitivno definitna* akko $q_0(\mathbf{x}) > 0$ za sve $\mathbf{x} \in R^n \setminus \{0\}$. Neka je $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bilinearna forma koja ima pozitivno definitnu kvadratnu formu $q_0(\mathbf{x})$. Tada se definicionom jednakošću $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ uvodi skalarni proizvod u $\mathcal{R}^n$.

Realni vektorski prostor konačne dimenzije sa skalarnim proizvodom naziva se *euklidskim prostorom*. Euklidski prostori dimenzije n predstavljaju glavni model euklidske geometrije dimenzije n . U osnovi za svaki prirodan broj n postoji tačno jedan euklidski prostor dimenzije n ; to je $\mathcal{R}^n$ prikazan u Primeru 1.2⁰. Drugim rečima, svaka dva euklidska prostora dimenzije n su izomorfna i imaju istu topološku strukturu. Uz odgovarajuću interpretaciju geometrijskih pojmova, euklidski prostor zadovoljava sve aksiome euklidske geometrije. S druge strane osnovna pretpostavka klasične mehanike je da realan (fizički) prostor ima strukturu euklidske geometrije dimenzije 3. Otuda teorija euklidskih prostora zajedno sa aparatom matematičke analize predstavlja glavno matematičko sredstvo i jezik mehanike.

Takođe se može uvesti pojam skalarnog proizvoda na kompleksnim prostorima, tj. vektorskim prostorima nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Neka je $\mathcal{V}$ kompleksan prostor i $F: V \times V \rightarrow C$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\alpha, \beta \in C$, koje zadovoljava

$$1^\circ (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}).$$

$$2^\circ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}, \quad \text{za } z = a + bi, \quad \bar{z} = a - bi.$$

$$3^\circ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0; \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Prostori sa ovako uvedenim skalarnim proizvodom nazivaju se *unitarnim prostorima*.

Primer 2. U prostoru C^n i $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^n.$$

1.10 Geometrija u euklidskim prostorima

Neka je $\mathcal{V}$ euklidski prostor i $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$. *Normu* (dužinu) $\|\mathbf{x}\|$ vektora $\mathbf{x}$ uvodimo na sledeći način: $\|\mathbf{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. Za normu vektora dokazuju se sledeće osobine, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\alpha \in R$:

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Rastojanje $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ između vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ima sledeće osobine:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Kosinus ugla i ugao između vektora uvodimo ovako, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$:

$$\cos \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ je normalan (ortogonalan) na vektor $\mathbf{y}$ ako i samo ako $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Da je $\mathbf{x}$ normalan na $\mathbf{y}$ zapisujemo $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Neka je $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{V}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\mathbf{x}_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y}_{\mathbf{e}} = (y_1, \dots, y_n)$. Tada

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \left\langle \sum_i x_i \mathbf{e}_i, \sum_j y_j \mathbf{e}_j \right\rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} = \\ &= \sum_i x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Dakle, u ortonormiranoj bazi $\mathbf{e}$ važi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{i}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

U određivanju bližih svojstava ovih pojmova u euklidskim prostorima važno mesto ima sledeća nejednakost.

1.10.1 Teorema *U svakom euklidskom prostoru $\mathcal{V}$ važi Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakost:*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Dokaz. Neka je $p(\lambda) = \langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle$. Dakle, $p(\lambda) = a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ je realan polinom, gde je $a = \|\mathbf{x}\|^2$, $b = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $c = \|\mathbf{y}\|^2$. S obzirom da je $\langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \|\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \geq 0$, to je $p(\lambda) \geq 0$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, dakle $b^2 - ac \leq 0$. Otuda $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. $\square$

U euklidskim prostorima važi analogon Kosinusne teoreme. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Tada

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \text{ tj. važi}$$

Kosinusna teorema: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

S obzirom na Koši-Švarc-Bunjakovski nejednakost odavde odmah dobijamo sledeće posledice:

Nejednakost trougla: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Dokaz. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$, odakle $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. $\square$

Pitagorina teorema Ako je $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ tada $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

Zaista, s obzirom na Kosinusnu teoremu i da je $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ako i samo ako $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, imamo $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ ako i samo ako $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Za vektor $\mathbf{x} \in V$ kažemo da je *normiran* ako $\|\mathbf{x}\| = 1$. Od svakog vektora $\mathbf{a} \neq 0$ možemo dobiti normiran vektor $\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \mathbf{a}$, kolinearan vektoru $\mathbf{a}$. Neka je $S \subseteq V \setminus \{0\}$, $S = \{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$, $S \neq \emptyset$. Kažemo da je S *ortogonalan skup* vektora akko za sve $i, j \in I$, $i \neq j \Rightarrow \mathbf{a}_i \perp \mathbf{a}_j$. Ako je uz to svaki $\mathbf{a}_i \in S$ normiran tada je S ortonormiran skup.

Primer 1. Vektori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in R^n$, gde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ čine ortonormiranu bazu uz skalarni proizvod $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_i x_i y_i$.

1.10.2 Teorema: Svaki ortogonalan $S \subseteq V$ ne-nula vektora je skup linearno nezavisnih vektora.

Dokaz: Najpre primetimo da je za $\mathbf{a} \in S$, $\mathbf{a} \neq 0$, dakle $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$. Pretpostavimo suprotno, da je S linearno zavisian skup. Dakle za neke $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in S$ važi $\mathbf{a}_1 = \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m$ za neke skalare $\alpha_2 \dots \alpha_m$. Tada $0 < \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_m = 0$, što je kontradikcija. Dakle S je skup linearno nezavisnih vektora. $\square$

Iz prethodne teoreme odmah sledi da je svaki ortonormiran skup vektora takođe linearno nezavisian.

1.11 Gram – Šmitov postupak

Ortonormirane baze imaju istaknuto mesto u euklidskim prostorima. Neka je $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ortonormirana baza euklidskog prostora $\mathcal{V}$. Već smo videli da u takvoj bazi skalarni proizvod $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{y} = \sum_i y_i \mathbf{u}_i$, ima jednostavnu formu:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Slično važi i za druge do sada uvedene geometrijske pojmove, njihovo predstavljanje u ortonormiranoj bazi ima jednostavan oblik. Dakle, glavno pitanje je da li svaki euklidski prostor ima ortonormiranu bazu. Opštije, da li svaki potprostor $W \subseteq \mathcal{V}$ ima ortonormiranu bazu. Pozitivan odgovor na ova pitanja daje Gram-Šmitov postupak ortonormiranja baze.

Neka je $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bilo koja baza euklidskog prostora $\mathcal{V}$, dakle $\dim \mathcal{V} = n$. Neka su nizovi vektora $\mathbf{w}_i$, $\mathbf{u}_i$ određeni sledećim rekursivnim jednakostima.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{u}_1 &= \mathbf{w}_1 / \|\mathbf{w}_1\|, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1, & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{w}_2 / \|\mathbf{w}_2\|, \\ \mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2, & \mathbf{u}_3 &= \mathbf{w}_3 / \|\mathbf{w}_3\|, \\ &\vdots & & \\ \mathbf{w}_n &= \mathbf{v}_n - (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 - \dots - (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_{n-1}) \mathbf{u}_{n-1}, & \mathbf{u}_n &= \mathbf{w}_n / \|\mathbf{w}_n\|, \end{aligned}$$

Tada vektori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ imaju sledeće osobine:

- a. Vektori $\mathbf{u}_i$ čine ortonormiran skup vektora.
- b. $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Zaista, najpre primetimo da svaki vektor $\mathbf{u}_i$ nastaje normiranjem vektora $\mathbf{w}_i$, dakle $\|\mathbf{u}_i\| = 1$. Ostatak tvrđenja (a) dokazuje se konačnom indukcijom po k : Dakle pretpostavimo induktivnu hipotezu $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ za $i, j < k$, $k < n$. Tada za $i < k$,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_i &= \langle \mathbf{v}_k - \sum_j (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = \\ &= (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_i) - \sum_j \langle (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_i) - \sum_j (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_j) \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = \\ &= (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_i) - \sum_j (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_j) \delta_{ij} = (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_i) - (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_i) = 0, \end{aligned}$$

tj. $\mathbf{w}_k \perp \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$. S obzirom da je $\mathbf{u}_k$ kolinearan vektoru $\mathbf{w}_k$ sledi $\mathbf{u}_k \perp \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$. Dakle $\mathbf{u}_i$ je ortonormiran sistem n vektora prostora $\mathcal{V}$, pa čini njegovu bazu. Tvrdjenje (b) isto dokazujemo konačnom indukcijom po k , $k \leq n$. Neka je $k \leq n$ i pretpostavimo da $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1})$. Kako je $\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{i < k} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$, tj. $\mathbf{w}_k$ je linearna kombinacija vektora $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$, to je

$$\mathbf{w}_k \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k).$$

S obzirom da je $\mathbf{u}_k$ kolinearan vektoru $\mathbf{w}_k$, imamo $\mathbf{u}_k \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, dakle $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ pa $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$. Prostori $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ i $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ imaju istu dimenziju k , pa $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$.

Primetimo da su vektori $\mathbf{w}_k$ pomoćnog karaktera. Takođe se lako proverava da ako vektori $\mathbf{v}_i$ čine ortonormiran sistem, tada se primenom Gram-Šmitovog postupka dobija isti niz vektora. Drugim rečima, ortonormirani skupovi vektora invarijantni su u odnosu na Gram-Šmitov postupak. Otuda odmah imamo sledeće tvrdjenje.

1.11.1 Teorema: *Svaki ortonormiran skup S euklidskog prostora $\mathcal{V}$ može se dopuniti do ortonormirane baze prostora $\mathcal{V}$.*

Primenom Gram-Šmitovog postupka na bilo koju bazu $\mathbf{v}_i$ prostora $\mathcal{V}$ dobijamo ortonormiranu bazu $\mathbf{u}_i$ tog prostora. Dakle svaki euklidski prostor ima ortonormiranu bazu.

Neka je W potprostor prostora $\mathcal{V}$ i $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ neka njegova baza. Ovaj niz vektora može se dopuniti do baze $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ prostora $\mathcal{V}$. Primenom Gram-Šmitovog postupka dobijamo ortonormiranu bazu $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ prostora $\mathcal{V}$ i pri tome $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = W$, tj. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ je ortonormirana baza prostora W . Dakle W ima ortonormiranu bazu koja je deo ortonormirane baze prostora $\mathcal{V}$.

Skup $W^\perp$ svih vektora normalnih na svakom vektoru potprostora W naziva se *ortogonalnom dopunom* potprostora W . Nije teško proveriti da je $W^\perp$ takođe potprostor prostora $\mathcal{V}$. Na primer, ako je S ravan u R^3 koja sadrži koordinatni početak O , tada je $W^\perp$ prava koja prolazi kroz O i normalna je na S . Ako je $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ortonormirana baza

potprostora W koja je deo ortonormirane baze $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ prostora $\mathcal{V}$, dakle $k \leq n$, tada je $W^\perp = \mathcal{L}(\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$. Otuda odmah nalazimo da u euklidskim prostorima važi:

$$W^{\perp\perp} = W, \quad \mathcal{V} = W \dot{+} W^\perp$$

tj. $\mathcal{V}$ je direktna suma potprostora W i $W^\perp$.

Ako su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ dva euklidska prostora iste dimenzije n i $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ redom njihove ortonormirane baze, tada je preslikavanje $L: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ definisano sa

$$L: \sum_i x_i \mathbf{u}_i \mapsto \sum_i x_i \mathbf{v}_i, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

izomorfizam između prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Pri tome važi $\langle L\mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, tj. oba prostora imaju istu geometriju. Dakle, svaka dva euklidska prostora iste dimenzije su izomorfna. Posebno, svaki euklidski prostor $\mathcal{V}$ dimenzije n izomorfan je prostoru $\mathbb{R}^n$ sa standardnim skalarnim proizvodom. Otuda se pod euklidskim prostorom dimenzije n često podrazumeva euklidski prostor $\mathbb{R}^n$.

Primer 2. (*Gibsova formula*) Neka je $\mathcal{V}$ euklidski prostor sa skalarnim proizvodom $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, i neka je $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ jedna njegova ortonormirana baza. Tada $\mathbf{x}_\mathbf{e} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tj. $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$, odakle $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = (\sum_i x_i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \sum_i x_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_i x_i \delta_j^i = x_j$ dakle $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle = x_j$, ili $\mathbf{x}_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle$. Otuda dobijamo Gibsovu formulu

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n.$$

1.12 Operatori u euklidskim prostorima

Glavno³⁾ mesto, naročito sa stanovišta mehanike, imaju *ortogonalni operatori* euklidskih prostora $\mathcal{V}$. To su linearni operatori $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ koji ortonormiranu bazu preslikavaju u ortonormiranu bazu. Dakle, ako je $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{V}$ i $\mathbf{v}_i = L\mathbf{u}_i$, tada je $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ isto ortonormirana baza.

³⁾U ovom delu koristićemo Ajnštajnovu konvenciju.

Pretpostavimo da je $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{V}$, $\mathbf{v}_i = L\mathbf{u}_i$ i neka je $A = [L]_{\mathbf{u}} = \|a_j^i\|$ matrica operatora $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ u bazi $\mathbf{u}$. Dalje, neka su $\mathbf{a}^i = [a_1^i, \dots, a_n^i]$ i -ta vrsta i $\mathbf{a}_j = [a_j^1, \dots, a_j^n]^T$ j -ta kolona matrice A . Tada $\mathbf{v}_j = a_j^i \mathbf{u}_i$, pa uz pretpostavku da je L ortogonalan, važi

$$\delta_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle a_i^k \mathbf{u}_k, a_j^l \mathbf{u}_l \rangle = a_i^k a_j^l \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \rangle = a_i^k a_j^l \delta_{kl} = a_i^1 a_j^1 + \dots + a_i^n a_j^n.$$

Otuda za $i \neq j$ važi $\mathbf{a}_i \perp \mathbf{a}_j$, takođe $\|\mathbf{a}_i\| = 1$, dakle vektori kolone matrice A čine ortonormiran sistem, tj. $A^T A = E_n$. Dakle $A^T = A^{-1}$, pa takođe $AA^T = E_n$, tj. i vektori vrste matrice A čine ortonormiran sistem. Za takvu matricu A , dakle za koju važi $A^T = A^{-1}$, kažemo da je *ortogonalna*. S obzirom da je $\det(AA^T) = 1$ sledi $(\det(A))^2 = 1$, tj. $\det(A) = \pm 1$. Ako je $\det(A) = 1$ tada su baze $\mathbf{u}_i$ i $L\mathbf{u}_i$ iste orijentacije. Ako je $\det(A) = -1$ tada su baze $\mathbf{u}_i$ i $L\mathbf{u}_i$ suprotne orijentacije.

Ako je $A = [L]_{\mathbf{u}} = \|a_j^i\|$ ortogonalna matrica, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je ortonormirana baza, slično se dokazuje da je pripadni operator L takođe ortogonalan. Zaista, neka je $\mathbf{w}_i$, $i = 1, \dots, n$, ortonormirana baza prostora $\mathcal{V}$. Dokazujemo da je $L\mathbf{w}_i$ isto ortonormiran sistem n vektora. Neka su w_i^k koordinate vektora $\mathbf{w}_i$ u bazi $\mathbf{u}$, tj. $\mathbf{w}_i = w_i^k \mathbf{u}_k$. Tada $L\mathbf{w}_i = a_k^l w_i^k \mathbf{u}_l$. Takođe $\langle \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_s \rangle = \delta_{ls}$ jer vektori $\mathbf{u}_i$ čine ortonormiran sistem, dalje $\delta_{ls} a_k^l a_t^s = \delta_{kt}$ jer je matrica A ortogonalna, najzad $\delta_{kt} w_i^k w_j^t = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$ jer vektori $\mathbf{w}_i$ po pretpostavci čine ortonormiran sistem. Otuda

$$\langle L\mathbf{w}_i, L\mathbf{w}_j \rangle = \langle a_k^l w_i^k \mathbf{u}_l, a_t^s w_j^t \mathbf{u}_s \rangle = a_k^l a_t^s w_i^k w_j^t \langle \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_s \rangle = \delta_{ls} a_k^l a_t^s w_i^k w_j^t = \delta_{kt} w_i^k w_j^t = \delta_{ij},$$

tj. vektori $L\mathbf{w}_i$ čine ortonormiranu bazu prostora $\mathcal{V}$. Dakle važi:

1.12.1 Teorema: *Neka je $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{V}$, $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ i $A = [L]_{\mathbf{u}}$. Tada: Operator L je ortogonalan akko je A ortogonalna matrica.*

Primetimo da smo usput dokazali sledeće tvrđenje: Ako operator $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ preslikava jednu ortonormiranu bazu prostora $\mathcal{V}$ u

ortonormiran sistem vektora, tada L preslikava *svaku* ortonormiranu bazu u ortonormiranu bazu prostora $\mathcal{V}$. Otuda, ako je u nekoj ortonormiranoj bazi $\mathbf{u}$ matrica $A = [L]_{\mathbf{u}}$ ortogonalna, tada je u svakoj bazi $\mathbf{v}$ prostora $\mathcal{V}$, $B = [L]_{\mathbf{v}}$ takođe ortogonalna. Neposredna posledica prethodne teoreme je sledeće tvrđenje.

1.12.2 Teorema: *Neka je $\mathcal{V}$ euklidski prostor i $A = \|a_j^i\|$ matrica nad poljem skalara prostora $\mathcal{V}$. Tada važi: Linearna transformacija $y^i = a_j^i x^j$ prostora $\mathcal{V}$ prevodi ortonormiranu bazu prostora $\mathcal{V}$ u ortonormiranu bazu akko je A ortogonalna matrica.* $\square$

Ortogonalni operatori su tačno ona linearna preslikavanja prostora $\mathcal{V}$ u odnosu na koja je skalarni proizvod invarijantan. O tome govori sledeće tvrđenje.

1.12.3 Teorema: *Neka je L linearni operator euklidskog prostora $\mathcal{V}$ dimenzije n . Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

$$1^\circ \langle L\mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

$2^\circ L$ je ortogonalan operator.

Dokaz. Neka je $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{V}$ i $\mathbf{v}_i = L\mathbf{u}_i$. Kao i obično, uzimamo da su x^i koordinate vektora $\mathbf{x} \in V$.

($1^\circ \Rightarrow 2^\circ$) Pretpostavimo $\langle L\mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Tada

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = \|\langle L\mathbf{u}_i, L\mathbf{u}_i \rangle\| = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = \|\mathbf{u}_i\|^2 = 1,$$

odakle $\|\mathbf{v}_i\| = 1$. Dalje, $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle L\mathbf{u}_i, L\mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$, tj. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ je ortonormiran sistem n vektora te čini bazu prostora $\mathcal{V}$.

($2^\circ \Rightarrow 1^\circ$) Pretpostavimo da je L ortogonalan operator. Tada vektori $\mathbf{v}_i$ čine ortonormiranu bazu prostora $\mathcal{V}$ i matrica $A = L_{\mathbf{u}} = \|a_j^i\|$ je ortogonalna, dakle $\delta_{ij} a_k^i a_l^j = \delta_{kl}$. S obzirom da je $L\mathbf{x} = a_k^i x^k \mathbf{u}_i$, imamo:

$$\langle L\mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = a_k^i a_l^j x^k y^l \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij} a_k^i a_l^j x^k y^l = \delta_{kl} x^k y^l = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \quad \square$$

Prema prethodnom ortogonalni operatori ne menjaju vrednost skalarnog proizvoda. Ostale metričke osobine sličnog karaktera ortogonalnih operatora opisane su u sledećim tvrđenjem.

1.12.4 Teorema: *Neka je $\mathcal{V}$ euklidski prostor i $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$:*

$$1^\circ \langle L\mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

$$2^\circ \|L\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

$$3^\circ d(L\mathbf{x}, L\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{tj. } L \text{ je izometrija.}$$

Dokaz.

($1^\circ \Rightarrow 2^\circ$) Pretpostavimo $\langle L\mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Tada

$$\|L\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle L\mathbf{x}, L\mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \|\mathbf{x}\|.$$

($2^\circ \Rightarrow 3^\circ$) Pretpostavimo $\|L\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in V$. Tada

$$d(L\mathbf{x}, L\mathbf{y}) = \|L\mathbf{x} - L\mathbf{y}\| = \|L(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

($3^\circ \Rightarrow 2^\circ$) Pretpostavimo $d(L\mathbf{x}, L\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Tada

$$\|L\mathbf{x}\| = d(L\mathbf{x}, \mathbf{0}) = d(L\mathbf{x}, L\mathbf{0}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\|.$$

($2^\circ \Rightarrow 1^\circ$) Pretpostavimo $\|L\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in V$. Dokazujemo da je L ortogonalan operator. Neka je $\mathbf{u}_i$ ortonormirana baza i $\mathbf{v}_i = L\mathbf{u}_i$. Tada $\|\mathbf{v}_i\| = \|L\mathbf{u}_i\| = \|\mathbf{u}_i\| = 1$. Ako $i \neq j$ tada, koristeći Pitagorinu teoremu,

$$\begin{aligned} \|L\mathbf{u}_i + L\mathbf{u}_j\|^2 &= \|L(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j)\|^2 = \|\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j\|^2 = \\ &= \|\mathbf{u}_i\|^2 + \|\mathbf{u}_j\|^2 = \|L\mathbf{u}_i\|^2 + \|L\mathbf{u}_j\|^2, \text{ tj. } \|\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j\|^2 = \|\mathbf{v}_i\|^2 + \|\mathbf{v}_j\|^2. \end{aligned}$$

Prema Pitagorinoj teoremi sledi $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$. Dakle L preslikava ortonormiranu bazu u ortonormiran sistem vektora, te je L ortogonalan operator. Prema prethodnoj teoremi sledi $\langle L\mathbf{x}, L\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. $\square$

1.12.5 Lema *Neka je $A = \|a_j^i\|$ ortogonalna marica reda n . Tada u euklidskom prostoru $\mathcal{R}^n$ važi*

$$1^\circ \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n.$$

2° *Matrice A i $A^\top$ imaju iste karakteristične polinome, dakle iste i sopstvene vrednosti.*

3° Ako je λ sopstvena vrednost matrice A , tada $|\lambda| = 1$.

4° $\det(A) = \pm 1$.

Dokaz 1° Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ predstavljeni redom kao vektori kolone x^i, y^j . Tada $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \delta_{ij} a_k^i x^k y^j$. S obzirom da je $A^\top = \delta^{ip} \delta_{lq} a_p^q$, to je $A^\top \mathbf{y} = \delta^{jp} \delta_{lq} a_p^q y^l$. Otuda

$$\langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle = \delta_{ij} \delta^{jp} \delta_{lq} a_p^q x^i y^l = \delta_{lq} a_i^q x^i y^l = \delta_{ij} a_k^i x^k y^j = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

2° Neka su $p(\lambda)$ i $q(\lambda)$ redom karakteristični polinomi matrica A i $A^\top$. S obzirom da za kvadratnu matricu B važi $\det(B) = \det(B^\top)$, za jediničnu matricu E_n imamo

$$q(\lambda) = \det(A^\top - \lambda E_n) = \det((A - \lambda E_n)^\top) = \det(A - \lambda E_n) = p(\lambda),$$

dakle tvrđenje sledi.

3° Neka je λ koren karakterističnog polinoma matrice A . Tada je λ sopstvena vrednost matrice A u unitarnom prostoru $\mathcal{C}^n$. Tada za neki vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^n$, $\mathbf{u} \neq 0$, imamo $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Otuda, takođe prema 1° i 2°, za skalarni proizvod u $\mathcal{C}^n$ sledi⁴⁾:

$$\lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \langle Au, Au \rangle = \langle u, A^\top Au \rangle = \langle u, u \rangle.$$

Kako je $\langle u, u \rangle = \|u\| \neq 0$, to je $|\lambda|^2 = \lambda \bar{\lambda} = 1$, tj. $|\lambda| = 1$.

4° S obzirom da je $A \cdot A^\top = E_n$, prema Bine-Košijevoj teoremi sledi

$$1 = \det E_n = \det(A \cdot A^\top) = \det(A) \det(A^\top) = \det(A)^2,$$

odakle sledi $\det(A) = \pm 1$. □

S obzirom da operator L i njegova matrica $A = [L]_{\mathbf{v}}$ u datoj bazi $\mathbf{v}$ imaju iste sopstvene vrednosti, odmah imamo ovu posledicu.

1.12.6 Posledica Ako je λ sopstvena vrednost ortogonalnog operatora L , tada je $|\lambda| = 1$.

⁴⁾ $\bar{\lambda}$ je konjugovana vrednost kompleksnog broja λ .

Naravno, nas će pre svega zanimati realne sopstvene vrednosti λ nekog ortogonalnog operatora, u kojem slučaju je $\lambda \in \{1, -1\}$.

Izometrija metričkog prostora (X, d) je preslikavanje $T: X \rightarrow X$ koje čuva rastojanje, tj. $d(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Izometrije euklidskog prostora u direktnoj su vezi sa pojmom kretanja u klasičnoj mehanici i zato su predmet izučavanja ne samo u matematici već i u mehanici. U slučaju euklidskih prostora moguće je precizno opisati izometrična preslikavanja. Ovde ćemo opisati izometrije prostora euklidskih prostora $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} \leq 3$.

1.12.7 Lema *Neka je L izometrija euklidskog prostora $\mathcal{V}$ takva da je $L(0) = 0$. Tada je L ortogonalan operator.*

Dokaz Uz pretpostavke teoreme za $\mathbf{x} \in V$ imamo

$$\|L(\mathbf{x})\| = \|L(\mathbf{x}) - L(0)\| = d(L(\mathbf{x}), L(0)) = d(\mathbf{x}, 0) = \|\mathbf{x}\|.$$

Dakle L čuva normu vektora, tj. važi $\|L(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in V$.

Otuda, s obzirom na identitet $2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$, imamo

$$\begin{aligned} 2\langle L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y}) \rangle &= \|L(\mathbf{x})\|^2 + \|L(\mathbf{y})\|^2 - d(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y}))^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Dakle, L takođe čuva skalarni proizvod vektora, tj. važi

$$(1) \quad \langle L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Otuda L preslikava ortonormiranu bazu prostora $\mathcal{V}$ u ortonormiranu bazu. Neka je $\mathbf{e}_i$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{V}$. S obzirom na prethodnu primedbu, $\mathbf{e}'_i = L(\mathbf{e}_i)$ je takođe ortonormirana baza. Primenom Gibsove formule iz prethodnog odeljka i (1) onda za $\mathbf{x} \in V$ nalazimo

$$L(\mathbf{x}) = \sum_i \langle L(\mathbf{x}), L(\mathbf{e}_i) \rangle L(\mathbf{e}_i) = \sum_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}'_i$$

odakle odmah sledi da je L linearno preslikavanje, dakle i ortogonalan operator prostora $\mathcal{V}$. $\square$

Neka je $T: V \rightarrow V$ izometrija, $b = T(0)$ i $L(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - b$. Tada je lako videti da je L takođe izometrija i prema prethodnom tvrđenju $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ je ortogonalan operator. Otuda se često ortogonalni operatori nazivaju i homogenim izometrijama. Prema prethodnom vidimo da je svaka izometrija T euklidskog prostora zbir jedne translacije određene nekim vektorom $\mathbf{b}$ i nekog ortogonalnog operatora L , dakle $T(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$. U nekoj bazi $\mathbf{e}$ prostora $\mathcal{V}$ u matičnoj formi nalazimo $T(\mathbf{x})_{\mathbf{e}} = A\mathbf{x}_{\mathbf{e}} + \mathbf{b}_{\mathbf{e}}$, $A = [L]_{\mathbf{e}}$ je ortogonalna matrica i $x \in V$. Umesto $T(\mathbf{x})_{\mathbf{e}} = A\mathbf{x}_{\mathbf{e}} + \mathbf{b}_{\mathbf{e}}$ jednostavno pišemo $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Pogledajmo kako izgledaju ortogonalni operatori u trodimenzionalnom euklidskom prostoru.

1.12.8 Teorema *Neka je L ortogonalan operator u $\mathcal{R}^3$. Tada je L osna simetrija (refleksija), ili rotacija ili proizvod ove dve vrste preslikavanja.*

Dokaz Neka je $L: R^3 \rightarrow R^3$ ortogonalan operator predstavljen svojom matricom A u osnovnoj, dakle ortonormiranoj bazi $\mathbf{e}_i$. Karakterističan polinom p matrice A je trećeg stepena, dakle ima bar jedan realan koren λ . S druge strane, prema prethodnoj lemi $|\lambda| = 1$, tj. $\lambda = 1$ ili $\lambda = -1$. Tada za pripadni sopstveni vektor $\mathbf{u}$ važi $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} = \pm\mathbf{u}$. Možemo uzeti da je $\mathbf{u}$ normiran. Neka je $\mathbf{e}'_3$ bilo koja ortonormirana baza prostora $\mathcal{R}^3$ tako da je $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{u}$. Vektori $L(\mathbf{e}'_1)$ i $L(\mathbf{e}'_2)$ normalni su na $L(\mathbf{e}'_3)$, tj. na $\mathbf{e}'_3$. Otuda $L(\mathbf{e}'_1)$ i $L(\mathbf{e}'_2)$ leže u ravni određenu vektorima $\mathbf{e}'_1$ i $\mathbf{e}'_2$, tj. $L(\mathbf{e}'_1), L(\mathbf{e}'_2) \in \mathcal{L}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, pa je potprostor $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ invarijantan za operator L . Neka je L_1 restrikcija operatora L na potprostor $\mathcal{V}$. Tada je L_1 takodje izometrija, dakle ortogonalan operator, pa matrice redom operatora L_1 i L u bazi $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, odnosno $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, izgledaju:

$$A'_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in R.$$

Matrica A'_1 je ortogonalna, pa takođe $\det(A'_1) = \pm 1$. Pretpostavimo

prvi slučaj, da je $\det(A'_1) = 1$. Tada važe ove jednakosti:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1, & a^2 + c^2 &= 1, \\ c^2 + d^2 &= 1, & b^2 + d^2 &= 1, & ad - bc &= 1, \\ ac + bd &= 0, & ab + cd &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Prema prvoj jednakosti postoji realan broj θ tako da je $a = \cos(\theta)$ i $b = -\sin(\theta)$. Iz ostalih jednakosti sledi $c = \varepsilon \sin(\theta)$ i $d = \eta \cos(\theta)$ za neke $\varepsilon, \eta \in \{1, -1\}$.

Pretpostavimo $a, b, c, d \neq 0$. Prema poslednjoj jednakosti sledi $abcd = -c^2d^2$, odakle je $\varepsilon\eta = 1$, tj. $\varepsilon = \eta$. Tada iz $ad - bc = 1$ sledi $\varepsilon \cos(\theta)^2 + \varepsilon \sin(\theta)^2 = 1$, odakle je $\varepsilon = \eta = 1$. Dakle u ovom slučaju

$$A' = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad \theta \in R. \quad (1.2)$$

tj. za $\lambda = 1$ operator L je rotacija za ugao θ oko ose određene vektorom $\mathbf{e}'_3$, dok je za $\lambda = -1$ operator L proizvod upravo opisane rotacije i osne simetrije koja prevodi vektor e'_3 u $-e'_3$.

Pretpostavimo $a = 0$. Tada iz jednakosti 1.1 sledi $d = 0$, $b = \mp 1$, $c = \pm 1$, tj. jednakost 1.2 važi za $\theta = \pi/2$ odnosno $\theta = -\pi/2$. Ako je $d = 0$, tada sledi $a = 0$, a taj slučaj smo upravo raspravili. Ako je $c = 0$ tada sledi $b = 0$, $a = d = \pm 1$, tj. jednakost (1.2) važi za $\theta = 0$ odnosno $\theta = \pi$.

Prema tome, operator L za $\det(A'_1) = 1$ je zaista rotacija, ili osna simetrija, ili proizvod ta dva preslikavanja.

Pretpostavimo drugi slučaj, $\det(A'_1) = -1$. Neka su vektori $\mathbf{u}_i$ određeni jednakostima $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}'_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}'_1$ i $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}'_3$. Tada je $\mathbf{u}_i$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{R}^3$ i $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$. Otuda u bazi $\mathbf{u}_i$ matrica $[L]_{\mathbf{u}}$ operatora L je vida (1.2), pa imamo isti zaključak kao u prethodnom slučaju, čime je teorema dokazana. $\square$

Uz oznake kao u dokazu prethodne teoreme, ako je $\lambda = 1$, tada $\det(A') = 1$ pa operator L čuva orijentaciju. U tom slučaju prethodno

tvrdjenje poznato je takođe kao Ojlerova teorema o fiksnoj tački. Naime, prema prethodnom dokazu za svaku ortogonalnu transformaciju L prostora R^3 koja čuva orijentaciju prostora postoji vektor $\mathbf{u} \neq 0$ takav da je $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Kao što smo videli, $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_3$ je zapravo osa rotacije koju je predstavlja operator L .

Slična teorema reprezentacije sa sličnim dokazom važi za ortogonalne operatore prostora $\mathcal{R}^n$. Skup svih ortogonalnih operatora prostora $\mathcal{R}^n$ čini grupu $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n, R)$. Specijalna ortogonalna grupa je $S\mathcal{O}(n) = \{L \in \mathcal{O}(n) : \det L = 1\}$. Naime, prema Bine-Košijevoj teoremi za kvadratne matrice istog reda važi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. S obzirom da su determinante matrica invarijantne za sličnost matrica, $\det(L)$ je dobro definisan pojam za operatore konačno-dimenzionalnih prostora. Najzad, $[L \circ T]_{\mathbf{u}} = [L]_{\mathbf{u}}[T]_{\mathbf{u}}$ za bilo koju bazu $\mathbf{u}$ prostora $\mathcal{V}$ i operatore L i T tog prostora. Otuda je

$$\delta: \mathcal{O}(n) \rightarrow (\{1, -1\}, \cdot), \quad \delta(L) = \det(L),$$

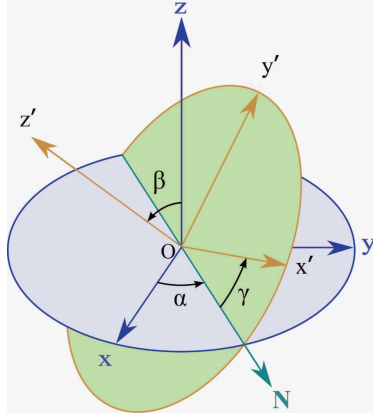
homomorfizam. Odavde sledi da je $S\mathcal{O}(n) = \ker \delta$ zaista grupa, pa je između ostalog proizvod dve rotacije takođe rotacija, što nije neposredno očigledno. Štaviše, $S\mathcal{O}(n) \triangleleft \mathcal{O}(n)$. Ako je R osna simetrija, tada je R reda 2 u grupi $\mathcal{O}(n)$ i podgrupa generisana sa R je ciklična grupa reda 2, C_2 . Nije teško videti da ova grupa dejstvuje na $S\mathcal{O}(n)$ konjugacijom, odakle sledi da je $\mathcal{O}(n)$ semidirektan proizvod grupa $S\mathcal{O}(n)$ i C_2 . Grupa $S\mathcal{O}(n)$ je od posebnog interesa u klasičnoj mehanici jer opisuje rotaciono kretanje.

Rotacija u $\mathcal{R}^3$ je određena sa tri slobodna parametra. Zaista, ako je R rotacija u $\mathcal{R}^3$ i a_i^j njena matrica, tada je ta matrica ortogonalna i ima devet elemenata. S obzirom na ortogonalnost, vektori vrste čine ortonormiran sistem, dakle važe ovih šest jednakosti

$$\sum_i a_i^k a_i^l = \delta^{kl}, \quad 1 \leq k \leq l \leq 3.$$

Prema tome, imamo 9 nepoznatih, to su elementi matrice a_i^j i 6 jednačina, te se može pretpostaviti da postoje tri realna parametra čijim variranjem dobijamo sve rotacije. Ovu činjenicu dokazao

je već Leonard Ojler⁵⁾ uvođenjem parametara koji su poznati pod nazivom *Ojlerovi uglovi*. Ako je $Ox'y'z'$ ortogonalan sistem koordinata zarotiran u odnosu na dati fiksiran ortogonalan sistem $Oxyz$, tada se pomoću ovih uglova opisuju tri rotacije pomoću kojih se $Oxyz$ prevodi u $Ox'y'z'$ do poklapanja. U mehanici pomoću ovih uglova opisuju se orijentacija krutog tela u prostoru.

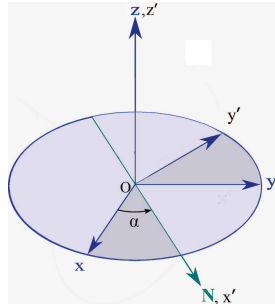


Osa ON je presek ravni Oxy i $Ox'y'$,
 α je ugao između osa Ox i ON ,
 β je ugao između osa Oz i Oz' ,
 γ je ugao između osa ON i Ox' .

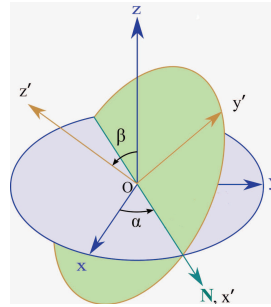
Ovi uglovi imaju nazive koji potiču iz nebeske mehanike i u vezi su sa rotacijom Zemlje oko svoje ose:

α je ugao *sopstvene rotacije* (spin),
 β je ugao *nutacije*,
 γ je ugao *precesije*.

Neka $R_{s,\theta}$ označava rotaciju oko ose s za ugao θ u pozitivnom smeru. Nije teško videti da sukcesivnom primenom rotacija $R_{Oz,\alpha}$ i $R_{ON,\beta}$ na sistem $Oxyz$ dobijamo sledeće figure



Slika A



Slika B

⁵⁾Leonhard Euler [1707-1783], veliki matematičar švajcarskog porekla. Najvećim delom stvarao i živeo u Rusiji (St. Peterburg), 32 godine i Nemačkoj (Berlin), 25 godina.

Najzad, rotacija $R_{Oz',\gamma}$ prevodi sisteme koordinata $ONy'z'$, videti sliku B, u sistem $Ox'y'z'$. Dakle, rotacija

$$R_{\alpha\beta\gamma} = R_{Oz',\gamma} \circ R_{ON,\beta} \circ R_{Oz,\alpha}, \quad 0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi,$$

prevodi sistem koordinata $Oxyz$ u $Ox'y'z'$. S obzirom da je

$$R_{Oz,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{ON,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix},$$

$$R_{Oz',\gamma} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

za elemente matrice $R_{\alpha\beta\gamma} = \|a_{ij}\|$ nalazimo

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\alpha) \cos(\gamma) - \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\gamma), \\ a_{12} &= \sin(\alpha) \cos(\gamma) + \cos(\beta) \cos(\alpha) \sin(\gamma), \\ a_{13} &= \sin(\beta) \sin(\gamma), \\ a_{21} &= -\cos(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \sin(\alpha) \cos(\gamma), \\ a_{22} &= -\sin(\alpha) \sin(\gamma) + \cos(\beta) \cos(\alpha) \cos(\gamma), \\ a_{23} &= \sin(\beta) \cos(\gamma), \\ a_{31} &= \sin(\alpha) \sin(\beta), \quad a_{32} = -\cos(\alpha) \sin(\beta), \quad a_{33} = \cos(\beta). \end{aligned}$$

Dakle grupa rotacija $S\mathcal{O}(3)$ je troparametarska grupa, jer se njeni elementi opisuju sa tri parametra, Ojlerovim uglovima α , β i γ . Ova grupa predstavlja primer trodimenzionalne Lieve grupe. Shodno prethodnom, dimenzija, tj. broj slobodnih parametara kretanja u R^3 jednak je šest. Tri slobodna parametra potiču od tri Ojlerova ugla koji određuju rotaciju i tri parametra – koordinata vektora translacije $\mathbf{b}$. Dakle slobodno kruto telo ima šest stepeni slobode.

Možemo uzeti da se kretanje materijalne tačke sastoji iz neprekidnog niza infinitezimalnih pomeranja. Pomeranje krutog tela generalno je opisano izometrijom (pretpostavka je da nema deformacije), dakle shodno prethodnom sastoji se iz jedne translacije i rotacije ili

jednog od ta dva. Osa simetrija isključena je iz kretanja jer se orijentacija tela, tj. koordinatnog sistema vezanog za telo, ne može menjati pomeranjem.

Možemo imati i drugi pogled na to šta je kretanje. Vreme u mehanici predstavljeno je realnim kontinuumom R . Pokazaćemo da se kretanje tela može shvatiti kao dejstvo vremenske ose na prostor R^3 . U sledećim primerima $\mathbf{R} = (R, +, 0)$ je aditivna grupa realnih brojeva.

1.12.9 Primer (*rotaciono kretanje*) Neka je $\omega \neq 0$ realna konstanta i

$$L_t = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Dakle L_t je rotacija oko z - ose za ugao ωt . Konstanta ω naziva se ugaonom brzinom. Neka je $\sigma: R \rightarrow \text{Sym}(R^3)$ definisano sa

$$(\sigma(t))(\mathbf{u}) = L_t \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in R^3.$$

Odmah se proverava da je σ dejstvo grupe $\mathbf{R}$ na prostor R^3 . Za vektor $\mathbf{u}$ orbita je $\mathcal{O}_{\mathbf{u}} = \{(\sigma(t))(\mathbf{u}): t \in R\} = \{L_t \mathbf{u}: t \in R\}$. Dakle $\mathbf{y} \in \mathcal{O}_{\mathbf{u}}$ ako i samo ako postoji (trenutak) $t \in R$ tako da je $\mathbf{y} = L_t \mathbf{u}$. Prema tome $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ je funkcija (vremena) $t \in R$ i ako je $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ i $\mathbf{u} = (a, b, c)$ tada je

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t) \\ y_2(t) &= a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \\ y_3(t) &= c \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dakle, orbita $\mathcal{O}_{\mathbf{u}}$ je putanja vrha vektora $\mathbf{u}$ koji rotira oko z -ose. Ta putanja je kružnica paralelana ravni Oxy sa poluprečnikom $\sqrt{a^2 + b^2}$ na rastojanju c od ravni Oxy . Jednačine 1.4 su parametarske jednačine ove kružnice. One su date sa jednim slobodnim parametrom t , dakle u terminologiji mehanike ovo kretanje ima jednu slobodu kretanja.

1.12.10 Primer (*spiralno kretanje*) U ovom primeru opisaćemo kretanje matice na zavrtnju. Pretpostavljamo da se osa zavrtnja poklapa sa z - osom. Kretanje matice po navojima zavrtnja izometrično

je i očigledno je sastavljeno iz rotacije i kretanja duž ose zavrtnja. Dakle, pomeranje tačke M na matici određenu vektorom položaja $\mathbf{u}$ opisano je izometrijom $S_t(\mathbf{u}) = L_t \mathbf{u} + t\mathbf{b}$, L_t je dato matricom 1.3. Ovde je $\mathbf{b} = (0, 0, h)$ konstantan vektor (hod) na osi zavrtnja. Neka je σ dejstvo grupe $\mathbf{R}$ na prostor R^3 dato sa $(\sigma(t))(\mathbf{x}) = S_t(\mathbf{x})$. Otuda su parametarske jednačine putanje (orbite) tačke M

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t) + b_1 \\ y_2(t) &= a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) + b_2 \\ y_3(t) &= ht \end{aligned}$$

Vidimo da tačka M opisuje spiralu. Ovo kretanje takođe ima jednu slobodu kretanja.

