ОПШТА РЕЛАТИВНОСТ. КРАТАК ПРЕГЛЕД

Илија Лукачевић

Увод. Кривину риманских простора, у које спада и простор-време опште теорије релативности, одређује систем функција $R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\alpha, ... = 1, 2, 3, 4)$, Риман -Кристофелов тензор кривине. Алтернативни назив за општу релативност је метричка теорија гравитације.

Риман-Кристофелов тензор је функција метричког тензора и његових првих и других извода, ових других линеарна (али са промењљивим коефицијентима). Он задовољава систем алгебарских и диференцијалних идентичности:

$$\left.\begin{aligned} &R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\ R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\ R_{\alpha\beta\delta\gamma} \\ &R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \\ &R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + R_{\alpha\beta\delta\epsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\epsilon\gamma;\delta} = 0 \tag{1.2}$$

Диференцијална идентичност (1.2) зове се, по њеном аутору, Бјанкијева идентичност.

С обзиром на алгебарске идентичности (1.1) $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ има $\frac{n^2}{12}(n^2-1)$ независних компонената различитих од нуле. У случју простор-времена опште релативности, то због $n = 4$ износи 20.

Из Риман -Кристофеловог тензора кривине контракцијом је изведен Ричијев тензор. То је симетричан тензор другог реда:

$$R_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta}\, R_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{1.3}$$

Овај тензор у простор-времену има десет независних компонената, онолико колико и метрички тензор, што је значајно за релативност. Кристофелов симбол, којим ћемо се стално служити гласи:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\delta}\big(g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}\big) \tag{1.3a}$$

(у даљем тексту ћемо се служити уобичајеним симболима за парцијални извод). Изражен помоћу ових симбола Ричијев тензор гласи:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\,\Gamma^{\gamma}_{\gamma\beta} + \Gamma^{\delta}_{\delta\gamma}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}\,\Gamma^{\gamma}_{\delta\beta} \tag{1.4}$$

што развијено предстявља

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, g^{\gamma\delta}\Big(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\,\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}\,\partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\delta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} + Q_{\alpha\beta}\Big(\frac{\partial g}{\partial x}; g\Big) \tag{1.5}$$

У случају

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \tag{1.6}$$

метрика, било дефинитна или индефинитна, је равна, тј еуклидска или псеудоеуклидска.

Пошто већ сама дефиниција опште релативности подразумева да простор-време има риманску метрику, кренућемо од дефиниције Ајнштајновог тензора $G_{\alpha\beta}$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\, R\; g_{\alpha\beta}, \qquad\qquad (R = R^{\gamma}_{\gamma}) \tag{1.7}$$

Да бисмо објаснили избор овог тензора треба поћи од Бјанкијеве идентичности(1.2).Скаларним множењем са $g^{\alpha\delta}$ добићемо из (1.2) и прве идентичности (1.1)

$$R_{\beta\gamma;\epsilon} - R_{\beta\epsilon;\gamma} + R^{\alpha}_{\cdot\beta\epsilon\gamma;\alpha} = 0$$

Поновним множењем овог израза са $g^{\beta\varepsilon}$ добићемо

$$R^{\epsilon}_{\gamma;\epsilon} - R_{,\gamma} + R^{\alpha}_{\gamma;\alpha} = 0$$

што се своди на

$$G^{\beta}_{\gamma;\beta} = \left(R^{\beta}_{\gamma} - \tfrac{1}{2}\, \delta^{\beta}_{\gamma} \right)_{;\,\beta} = 0 \tag{1.8}$$

где је δ Кронркеров симбол.

Ово је кључна идентичност са становишта опште релативности. Уколико имамо материјалну средину, или неко поље које није гравитационо, што је у простор-втрмрну описано тензором енергије T^{β}_{γ}, ми ћемо изједначити (помноженог константом κ које га димензионо изједначује са геометријском величином на левој страни) Ајнштајнов тензор са тензором енергије:

$$G^{\beta}_{\gamma} = R^{\beta}_{\gamma} - \frac{1}{2}\, R\, \delta^{\beta}_{\gamma} = -\, \kappa\, T^{\beta}_{\gamma} \tag{1.9}$$

Ово представља релативистички облик Лаплас-Поасонове једначине Њутнове механике у случају када постоји гравитационо поље; само што се у општој релативности узима у обзир свих десет компонената метричког тензора који је заступљен на левој страни гравитационих једначина (1.9), закључно са другим редом извода. Јасно је да,с обзиром на идентичност (1.8), коју задовољава G^{β}_{γ}, мора бити и

$$T^{\beta}_{\gamma;\beta} = 0 \tag{1.10}$$

У општој релативности конзервативност тензора енергије (1.10) није формулисана као посебан услов већ као последица (1.8), односно, у крањој линији, као последица Бјанхијеве идентичности (1.2). Уколико имамо слободни простор у којем постоји само гравитационо поље, тензор енергије T^{β}_{γ} једнак је нули а једначине (1.9) своде се на:

$$R^{\beta}_{\gamma} = 0 \tag{1.11}$$

Дакле, у случају равног простор-времена имамо одсуство кривине, изражено једначином (1.6), док у слободном простору опште релативности имамо (1.11) тј израз (1.5) за $R_{\alpha\beta} = 0$. Десет јеначина гравитционог поља, било да имамо негравитациону енергију или не, тј да ли је задовољен систем (1.9) или (1.11), служе одређивању гравитационог потенцијала $g_{\alpha\beta}$, који такође има десет компонената. У Њутновој механици смо имали само једну једначину, коју је задовољавао скаларни гравитациони потенцијал.

Сферно симетрично гравитационо поље. Сада ћемо посматрати гравитационо поље чији је извор сферно тело, чија је унутрашњост по саставу и густини или хомогена или променљива по концентричним слојевима. При томе ћемо се ограничити на поље у слободном простору око тела.

Пошто гравитација из тела делује једнако у свим правцима, поставићемо сферни координатни систем с почетком у његовом центру. Будући да за такво тело она не зависи од угаоних координата θ и ϕ, то ћемо општи облик елементарног интервала најшире претпоставити као:

$$\varepsilon\; ds^2 = E(r,t)\; dr^2 + F(r,t)\; \left(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\phi^2 \right) + G(r,t)\, dr\, dt - H(r,t)\; dt^2, \quad \varepsilon = \pm 1 \tag{2.1}$$

Овај облик интервала ћемо се потрудити да, у границама које не ремете општост сферно симетричног поља, у највећој мери упростимо. Први корак ће бити трансформација

$$r'^2 = F(r,t), \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi, \quad t' = t$$

Оваквим избором радијалног одстојања r', само уколико служи као множитељ угаоног сферног интервала, претпостављамо да је разлика између еуклидског и риманског интервала занемарљива.

То потиче од чињенице да је удаљеност извора гравитационе силе од посматране тачке довољно велика и да та сила брзо опада с удаљавањем, што је имплицитна претпоставка у релативности.

$$\varepsilon\, ds^2 = E_1(r',t')\, dr'^2 + r'^2\big(d\,\theta'^2 + sin^2\theta'\, d\phi'^2\big) + G_1(r',t')dr'\, dt' - H_1(r',t')\, dt'^2 \tag{2.1'}$$

Овај интервал треба да се у бесконачности сведе на интервал Минковског, стога ћемо потражити трансформацију која ће уклонити мешовити члан G_1. Ставићемо:

$$r' = r'',\ \theta' = \theta'',\ \phi' = \phi'',\ t' = g(r'',t'')$$

Отуд

$$dr' = dr'', \qquad\qquad dt' = \frac{\partial g}{\partial r''}\, dr'' + \frac{\partial g}{\partial t''}\, dt''$$

дакле

$$dt'' = \left(\frac{\partial g}{\partial t''}\right)^{-1}\left(dt' - \frac{\partial g}{\partial r''}\ dr''\right)$$

Сада можемо написати

$$\varepsilon\, ds^2 = E_1\big(r'',t''\big)\big(dr''\big)^2 + \big(r''\big)^2\Big[\big(d\theta''\big)^2 + sin^2\,\theta''\big(d\phi''\big)^2\Big] + G_1\big(r'',t''\big)\, dr''\left(dt' - \frac{\partial g}{\partial r''}\, dr''\right)\left(\frac{\partial g}{\partial t''}\right)^{-1} -$$

$$H_1\big(r'',t''\big)\left(dt' - \frac{\partial g}{\partial r''}\, dr''\right)^2\ \left(\frac{\partial g}{\partial t''}\right)^{-2} \tag{2.1''}$$

Услов ортогоналности метрике је да ищезну мешовити чланови. Изједначићемо их са нулом, и ослободити чланова са негативним степеном:

$$G_1\big(r'',t''\big)\ \frac{\partial g}{\partial t''} + 2\, H_1\big(r'',t''\big)\ \frac{\partial g}{\partial r''} = 0 \tag{2.2}$$

Ово је хомогена линеарна парцијална једначина првог реда, коју задовољава величина $g(r'',t'')$. Она има решење што значи да метричку форму (2.1”) начелно можемо довести у ортогоналан, или дијагоналан облик. Сада ћемо претпостављени облик метрике написати као:

$$\varepsilon\, ds^2 = e^{\mu(r,t)}\, dr^2 + r^2\big(d\theta^2 + sin^2\,\theta\, d\phi^2\big) - c^2\, e^{\nu(r,t)}\, dt^2 \tag{2.3}$$

што је изабрано тако да гарантује знаке и ненултост чланова ове форме.

Сада ћемо заменити компоненте тензора гравитационог потенцијала, односно метричке коефицијенте форме (2.3), у изразима за Кристофелове симболе (1.3a), онда то ставити у израз за $G_{\alpha\beta}$ и ове изједначити с нулом, јер се ради о слободном простору. Напоменимо да смо могли да користимо и (1.11), јер изједначење с нулом $G_{\alpha\beta}$ повлачи изједначење с нулом $R_{\alpha\beta}$. Међутим, у овом случају је погодније радити са G^{α}_{β}. Тада су једине компоненте тог тензора које нису идентички једнаке нули:

$$\left.\begin{aligned}
&G^1_4 = \frac{1}{r}e^{-\mu}\ \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0\\
&G^1_1 = -\, e^{-\mu}\ \left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0\\
&G^2_2 = G^3_3 = ... = 0\\
&G^4_4 = e^{-\mu}\ \left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial\mu}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Компоненте G_2^2 и G_3^3 не играју никакву улогу при решавању проблема, па су изостављени њихови експлицитни изрази. Из израза за G_4^1 одмах видимо да је $\mu = \mu(r)$. Сада формирамо разлику

$$G_1^1 - G_4^4 = \frac{1}{r}\, e^{-\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\partial \nu}{\partial r}\right) = 0 \tag{2.5}$$

На основу претходног, из горње једначине закључујемо да ν мора имати облик:

$$\nu(r,t) = \nu_1(r) + \nu_2(t)$$

Пошто је компонента g_{44} експоненцијслнс функција својих аргимената, то ћемо прећи на нову временску промењљиву t', коју ћемо дефинисати тако да буде

$$dt' = e^{\frac{1}{2}\,\nu_2(t)}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad t' = \int e^{\frac{1}{2}\nu_2(t)} dt \tag{2.7}$$

Ово је добар пример ширине с којом у релативности приступамо појму времена. Оно је само један параметар којем ми интуитивно бирамо најпогднији облик. Ток времена за оног који мирује у односу на координатни систем зове се координатно време. То ће, у коначном облику за тражени интервал, бити t' из (2.7). Сада ћемо у последњој једначини (2.4) извршити смену, уносећи помоћни параметар u:

$$u = \frac{1}{r}\, e^{\mu}$$

што ће ту једначину довести у облик

$$\frac{du}{dr} + u^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{u} = 2\,m - r$$

Дакле:

$$g_{11} = e^{\mu} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \tag{2.8}$$

Пошто је из (2.5) $\mu = -\,\nu$ (константу интеграције можемо уклонити избором јединица) то (2.3) коначно добија облик:

$$\varepsilon\, ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2\,\left(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\phi^2\right) - c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\, dt^2 \tag{2.9}$$

(координатно време пишемо као t).

Метрика (2.9), која се по њеном проналазачу Карлу Шварцшилду зове Шварцшилдова метрика, је ортогонална, односно дијагонална (нема мешовитих чланова), и стационарна тј независна од времена. Пошто има ове две особине, она се зове статичка метрика. Бирхоф је доказао да она не може зависити од времена. У слободном простору она настаје из сферно сметричног материјалног извора, односно тела, које је по густини или хомогено, или му се густина мења само у радијалном правцу. Такво тело може радијално пулсирати а да гравитационо поље изнад њега остаје непромењено. Из (2.9) се види да за $r \;\to \infty$ ова метрика тежи метрици Минковског.

Хоризонт сферно симетричног поља. У изразу (2.9) за сферно симетрично гравитационо поље видимо да прва просторна компонента тензора гравитационог потенцијала постаје бесконачна за $r = 2m$, док је последња, временска компонента тада једнака нули. За вредности $r < 2m$ знаци тих компонената се мењају, па просторна компонента постаје временска а временска просторна. Наравно, пошто се ради о спољном гравитационом пољу, оном које постоји изван тела које га ствара, кључно је питање колика је величина $2m$. Не улазећи у доказ, који је добијен из студије унутрашњег гравитационог поља тела, утврђено је да она за Земљу износи $m_{\,T} = 0,5\, cm$

а за Сунце , чија је маса процењена на 300000 Земљининих маса, $m_{\,S} = 1,5\,km$. Видимо да "гравитациони полупречник" небеских тела, како је названа величина $2m$, расте линеарно с масом, што значи да запремина која одговара том радијусу расте с кубом односа маса упоређиваних тела.

Сам Ајнштајн и други релативисти су сматрали да $2m$ представља неку "апсолутну границу " густине материје испод које се не може ићи. Тек је у годинама после Ајнштајнове смрти почела да се обраћа пажња на област $r \leq 2m$, и то због чињенице да одговарајућа запремина расте с кубом масе небеског тела. Са развојем физике и астрофизика звезда је почела да се боље проучава, откривени су и нови објекти названи пулсари и квазари. Критично подручје Шварцшилдовог решења нашло је неочекивано објашњење.

Уведимо појам Шварцшилдове сфере. Она је дефинисана са:

$$r = 2m \quad \Rightarrow \quad |g_{\alpha\beta}| = -16\,m^4\,c^2\,sin^2\theta \tag{3.1}$$

Чињеница је да детерминанта тензора гравитационог потенцијала из (2.9) има коначну вредност и поред великог прекида и преокрета знакова метрике на Шварцшилдовој сфери. Једначину те површи ћемо формулисати као

$$f(r) = r - 2m = 0 \quad \Longrightarrow \quad grad\,f = n_\alpha(1,0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad g^{\alpha\beta}\,n_\alpha\,n_\beta = g^{11}\,(n_1)^2 = 1 - \frac{2m}{r} = 0 \tag{3.2}$$

Шварцшилдова сфера је, дакле, једна нулта, односно сингуларна површ.

Да бисмо испитали област испод Шварцшилдове сфере извршићемо прво транцформацију координата. У релативности избор координатног система игра велику улогу. Многе значајне чињенице откривене су, а многа једноставна објашњења нађена захваљујући избору погодних система. Увеш ћмо смену координата које су кориш ћене у дефиниционом изразу (2.9):

$$\left.\begin{aligned} &t = t' \pm 2mc^{-1}\,ln\!\left(\frac{r}{2m} - 1\right), \quad r > 2m \\ &t = t' \pm 2mc^{-1}\,ln\!\left(1 - \frac{r}{2m}\right), \quad r < 2m \\ &r = r', \quad \theta = \theta', \quad \phi = \phi' \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Тако добијемо Едингтон-Финкелштајнов облик сферене матрике. Ако за просторне координате изоставимо примове, она гласи:

$$\varepsilon\,ds^2 = \left(1 + \frac{2m}{r}\right)dr^2 + r^2\big(d\,\theta^2 + sin^2\theta\,d\phi^2\big) \mp \frac{4mc}{r}dr\,dt' - c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt'^2 \tag{3.4}$$

Сада ћемо се ограничити на радијални нулти део метричке форме. То значи да је при константним ϕ и θ:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2m}{r}\right)dr^2 \mp \frac{4mc}{r}dr\,dt' - c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt'^2 = 0 \tag{3.4$'$}$$

Ово је метричка форма ограничена на светлосне зраке, односно на путање фотона који радијално излазе или улазе у Шварцшилдову сферу. Приметићемо да је ток времена остао сачуван после трансформације $t\ \rightarrow t'$; оно што смо добили зове се ретардирано време у односу на Шварцшилдово, што значи да се оно мери почев од различитих тренутака с обзиром на радијално одстојање r; иначе тече исто као t.

Ако узмемо једначину (3.3) за $r > 2m$ са позитивним знаком, лева страна једначине (3.4$'$) ће се разложити на чиниоце:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr}{dt'} + c = 0 \\ \\ &\frac{dr}{dt'} + c^2\,\frac{2m - r}{2m + r} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Решење прве једначине гласи

$$r + ct' = const. \tag{3.6}$$

а друге

$$\left.\begin{aligned} &r + 4m\; ln(r - 2m) - ct' = const. \qquad (r > 2m) \\ &r + 4m\; ln(2m - r) - ct' = const. \qquad (r < 2m) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Имамо, дакле, из (3.5):

$$\frac{dr}{dt'} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} c & r \to \infty \\ \\ 0 & r \to 2m \end{cases} \qquad (r > 2m)$$

$$\frac{dr}{dt'} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \quad 0 & r \to 2m \\ \\ -\,c & r \to 0 \end{cases} \qquad (r < 2m) \tag{3.8}$$

Једначина (3.6) се односи на упадне зраке, односно фотоне који радијално упадају у област $r < 2m$. Једначине (3.7) описују радијалне зраке који се удаљавају од границе $r = 2m$, али са ње саме се они не могу удаљити, већ тек од $r = 2m + \varepsilon$. Ови достижу брзину c у бесконачности. Зраци који се у области $r < 2\,m$ радијално удаљавају од центра никад не достижу границу $r = 2\,m$, тј Шварцшилдов радијус, већ само $2\,m - \varepsilon$. Оно што важи за фотоне утолико више важи за друге честице, па Шварцшилдова сфера представља хоризонт испод којег ништа не излази. Ако би се цела маса неког небеског тела сабила испод Шварцшилдове сфере, та би сфера постала хоизонт, тј граница црне рупе.

У астрофизици је откривено да се активни период живота звезда завршава према три сценарија. Према првом, звезде чија је маса једнака највише $1,3\,M_S$ (маса Сунца) завршавају као бели патуљци, што би, значи, требало да буде и судбина Сунца. Према другом, звезде чија се маса креће у подручју $1,3 - 2,25\,M_S$, завршавају као неутронске звезде или пулсари (PSR). То су звезде огромне густине које бивају сабијене у куглу пречника од око 15 км (при чему им масе износе око 400000 -675000 маса Земље). Оне су састављене од неутрона, пошто су им се електрони спојили са протонима, а од сигнала шаљу само радио - таласе. Према трећем сценарију, који описује звезде масе веће од $2,25\,M_S$, оне постају квазари (QSO), то јест црне рупе. Шта се дешава испод хоризонта може се само нагађати. Пошто је, као што смо поменули, гравитациони радијус Сунца $2\,m_S = 3km$, значи да су звезде чији је гравитациони радијус $2\,m$ већи од 6,75 км кандидати за црне рупе. Запремина црне рупе већа је од, приближно узев, 1250 кубних километара. Пошто је њихова маса већа од 675000 маса Земље, то следује да би при густини која одговара почетној вредности црне рупе, за масу од $2,25\,M_S$, цела Земља требало да буде сабијена у око 4,5 милиона кубних метара запремине.

Негде око средине наше галаксије постоји, сматра се, црна рупа која одговара маси од око сто милиона маса нашег Сунца. Ово значи да би њен гравитациони радијус требало да износи 300 милиона километара. У ту запремину, која захвата путање Меркура, Венере, Земље, Марса и још простора, може да стане отприлике 75 милиона запремина Сунца. Ако бисмо замислили да је та маса распоређена с просечном густином коју има Сунце, она би само једном четвртином била изван подручја које би, у случају да се цела спусти унутар њега, постала црна рупа. Гравитационо сажимање, које достигне границу $r = 2\,m$, у овом случају 300 милиона километара, представља гравитациони колапс, док цела запремина звезде, испод хоризонта, односно Шварцшилдовог радијуса, представља црну рупу. Она је огромна са становишта Сунчевог система али мала са галлактичког а незнатна са васионског становишта.

Све ово говори о будућности света у којем постојимо, засад у релативној равнотежи и сигурности.