Милена Радоњић IV.М
логика
проф. Жарко Мијајловић
УТОРАК 12-14 (844)

Прешић: Увод у мат. логику (математичка библиотека)
(део са иск. рачуном)

А. Крон: Елементарна теорија скупова

Ж.М.: Увод у теорију модела (Model theory)

13.10.1992.

Предмет математичке логике

- логика је била део филозофије, али је њеним формализмом прешла у математику

- области у логици

1° - теорија доказа

2° - теорија скупова

3° - теорија модела (структура)

4° - теорија формалне израчунљивости (алгоритама)

5° - некласичне логике
 ↳ најближе „филозофској" логици

1° - основни појмови: доказ, аксиома, (Т), теорија

2° - осн. појам: скуп

- домени: кардинална и ординална аритметика, бесконачна комбинаторика, модели теорије скупова

Модели теорије скупова су модели математике. На пример, аксиома избора омогућава да се докаже да нису сви скупови. [illegible] (са [illegible]

теоријом скупова, имали бисмо анализу у којој су сви скупови мерљиви.
Аксиома избора учествује и у доказу да је ф-ја акко је низ-непрекидна у тачки a.
Савремена општа топологија скоро да је део теорије скупова, јер су неки искази јако осетљиви на то.
Аритметика, рачунарство и сл. (оно што се бави коначним скуповима) скоро уопште и не зависи од теорије скупова.

3° То је теорија најв. истине.
-појам: операцијско-релацијске структуре
Најближа је математици од свих ових области.
-нестандардна анализа (Лајбницова анализа)

4° -најмлађа област (почиње из 30-их година)
-основни појам: алгоритам
-алгоритамски системи - сваки формални систем у коме се може представити произвољни алгоритам
-први alg. систем: рекурзивне ф-је, затим λ-рачун (реализован у лиспу), Тјурингове машине
-деф. се појам израчунљивог и одлучивог

5° И у некласичним логикама се изучавају сви ови аспекти.
-ми ћемо изучавати у следећим теоријама:
-исказни рачун
-предикатски рачун I реда

Класичне логике формализују речи: и, или, не, сваки, постоји. Некласични рачуни „удаљују" и друге речи:
-модални рачуни (могуће, нужно, између њих постоји сличан дуалитет као између $\forall, \exists$),
-темпоралне логике (све формуле су параметризоване са $t \in R$).

- квантна логика (изучавање феномена квантне физике)

Други тренд у класичним логикама јесте промена значења симбола из класичне логике. Најзанимљивија је интуиционистичка логика. (→ интуиционистичка анализа, топологија итд.) Има примене као и у рачунарству (конструктивна математика).

Историјске напомене

- први логичари: Аристотел и Еуклид
- битна је Еуклидова геометрија, једна од најстаријих мат. теорија

У „Елементима" се појављује доказ, било је јасно шта значи доказати нешто. Пре тога, није се правила разлика између „тачно" и „приближно". „Ел." су допринели тачности, ригорозности.

Архимед је, на неки начин, зачетник инфинитезималног рачуна. Нашао је формуле за запремину, површину лопте и сл.

Лурије: „Архимед"

Имао је појам ексхаустије (уписивање правилних многоуглова).

(1646–1716)
Лајбниц је био значајан за развој анализе и д.ф. рачуна. Инфинит[illegible]

рачун измислио у врло младим година (20+е). Lulus Rajmondus (Luli) Kalyder it Aragon

Лајбниц (Gottlib Leibnitz) је објавио резултате чим је дошао до њих, а Њутн тек 20 год. касније (због тога је постојала нетрпељивост међу њима). Лајбниц је био и филозоф, познат по монадама – деловима у којима се огледала целина. У филозофији је користио своје математичке резултате. Он је зачетник савремене математичке логике "2+2=4". Поставио је захтев за језиком на коме се може исказати читава мат. (lingua universalis), што је и један од основних проблема у логици.

XVIII в. – затишје, јер се даље анализом примењена у механици, астрономији, а не! заснивања математике.

Вајерштрас (Weierstrass) је засновао анализу (тзв. εδ-анализу). Тек тада је анализа учињена конзистентним, логички заснованим, системом.

У том броју, били су Болцано и Дедекинд, а нарочито Кантор. (Галилеј је уочио да парних бројева има исто колико и природних, на основу тога је закључио да се о бесконачности и не може математички расправљати.)

Кантор је основао систем теорије скупова. Са њим почиње савремена математика. Његово време је било време конструктивизма, па у Кантора људи нису имали много поверења, био је много критикован и од великих математичара (Поенкаре).

Кантор је имао неколико аксиома: → три

1. $X=Y$ акко X и Y имају исте елементе
(аксиома екстензионалности)
2. за свако својство, постоји скуп чији су елементи тачно оно објекти који имају то својство
3. (аксиома избора) за сваку фамилију непразних дисј. скупова постоји скуп који сече сваки члан те фамилије по тачно једном елементу

20.10.1992.

Кантор (друга половина XIX в.) је јако значајан за логику, пре свега због теорије скупова која је језик савремене математике.
У оквиру теорије скупова појавили су се парадокси (неке је и сам Кантор уочио после 20 година рада са њима, после чега је полудео). Та теорија је ипак сјајна, а Цермело и Расел су дали своје системе у којима се елиминишу парадокси. Ти системи нису ништа друго, него нешто проширена Канторова теорија.

РАСЕЛОВ ПАРАДОКС (1905. г.)
Доказује се да не постоји скуп свих скупова, што је у супротности са аксиомом 2.

Расел је елиминисао овај парадокс помоћу нивоа. Скуп нивоа n може садржати само скупове нивоа n-1 и ниже. (<u>стратификована теорија скупова</u>)

Ово је добра теорија скупова у којој није пронађена противречност, али је компликована — правила увођења стратификоване формуле, вођења рачуна о броју заграда итд. Математика у оваквој теорији скупова није лепа. Ова теорија зато има само академски, историјски значај. (Расел је, иначе, највећи филозоф XX в. западне хемисфере. Значајно је дело са Вајтхедом: Principia Mathematica. Водио је Геделову теорему за комплетност.)

У Зермело-Френкеловој теорији, друга аксиома је мало „разломљена".

<u>Канторови</u> аргументи

1\. Кантор је дефинисао појам кардиналности. (X и Y су исте кард. ако постоји бијекција $X \to Y$.) Он је први класификовао бесконачности.

а) Кантор је доказао: $|X| < |\mathcal{P}(X)|$

$\ulcorner$ $|X| \leq |Y|$ значи да постоји $X \xrightarrow{1-1} Y$

$|X| < |Y|$ значи $|X| \leq |Y|$, $|X| \neq |Y|$ $\lrcorner$

$\triangle$ (дијагонални аргумент)

$X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$: $x \longmapsto \{x\}$ - утапање

$h: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$

$Y = \{x \in X \mid x \notin h(x)\}$

$Y = h(b)$, $b \in X$

$b \in Y \Rightarrow b \notin h(b) \Rightarrow b \notin Y$ $\perp$

$b \notin Y \Rightarrow b \notin h(b) \Rightarrow b \in Y$ $\perp$

Дакле, Y није слика ни једног елемента из X, па h није НА. $\square$

б) Варијанта доказа помоћу дијагоналног аргумента јесте и да се реални бројеви не могу поређати у низ.

Δ

$0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$

$0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$

$\ldots$

$0,b_1b_2b_3\ldots \qquad b_i=\begin{cases}1, & a_{ii}\neq 1\\ 5, & a_{ii}=1\end{cases}$ □

И ово је Канторов доказ.

в) Доказао је да рационалних бројева има колико и природних, у чему је опет користио нову и занимљиву идеју.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} \to & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \to & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \end{array}$$

Кантор је увео кардиналну аритметику и доказао многе ~~[illegible]~~ основне кардиналне бројеве. Ти докази су и данас актуелни.

Хаусдорф је такође допринео много теорији скупова.

Чувена је пољска математичка (а уједно логичка) школа (Тарски, Сјерпињски, [illegible], Мостовски), нарочито пре рата, јер је касније много пољских Јевреја избегло у Америку.

Из Русије, значајни су Суслин и Лузин, који су се бавили подскуповима скупа $\mathbb{R}$.

Г. КОНТИНУУМ ХИПОТЕЗА

$\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow |X| = |\mathbb{N}|$ или $|X| = |\mathbb{R}|$

Нема кардиналних бројева између $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$. Кантор је неуспешно покушавао да докаже. Гедел је доказао да континуум хипоте-

за које противречна са аксиомама скупова. Тек 1963.г., Паул Коен је доказао да ни негација не противречи тим аксиомама.
Дакле, континуум хипотеза или њена негација могу бити аксиоме теорије скупова, из тога се изводе две математике.
Са конт. хипотезом можемо доказати да постоји скуп који пресеца у тачно 1 тачки сваки нигде густ скуп.
У Паризу, 1900.г је одржана конф. математичара (којој је присуствовао М. Петровић и Алас), на којој је Хилберт предложио 23 проблема, од којих је први конт. хипотеза.
Суслин и Лузин су другачије приступили стварима. Радили су са „лепо описаним" скуповима у R: интервали, отворени и затв. скупови, Борелови скупови, скупови који су непр. слике Борелових скупова (аналитички скупови). Суслин је као студент доказао да за ове скупове важи континуум хипотеза, а тако је код комплемената аналитичких скупова. Умро је са 23 г., а Лузин (његов професор), је наставио његово дело, и тако је настала дескриптивна теорија скупова.
Оно што нису доказали (Суслин и Лузин), испоставило се да се може узети као аксиома. Они су, иначе, били доста испред времена.

Трећа и четврта хипотеза по валидности, јесу Суслинова и Курепина хипотеза, која говоре о неким посебно уређеним скуповима.

Џорџ Бул је увео исказну алгебру 1850.г., у вези неких проблема из вероватноће.

Исказни рачун

ИСКАЗНА АЛГЕБРА

То је структура:

$(\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, 0, 1)$.

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$\neg$
0	1
1	0

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\veebar$	0	1
0	0	1
1	1	0

Исказна слова (иск. променљиве) је низ симбола: $p_0, p_1, p_2, \dots$

- мета-променљиве: $p, q, r, s, \dots$

Исказна слова узимају вредности у скупу $\{0,1\}$. Вредности мета-променљивих су у скупу променљивих (тј. исказних слова).

деф. 1° $\top, \bot$ су исказне формуле;
2° исказна слова су иск. формуле;
3° ако су A, B иск. формуле, тада су то и
$(A \land B), (A \lor B), \neg A, (A \Leftrightarrow B), (A \Rightarrow B)$;
4° свака иск. формула добија се применом претходних правила.

(Овде $\land, \lor, \dots$ нису операције које смо дефинисали на почетку.)

$F_0 = \{\top, \bot\} \cup Var$
$Var = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$

$$F_{n+1} = F_n \cup \{\neg A \mid A \in F_n\} \cup \{(A \land B) \mid A, B \in F_n\} \cup \{(A \lor B) \mid A, B \in F_n\} \cup \{(A \Rightarrow B) \mid A, B \in F_n\} \cup \{(A \Leftrightarrow B) \mid A, B \in F_n\}$$

$$F = \bigcup_{n \in N} F_n$$

деф. φ је <u>исказна формула</u> акко $\varphi \in F$.
(ово је строга дефиниција)

Вредност исказне формуле је вредност у алгебри 2.

деф. <u>Валуација</u> је пресл. $\alpha : Var \longrightarrow \{0,1\}$.

деф. <u>Вредност формуле</u> је пресликавање $v_\alpha : F \longrightarrow \{0,1\}$

$v_\alpha(\top) = 1 \quad v_\alpha(\bot) = 0$
$v_\alpha(p_i) = \alpha(p_i)$
$v_\alpha((\varphi \land \psi)) = (v_\alpha(\varphi) \land v_\alpha(\psi))$
$v_\alpha((\varphi \lor \psi)) = (v_\alpha(\varphi) \lor v_\alpha(\psi))$
$v_\alpha((\varphi \Rightarrow \psi)) = (v_\alpha(\varphi) \Rightarrow v_\alpha(\psi))$
$v_\alpha((\varphi \Leftrightarrow \psi)) = (v_\alpha(\varphi) \Leftrightarrow v_\alpha(\psi))$
$v_\alpha(\neg \varphi) = \neg v_\alpha(\varphi)$.

деф. Формула φ је <u>таутологија</u> акко $v_\alpha(\varphi) = 1$, за све валуације α. →

деф. Формула φ је <u>контрадикција</u> ако $v_\alpha(\varphi)=0$ за све валуације α.

- ознака: $\varphi[\alpha]$ за $v_\alpha(\varphi)$

27.10.1992.

Таутологије -

<u>Пример1</u>

$$\underbrace{(\varphi\Rightarrow\psi)\wedge(\psi\Rightarrow\theta))\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\theta)}_{F}$$

$$v(F) = (v(\varphi)\Rightarrow v(\psi))\wedge(v(\psi)\Rightarrow v(\theta))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v(\varphi)\Rightarrow v(\theta))$$

$v(F)=1$, за све валуације α,

F је таутологија.

Дакле, можемо проверити да ли је формула таутологија, тако што у њу заменимо све могуће вредности.

МЕТОД ТАБЛОА (свођење на контрадикцију)

Претпоставимо да формула није <u>таутологија</u>

$$(\varphi\Rightarrow\psi)\wedge(\psi\Rightarrow\theta)\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\theta)$$

0

1   0

1   1   1   0

1   0   0

$\boxed{1 \quad 0}$

⟶ немогуће!

<u>Пример 2</u>

$p \Rightarrow q$

   0

0   1   Нема контрадикције!

Методом таблоа добили смо валуацију за коју је вредност формуле нула.

$v(p)=0 \quad v(q)=1$

$\hookrightarrow v(p\Rightarrow q)=0$

<u>Пример3</u>

$(\varphi\Rightarrow\psi)\Leftrightarrow(\neg\psi\Rightarrow\neg\varphi)$ контрапозиција

$\varphi\Leftrightarrow\neg\neg\varphi$ двострука нег.

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow \underline{(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)}$

$\Leftrightarrow \underline{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \neg(\varphi \vee \psi)}$

$\left.\begin{array}{l} \neg, \vee \\ \neg, \wedge \\ \neg, \Rightarrow \end{array}\right]$ база

Постоје и једночлане базе.

<u>Шеферова ф-ја</u>:

$x \uparrow y = (x \cdot y)'$

$x' = x \uparrow x$

$x + y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$

<u>Лукашијевичева ф-ја</u>:

$x \downarrow y = (x + y)'$

$x' = x \downarrow x$

$x \cdot y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

(Predstavljena je tačno)

Т Свака једночлана база састоји се или из Лукашијевичеве или из Шеферове ф-је.

Δ

$\{*\}$ – једночлана база

$x + y = t_1(x, y, *)$

$x \cdot y = t_2(x, y, *)$

$\neg x = t(x, *)$

$1 = 0' = t(0, *)$

$\Rightarrow$ $0 * 0$ мора бити 1, иначе би било $t(0,*) = 0$. (Строго се доказује индукцијом по сложености терма.)

$0 * 0 = 1$ Слично, $1 * 1 = 0$

$*$	0	1
0	1	α
1	β	0

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

За $\alpha=\beta=0$ и $\alpha=\beta=1$ добијамо Лукашијевичеву и Шеферову ф-ју.

$\underline{\alpha=0,\ \beta=1}$

*	0	1
0	1	0
1	1	0

$x*y=y'$ $\qquad x*(\cancel{x}*y) = x*y' = y$

па $t(x,y,x)' \in \{y, y'\}$

↳ Не можемо добити дисјункцију и конјункцију.

$\underline{\alpha=1,\ \beta=0}$ $\qquad x*y=x'$ $\qquad\square$

Д. Описати све двочлане базе.

Д. Програм који одговара на питање да ли је реч формула, и да ли је дата формула аксиома.

Формализација исказног рачуна

<u>напомена</u> Формални систем $\mathcal{F}$ се одређује помоћу:

1° најмање пребројив скуп симбола (основни скуп симбола над $\mathcal{F}$);

2° скуп формула над $\mathcal{F}$;

3° неке формуле су аксиоме;

4° коначан број правила извођења.

РАЧУН $\mathcal{L}$

То је формализација исказног рачуна. Зове се и Лукашијевичев рачун.

(Лукашијевич је један од представника пољске школе.)

1° симболи: $\Rightarrow, \neg, (,),$

$p_0, p_1, p_2, \ldots$

2° формуле су формуле иск. рачуна →

Често је пракса да искази 1°, 2°, 3° у формалним системима буду ефективно израчунљиви.

3° аксиоме:

A1 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

A2 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

A3 $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

4° правило извођења

МП $\dfrac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$ (modus ponens)

A1, A2, A3 су схема-аксиоме. Аксиоме добијамо када било које формуле A, B, C овог рачуна заменимо.

A: $p \Rightarrow q$

B: r

A1 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

Дакле, аксиома имамо бесконачно много.

Могли смо то урадити тако што бисмо за аксиоме узели схема-аксиоме у којима смо заменили уместо A, B, C нека три исказна слова. Тада треба додати и још једно правило извођења:

$$\frac{\varphi(p_0, \dots, p_n)}{\varphi(q_0, \dots, q_n)} \quad \text{(супституција).}$$

деф. $A \vee B$ је замена за $\neg A \Rightarrow B$.

деф. $A \wedge B$ $\neg(A \Rightarrow \neg B)$.

Можемо увести и дефиниционе аксиоме:

$$A \vee B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$$

$$(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$$

29.10.1992.

деф. Нека је φ формула рачуна $\mathcal{L}$. φ је <u>теорема</u> тог рачуна ако постоји коначан низ $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ формула рачуна $\mathcal{L}$, тако да важи:

1° $\varphi_n = \varphi$

2° Свака формула овог низа је аксиома или се добија из претходних чланова низа применом правила извођења.

Ако је φ теорема рачуна $\mathcal{L}$, то пишемо: $\vdash \varphi$ или $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

<u>Пример</u>

$\vdash A \Rightarrow A$

$\triangle$

1. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ — a1
2. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow$
   $\Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ — a2
3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ — МП на 1,2
4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ — a1
5. $A \Rightarrow A$ — МП на 3,4

$\square$

Т (о сагласности)

Нека је A формула рачуна $\mathcal{L}$. Ако је A теорема рачуна $\mathcal{L}$, тада је то таутологија.

$\vdash A \rightarrow \models A$

$\triangle$

Све аксиоме рачуна $\mathcal{L}$ су таутологије. (Установљаво се проблем.)

Модус поненс чува таутологичност, тј.

$\models A, \models A \Rightarrow B \longrightarrow \models B.$

Γ $\models A, \models A \Rightarrow B$

α - валуација иск. алгебре

$v_\alpha(A) = 1 \quad v_\alpha(A \Rightarrow B) = 1$

$\Rightarrow \quad (v_\alpha(A) \Rightarrow v_\alpha(B)) = 1$

$\longrightarrow v_\alpha(B) = 1$

$\longrightarrow \models B$

Нека је $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ доказ у рачуну $\mathcal{L}$. Индукцијом по дужини доказа n, доказује се да су сви његови чланови таутологије. $\square$

II. Направити програм (алгоритам) који за дату таутологију налази доказ у рачуну $\mathcal{L}$.

II. Исказна формула је позитивна ако је $\varphi(1,1,\ldots,1)=1$. Доказати да иск. ф. позитивна акко је еквивалентна формули изграђена само од $\wedge, \vee, \Rightarrow$.
Кор. да је произвољна формула еквивалентна некој поз. формули, или некој негацији поз. формуле.

Примери

Теореме рачуна $\mathcal{L}$:

$A \Rightarrow \neg\neg A$

$\neg\neg A \Rightarrow A$

$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$.

деф: Нека је T ма који скуп иск. формула. Кажемо да исказна формула A има доказ из хипотеза T акко постоји низ $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ формула рачуна $\mathcal{L}$:

1° $\varphi_n = A$

2° φ_i је аксиома или

3° φ_i је добијено правилом извођења из претходних чланова низа или

4° $\varphi_i \in T$ (φ_i је хипотеза).

Ознака: $T \vdash_{\mathcal{L}} A$, $T \vdash A$

деф. <u>Теорија</u> исказног рачуна $\mathcal{L}$ је ма који скуп T иск. формула. Формуле из T називамо <u>аксиомама те теорије</u>.
Ако је φ доказано на основу хипотеза T, кажемо и да је φ <u>теорема теорије</u> T.

- својства за $\vdash$

1° $A_1,\dots,A_n \vdash A$
$\Rightarrow A_1,\dots,A_n,A_{n+1},\dots,A_{n+k} \vdash A$

2° $A_1,\dots,A_n \vdash A$, $A \vdash B$
$\Rightarrow A_1,\dots,A_n \vdash B$

△
Нека је $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ доказ за A из $A_1,\dots,A_n$, и $\psi_0,\dots,\psi_m$ доказ за B из A. Тада је $\varphi_0,\dots,\varphi_n,\psi_0,\dots,\psi_m$ доказ за B из $A_1,\dots,A_n$. □

3° Ако су $A_1,\dots,A_n$ теореме рачуна $\mathcal{L}$, и $A_1,\dots,A_n \vdash B$, онда је B теорема тог рачуна.

△
Нека је $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ доказ за B из $A_1,\dots,A_n$. Сваку од формула A_k заменимо у том доказу доказом за A_k.
(Строг доказ би био индукцијом по n.) □

⌜ $T, A \vdash B$, $\vdash A$
$\Rightarrow T \vdash B$ ⌟

4° $S \vdash A$, $T \vdash B$ (за све $B \in S$)
$\Rightarrow T \vdash A$

⌜ $A \vdash B$, $B \vdash C \Rightarrow A \vdash C$ ⌟

T (дедукције)

Нека је T теорија исказног рачуна $\mathcal{L}$, и A, B формуле тог рачуна. Тада

$T, A \vdash B$ акко $T \vdash A \Rightarrow B$.

$\triangle$

$\Leftarrow$) $T \vdash A \Rightarrow B$

На доказ за $A \Rightarrow B$ / додамо ili н.р. формуле A ($\longrightarrow B$) о.к. и добијемо доказ за B из T, A.

$\Rightarrow$) - индукцијом по дужини доказа за B

(i) $n=1$

- доказ је: B

1° B је аксиома

2° $B \in T$

3° B је A

Ако важи 1° или 2°, имамо следеће извођење у T:

$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ — а1

B

$A \Rightarrow B$ — mp,

па $T \vdash A \Rightarrow B$.

3° B је A

$\vdash A \Rightarrow A \longrightarrow T \vdash A \Rightarrow B$

(ii) Нека је дужина доказа за $T, A \vdash B$ једнака $n \geq 1$, а став дедукције важи за све $k < n$.

Доказ за B је: $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

1°, 2°, 3° } исте могућности као за (i), што се и разматра на исти начин

4° B је добијено помоћу МП

- доказ:

$\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \underbrace{\varphi_i \Rightarrow B}_{\varphi_j}, \dots, B$

Пошто је одређен коначан доказа такође доказ можемо применити инд. хипотезу на φ_i и φ_j

$T \vdash A \Rightarrow \varphi_i$

$T \vdash A \Rightarrow \varphi_j$ $\quad \varphi_j$ је $\varphi_i \Rightarrow B$

$(A \Rightarrow (\varphi_i \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \varphi_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ $\quad$ а2

$A \Rightarrow (\varphi_i \Rightarrow B)$

$(A \Rightarrow \varphi_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $\quad$ мп

$A \Rightarrow \varphi_i$

$A \Rightarrow B$ $\quad$ мп

Ово је изложење у T, па је тврђење доказано. □

пример

$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$

△

$A,\ A \Rightarrow B,\ B,\ B \Rightarrow C,\ C$

доказ $\quad A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ A \vdash C$

- применимо став дедукције □

3.II.1992.

примери

1. $A, \neg A \vdash B$

△

$\neg A$	хип.
$\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	а1
$\neg B \Rightarrow \neg A$	мп
$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	а3
$A \Rightarrow B$	мп
A	хип.
B	мп

□

По теореми дедукције добијамо:

$\vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

2. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

3. $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$

4. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

5. $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$

6. $(A \Rightarrow B),\ \neg A \Rightarrow B,\ \neg A \vdash B$

ЛЕМА Нека су A, B било које исказне формуле. Тада важи:

а) $A, B \vdash A \Rightarrow B$

б) $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$

в) $\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$

г) $\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$

$\triangle$

а)

B	хип.
$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	А1
$A \Rightarrow B$	МП

$B \vdash A \Rightarrow B \rightsquigarrow A, B \vdash A \Rightarrow B$ (слабљење)

б)

A	хип.
$A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$	теорема
$\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$	МП
$\neg B$	хип.
$\neg(A \Rightarrow B)$	МП

в) $A, \neg A \vdash B$

$\longrightarrow \neg A \vdash A \Rightarrow B$ (Т дедукције)

Слабљењем добијамо:

$\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$.

г) $\neg A \vdash A \Rightarrow B$

$\longrightarrow \neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$ (слабљење) $\square$

Нека је α валуација исказног рачуна, и A било која формула иск. рачуна.

- ознака:

A' је A ако је $v_\alpha(A)=1$

A' је $\neg A$ ако је $v_\alpha(A)=0$

ЛЕМА Нека је $A(p_1, \dots, p_n)$ иск. формула. Тада za valuaciju α važi

$p_1', \dots, p_n' \vdash A'$.

$\triangle$

- инд. по сложености формуле A.

(i) $сл(A)=0$, A је иск. слово p_i

$p_1', \dots, p_n' \vdash p_i'$ - очигледно важи $\longrightarrow$

(ii) $cl(A) > 0$

1° $\underline{A \text{ је } \neg B}$

$p_1', \dots, p_n' \vdash B'$ (инд. хипотеза):

$\underline{v_\alpha(B)=1}$: B' је B, A' је $\neg A$

A' је $\neg\neg B$

$B \vdash \neg\neg B \rightsquigarrow B' \vdash A'$

$\underline{v_\alpha(B)=0}$: B' је $\neg B$, A' је A

A' је $\neg B$

$\neg B \vdash \neg B \rightsquigarrow B' \vdash A'$

2° $\underline{A \text{ је } B \Rightarrow C}$

$cl(B), cl(C) < cl(A)$

$p_1', \dots, p_n' \vdash B'$

$p_1', \dots, p_n' \vdash C'$ (инд. хип.)

доказујемо: $B', C' \vdash A'$

$\underline{v_\alpha(B)=1 \quad v_\alpha(C)=1}$:

B' је B, C' је C

A' је $B \Rightarrow C$

$B, C \vdash B \Rightarrow C \rightsquigarrow B', C' \vdash A'$

$\underline{v_\alpha(B)=1, \ v_\alpha(C)=0}$:

B' је B, C' је $\neg C$

A' је $\neg A$

$B, \neg C \vdash \neg(B \Rightarrow C) \rightsquigarrow B', C' \vdash A'$

остали случајеви се раде слично

Из транзитивности релације $\vdash$, добијамо:

$p_1', \dots, p_n' \vdash A'$. □

(T) (став потпуности)

Ако је A формула рачуна $\mathcal{L}$, онда

$\vdash A$ акко $\models A$.

△

$\Rightarrow$) већ доказано

$\Leftarrow$) $\models A$

Нека је α нека валуација исказне алгебре.

$v_\alpha(A)=1 \Longrightarrow A' = A$

Ако је $A = A(p_1, \dots, p_n)$, онда

је

$p_1', \dots, p_n' \vdash A'$

$p_1', \dots, p_n' \vdash A$.

Нека је α таква валуација да је $\alpha(p_n) = 1$

$p_1', \dots, p_{n-1}', p_n \vdash A$ ... (1)

Нека је β таква валуација да је $\beta(p_k) = \alpha(p_k)$ $(1 \le k \le n-1)$, и $\beta(p_n) = 0$.

$p_1', \dots, p_{n-1}', \neg p_n \vdash A$ ... (2)

$F, B \vdash A \quad F, \neg B \vdash A \rightarrow F \vdash A$

Γ $F \vdash B \Rightarrow A \quad F \vdash \neg B \Rightarrow A$

$B \Rightarrow A, \neg B \Rightarrow A \vdash A$

$\hookrightarrow F \vdash A$ ┘

(1) и (2):

$p_1', \dots, p_n' \vdash A$

Даље, смањили смо број исказних слова, и настављамо поступак.

$p_1 \vdash A \quad \neg p_1 \vdash A$

$\rightarrow \vdash A$ □

(Ово је нова теорема потпуности.)

Последица 1

Исказни рачун је одлучив.
(За произвољну формулу иск. рачуна можемо ефективно утврдити да ли је теорема. Утврђујемо тако што проверавамо да ли је таутологија.)

Последица 2

Свака исказна формула има дисјунктивну (конјунктивну) нормалну форму.

За сваку формулу A постоји

формула B тако да је B у ДНФ (КНФ), и $\vdash A \Leftrightarrow B$.

[Остале особине можемо доказати и тако што ову последицу доказано у исказном рачуну. ⌟

Д. релевантности иск. рачуна

деф. Теорија у иск. рачуна је скуп исказних формула.

Примери

$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow p\}$

$\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$

деф. Аксиома теорије T је свака формула $A \in T$.

деф. Теорија T је комплетна ако за сваку формулу A важи:

$T \vdash A$ или $T \vdash \neg A$.

деф. Теорија T је непротивречна ако

$T \nvdash p \wedge \neg p$.

- иначе: противречна теорија.

деф. Теорија T је одлучива ако постоји алгоритам којим се за произвољну формулу A утврђује да ли је $T \vdash A$.

10.11.1992.

деф. φ је семантичка последица теорије T акко важи: $v_\alpha(\psi)=1$ за све $\psi\in T$, онда је и $v_\alpha(\varphi)=1$.

- ознака: $T\models\varphi$

Т (Велика теорема потпуности)

$T\models\varphi$ акко $T\vdash\varphi$

Δ

$(\Leftarrow)$ $T\vdash\varphi \rightarrow T\models\varphi$
(Т сагласности)

- индукција по дужини доказа за φ

Нека је α нека валуација, таква да је $v_\alpha(\psi)=1$, за све $\psi\in T$.
Такође, $v_\alpha(\psi)=1$ ако је ψ аксиома исказног рачуна

$v_\alpha(A)=1$, $v_\alpha(A\Rightarrow B)=1$
$\longrightarrow v_\alpha(B)=1$

(i) $n=1$ - очигледно

(ii) φ је аксиома, или акс. из T, или је добијено модус поненом
$\Rightarrow v_\alpha(\varphi)=1$

$\square$

Други облик става потпуности

Ако је T синтаксно непротивречна теорија, онда T има модел, тј. постоји валуација α тако да за све $\psi\in T$: $v_\alpha(\psi)=1$.

деф. Модел теорије T је валуација α тако да је $v_\alpha(\psi)=1$ $(\psi\in T)$.

деф. Теорија T је синтаксно непротивречна акко $T\nvdash\Delta$.

Δ је ознака за контрадикцију.

$\longrightarrow$

$T \nvDash \Delta \to$ постоји α : $v_\alpha(\psi)=1$ $(\psi \in T)$

Из другог облика (Т) потпуности, следи (Т) потпуности.

Δ

$T \nvdash \varphi$

$\to$ $T, \neg\varphi$ је непротивречна теорија.

У супротном, $T, \neg\varphi \vdash \Delta$

$\to T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \Delta$

$\to T \vdash \neg\Delta \Rightarrow \varphi$

$\to T, \neg\Delta \vdash \varphi$

$\to T \vdash \varphi$, јер је $\neg\Delta$ теорема иск. рачуна. ┘

Према другом облику теореме потп., постоји α:

$v_\alpha(\psi)=1 \quad (\psi \in T)$

$v_\alpha(\neg\varphi)=1$

$\to v_\alpha(\varphi)=0. \to T \nvDash \varphi$ □

Д.З. Показати да теорема потпуности повлачи другу форму.

Дакле, довољно је доказати другу форму теореме потпуности.

(КАЛМАРОВА) ЛЕМА Ако је T непротивречна теорија, онда постоји комплетна непротивречна теорија $S \supseteq T$.

Δ

Нека је $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ низ свих формула исказног рачуна.

┌ Д. Показати да се све формуле исказног рачуна могу поређати у низ. ┘

$S_0 = T$

$S_n \vdash \varphi_n \to S_{n+1} = S_n \cup \{\varphi_n\}$

$S_n \nvdash \varphi_n \to S_{n+1} = S_n \cup \{\neg\varphi_n\}$

$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ $\to$

$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S$

$T \subseteq S$

S је комплетна, јер за произвољно φ постоји n тако да је $\varphi = \varphi_n$, па $\varphi \in S_{n+1}$ или $\neg\varphi \in S_{n+1}$, тј. $S \vdash \varphi$ или $S \vdash \neg\varphi$.

S је непротивречна.

S_n је непротивречно за све $n \in \mathbb{N}$.

(i) $n=0$ $\quad S_0 = T$, што је непротивр.

(ii) S_n је непротивречно.

Нека је S_{n+1} противречно.

Не може бити $S_{n+1} = S_n \cup \{\varphi_n\}$.

$S_{n+1} = S_n \cup \{\neg\varphi_n\}$

$S_n, \neg\varphi_n \vdash \Delta$

$\Rightarrow S_n \vdash \neg\varphi_n \Rightarrow \Delta$

$S_n \vdash \neg\Delta \Rightarrow \varphi_n$

$S_n \vdash \varphi_n$ $\quad$ #

Претпоставимо да је S противречно.

$S \vdash \Delta$

Постоји доказ $\psi_0, \dots, \psi_n$ у S, $\psi_n = \Delta$.

$\{\theta_0, \dots, \theta_k\} = S \cap \{\psi_0, \dots, \psi_n\}$

$\theta_0 \in S_{n_0}, \dots, \theta_k \in S_{n_k}$

$\{\theta_0, \dots, \theta_k\} \subseteq S_m$, $\quad m = \max\{n_0, \dots, n_k\}$

$\Rightarrow \theta_0, \dots, \theta_k \vdash \Delta$

$\Rightarrow \quad S_m \vdash \Delta$ $\quad$ #

$\square$

(Т) Ако је T синтаксно непротивречна, тада има модел.

Δ

$S \supseteq T$ - комплетна, непротивречна

- сва исказна слова: $p_0, p_1, \dots$

$\Rightarrow$ $S \vdash p_k$ или $S \vdash \neg p_k$

$p_k \in S$ или $\neg p_k \in S$

Нека је α дефинисано на следећи начин:

$$\alpha(p_k) = \begin{cases} 1 & , S \vdash p_k \\ 0 & , S \vdash \neg p_k \end{cases}$$

$A \in S$

$\Gamma\ u_1', \dots, u_n' \vdash A'$, $A = A(u_1, \dots, u_n)$

$u' = u$ за $u[\alpha] = 1$

$u' = \neg u$ за $u[\alpha] = 0$ $\lrcorner$

Нека је $A = A(u_1, \dots, u_n)$.

$A \in S \rightarrow S \vdash A$

$A[\alpha] = 0$

$\rightarrow u_1', \dots, u_n' \vdash A'$

$\rightarrow u_1', \dots, u_n' \vdash \neg A$

$S \vdash u_1', \dots, u_n'$, јер $u_k' \in S$

$\rightarrow S \vdash \neg A$

$S \vdash A,\ S \vdash \neg A$ #

Дакле, мора бити $A[\alpha] = 1$. □

Т (компактности) Нека је T исказна теорија. Ако сваки коначан подскуп од T има модел, онда и T има модел.

Δ

Нека сваки коначан подскуп од T има, а T нема модел. По знању да је T семантички противречна, па је и синтаксно.

$T \vdash \Delta$

Постоји коначан подскуп $S \subseteq T$ који даје контрадикцију.

$S \vdash \Delta$

$\Rightarrow S$ нема модел. # □

УОПШТЕЊЕ ТЕОРЕМЕ ПОТПУНОСТИ

Нека је $\mathcal{P}$ произвољан скуп исказних слова (у смислу кардиналности). $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in I\}$

И у овом случају важи лема о употпуњењу непротивречне теорије.

(Т) Ако је T непротивречна теорија над $\mathcal{P}$, тада постоји комплетна непротивречна теорија $S \supseteq T$.

$\ulcorner$ ЗОРНОВА ЛЕМА Ако је $(X, \leq)$ уређен скуп, и сваки ланац у X има горњу границу, онда постоји максималан елемент у X.

деф. $L \subseteq X$ је ланац ако је $L \neq \emptyset$ и за све $a, b \in L$: $a \leq b$ или $b \leq a$. $\lrcorner$

$\triangle$

$\mathcal{X} = \{ S \supseteq T \mid S$ је непротивречна теорија$\}$

$\mathbb{X} = (\mathcal{X}, \subseteq)$

За $\mathbb{X}$ су испуњени услови Зорнове леме.

Нека је $\mathcal{L}$ ланац у $\mathbb{X}$.

$S_0 = \bigcup \mathcal{L}$

$T \subseteq S_0$ - очигледно

S_0 је непротивречно

- претп. супротно: $S \vdash \triangle$

$\varphi_0, \dots, \varphi_n \in S \Rightarrow \varphi_0, \dots, \varphi_n \vdash \triangle$

$\varphi_0 \in S_{i_0}, \dots, \varphi_n \in S_{i_n} \quad (S_{i_k} \in \mathcal{L})$

$\Rightarrow \varphi_0, \dots, \varphi_n \in S_i$, где је S_i највећи од S_{i_k}

$\Rightarrow S_i \vdash \triangle$ #

Дакле, $S_0 \in X$, па је горња граница за $\mathcal{L}$.

Према Зорновој леми, постоји максималан S у X.

$\rightarrow$

S је комплетно.

- претпоставимо:

$S \nvdash \varphi$

$\rightarrow S, \neg\varphi$ је непротивречно

$\rightarrow S \cup \{\neg\varphi\}$ је у X.

$S \subseteq S \cup \{\neg\varphi\}$

S је максималан.

$\rightarrow S \cup \{\neg\varphi\} \subseteq S$

$\rightarrow \neg\varphi \in S$

$\rightarrow S \vdash \neg\varphi$

$\square$

Последица 1 (Т. потпуности за P)

1° $T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$

2° Ако је T синтаксно непротивречна, онда T има модел.

Последица 2

- теорема компактности за P

Пример

Сваки парцијално уређен скуп се може проширити до линеарно уређеног скупа.

D. Произвољан планаран граф се може обојити у 4 боје.

Значи и да се сваки скуп може линеарно уредити.

17.11.1992.

Нека је $\mathcal{X}$ фам. непразних скупова.
<u>Ф-ја избора</u> за $\mathcal{X}$ је свака ф-ја f, $\operatorname{dom} f = \mathcal{X}$, тако да за све $X \in \mathcal{X}$
$$f(X) \in X$$

АКСИОМА ИЗБОРА (AC-1)
Свака непразна фамилија непразних скупова има ф-ју избора.

Ова аксиома је независна од Зермело-Френкелове аксиоматике.

ZF $\nvdash$ AC (доказао Коен)
ZF $\nvdash$ $\neg$AC (Гедел)

ZFC = ZF+AC
↳ Одлично се ово претпоставља (у анализи, топологији)

ZF+$\neg$AC ⟶ доказује се парадокс Банах-Тарског: лопту је могуће раставити на коначно много делова који склопљено на други начин и добијено две лопте истих димензија као полазна.

-реформулација (Расел, AC-2):
$$X_i \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$$

Нека је $\mathcal{X}$ дисј. фамилија непразних скупова. <u>Трансверзала</u> за $\mathcal{X}$ је скуп T тако да је, за све $X \in \mathcal{X}$, $|T \cap X| = 1$.

АКСИОМА ИЗБОРА (AC-3)
Свака дисј. фам. непразних скупова има трансверзалу.

→

AC1 $\Leftrightarrow$ AC3

$\triangle$

$\Rightarrow$) f – ф-ја избора за $\mathcal{X}$

$\{f(X) \mid X \in \mathcal{X}\}$ – је трансверзала

$\Leftarrow$) $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$

Правимо фам. дисј. скупова:

$Y_i = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$.

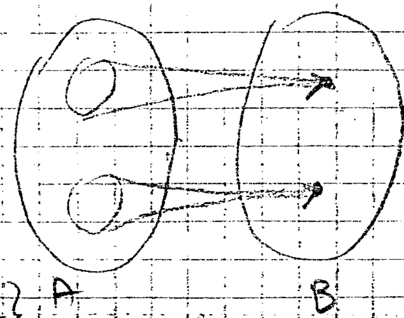
Трансверзалом ове фамилије је одређена ф-ја избора. $\square$

ТЕОРЕМА О ИНВЕРЗНОЈ ГРАНИ

$f : A \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} B$ $\quad f^{-1} : B \xrightarrow[\text{НА}]{1-1} A$

$f \circ f^{-1} = id_B \quad f^{-1} \circ f = id_A$

$f : A \xrightarrow{\text{НА}} B$



$\{f^{-1}(b) \mid b \in B\}$

$f^{-1}(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}$

$f^{-1}(b_1) \cap f^{-1}(b_2) = \emptyset \quad (b_1 \neq b_2)$

$f^{-1}(b) \neq \emptyset \quad (b \in B)$

$\bigcup_{b \in B} f^{-1}(b) = A$

Дакле, овим смо одредили једно разбијање скупа A.

Нека је T трансверзала за фамилију $\{f^{-1}(b) \mid b \in B\}$.

$T = \{a_b \mid b \in B\}$

$T \cap f^{-1}(b) = \{a_b\}$

$g : B \longrightarrow A \quad , \; g : b \longmapsto a_b$

$f \circ g = id_B$

g се назива <u>инверзна грана</u>.

Теорема о инверзној грани је еквивалентна аксиоми избора.

$\triangle$

$\Rightarrow$) $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$

$\Longrightarrow$

$f: \bigcup X_i \to I$

$f(x) = i \quad (x \in X_i,\ i \in I)$

Инверзна грана ће бити ф-ја избора. □

ЗОРНОВА ЛЕМА

$(X, \leq)$ - уређен скуп

$x \leq x$

$x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$

$x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$x \leq y \lor y \leq x$

3λ1 Нека сваки ланац у $(X, \leq)$ има горњу границу. Тада у $(X, \leq)$ постоји максималан елемент.

3λ2 Сваки уређен скуп има максималан ланац.

(Зорн, Куратовски, Хаусдорф)

3λ1 ⇒ 3λ2

△ $\mathcal{L}$ - скуп свих ланаца у $(X, \leq)$

$(\mathcal{L}, \subseteq)$ - уређен скуп

L - ланац у $(\mathcal{L}, \subseteq)$

$\mathbb{L} = \bigcup L$ - ланац

⌈Унија ланца ланаца је ланац.⌋

$\mathbb{L}$ је горња граница за L.

Дакле, у $(\mathcal{L}, \subseteq)$ су испуњени услови Зорнове леме, па постоји максималан ланац. □

3λ2 ⇒ 3λ1

△ Нека у $(X, \leq)$ сваки ланац има горњу границу, и нека је L максималан ланац.

a - горња граница од L

a је max елемент. □

Аксиома избора је еквивалентна Зорновој леми.

Δ

$\Leftarrow$) $\mathcal{X}$ – фам. скупова (непразних)

f је парцијална ф-ја избора за $\mathcal{X}$ ако је f ф-ја избора за $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ (није дам свуда дефини-сана).

$\mathcal{F}$ – скуп свих парц. ф-ја избора за $\mathcal{X}$

$(\mathcal{F}, \subseteq)$ $\ulcorner f_1 \subseteq f_2$ ако је f_1 рестрикција од f_2 $\lrcorner$

Нека је $\mathcal{L}$ максималан ланац у $(\mathcal{F}, \subseteq)$.

$f = \bigcup \mathcal{L}$ $\ulcorner$ ф-је посматрано као скупове уређених парова $\lrcorner$

Унија ланца ф-ја је функција.

f је функција избора за $\mathcal{X}$.

$\ulcorner f(X) \in X \quad (X \in \mathcal{X})$

$f(X)$ је деф. за све $X \in \mathcal{X}$.

Ово важи јер је f унија максималног ланца ф-ја избора. $\lrcorner$

$\Rightarrow$)

$(X, \leq)$ – уређен скуп

f – ф-ја избора за $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$\mathcal{L}$ – скуп ланаца у $(X, \leq)$

$(\mathcal{L}, \subseteq)$ – уређен скуп

За $L \in \mathcal{L}$, узећемо да је

$L^* = \{x \in X \mid L \cup \{x\} \text{ је ланац}\}$.

$L' = L \cup \{f(L^* \setminus L)\}$, $L^* \setminus L \neq \emptyset$

$L^* \setminus L = \emptyset$ акко је L максималан ланац.

$L' = L$, ако је L максималан.

$' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 24.11.1992.

$Z \subseteq \mathcal{L}$ је <u>индуктивна фамилија</u> ако важи:

1° $\emptyset \in Z$

2° $L \in Z \Rightarrow L' \in Z$

3° $\mathbb{L}$ - ланац у $Z \Rightarrow \bigcup \mathbb{L} \in Z$.

Својства 1°-3° су одржана у односу на пресек. То значи, ако сви чланови фамилије $\{Z_i \mid i \in I\}$ имају та својства, да их тада има и њихов пресек.

$\triangle$ 1° $\emptyset \in Z_i \Rightarrow \emptyset \in \bigcap Z_i$

2° $L \in \bigcap Z_i \Rightarrow L \in Z_i \quad (i \in I)$

$\Rightarrow L' \in Z_i \quad (i \in I)$

$\Rightarrow L' \in \bigcap Z_i$

3° $\mathbb{L}$ - ланац у $\bigcap Z_i$

$\Rightarrow \mathbb{L} \subseteq Z_i \quad (i \in I)$

$\Rightarrow \mathbb{L}$ је ланац у $Z_i \quad (i \in I)$

$\Rightarrow \bigcup \mathbb{L} \in Z_i \quad (i \in I)$

$\Rightarrow \bigcup \mathbb{L} \in \bigcap Z_i$ □□

Нека је $Z_0 = \bigcap \{ Z \subseteq \mathcal{L} \mid Z$ је инд. фам.$\}$. Z_0 је, у ствари, најмања индуктивна фамилија у $\mathcal{L}$.

<u>Z_0 је ланац у $\mathcal{L}$.</u>

$\triangle$ $Z_1 = \{ L \in Z_0 \mid L$ је упоредив са свим елементима из $Z_0 \}$.

<u>Z_1 је инд. фамилија.</u>

$\triangle_1$ 1° $\emptyset \in Z_1$, јер је $\emptyset$ упоредив са свима

2° $L \in Z_1$

$Z_2 = \{ G \in Z_0 \mid G$ је упоредив са $L' \}$

<u>Z_2 је инд. фамилија.</u>

$\triangle_2$ 1° $\emptyset \in Z_2$

2° $G \in Z_2$

$\Rightarrow$

Пошто је L упоредив са свим елементима из Z_0, упоредив је и са G.

$L \subseteq G \Rightarrow L' \subseteq G' \Rightarrow G' \in Z_2$

$G \subseteq L \Rightarrow G' \subseteq L' \Rightarrow G' \in Z_2$

3° $\mathbb{L}$ - ланац у Z_2

$H = \bigcup \mathbb{L}$

Сви елементи из $\mathbb{L}$ су упоредиви са L'.

$L' \subseteq G$, за неко $G \in \mathbb{L} \Rightarrow L' \subseteq H$

$G \subseteq L'$, за све $G \in \mathbb{L} \Rightarrow H \subseteq L'$

$\Rightarrow H \in Z_2$

$\boxed{2}$

Дакле, Z_2 је инд. фамилија у $\mathcal{L}$, па је $Z_0 \subseteq Z_2$

$Z_2 \subseteq Z_0 \Rightarrow Z_2 = Z_0$

Према томе, сви елементи из Z_0 су упоредиви са L', па $L' \in Z_1$.

3° $\mathbb{L}$ - ланац у Z_1

$H = \bigcup \mathbb{L}$

$L \in Z_0$

$L \subseteq G$, за неко $G \in \mathbb{L} \Rightarrow L \subseteq H$

$G \subseteq L$, за све $G \in \mathbb{L} \Rightarrow H \subseteq L$

Дакле, H је упоредив за свим $L \in Z_0$, па $H \in Z_1$.

$\boxed{1}$

Дакле, Z_1 је инд. фамилија, па $Z_0 \subseteq Z_1$

$Z_1 \subseteq Z_0 \Rightarrow Z_1 = Z_0$

Пошто је Z_1 ланац, то је и Z_0 ланац.

$\boxed{0}$

$M = \bigcup Z_0$ - ланац у $\mathcal{L}$

$M \in Z_0$, јер је Z_0 индуктивна фам., па је затв. за унију ланаца →

Одатле следи и да је M нај-већи ланац у Z_0.

$M \in Z_0 \Rightarrow M' \in Z_0$ $\quad 2^\circ$

$M \subseteq M'$, $M' \subseteq M$ (јер је M max)

$\Rightarrow M = M'$

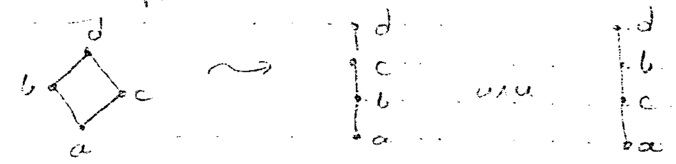
$\Rightarrow M$ је максималан ланац. $\square$

5.12.1992.

Сваки парцијално уређен скуп $(P, \leq)$ може се проширити до линеарно уређеног скупа.

(Тј. може се деф. линеарно уређење $(P, \leq')$ тако да је $\leq \subseteq \leq'$.)

Пример



Последица

Сваки скуп се може линеарно уредити.

(Као почетно уређење узимамо (P, Δ_P).)

$\leq$: $x \leq x$; $x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y$; $x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$ $\quad\big|\quad x <'' y \Leftrightarrow x \leq y \land x \neq y$

$<$: $\neg\, x < x$; $x < y \land y < z \Rightarrow x < z$ $\quad\big|\quad x \leq' y \Leftrightarrow x < y \lor x = y$

Строго и обично уређење су, на неки начин, еквивалентни.
То значи да су категорије строго и обично уређених скупова изоморфне.

D. $\leq$ и $<$ су еквивалентни,
тј. $<'' = <$, $\leq' = \leq$.

Строго линеарно уређен скуп задовољава трихотомију:
$$x<y \vee x=y \vee y<x.$$

$ZF \vdash (AC \rightarrow$ став компактности$)$

$ZFC \vdash$ став компактности.

$ZF +$ став комп. $\nvdash AC$

Дакле, теорема компактности је слабија од AC у ZF. $\dashv$

ЛЕМА Сваки коначан уређен скуп може се линеарно уредити.

$\triangle$

– индукција по броју елемената скупа

(i) $|P|=1$ – очигледно

(ii) $|P|=n+1$

$P=\{a_1,\dots,a_{n+1}\}$

Лако се доказује да у коначном скупу имамо максималан елемент. Нека је то a_{n+1}.

$(\{a_1,\dots,a_n\}, \leq)$ се може допунити до линеарног уређења $(\{a_1,\dots,a_n\}, \leq')$.

$\leq_p$ је проширење од $\leq'$:
$$a_i \leq a_{n+1} \quad (1\leq i\leq n+1).$$ $\blacksquare$

(T) Сваки скуп се може проширити до линеарног уређења.

$\triangle$ $(P, \leq_P)$ – уређење

C – скуп исказних слова

$C = \{ p_{ab} \mid a, b \in P \}$

p_{ab} је „код" за $a < b$.

Аксиоме теорије T у C:

1° $\neg p_{aa}$ $(a \in P)$

2° $p_{ab} \Rightarrow \neg p_{ba}$ $(a, b \in P)$

3° $p_{ab} \wedge p_{bc} \Rightarrow p_{ac}$ $(a, b, c \in P)$

4° $p_{ab} \vee p_{ba}$ $(a, b \in P, a \neq b)$

5° p_{ab} $(a, b \in P, a <_p b)$.

p_{aa}

$p_{ab} \Rightarrow \neg p_{ba}, a \neq b$

$p_{ab} \wedge p_{bc} \Rightarrow p_{ac}$

$p_{ab} \vee p_{ba}$

$p_{ab}, a \leq b$

Сваки коначан подскуп од T има модел (тј. непротивречан је)

$\mathcal{S} \subseteq T$ – коначно

Нека је $\mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S}$ тако садржи 1°–4°.

Нека се $a_1, \ldots, a_n \in P$ јављају у $\mathcal{S}$ као индекси.

Према леми, уређење $(\{a_1, \ldots, a_n\}, <_p)$ може се проширити до линеарног уређења $(\{a_1, \ldots, a_n\}, <')$

α – валуација за C:

$$\alpha(p_{ab}) = \begin{cases} 1, & a <' b \\ 0, & \neg a <' b \end{cases}$$

α је модел за $\mathcal{S}$.

(Провери 1°–5°)

Према теореми компактности, T има модел, тј. валуацију α.

$<'_p$ на P дефинишемо:

$a <'_p b$ акко $\alpha(p_{ab}) = 1$.

$(P, <'_p)$ је линеарно уређење које садржи $<_p$ (То треба испроверавати!)

Абелова група без торзије је она у којој су сви ел. сем неутралног беск. реда.

D. A - Аб. група без торзије. Ако се свака коначно генерисана подгрупа од A може линеарно уредити, онда се и A може линеарно уредити. $-\Gamma\; x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

D. Нека је $(P, \leq)$ произвољан пребројив уређен скуп. Док. да за скуп $\mathcal{P}$ свих уређења која проширују P важи континуум хипотеза, тј. $|\mathcal{P}| \leq \aleph_0$ или $|\mathcal{P}| = 2^{\aleph_0}$.

{ УПУТ. Повезати са топологијом, тј. да се $\mathcal{P}$ може представити као затворен подскуп Канторовог простора $D^{\mathbb{N}}$. $2^{\mathbb{N}} \cong 2^{P}$ P-скуп иск. слова }

Неколико напомена о исказном рачуну

2. Pullen čehti bye za besk. grupove

1. Клинијев систем је систем аксиома за исказни рачун.

- примитивни симболи: $\Rightarrow, \neg, \vee, \wedge$
- аксиоме:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

$A \wedge B \Rightarrow A \qquad A \wedge B \Rightarrow B$

$A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$

$A \Rightarrow A \vee B \qquad B \Rightarrow A \vee B$

$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$

$\neg\neg A \Rightarrow A$

Када се искључи последња аксиома, добијамо интуиционистичку логику. $\rightarrow$

Дакле, свака теорема интуиционистичке математике јесте и теорема класичне математике, али не важи обратно.

- правило извођења: модус поненс

2. Став потпуности за овај систем.

Класична логика је максимална у том смислу, ако јој додамо било коју схема-аксиому која није теорема, добијамо противречан систем (тј. свака формула иск. рачуна постаје теорема).

2. О релевантности исказног рачуна.

(T) (интерполације)
Нека је $\vdash A \Rightarrow B$. Тада постоји C тако да је

$$\vdash A \Rightarrow C \quad и \quad \vdash C \Rightarrow B,$$

и $\quad I(C) \subseteq I(A) \cap I(B)$,

где је $I(X)$ скуп исказних слова формуле X.

$\triangle$ Користићемо дисјунктивну нормалну форму.

$A = A(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m)$

$B = B(q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_k)$

$$C = \bigvee_{\substack{\alpha_j \in \{0,1\} \\ 1 \leq j \leq n}} A(\alpha_1, \dots, \alpha_n, q_1, \dots, q_m)$$

$\vdash A \Rightarrow C$

Доказаћемо да је $A \Rightarrow C$ таутологија.

$A(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_m)=1$

$\hookrightarrow \bigvee_{\substack{\alpha_i\in\{0,1\}\\ 1\le i\le n}} A(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\mu_1,\dots,\mu_m)=1$

$\underline{\vdash C \Rightarrow B}$

α - валуација

$C(\lambda_1,\dots,\lambda_m)=1 \quad (C[\alpha]=1)$

$B[\lambda_1,\dots,\lambda_m,\sigma_1,\dots,\sigma_k)=0 \quad (B[\alpha]=0)$

Пошто је $A\Rightarrow B$ таутологија, мора бити и $A[\alpha]=0$.

(То важи за сваку валуацију α за коју је $B[\alpha]=0$.)

То значи да је

$A(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=0$,

за све $\alpha_i\in\{0,1\}$, $1\le i\le n$,

па је $C[\alpha]=0$. #

□

Т (релевантност)

Нека је $\vdash A\Rightarrow B$ и није A контрадикција нити је B таутологија, тада постоји заједничко исказно слово за A и B.

△

- постоји C:

$\vdash A\Rightarrow C \quad \vdash C\Rightarrow B$

$I(C)\subseteq I(A)\cap I(B)$

Ако је $I(A)\cap I(B)=\emptyset$, онда $C\in\{\top,\bot\}$ па је, у првом случају, A таутологија, а у другом B контрадикција.

#

□

Булове алгебре

8.12.1992.

$\mathbb{B} = (B, +, \cdot, ', \leq, 0, 1)$

- аксиоме:

$x+(y+z) = (x+y)+z \qquad x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y) z$

$x+y = y+x \qquad x\cdot y = y\cdot x$

$x+0 = x \qquad x\cdot 1 = x$

$x+x' = 1 \qquad x\cdot x' = 0$

$x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z) \qquad x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$

$x = x\vee 0 = x\vee(x\wedge x') = (x\vee x)\wedge(x\vee x') = (x\vee x)\wedge 1 = x\vee x$

$\Rightarrow \boxed{x = x\vee x,\ x = x\wedge x}$

СТпВ (дуалност)

Ако је $\varphi(+,\cdot,',0,1)$ теорема Булових алгебри, онда је и $\varphi(\cdot,+,',1,0)$ теорема Булових алгебри.

$\triangle$

1° аксиоме су дуалне, и правила извођења чувају дуалност.

2° успостављамо изоморфизам $x \mapsto x'$ између $(B,+,\cdot,',0,1)$ и $(B,\cdot,+,',1,0)$.

- аксиома за неједнакост:

$x \leq y \Leftrightarrow x = x\cdot y$

$x\leq x,\ x = x\wedge x$

$x\leq y,\ y\leq x \Rightarrow x=y$: $x = x\wedge y = y\wedge x = y$

$x\leq y,\ y\leq z \Rightarrow x\leq z$: $x = x\wedge y,\ y = y\wedge z$, $x = x\wedge(y\wedge z) = x\wedge z$

Дуално, важи и $x \geq y \Leftrightarrow x+y$.

Овај скуп аксиома за БА није минималан. Булову алгебру можемо задати и као дистрибутивну мрежу са комплементацијом.

D. $\mathbb{M}$ distributivna mreža. Tada postoji BA $\mathbb{B}$ t.d. $\mathbb{M}\subseteq\mathbb{B}$ i $\mathbb{B} \xrightarrow{1-1} \mathbb{B}'$, $\mathbb{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{B}'$ za sva $\mathbb{B}'$ BA.

Примери

1. $2 = (2, +, \cdot, ', 0, 1)$ исказна алгебра. Важи све што смо доказали за иск. рачун.

(T) Класа Булових алгебри је алгебарски варијетет.

2. 2^n је такође Булова алгебра.

$2^n = (2^n, +, \cdot, ', 0, 1)$

3. $\mathbb{P}(X) = (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$

$|X| = n \Rightarrow \mathbb{P}(X) \cong 2^n$

– општије: $\mathbb{P}(X) \cong 2^X$

4. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{J})$ – тополошки простор

$B(\mathcal{X})$ – Булова алгебра
отворено-затворених скупова

$B(\mathbb{R}) = 2$

$B(\mathcal{X}_D) = \mathbb{P}(X)$ (дискретна топологија)

3. <u>Линденбаумова алгебра исказног рачуна</u>

P – скуп исказних слова

$\varphi, \psi \in For\,P$

$\varphi \sim \psi$ акко $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Leftrightarrow \psi$

Према ставу потпуности,

$\varphi \sim \psi$ акко $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

$\sim$ је рел. еквиваленције скупа For P.

$\triangle$

(Р) $\varphi \sim \varphi$, јер $\vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi$

(С) $\varphi \sim \psi \rightarrow \psi \sim \varphi$

$\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi \rightarrow \vdash \psi \Leftrightarrow \varphi$

(Тр) $\varphi \sim \psi,\ \psi \sim \theta \rightarrow \varphi \sim \theta$

$\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi,\ \vdash \psi \Leftrightarrow \theta \rightarrow \vdash \varphi \Leftrightarrow \theta$ $\square$

$\Omega_P = For\,P/_\sim$

$\Omega_P = \{[\varphi] \mid \varphi \in For\,P\}$

$\ulcorner [\varphi]$ – класа екв. од $\varphi \lrcorner$

$\sim$ је сагласно са логичким везника у следећем смислу:

$\varphi_1 \sim \psi_1,\ \varphi_2 \sim \psi_2$ онда

$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \sim \psi_1 \wedge \psi_2 \qquad \varphi_1 \vee \varphi_2 \sim \psi_1 \vee \psi_2$

$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \sim \psi_1 \Rightarrow \psi_2 \qquad \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \sim \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$

$\neg \varphi_1 \sim \neg \varphi_2$. $\ulcorner \sim$ је конгруенција $\lrcorner$ $\rightarrow$

Δ $\varphi_1 \sim \psi_1 \quad \varphi_2 \sim \psi_2$

$\models \varphi_1 \Leftrightarrow \psi_1 \quad \models \varphi_2 \Leftrightarrow \psi_2$

- таутологија:

$(a \Leftrightarrow b) \wedge (c \Leftrightarrow d) \Rightarrow (a \wedge c \Leftrightarrow b \wedge d)$

Да је ово заиста таутологија, можемо проверити разним начинима
- таблицом
- таблоом
- директним доказивањем итд. □

$\Omega_P = (\Omega_P, +, \cdot, ', 0, 1)$

$[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi]$

$[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$

$[\varphi]' = [\neg \varphi]$

$0 = [p \wedge \neg p]$

$1 = [p \vee \neg p]$

Ω_P је добро дефинисана алгебра.

Ω_P је Булова алгебра.

Δ $[\varphi] + [\psi] = [\psi] + [\varphi]$

$\Leftrightarrow [\varphi \vee \psi] = [\psi \vee \varphi]$

$\Leftrightarrow \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$

$\Leftrightarrow \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$

Остали закони се доказују слично. □

- ово је Линденбаумова алгебра иск. рачуна

Ако је P бесконачан скуп, онда је и Ω_P бесконачан.

Δ

$p, q \in P, \ p \neq q$

$\Rightarrow [p] \neq [q]$, јер $\not\models p \Leftrightarrow q$ □

П.3.

Ω_P је густ скуп у односу на уређење, тј. ако је

$[\varphi] < [\psi]$, тада постоји θ:

$[\varphi] < [\theta] < [\psi]$.

Δ (делимично)

$[\varphi]=0$

$\theta=\psi\wedge p$

p – иск. слово које се не јавља у ψ □

Д.3. $\mathcal{X}=(X,J)$ – топ. простор

$S\subseteq X$ – регуларно отв. скуп у X

$(\overset{\circ}{\overline{S}}=S)$

$\mathcal{R}(\mathcal{X})=(R(\mathcal{X}),\cap,\vee,{}',\emptyset,X)$

$A\vee B=\overset{\circ}{\overline{A\cup B}}$ $\quad A'=\cancel{\overset{\circ}{\overline{X\setminus A}}}$, $A'=\overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}}$

$R(\mathcal{X})$ – скуп регуларно отв. скупова

Док. да је $\mathcal{R}(\mathcal{X})$ Булова алгебра

Д.3. Да ли се $(\mathbb{R},+,0)^I$ може лин. уредити?

Д.3. Док. закон апсорпције

$x\vee(x\wedge y)=x \quad x\wedge(x\vee y)=x$

и $x\vee y=\sup\{x,y\}$.

15.12.1992.

Може се доказати и да је Ω_P Булова алгебра користећи само Лукашијевичев рачун.

Тада се одатле може доказати и став потпуности. То је често једини начин да се потпуност докаже у другим системима (интуиционизам, модалне логике, итд.).

(Т) У Буловој алгебри важи:

а) $x\vee y=1,\ x\wedge y=0 \Rightarrow y=x'$

Δ

$y=y\vee 0=y\vee(x\wedge x')=(y\vee x)\wedge(y\vee x')=$

$=(x\vee y)\wedge(y\vee x')=1\wedge(y\vee x')=y\vee x'$

слично: $x'=y\vee x'$

$\Rightarrow y=x'$ □

$x'=x'\vee 0=x'\vee(x\wedge y)=(x'\vee x)\wedge(x'\vee y)=1\wedge y=y.$

б) $\leq$ је уређење

в) $x\wedge y=\inf\{x,y\}$, $\quad x\vee y=\sup\{x,y\}$

г) $x\leq y \iff y=x\vee y$, $\quad x\vee y=\sup\{x,y\}$

$\triangle$ $x \le y \overset{\text{деф.}}{\Leftrightarrow} x = x \wedge y$

б) (Р) $x \le y \Leftrightarrow x = x \wedge y$

$x \le x \Leftrightarrow x = x \wedge x$

$x \wedge x = (x \wedge x) \vee (x \wedge x') = x \wedge (x \vee x') =$

$= x \wedge 1 = x$

(С) $x \le y$, $y \le x$

$\Leftrightarrow x = x \wedge y$, $y = y \wedge x$

$\Rightarrow x = y$

(Тр) $x \le y$, $y \le z$

$\Leftrightarrow x = x \wedge y$, $y = y \wedge z$

$\Rightarrow x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$

$\Rightarrow x \le z$

в) $(x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$

$\Rightarrow x \wedge y \le x$, $x \wedge y \le y$

пр $z \le x$, $z \le y$

$z = z \wedge x \qquad z = z \wedge y$

$z = (z \wedge x) \wedge (z \wedge y) = z \wedge (x \wedge y)$

$\Rightarrow z \le x \wedge y \quad / \Rightarrow x \wedge y = \inf\{x, y\}$

г) $x \le y$

$\Leftrightarrow x = x \wedge y$

$x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$

$\square$

- Де Морганови обрасци:

а) $x'' = x$

б) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

в) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

$\triangle$ $x' \vee x = 1$, $x' \wedge x = 0 \Rightarrow x = x''$

а) $x' \vee x'' = 1 \quad x' \wedge x'' = 0 \Rightarrow x = x''$

б) $(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = 0$

$(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = 1 \Rightarrow x' \wedge y' = (x \vee y)'$

в) - слично

$\square$

ЛЕМА (репрезентација терма)

Ако t на какав буловски терм,

тада: $t(x, Y) = t(0, Y)x' + t(1, Y)x$.

Д.3. Док. лему и следећу теорему. $\rightarrow$

(Т) Ако је $t(x_1,\dots,x_n)$ било какав буловски терм, тада је:

$$t(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\alpha\in 2^n} t(\alpha)X^\alpha .$$

Последице

1. $t(X,Y)=\sum_{\alpha\in 2^n} t(\alpha,Y)X^\alpha$

2. Теорема о репрезентацији важи и у конкретној алгебри – за терме у којима се појављују и константе које припадају тој Б.А. (а ~~не~~ само $0,1$).

3. t – буловски терм, $\alpha\in 2^n$

$BA\vdash t(\alpha)=0$ или $BA\vdash t(\alpha)=1$

(Доказује се индукцијом по сложености терма, користећи таблице

$\vee$	0	1
0		
1		

...) →

За сваки буловски терм $t(x_1,\dots,x_n)$ постоји $\Gamma\subseteq 2^n$ тако да је

$$t(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\alpha\in\Gamma} X^\alpha .$$

$$\Gamma=\{\alpha\in 2^n \mid t(\alpha)=1\}$$

4. Ако је $t(X,a_1,\dots,a_n)$ терм над Б.А. $\mathbb{B}$ ($a_1,\dots,a_n\in\mathbb{B}$ – константе), тада постоји $\Gamma\subseteq B^n$ тако да је

$$t=\sum_{\alpha\in\Gamma} b_\alpha X^\alpha,\quad b_\alpha=t(\alpha,a_1,\dots,a_n).$$

(?)

(Т) Свака коначно генерисана Б.А. је коначна.

$\triangle$

$\mathbb{B}$ – генерисано са $b_1,\dots,b_n$

$$\mathbb{B}=\{t^{\mathbb{B}}(b_1,\dots,b_n)\mid t\in Term_{BA}\}$$

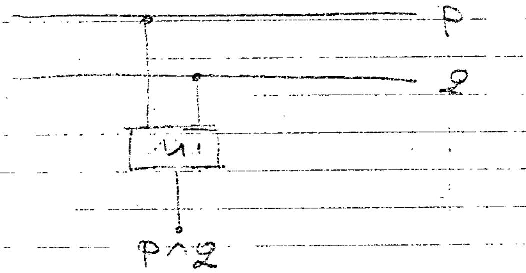
$b\in\mathbb{B}\Rightarrow b=t^{\mathbb{B}}(b_1,\dots,b_n)$ →

$b = \sum_{\alpha \in \Gamma} b_1^{\alpha_1} \cdots b_n^{\alpha_n}, \quad \Gamma \subseteq 2^n$

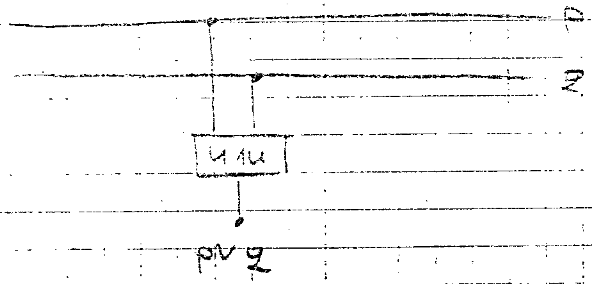
$\Rightarrow |B| \leq 2^{2^n}$ (има највише елемената колико има скупова у 2^n). □

- логичко коло

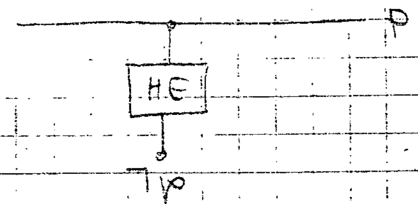
$p \wedge q$



$p \vee q$

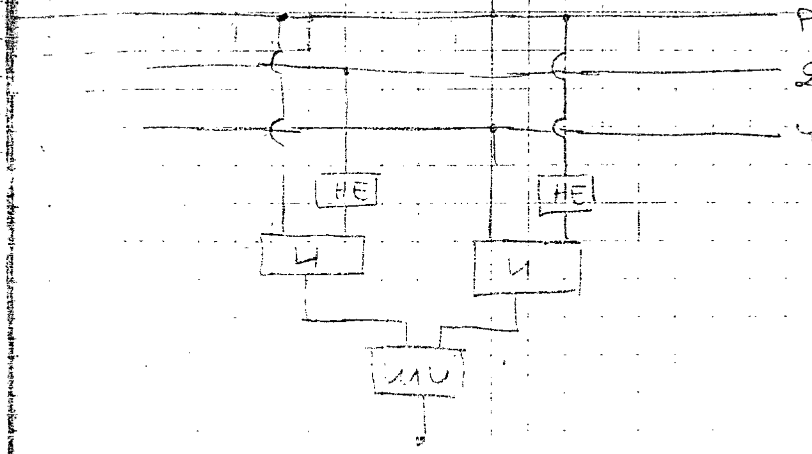


$\neg p$

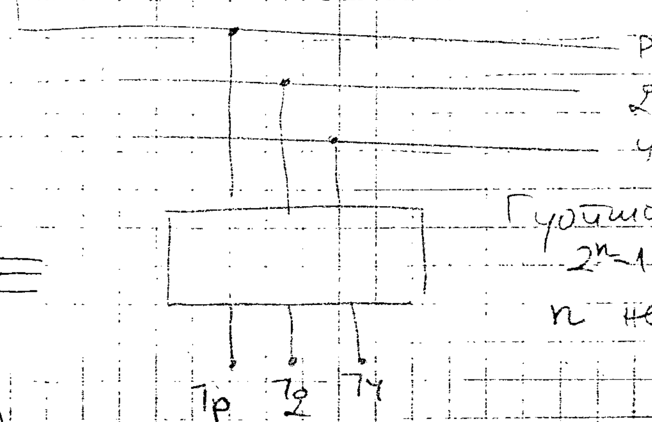


Произвољно логичко коло је дефинисано индуктивно: (коло које одговара произвољном Буловом терму).

$(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p)$

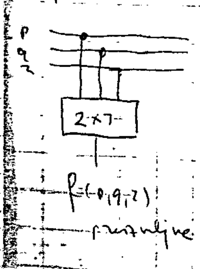


Д.3. Дате су пром. p, q, r. Направити логичко коло са највише два НЕ-елемента тако да се добије:



Уопштење: 2^n-1 пром., n негација ⌋

Напомена:



22.12.1992.

B – Б. алгебра, $a \in B$

$B_a = \{x \in B \mid x \le a\}$

$(B_a, +, \cdot, {}^{'a}, 0, a)$

$x^{'a} = x' \cdot a$

ЛЕМА 1 B_a је Булова алгебра

$\triangle$ – лако $\square$

ЛЕМА 2 Нека је $a \in B$, $a \neq 0, a \neq 1$. Тада је $B \cong B_a \times B_{a'}$

$\triangle$

$(x, y) \longmapsto x + y$ – изоморфизам

– све се лако докаже $\square$

(Т) Нека је B коначна Б. алгебра. Тада је $B \cong 2^n$, за неко $n \in \mathbb{N}$.

$\triangle$

– индукција по броју елемената у B

$a \in B$ $B_a, B_{a'}$ имају мање елемената

$\Rightarrow$ $B_a \cong 2^m$, $B_{a'} \cong 2^n$

$\Rightarrow$ $B \cong 2^m \times 2^n \cong 2^{m+n}$ $\square$

Последица

Ако неки идентитет $u = v$ важи у двочланој Буловој алгебри, онда важи у свим Буловим алгебрама.

$\triangle$ $2 \models u = v$ $\Rightarrow$ $2^n \models u = v$,

јер се идентитети преносе на производе структура.

$\Rightarrow$ $u = v$ важи у свим коначним Б. А., па и у свим коначно генерисаним Б. А. (јер су оне коначне)

B – произвољна Б. А.

$u = u(x_1, \dots, x_n)$ $v = v(x_1, \dots, x_n)$

$a_1, \dots, a_n \in B$

Нека је $A \le B$ генерисано са $a_1, \dots, a_n$.

A је коначна Б. А., па је

$u^A(a_1, \dots, a_n) = v^A(a_1, \dots, a_n)$,

јер $A \models u = v$.

$\rightarrow$

$u^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_n)=u^{\mathbb{B}}(a_1,\dots,a_n)$

$v^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_n)=v^{\mathbb{B}}(a_1,\dots,a_n)$, јер $\mathbb{A}\leq\mathbb{B}$

$\overset{1^\circ, 2^\circ}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{B}\models u=v$ $\square$

Последице

1. Ако $u\leq v$ важи у двоел. Б.А., онда важи у свим Б.А.

$\triangle$ $u\leq v \iff u=u\cdot v$ $\square$

2. Скуповни идентитети се могу проверавати на двоелементној Б.А., јер је $(\mathcal{P}(S),\cup,\cap,{}^c,\emptyset,S)$ Булова алгебра. Слично важи и са инклузијом.

Слободне Булове алгебре

$\mathcal{M}$ - алгебарски варијетет

деф. Алгебра $\mathbb{B}\in\mathcal{M}$ је слободна алгебра са скупом $X\subseteq B$ слободних генератора акко за свако $\mathbb{A}\in\mathcal{M}$ и свако $f: X\to A$ постоји хомоморфизам $h: \mathbb{B}\to\mathbb{A}$ тако да је $f=h\circ i$ ($f\subseteq h$).

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[r, "h"] & \mathbb{A} \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

i - инклузија

- ознака: $\mathbb{B}=\langle X\rangle$

Т. Сваки нетривијалан алгебарски варијетет има слободну алгебру над сваким скупом X.

(Т) Нека је $\mathbb{B}$ Булова алгебра.
$X \subseteq \mathbb{B}$ је скуп слободних генератора за $\mathbb{B}$ акко за све различите $x_1, \dots, x_n \in X$: $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \neq 0$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0,1\})$.

Пример
Ω_P - Линденбаумова алгебра над $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$

$[\varphi] \in \Omega_P$ $\quad [\varphi] = t^{\Omega_P}([p_{i_1}], \dots, [p_{i_n}])$
↳ лако се докаже индукцијом
$\ulcorner [\varphi \to \psi] = [\varphi]' + [\psi] \lrcorner$

$X = \{[p]_{\equiv} \mid p \in P\}$

$p_1, \dots, p_n \in P$
$[p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}] \neq 0$,
јер $(p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n})'$ није таутологија

Следи да је Ω_P слободна алгебра са скупом генератора X.

△ $\Rightarrow$) $\mathbb{B}$ - слободна Булова алгебра над X
$x_1, \dots, x_n \in X$
$f: x_1 \mapsto p_1, \dots, x_n \mapsto p_n$ $\qquad f: X \to \Omega_P$

Постоји хомоморфизам $h: \mathbb{B} \to \Omega_P$.
$$h(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) = [p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}] \neq 0$$
$\Rightarrow x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \neq 0$

$\ulcorner$ Може и: $f: X \to 2$ $\quad x_1 \mapsto \alpha_1, \dots, x_n \mapsto \alpha_n$
$$h(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) = \alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_n^{\alpha_n} = 1 \neq 0$$
$\lrcorner$

$\Leftarrow$) $\mathbb{B}$ - Булова алгебра
$X \subseteq \mathbb{B}$ са дојстом недразлоћ дреска
$\mathbb{A}$ - произвољна Булова алгебра
$f: X \to \mathbb{A}$ - произвољно

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[r, dashed] & \mathbb{A} \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$X = \{ l_i \mid i \in I \}$

$a_i = f(l_i) \quad (i \in I)$

$x \in B$ – произвољно

$x = t^B(l_1, \dots, l_n)$, јер $B = \langle X \rangle$

$= \sum_{\alpha \in \Gamma} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n}$, $\Gamma \subseteq 2^n$

$l_1, \dots, l_n \in X$

– Мора бити: $h(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$

На овај начин ћемо и дефинисати h

<u>h је добро дефинисано:</u>

$h(x) \neq h(y) \Rightarrow x \neq y$

$h(x) \neq h(y)$

$x = \sum_{\alpha \in \Gamma_1} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n}$

$y = \sum_{\alpha \in \Gamma_2} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n}$

$\sum_{\alpha \in \Gamma_1} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} \neq \sum_{\alpha \in \Gamma_2} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$

$\Rightarrow \Gamma_1 \neq \Gamma_2$

Постоји, на пример, $\beta \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$.

$l_1^{\beta_1} \dots l_n^{\beta_n} \cdot \sum_{\alpha \in \Gamma_1} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n} = l_1^{\beta_1} \dots l_n^{\beta_n}$, јер $\beta \in \Gamma_1$

$l_1^{\beta_1} \dots l_n^{\beta_n} \sum_{\alpha \in \Gamma_2} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n} = 0$, $\beta \notin \Gamma_2$

$\Rightarrow x \neq y$

<u>h је хомоморфизам:</u>

$x = \sum_{\alpha \in \Gamma_1} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n}$

$y = \sum_{\alpha \in \Gamma_2} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n}$

$x + y = \sum_{\alpha \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n}$

$xy = \sum_{\alpha \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n}$

$x' = \sum_{\alpha \in 2^n \setminus \Gamma_1} l_1^{\alpha_1} \dots l_n^{\alpha_n}$

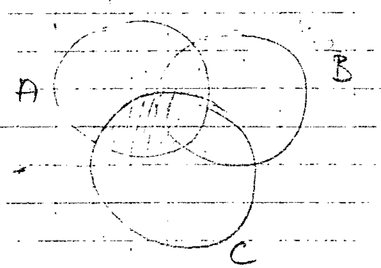
– Треба доказати да је ($\neg$) $\square$

$\square$ Ако је h хомоморф. за $+$ и $\cdot$, тада је и за $'$.

29.12.1992.

<u>Пример</u>

- Венови дијаграми



$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказивање скуповних идентитета помоћу слика је <u>нетачно</u>.

Ω - сл. б. алг. над X, $|X| \geq n$

$u(x_1,\dots,x_n)=v(x_1,\dots,x_n)$ - <u>Буловски идентитет</u>

За проверу идентитета у Б.А. $\mathbb{A}$ треба доказати:

$$u^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_n)=v^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_n),$$

за све $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{A}$.

ЛЕМА $\Omega \models u=v$ акко $u^{\Omega}(a_1,\dots,a_n)=v^{\Omega}(a_1,\dots,a_n)$, где $a_1,\dots,a_n \in X$.

$\triangle$ $\mathbb{B}$ - Б. алгебра

$b_1,\dots,b_n \in \mathbb{B}$ $\quad f: a_k \mapsto b_k$

$h: \Omega \to \mathbb{B}$ - хомоморф. који продужује f

$\Rightarrow u^{\mathbb{B}}(b_1,\dots,b_n)=v^{\mathbb{B}}(b_1,\dots,b_n)$

$\Rightarrow \mathbb{B} \models u=v$

Пошто је $\mathbb{B}$ произвољно, важи и $\Omega \models u=v$. $\square$

Према томе, довољно је <u>Буловски</u> идентитет проверити у Линденбаумовој алгебри Ω_P за $[p_1],\dots,[p_n]$, $p_1,\dots,p_n \in P$.

То значи да је бул. идентитет $u=v$ може и проверити тако што докажемо да је $u \Leftrightarrow v$ таутологија (где су Буловске операције замењене одговарајућим исказима).

Слично, могу се доказивати и скуповни идентитети, јер скупови чине Б. алгебру.

КОНАЧНЕ СЛОБОДНЕ БУЛОВЕ АЛГЕБРЕ

Ω_n - сл. алгебра над $\{x_1,\dots,x_n\}$

$|\Omega_n| \le 2^{2^n}$

Δ $\quad x\in\Omega_n \Rightarrow x=\sum_{\alpha\in\Gamma} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$

$\Gamma\subseteq 2^n \quad |P(2^n)| = 2^{2^n}$ $\square$

У сл. алгебри је, за $\Gamma_1\neq\Gamma_2$,

$$\sum_{\alpha\in\Gamma_1} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \neq \sum_{\alpha\in\Gamma_2} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

па је $|\Omega_n| = 2^{2^n}$.

$\Rightarrow \Omega_n \cong 2^{2^n}$

Ово важи, јер је $\mathbb{B}\cong 2^n$ за сваку коначну Б. ал. $\mathbb{B}$. ⊥

<u>Последица</u>

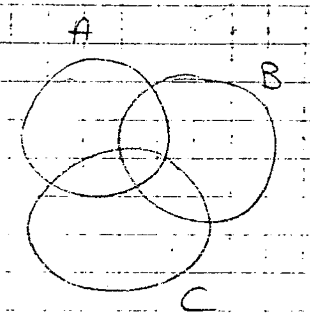
2^{2^n} је увек слободна Булова алгебра.

П. $\Omega_n \cong \Omega_{n-1}\times\Omega_{n-1}$

Даље, тачно знамо које су слободне Булове алгебре.

<u>Пример</u>

A, B, C - кругови

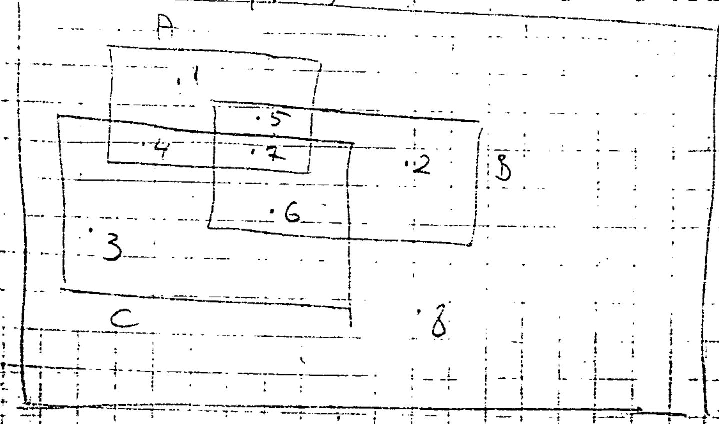


Г: $A^0 = A^c$
$A^1 = A$ ⊥

$A^\alpha\cap B^\beta\cap C^\gamma\neq\emptyset$, за све $\alpha,\beta,\gamma\in 2$

Следи да је Булова алгебра $\langle A,B,C\rangle$ слободна, па је сугласни идентитети довољно проверити само на A, B, C.

Г - мало одређеније:



D. За дато n ~~нађи~~ коначне скупове $S_1,\dots,S_n$, тако да алгебра $\langle S_1,\dots,S_n\rangle$ буде слободна.

ФИЛТЕРИ

B – Булова алгебра

деф. $\emptyset \neq F \subseteq B$ је филтер ако

$x,y\in F \Rightarrow x\cdot y\in F$

и $x\in F,\ y\in B,\ x\le y \Rightarrow y\in F$.

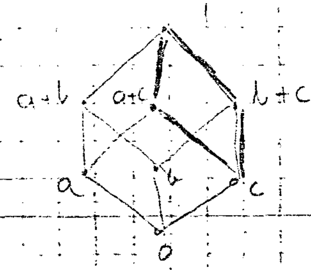
деф. Филтер F је прави ако $F\neq B$.

Филтер F је прави ако $0\notin F$.

деф. F је ултрафилтер ако је максималан прави филтер.

Примери

1.



$\{c, b+c, a+c, 1\}$ је филтер.

– то је и максималан филтер

2. B – Б. алгебра, $a\in B$

$F_a=\{x\in B \mid a\le x\}$ – филтер

$S\subseteq B$

$\mathcal{F}(S)=\{x\in B \mid x\ge s_1\cdots s_n,\ s_1,\dots,s_n\in S\}$

$\mathcal{F}(S)$ је филтер.

S генерише филтер $\mathcal{F}(S)$.

3. $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$

$S_n=\mathbb{N}\setminus\{n\}$ $(n\in\mathbb{N})$

$\mathcal{S}=\{S_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

$S_{n_1}\cap\dots\cap S_{n_2}=\mathbb{N}\setminus\{n_1,\dots,n_2\}$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ – Б. алгебра

$\mathcal{F}(\mathcal{S})$ је Фрешеов филтер.

(комплементи коначних скупова)

4. $\mathcal{L}(P)$ – Линденбаумова алгебра

T – теорија исказног рачуна над P

$F_T=\{[\varphi] \mid T\vDash\varphi\}$

1° F_J је филтер у $\mathcal{L}(P)$.

$\triangle$ $[\varphi], [\psi] \in F_J$

$\Rightarrow$ $J \vdash \varphi \quad J \vdash \psi$

$\Rightarrow$ $J \vdash \varphi \wedge \psi$

$\Rightarrow$ $[\varphi \wedge \psi] \in F_J$

$\Leftrightarrow$ $[\varphi][\psi] \in F_J$

$[\varphi] \in F_J \quad [\varphi] \leq [\psi]$

$\ulcorner [\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\varphi \Rightarrow \psi] = 1 \lrcorner$

$\Leftrightarrow$ $J \vdash \varphi, \; J \vdash \varphi \Rightarrow \psi$

$\Rightarrow$ $J \vdash \psi$

$\Leftrightarrow$ $[\psi] \in F_J$ $\square$

2° J је непротивречна теорија акко је F_J прави филтер.

$\triangle$

$\Rightarrow)$ $0 \in F_J \quad 0 = [p \wedge \neg p]$

$\Rightarrow J \vdash p \wedge \neg p$ #

$\Leftarrow)$ $0 \notin F_J \Rightarrow J \nvdash p \wedge \neg p$ $\square$

3° Сваки филтер у $\mathcal{L}(P)$ је F_J, за неку теорију J.

$\triangle$

S - филтер у $\mathcal{L}(P)$

$J = \{\varphi \mid [\varphi] \in S\}$

$S = F_J$

$\subseteq$: $[\varphi] \in S \Leftrightarrow \varphi \in J \Rightarrow J \vdash \varphi$

$\Rightarrow [\varphi] \in F_J$

$\supseteq$: $[\varphi] \in F_J \Rightarrow J \vdash \varphi$

$\urcorner$ постоје $\psi_1, \dots, \psi_n \in J$, тако да

$\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \varphi$

$\Leftrightarrow$ $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \vdash \varphi$

$\ulcorner$ $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \varphi$ акко $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \vdash \varphi$

$\triangle$ $\models (\psi_1 \Rightarrow (\psi_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (\psi_n \Rightarrow \varphi)))) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \Rightarrow \varphi)$ $\square$

$\Leftrightarrow$ $\vdash \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \Rightarrow \varphi$

$\Leftrightarrow$ $[\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n] \leq [\varphi]$ $\quad [\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n] \in S$

$\Rightarrow$ $[\varphi] \in S$, јер је S филтер $\square$

1° $F_{\mathcal{J}}$ је ултрафилтер у $\mathcal{L}(P)$ акко је $\mathcal{J}$ комплетна теорија.

Т Нека је F филтер Б.алг. $\mathbb{B}$. Следећи услови су еквивалентни:

(а) F је ултрафилтер

(б) $x+y\in F \longrightarrow x\in F$ или $y\in F$

(ц) $x\in F$ или $x'\in F$.

△

(а ⇒ б)

$x+y\in F$, $x\notin F$, $y\notin F$

$G=\mathcal{F}(F\cup\{x'\})$

$g\in G \Rightarrow g\geq f$ или $g\geq f\cdot x'$, за неко $f\in F$

$G=\{g\in \mathbb{B} \mid g\geq f$ или $g\geq f\cdot x'$, $f\in F\}$

$0\in G \Rightarrow f\cdot x'=0$, за неко $f\in F$

$\Leftrightarrow f\leq x$ $\quad [\, f\cdot x'=0 \to f'+x=1 \ /\cdot f \to fx=f \,]$

$\Rightarrow x\in F$ #

Даље, G је прави филтер, $G\supseteq F$ #

(б ⇒ ц)

$1\in F$, $x\in B$

$\Rightarrow x+x'\in F$

$\Rightarrow x\in F$ или $x'\in F$

(ц ⇒ а)

F није ултрафилтер.

$F\subsetneq G$, G - прави филтер

$x\in G\setminus F$

$x\notin F \Rightarrow x'\in F$

$\Rightarrow x'\in G$

$\Rightarrow x\cdot x'\in G$

$\Rightarrow 0\in G$ # □

Д. доказати 4°

12.1.1993.

Деф. Скуп $X \subseteq \mathbb{B}$ ($\mathbb{B}$ – Б. ал.) има својство коначног пресека акко

$$b_1, \dots, b_n \in X \Rightarrow b_1 \wedge \dots \wedge b_n \neq 0.$$

$F \subseteq \mathbb{B}$ је ултрафилтер акко

(а) F је прави филтер

(б) F је максималан филтер.

Т. Нека је $\mathbb{B}$ Б. алгебра, и $X \subseteq \mathbb{B}$ има својство коначног пресека. Тада постоји ултрафилтер $F \supseteq X$.

Δ $\mathcal{F} = \{H \subseteq \mathbb{B} \mid X \subseteq H,\ H\text{-прави филтер}\}$

1° За $\mathcal{F}$ су испуњени услови Зорнове леме.

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ – ланац

$H = \bigcup \mathcal{L}$

$X \subseteq H$ – очигледно

H је филтер

$x, y \in H$

$\rightarrow$

$\Rightarrow x \in H_1,\ y \in H_2$, $\underline{H_1, H_2 \in \mathcal{L}}$

$H_1 \subseteq H_2$

$\Rightarrow x, y \in H_2$

$\Rightarrow x \wedge y \in H_2$ (H_2 је филтер)

$\Rightarrow x \wedge y \in H$

$x \in H,\ x \leq y$

$\Rightarrow x \in H_1$, $H_1 \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow y \in H_1$ (H_1 је филтер)

$\Rightarrow y \in H$

<u>H је прави филтер</u>

$0 \in H \Rightarrow 0 \in H_1$ за неко $H_1 \in \mathcal{L}$ $\perp$

0° $\mathcal{F} \neq \emptyset$

$H = \{a \in B \mid a \geq b_1 \wedge \dots \wedge b_n,\ b_1, \dots, b_n \in X,\ n \in \mathbb{N}\}$

<u>H је прави филтер</u>

- $0 \in H \Rightarrow 0 \geq b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ $\perp$

- $x, y \in H$

$x \geq b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ $y \geq c_1 \wedge \dots \wedge c_m$

$\Rightarrow x \wedge y \geq b_1 \wedge \dots \wedge b_n \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m$

$\Rightarrow x \wedge y \in H$

- $x \in H,\ y \geq x$

$x \geq b_1 \wedge \dots \wedge b_n \Rightarrow y \geq b_1 \wedge \dots \wedge b_n$

$\Rightarrow y \in H$

<u>$X \subseteq H$</u> - очигледно

$\ulcorner H$ је <u>генерисан</u> скупом X.

- ознака: $H = \langle X \rangle_B$ $\lrcorner$

Дакле, према Зорновој леми, у $\mathcal{F}$ постоји максималан елемент F.

F је прави филтер и $X \subseteq F$.

<u>F је ултрафилтер.</u>

$F \subset G$ G - прави филтер

$\Rightarrow G \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ није максималан у $\mathcal{F}$ $\perp$ $\square$

<u>Последица!</u>

Свака Б. алгебра има ултрафилтер.

$\triangle$ $X = \{1\}$ $\square$

Последица 2

$a > 0$ у B

Тада постоји ултрафилтер $F \ni a$.

$\triangle$ $X = \{a\}$ $\square$

Последица 3

За $a \neq 1$ у B постоји ултрафилтер $F \not\ni a$.

$\triangle$ $X = \{a'\}$ $\square$

Posledica 4 svaki filter sadržan je u nekom maksimalnom ultrafiltru.

Стонова репрезентација Булових алгебри

B - Б. алгебра

$a \in B$ $\quad a^* = \{ P \subseteq B \mid P$ - ултрафилтер, $a \in P \}$

$P \in a^* \Leftrightarrow a \in P$

$B^* = \{ P \subseteq B \mid P$ - ултрафилтер$\}$

(T1) $B^* \neq \emptyset$

$\ulcorner ZF + AC \vdash UF$

$ZF + UF \nvdash AC$

UF - теорема о постојању ултраф.$\lrcorner$

(T2) $(B^*, \mathcal{T})$ је компактан T_2 простор са базом отворено-затворених скупова, где је база $\{ a^* \mid a \in B \}$.

$\triangle$ $\{ a^* \mid a \in B \}$ је база.

$a_1^* \cap a_2^* = (a_1 \wedge a_2)^*$

$\rightarrow$

$P\in a_1^*\cap a_2^*$

$\Leftrightarrow P\in a_1^*$ и $P\in a_2^*$

$\Leftrightarrow a_1\in P$ и $a_2\in P$

$\Leftrightarrow a_1\wedge a_2\in P$

$\Leftrightarrow P\in(a_1\wedge a_2)^*$

$a^*\cup(a')^*=B^*$

$a^*\cap(a')^*=\emptyset$

$\Rightarrow a^*=B^*\setminus(a')^*$

$\Rightarrow a^*$ је отворено-затворен

$P\in(a')^* \Leftrightarrow a'\in P$

$\Leftrightarrow a\notin P$ (јер је P ултраф.)

$\Leftrightarrow P\notin a^*$

$\Leftrightarrow P\in B^*\setminus a^*$

$\Rightarrow a^*=B^*\setminus a'^*$

$\Rightarrow a^*$ је затворен.

Дакле, базни елементи су заиста отворено-затворени.

<u>B^* је T_2</u>

$P,Q\in B^*$ $\quad P\neq Q$

$\Rightarrow$ постоји $a\in P\setminus Q$

$a\in P,\ a\notin Q$

$\Rightarrow a\in P,\ a'\in Q$

$\Rightarrow P\in a^*\quad Q\in a'^*$

$a^*\cap a'^*=\emptyset$

<u>B^* је компактан</u>

Довољно је показати да се покривач од базних скупова може редуковати на коначан.

$\mathcal{S}=\{a_i^*\mid i\in I\}$ - покривач

Претпоставимо да $\mathcal{S}$ не садржи коначан потпокривач.

$i_1,\dots,i_n\in I,\ n\in\mathbb{N}$

$a_{i_1}^*\cup\dots\cup a_{i_n}^*\subset B$

$P\in B^*:\ P\notin a_{i_1}^*\cup\dots\cup a_{i_n}^*$

$\Rightarrow P\notin a_{i_1}^*,\dots,P\notin a_{i_n}^*$

$\Leftrightarrow a_{i_1}\notin P,\dots,a_{i_n}\notin P$

$\Leftrightarrow a_{i_1}'\in P,\dots,a_{i_n}'\in P$

$\Leftrightarrow a_{i_1}'\wedge\dots\wedge a_{i_n}'\in P$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{i_1}' \wedge \dots \wedge a_{i_n}' \neq 0$

Дакле, скуп $X=\{a_i' \mid i\in I\}$ има својство коначног пресека, па постоји ултраф. $Q \supseteq X$.

Тј. $a_i' \in Q$ $(i\in I)$

$\Rightarrow a_i \notin Q$ $(i\in I)$

$\Rightarrow Q \notin a_i^*$ $(i\in I)$

$\Rightarrow Q \notin \bigcup_{i\in I} a_i^*$ #

□

$S(B)=(B^*,\mathcal{J})$ је Хаусдорфов, потпуно неповезан и компактан.

Простор је <u>потпуно неповезан</u> ако се сваке две тачке могу раздвојити комплементним отв. скуповима.

T_2, потп. неповезани, компактни простори су <u>Стонови</u>.

X – топ. простор

<u>$\mathcal{B}(X)$</u> је скуп отв.-затв. скупова из X, и чини Булову алгебру.

Д X – отв.-затв. подскуп од $S(\mathcal{B})$, тада је $X=a^*$ за неко $a\in \mathcal{B}$.

$\mathcal{B}(S(\mathcal{B})) = (\{a^* \mid a\in \mathcal{B}\}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, 1^*)$

Т3 $\mathcal{B}(S(\mathcal{B}))\cong \mathcal{B}$

△ $h: a\mapsto a^*$ $(a\in \mathcal{B})$

<u>h је НА</u>

<u>h је 1-1</u>

$a\neq b \Rightarrow a'b\neq 0$ или $ab'\neq 0$

- рецимо $a'b\neq 0$

P - ултраф. : $a'b\in P$

$\Rightarrow a'\in P,\ b\in P$

$\Rightarrow a\notin P,\ b\in P$

$\Leftrightarrow P\notin a^*,\ P\in b^*$

$\Rightarrow a^*\neq b^*$

$\longrightarrow$

h је хомоморфизам.

$h(a\wedge b)=(a\wedge b)^*=a^*\cap b^*=h(a)\cap h(b)$

$h(a')=a'^*=(a^*)^c=h(a)^c$ □

Γ $P\in(a\vee b)^* \iff a\vee b\in P$

$\iff a\in P$ или $b\in P$

$\iff P\in a^*\cup b^*$ ⌋

$h(0)=0^*=\emptyset$ □

Ово значи да је категорија Б. алгебри еквивалентна категорији Стонових простора.

деф. Б. алг. $\mathbb{B}$ је комплетна ако свако $X\subseteq B$ има супремум.

Т. У комплетној Б. алгебри, сваки подскуп има inf.

Т. $\mathbb{B}$ је комплетна Б. алг. акко је $S(\mathbb{B})$ екстремно непов. простор.

деф. Простор је екстремно неповезан ако је у њему затворење сваког отв. скупа отворен скуп.

Т. Нека је X Стонов простор, и $\mathcal{R}(X)$ Б. алг. регуларно отв. скупова. Док. да је $\mathcal{R}(X)$ комплетна Б. алгебра.

Γ Тврђење важи и ако је X на локал. компактан простор. ⌋

{УПУТ. $\sup X_i = \overset{\circ}{\overline{\bigcup X_i}}$ }

Т. а) $\mathbb{B}\subseteq\mathcal{R}(S(\mathbb{B}))$

б) $\mathbb{B}$ је густо у $\mathcal{R}(S(\mathbb{B}))$

Γ Густо: $0<a\in\mathcal{R}(S(\mathbb{B}))$

$\Rightarrow$ постоји $b\in B$: $0<b\le a$ ⌋

в) Ако је $\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}$, где је $\mathbb{A}$ комплетна Б. алг., тада је и $\mathcal{R}(S(\mathbb{B}))\subseteq\mathbb{A}$.

Пример

$\mathcal{P}(X)$ је комплетна σ-алгебра

Д.

(Т) $\Omega_P^* \cong 2^P$ ⌈ Ω_P - Линденбаумова алгебра ⌋

Д. $\Omega^*_{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}} \cong \mathcal{C}$ ⌈ Гледи да је $\mathcal{C}^2 \cong \mathcal{C}$, $\mathcal{C}^{\mathbb{N}} \cong \mathcal{C}$ ⌋

$\mathcal{C}$ - Канторов простор

⌈ избачени интервали ⌋

Δ (скица)

$F \in \Omega_P^*$

$\Rightarrow [p] \in F$ или $[\neg p] \in F$

$\alpha : P \longrightarrow \{0,1\} : [p^{\alpha(p)}] \in F$

Показује се да, ако F дефинишемо помоћу α, $[\varphi] \in F$ или $[\neg\varphi] \in F$ (индукцијом по сложености φ).

Очито: $\alpha \longmapsto F$ $\quad 2^P \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \Omega^*_P$

Ово пресл. је и хомеоморфизам. □

16.3.1993.

Беров простор $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathcal{I}$ ⌈ $\mathcal{I}$ - скуп ирац. бр. ⌋

ПРЕДИКАТСКИ РАЧУН I РЕДА

1. Језик првог реда

деф. Језик је ма какав скуп L симбола, при чему ниједан симбол не може бити низ других симбола.

$L = Rel_L \cup Fun_L \cup Const_L$

релацијски знаци — ф-ијски знаци (или операцијски) — симболи константи

$Rel_L = \{R_i \mid i \in I\}$

$Fun_L = \{F_j \mid j \in J\}$

$Const_L = \{c_k \mid k \in K\}$

Zadaci iz Logike: Bulove algebre
(M smer)

rok: 10. 04. 2000

1. Dokazati: $\mathrm{Aut}\, 2^n \cong S_n$, S_n je grupa permutacija skupa $\{1,2,\dots,n\}$.

2. Dokazati da je Bulova algebra 2^n generisana sa $\lceil \log_2 n \rceil$ elemenata, gde je $\lceil x \rceil$ = najmanji ceo broj $m \geq x$ $(x \in \mathbb{R})$.

3. a) Naći elemente $a_1, a_2, \dots, a_n \in 2^{2^n}$ koji generišu algebru 2^{2^n}.

   b) Naći elemente $a_1, a_2, \dots, a_k \in 2^n$, $k = \lceil \log_2 n \rceil$, koji generišu algebru 2^n.

4. Neka je P beskonačan skup iskaznih slova i neka je $\mathcal{L}(P)$ Lindenbaumova algebra iskaznog računa $\mathcal{L}_P$. Dokazati:
$$\mathcal{L}(P) \times \mathcal{L}(P) \cong \mathcal{L}(P).$$

5. Neka je $t(x)$ Bulov izraz nad Bulovom algebrom $\mathbb{B}$. Dokazati da jednačina $t(x) = x$ ima rešenje u $\mathbb{B}$ (po x) akko $\bigwedge_{x \in B} t(t(x)) = t(x)$.

6. Neka je $S(\mathbb{B})$ Stoneov prostor Bulove algebre $\mathbb{B}$. Dokazati da je $S(\mathbb{B})$ metrički prostor akko je $\mathbb{B}$ najviše prebrojiva Bulova algebra.

7. Neka je $S(\mathbb{B})$ Stoneov prostor Bulove algebre $\mathbb{B}$ i neka je $\mathcal{B}(X)$ Bulova algebra otvoreno-zatvorenih podskupova prostora X. Dokazati: a) Ako je $\mathbb{B}$ Bulova algebra, onda $\mathcal{B}(S(\mathbb{B})) \cong \mathbb{B}$.
b) Ako je X Stoneov prostor, onda $S(\mathcal{B}(X)) \approx X$.

8. Element $a \in B$, B je Bulova algebra, je koatom ako je a' atom u $\mathbb{B}$. Opisati sve Bulove algebre koje sem 0 i 1 sadrže jedino atome i koatome.

9. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih filtera nad $N = \{0,1,2,\dots\}$. Dokazati da se $(R, \leq)$ utapa u $(\mathcal{F}, \subseteq)$; $(R, \leq)$ je (standardno) uređenje realnih brojeva.

10. Neka je F filter Bulove algebre $\mathbb{B}$. $X \subseteq F$ generiše F akko
$$x \in F \iff \bigvee_{n \in N} \bigvee_{x_1,\dots,x_n \in X} x \geq x_1 \wedge \dots \wedge x_n.$$
Neka je F neglavni ultrafilter (tj. sadrži Frešeov filter) nad $N = \{0,1,2,\dots\}$. Dokazati: Ako $X \subseteq F$ generiše F, onda je X neprebrojiv.

ZADACI IZ Logike : Bulove algebre
(M smer)

rok: 15. 04. 2000

1. Dokazati: $Aut\, 2^n \cong S_n$, S_n je grupa permutacija skupa $\{1,2,\dots,n\}$.

2. Dokazati da je Bulova algebra 2^n generisana sa $\lceil \log_2 n \rceil$ elemenata, gde je $\lceil x \rceil$ = najmanji ceo broj $m \geq x$ $(x \in R)$.

3. a) Naći elemente $a_1, a_2, \dots, a_n \in 2^{2^n}$ koji generišu algebru 2^{2^n}.
   b) Naći elemente $a_1, a_2, \dots, a_k \in 2^n$, $k = \lceil \log_2 n \rceil$, koji generišu algebru 2^n.

4. Neka je P beskonačan skup iskaznih slova i neka je $\mathcal{L}(P)$ Lindenbaumova algebra iskaznog računa $\mathcal{L}_P$. Dokazati:
$$\mathcal{L}(P) \times \mathcal{L}(P) \cong \mathcal{L}(P).$$

5. Neka je $t(x)$ Bulov izraz nad Bulovom algebrom $\mathbb{B}$. Dokazati da jednačina $t(x) = x$ ima rešenje u $\mathbb{B}$ (po x) akko $\bigwedge_{x \in B} t(t(x)) = t(x)$.

6. Neka je $S(\mathbb{B})$ Stoneov prostor Bulove algebre $\mathbb{B}$. Dokazati da je $S(\mathbb{B})$ metrički prostor akko je $\mathbb{B}$ najviše prebrojiva Bulova algebra.

7. Neka je $S(\mathbb{B})$ Stoneov prostor Bulove algebre $\mathbb{B}$ i neka je $\mathcal{B}(X)$ Bulova algebra otvoreno-zatvorenih podskupova prostora X. Dokazati: a) Ako je $\mathbb{B}$ Bulova algebra, onda $\mathcal{B}(S(\mathbb{B})) \cong \mathbb{B}$.
   b) Ako je X Stoneov prostor, onda $S(\mathcal{B}(X)) \approx X$.

8. Element $a \in B$, $\mathbb{B}$ je Bulova algebra, je koatom ako je a' atom u $\mathbb{B}$. Opisati sve Bulove algebre koje pored 0 i 1 sadrže jedino atome i koatome.

9. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih filtera nad $N = \{0,1,2,\dots\}$. Dokazati da se $(R, \leq)$ utapa u $(\mathcal{F}, \subseteq)$; $(R, \leq)$ je (standardno) uređenje realnih brojeva.

10. Neka je F filter Bulove algebre $\mathbb{B}$. $X \subseteq F$ generiše F akko
$$x \in F \iff \bigvee_{n \in N} \bigvee_{x_1,\dots,x_n \in X} x \geq x_1 \wedge \dots \wedge x_n.$$
Neka je F neglavni ultrafilter (tj. sadrži Frešeov filter) nad $N = \{0,1,2,\dots\}$. Dokazati: Ako $X \subseteq F$ generiše F, onda je X neprebrojiv.

$ar : L \to \mathbb{N}$

$ar(s)$ је <u>дужина</u> од s.

$ar(s) = 0$, за $s \in Const_L$

2. <u>терми</u>

$Var = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$
у РФ је фиксан пребројив скуп променљивих.

$T_0 = Var \cup Const_L$

$$T_{n+1} = T_n \cup \{F(t_1, \dots, t_k) \mid t_1, \dots, t_k \in T_n,\ F \in Fun_L,\ ar\,F = k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

<u>деф.</u> $Term_L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$

$|L| \leq \aleph_0 \Rightarrow |Term_L| = \aleph_0$

$|L| \geq \aleph_0 \Rightarrow |Term_L| = |L|$

3. <u>формуле</u>

- логички знаци:

$=, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow, \forall, \exists$

<u>деф.</u> $At_L = \{u = v \mid u, v \in Term_L\} \cup$
$\cup \{R(u_1, \dots, u_n) \mid u_1, \dots, u_n \in Term_L,\ R \in Rel_L,\ ar\,R = n,\ n \in \mathbb{N}\}$

- <u>атомичне формуле</u>

$\mathcal{F}_0 = At_L$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n &\cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_n\} \\
&\cup \{\varphi \wedge \psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\} \\
&\cup \{\varphi \vee \psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\} \\
&\cup \{\varphi \Rightarrow \psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\} \\
&\cup \{\varphi \Leftrightarrow \psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\} \\
&\cup \{(\forall v_i)\,\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_n,\ i \in \mathbb{N}\} \\
&\cup \{(\exists v_i)\,\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_n,\ i \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

$For_L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ — <u>формуле</u>

(T) For_L је најмањи скуп S речи над $L \cup Var \cup Z$ (Z - пом. знаци) који има особине:

1° $At_L \subseteq S$

2° $\varphi, \psi \in S$

$\rightarrow \varphi \wedge \psi,\ \neg\varphi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi \Leftrightarrow \psi,$
$(\forall v_i)\varphi,\ (\exists v_i)\varphi \in S$

$|L| \leq \aleph_0 \Rightarrow |For_L| = \aleph_0$

$|L| \geq \aleph_0 \Rightarrow |For_L| = |L|$

4. Слободне и везане променљиве

$Fv(\varphi) = \{ v_i \mid v_i \text{ се јавља у } \varphi \}$ $(\varphi \in At_L)$

$\varphi \in F_n \setminus F_{n-1}$

$$Fv(\varphi) = \begin{cases} Fv(\psi), & \varphi = \neg\psi \\ Fv(\psi_1) \cup Fv(\psi_2), & \varphi = \psi_1 \wedge \psi_2 \\ Fv(\psi) \setminus \{v_i\}, & \varphi = (\forall v_i)\psi \\ Fv(\psi) \setminus \{v_i\}, & \varphi = (\exists v_i)\psi \end{cases}$$

деф: Променљива v_i која се јавља у формули φ је слободна ако припада $Fv(\varphi)$, а везана ако не припада том скупу.

деф. φ је реченица језика L ако нема слободних променљивих.

$\varphi(v_0, \dots, v_n)$ значи да је $Fv(\varphi) \subseteq \{v_0, \dots, v_n\}$

деф. Универзално затворење формуле $\varphi=\varphi(v_0,\dots,v_n)$ је $\forall v_0,\dots,v_n\ \varphi$.

5. Теорије

деф. Теорија језика L у PR^1 је сваки скуп реченица језика L.

деф. Аксиоме теорије T су елементи те теорије.

23.2.1993.

- синтаксни део:
  - логичке аксиоме
  - појам доказа
  - правила извођења
  - теорије — потпуност, одлучивост, непротивречност
- семантички део:
  - појам структуре (модела)
  - оквир је теорија скупова
  - појам тачности (истинитости)
  - класе структура
    - аксиоматске структуре
    - категоричност

Аксиоме PR^1

Аксиоме су увек дате за неки језик L.

$$L = Fun_L \cup Const_L \cup Rel_L$$

1. <u>исказне аксиоме</u>

Можемо узети све таутологије, тј. све формуле које добијемо када исказна слова таутологије заменимо формулама језика L. Еквивалентно, можемо узети Лукашијевичеве аксиоме.

2. <u>аксиоме једнакости</u>

(i) $x = x$

(ii) $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow$
$\Rightarrow t(x_1, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_n)$

(iii) $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow$
$\Rightarrow (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(y_1, \ldots, y_n))$

$x, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in Var$

$t \in Term_L$ $\varphi \in For_L$

у (iii), $y_1, \ldots, y_n$ се не појављују у $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

$x = y$
$x = y \rightarrow (x = z \rightarrow y = z)$
$x = z \rightarrow y = z$
$x = x \rightarrow y = x$
$x = x$
$y = x$

$\ulcorner$ $x = y \Rightarrow y = x$

$x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

Доказати да су ово теореме предикатског рачуна. $\lrcorner$

3. <u>квантификаторске аксиоме</u>

(iv) $\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$ $(t \in Term_L)$

Ово је слободна замена терма t са x у $\varphi(x)$, што значи да ни једна променљива у t не сме по замени бити под дејством квантора. Или, једноставније, ни једна од променљивих из t не сме учествовати у $\varphi(x)$ као везана. →

(7) $\varphi(t) \Rightarrow \exists x\, \varphi(x)$

Правила извођења PR¹

(i) $\dfrac{\varphi,\ \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$ модус поненс

(ii) $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi}{\varphi \Rightarrow \forall x\, \psi}$ x се не јавља слободно у φ

(iii) $\dfrac{\forall x\, \varphi(x)}{\varphi(t)}$ t је слободно за x у $\varphi(x)$

(iii)a $\dfrac{\varphi(t) \Rightarrow \psi}{\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \psi}$

деф. Доказ у PR¹ језика L је низ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ формула тог језика, где
φ_i је аксиома
или φ_i је добијено неким правилом извођења применом на претходне чланове низа.

деф. Теореме су завршни чланови доказа.
- ознака: $\vdash \varphi$

T - теорија језика L

деф. Доказ у T је низ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$
φ_i је логичка аксиома
или φ_i је аксиома теорије T
или φ_i је добијено правилима извођења из претходних чланова низа.

деф. Нека реченица је теорема теорије T ако је завршетак неког доказа у T.

- ознака: $T \vdash \varphi$

$ded(T) = \{\varphi \in Sent_L \mid T \vdash \varphi\}$

- <u>дедуктивно затворење</u>

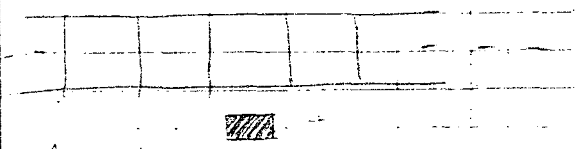
$Sent_L$ - све реченице језика L

<u>деф</u> Теорија T је <u>потпуна</u> <u>(комплетна)</u> ако за све $\varphi \in Sent_L$ важи: $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \neg\varphi$.

<u>деф</u> <u>Контрадикција</u> је било која формула облика $\varphi \wedge \neg\varphi$.

<u>деф</u> Теорија T је <u>непротивречна</u> ако $T \nvdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

Тјурингова машина



У ћелије можемо уписивати знак |.

0 : |
1 : ||
2 : |||

Машина се увек налази у неком од стања $\{q_0, q_1, q_2, \dots\}$. Глава може да се помера лево и десно, да чита да ли је нешто уписано у ћелију, и да упише или брише садржај ћелије.

- инструкција:

q_i S РАДЊА q_j

↳ ако је машина у стању q_i, и у ћелији испод главе је уписано S, тада машина извршава РАДЊУ →

(брисање, уписивање, померање), и прелази у стање q_j.

ТЈУРИНГ ИЗРАЧУНЉИВА Ф-ЈА

Ф-ја $f(x)$ је Тјуринг-израчунљива ако постоји програм који, кад почне да ради са

... | 0 | 1 | ... | 1 | 0 | ...

$\underbrace{\qquad}_{x+1}$

по завршетку програма добијено:

... | 0 | 1 | ... | 1 | 0 | ...

$f(x)+1$

Пример $f(x) = x+1$

$q_1\ 1\ \Lambda\ q_1$ $\quad\Lambda$ - глава лево

$q_1\ 0\ \Pi\ q_0$ $\quad\Pi$ - пиши 1

КОД ФОРМУЛЕ

деф Ако је формула φ низ симбола $s_1 \dots s_n$, тада је њен код

$$\ulcorner \varphi \urcorner = p_1^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdots p_n^{\ulcorner s_n \urcorner}$$

$s_i \in Var \cup L \cup \{(,\ ),\ ;,\ =\}$

$p_1, p_2, \dots$ - низ простих бројева

$\ulcorner v_i \urcorner = 10(i+1)+1$

$\ulcorner (\urcorner = 1$

$\ulcorner) \urcorner = 2$

$\ulcorner ; \urcorner = 3$

$\ulcorner = \urcorner = 4$

Ако је L коначан, можемо га кодирати оним природним бројевима који нису „заузети". Исто и за пребројив.

$$\ulcorner \alpha_i \urcorner = 10(i+1)+2 \qquad \alpha_i \in L$$

Непребројив језик је немогуће олако кодирати.

$S = \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \varphi \}$, T - теорија

$S \subseteq \mathbb{N}$

<u>деф</u> Теорија T је <u>одлучива</u> ако је карактеристична ф-ја скупа S Тјуринг-израчунљива.

То значи да постоји поступак којим, када дамо неку формулу, у коначном времену добијамо одговор да ли је формула теорема теорије T (тј. да ли њен код припада скупу S)

2.3.1993.

<u>деф</u> Скуп $X \subseteq \mathbb{N}$ је <u>израчунљив</u> (<u>рекурзиван</u>, <u>одлучив</u>) ако је карактеристична ф-ја скупа X Тјуринг-израчунљива.

ЧЕРЧОВА ТЕЗА (а) Појам интуитивне израчунљивости се поклапа са појмом Тјуринг-израчунљивости.

(б) За свака два алгоритамска система постоји униформан и ефективан превод са једног система на други.

Ако имамо два алг. система A и B, постоји „програм" који преводи програме написане за A у програме написане за B.

→

T – теорија PR'

$ded(T)$ – <u>дедуктивно затворење</u> за T

$ded(T) = \{\varphi \in Sent_L \mid T \vdash \varphi\}$

<u>деф.</u> T је <u>коначно аксиоматска</u> ако постоји коначан скуп $S \subseteq Sent_L$ такав да је $ded(T) = ded(S)$.

<u>деф.</u> T је <u>аксиоматска</u> ако је $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in T\}$ рекурзиван скуп.

<u>деф.</u> T је <u>одлучива</u> ако је $ded(T)$ одлучив скуп.

<u>деф.</u> Скуп $X \subseteq \mathbb{N}$ је <u>(рекурзивно) набројив</u> акко постоји рекурзивна ф-ја $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} X$.

То значи да се сви елементи скупа X могу дати као:

$f(0), f(1), f(2), \ldots$

(Т) Постоји набројив скуп који није рекурзиван.

△ (скица)

$P_0, P_1, P_2, \ldots$ – низ свих програма за Тјуринг-машину

$f_0, f_1, f_2, \ldots$ – низ одговарајућих ф-ја

$K = \{n \in \mathbb{N} \mid f_n(n) \text{ – конвергира}\}$

Овај програм јесте рекурзивно набројив, али није одлучив. □

<u>Напомена</u>

Свака коначно аксиоматска теорија је аксиоматска.

△ Сваки коначан скуп је рекурзиван. □

(T1) Нека је T аксиоматска теорија језика L. Тада:

(а) скуп доказа теорије T је рекурзиван;

(б) скуп теорема теорије T је рекурзивно набројив.

△

(а) $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ – доказ

- $\varphi_i \in T$
- φ_i је аксиома
- φ_i је добијено из претходних чланова низа

[φ_i су реченице]

Нека је дат неки низ речи језика L: $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$. Могуће је ефективно утврдити да ли је то доказ, јер:

- можемо утврдити да ли $\psi_k \in T$ јер је T аксиоматска;
- можемо проверити да ли је ψ_i логичка аксиома;
- можемо проверити да ли је ψ_i добијено неким правилом извођења из претходних чланова низа, јер правила и претходних чланова има коначно много.

Ово се не заснива на чињеници да су скупови $Term_L$, At_L, $Sent_L$, For_L рекурзивни.

[Д: $L = \{f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_m\}$

$ar\, f_i = a_i$

Дати алгоритам који проверава да ли је нека реч у $Term_L$.]

(б)

Сваки рекурзиван скуп је рекурзивно набројив.

→

Нижемо скуп $\mathbb{N}$ и за сваки проверамо да ли је он у скупу. Ако јесте, ставимо га у низ. Тиме је теорема доказана.

Скуп доказа од T је рекурзиван, па и рекурзивно набројив. Дакле, постоји програм који листа све доказе. Ако издвојимо само задње ставке свих доказа, добићемо набрајање свих теорема теорије T.

⌜Ово је, уједно, и први доказ. ⌟ □

(T2) (<u>Крејгов трик</u>)

Нека теорија T рекурзивног језика L има рекурзивно набројив скуп аксиома. Тада је T аксиоматска.

△

$T = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$

Ф-ја $n \longmapsto \varphi(n)$ је рекурзивна.

$T' = \{\varphi_0, \varphi_0 \wedge \varphi_1, \varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2, \dots\}$

$ded(T) = ded(T')$ – очигледно

$\psi_k = \varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_k$

$\ulcorner \psi_k \urcorner < \ulcorner \psi_{k+1} \urcorner$, јер је ψ_{k+1} дужа

Ф-ја $n \longmapsto \ulcorner \psi_n \urcorner$ је рекурзивна и монотоно растућа.

⌜ ПОСТОВА (T)

Ако је ф-ја $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ рек. и монотоно растућа, тада је

$f(\mathbb{N})$ рекурзиван скуп.

△ $a\in\mathbb{N}$

Листамо редом $f(1), f(2), f(3), \dots$ док не наиђемо на n_0:
$f(n_0)\geq a$, што ће се десити после највише a корака.
Ако је $a=f(n_0)$, тада $a\in f(\mathbb{N})$, у супротном $a\notin f(\mathbb{N})$. □

Даље $f: n\mapsto \ulcorner\varphi_n\urcorner$ задовољава услове. Помоћне ⊕, па је $\{\varphi_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ рекурзиван скуп $\Rightarrow$ T је аксиоматска □

Ⓣ Нека је аксиоматска теорија T комплетна. Тада је T одлучива.

△

<u>I случај</u> T је противречна.

$\Rightarrow$ $ded(T)=Sent_L$, што је одлучив скуп.

<u>II случај</u> T је непротивречна

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ – рекурзивно набројива листа теорема те теорије.

$\psi\in Sent_L \rightarrow T\vdash\psi$ или $T\vdash\neg\psi$

Сада набрајамо теореме, док или касније ће се појавити ψ и $\neg\psi$. У првом случају, ψ је теорема, а у супротном није. □

D. а) Нека је T аксиоматска теорија која има $T_1,\dots,T_n$ – коначно много комплетних проширења. Док. да је T одлучива.

б) Исто, ако има пребројиво комплетних проширења.

D. Ако акс. теорија T има коначан скуп аксиома, онда је оно одлучива.

9.3.1993

D. T-теорија пребројивог језика

Док. да за скуп S њих комплетних проширења те теорије важи конт. хипотеза, тј. $|S| \leq \aleph_0$ или $|S| = 2^{\aleph_0}$.

{Упут. Показати прво за исказни случај. }

Теорема дедукције

1. Ако је φ реченица језика L, а ψ формула и T теорија, онда из $T, \varphi \vdash \psi$ следи $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$

Δ - као у иск. случају $\square$

2. Ако су φ, ψ формуле језика L, и T теорија, онда из $T, \varphi \vdash \psi$ следи $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, под условом да није примењено правило генерализације по слободним променљивим формуле φ.

$\not\Delta$

Ⓣ (о новој константи)

Нека је T теорија језика L, $\varphi(x)$ формула тог језика, и $c \notin L$ симбол константе. Ако $T \vdash \varphi(c)$, онда и $T \vdash \forall x\, \varphi(x)$.

Пример

$\varphi \in For_L$

$\varphi(0) \land \forall x\, (\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)$

→ аксиома индукције

Међутим, индукцију ретко користимо у том облику, већ као правило извођења:

$$\frac{\varphi(0), \quad \forall x\, (\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1))}{\forall x\, \varphi(x)}$$

→ правило (принцип) индукције

$2^n > n$

△ (i) $n=0$: $2^0 > 0$

(ii) $n=k$: $2^k > k$

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k \geq k+1$

Дакле, према принципу мат. инд., тврђење важи. □

Како смо могли у овом доказу користити принцип мат. инд., када се у (ii) нигде не јавља квантор?

$k \notin L$, k – симбол константе

$T, \varphi(k) \vdash \varphi(k+1)$

$T \vdash (\varphi(k) \Rightarrow \varphi(k+1))$ Ⓣ дедукције

$T \vdash \varphi(k) \Rightarrow \varphi(k+1)$ ⌜таутологија⌟

$T \vdash \forall x\, (\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1))$ ⌜нова конст.⌟

△ (за Ⓣ о новој константи)

$\varphi_1(c), \ldots, \varphi_n(c), \varphi(c)$ ⌜$T \vdash \varphi(c)$⌟

↳ доказ за $\varphi(c)$ (у језику $L \cup \{c\}$)

Нека $x \in Var$, тако да се x не појављује у том доказу. Тад је и

$\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)\ \varphi(x)$

један доказ.

Дакле, $T \vdash \varphi(x)$.

По правилу генерализације, имамо и $T \vdash \forall x\, \varphi(x)$. □

ПРАВИЛО 4 (choice rule)

<u>пример</u>

$\exists x(\varphi(x)\Rightarrow\psi(x)),\ \forall x\,\varphi(x) \vdash \exists x\,\psi(x)$

△

$\exists x(\varphi(x)\Rightarrow\psi(x))$	хип.
$\forall x\,\varphi(x)$	хип.
$\varphi(c)\Rightarrow\psi(c)$	$c\notin L$ правило 4.
$\varphi(c)$	елиминација $\forall$-кван.
$\psi(c)$	м.п.
$\exists x\,\psi(x)$	правило увођења $\exists$-кван.

□

16.3.1993.

Пренекс-нормална форма

<u>деф.</u> Формула $(Q_1y_1)\dots(Q_ny_n)\varphi$, где $Q_1,\dots,Q_n\in\{\forall,\exists\}$, $y_k\neq y_l$ $(k\neq l)$, и φ нема квантора је у <u>пренекс-нормалној форми.</u>

Т (о пренекс-норм. форми)

За сваку формулу $\varphi\in For_L$, постоји формула $\tilde{\varphi}$ у пренекс-норм. форми, тако да је $\vdash \varphi\Leftrightarrow\tilde{\varphi}$.

△ -индукција по броју везника и квантора

(i) $n=0$ φ је већ у пренекс-норм. ф.

(ii) Разматрају се случајеви, у зависности од облика формуле φ, и у доказивању се користе познате формуле о „извлачењу" квантора. □

Примери теорија првог реда

$T \subseteq Sent_L$

1. $T=\emptyset$, $L=\emptyset$

Добијемо чист предикатски рачун са једнакошћу.

$\sigma_n: \exists x_1,\dots,x_n \left(\bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \neq x_j \land \forall x \left(\bigvee_{1\le i\le n} x = x_i\right)\right)$

- значење: постоји тачно n елемената

$\tau_n: \exists x_1,\dots,x_n \left(\bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \neq x_j\right)$

↳ постоји бар n елемената

Ову теорију означавамо са $\mathcal{J}_0$.

D: $\mathcal{J}_0$ је одлучива теорија.

$\mathcal{J}_0 \vdash \sigma_n \Leftrightarrow \tau_n \land \neg\tau_{n+1}$

$\mathcal{J}_0 \vdash \tau_n \Leftrightarrow \neg\sigma_1 \land \dots \land \neg\sigma_{n-1}$

2. уређење $L=\{\le\}$

$x \le x$

$x \le y \land y \le x \Rightarrow x = y$

$x \le y \land y \le z \Rightarrow x \le z$

- линеарно уређење:

дода се $x \le y \lor y \le x$

- густо уређење:

$\forall x,y\, (x<y \Rightarrow \exists z\, (x<z \land z<y))$

3. алгебарске теорије

- теорија група, прстенова ...

4. теорија поља

$L=\{+,\cdot,0,1\}$

- теорија уређених поља

5. Пеанова аритметика

(формална аритметика)

$L = \{0, ', +, \cdot, <\}$

- аксиоме:

$$x' \neq 0$$
$$x' = y' \Rightarrow x = y$$
$$x + 0 = x$$
$$x + y' = (x+y)'$$
$$x \cdot y' = xy + x$$
$$x \cdot 0 = 0$$
$$x < y' \Rightarrow x < y \lor x = y$$
$$x < y \lor x = y \lor y < x$$

примитивна аритметика

$$\varphi(0, y_1, \dots, y_n) \land \forall x (\varphi(x, y_1, \dots, y_n) \Rightarrow \varphi(x', y_1, \dots, y_n)) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x, y_1, \dots, y_n)$$

схема-аксиома индукције.

Због акс. индукције, формална аритметика има бесконачно много аксиома.

Модели

деф. Модел је $\mathcal{A} = (A, f_1, \dots, f_n, R_1, \dots, R_m, a_1, \dots, a_k)$ где је $(A, f_1, \dots, f_n, a_1, a_2, a_k)$ алгебра, а R_i су релације у A.

$$L = \{F_1, \dots, F_n, S_1, \dots, S_m, C_1, \dots, C_k\}$$
$$\text{ar } F_i = \text{ar } f_i \quad , \quad \text{ar } S_i = \text{ar } R_i$$

деф. $\mathcal{A}$ је модел (интерпретација) језика L.

Пресликавање које функцијском симболима из L додељује операције, а релацијском релације, зове се интерпретација.

$\mathcal{A} = (A, \mathcal{Y})$ $\mathcal{Y}$-интерпретација

$$\mathcal{Y} : L \longrightarrow A \cup A^A \cup A^{A^2} \cup \dots \cup \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A^2) \cup \dots$$

L не мора бити коначно.

23.3.1993

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – модели језика L

<u>деф.</u> $\mathcal{A}$ је <u>подмодел</u> од $\mathcal{B}$ ако је

$$A \subseteq B$$

$$F^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k) = F^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_k)$$

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_k)$$

$(F \in Fun_L,\ ar\,F = k,\ R \in Rel_L,\ ar\,R = k,\ a_1, \dots, a_k \in A)$.

$R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^k$

$F^{\mathcal{A}} = F^{\mathcal{B}}|_A$

$\mathcal{B}$ је <u>екстензија</u> од $\mathcal{A}$

$L \subseteq L'$ – језици

$\mathcal{A}$ – модел језика L

$\mathcal{A}'$ – модел језика L'

<u>деф</u> $\mathcal{A}$ је <u>рестрикција</u> модела $\mathcal{A}'$ ($\mathcal{A}'$ је <u>експанзија</u> од $\mathcal{A}$) ако

$$A = A'$$

$$s^{\mathcal{A}} = s^{\mathcal{A}'} \quad (s \in L)$$

<u>Примери</u>

1. $(N, +, \cdot, 0, \leq)$ је подмодел од $(R, +, \cdot, 0, \leq)$

2. $(N, +, \cdot, 0, \leq)$ је експанзија од

$(N, +, \cdot, 0)$

$(N, +, 0)$

$(N, +)$

N

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – модели језика L

$f : A \to B$

<u>деф</u> Пресликавање f је <u>хомоморфизам</u> ако

$$f(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$$

$$f(F^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k)) = F^{\mathcal{B}}(f(a_1), \dots, f(a_k))$$

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k) \Rightarrow R^{\mathcal{B}}(f(a_1), \dots, f(a_k))$$

$(F \in Fun_L,\ R \in Rel_L,\ ar\,F = ar\,R = k,\ a_1, \dots, a_k \in A)$.

<u>деф</u> f је <u>јаки хомоморфизам</u> ако је хомоморфизам и

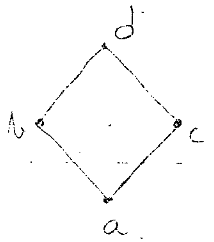
$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(f(a_1), \dots, f(a_k)).$$

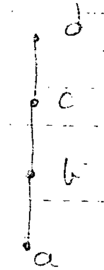
деф. <u>Утапање</u> је 1-1 јак хомомор-физам.

деф. <u>Изоморфизам</u> је бијективни јаки хомоморфизам.

<u>пример</u>

$\mathbb{A} = (A, \leq)$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{A}' = (A, \leq')$





id_A је бијективни хомоморфизам, али не и изоморфизам.

Д. Нађи две изоморфне структуре и утапање које је 1-1 и НА, али не и изоморфизам.

деф. <u>Аутоморфизам</u> је изоморфизам из структуре у саму себе.

$Aut\, \mathbb{A} = (Aut\, \mathbb{A}, \circ, i_A)$ – група

(Т) Нека је $\mathbb{A}$ пребројив модел. Тада за $Aut\, \mathbb{A}$ важи континуум хипотеза.

Δ $\mathbb{A} = (A, \cdot)$

$f : A \to A$ – аутоморфизам

$k : A^2 \to 2$

$$k(a,b) = \begin{cases} 1, & b = f(a) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1° $k(a,a') = 1,\ k(b,b') = 1 \Rightarrow k(ab, a'b') = 1$ хомоморф.

2° $k(a,a') = 1,\ b \neq a \Rightarrow k(b,a') = 0$ 1-1

3° $\forall b\ \exists a\ k(a,b) = 1$ НА

Уочимо пресликавање

$i : f \longmapsto k_f$

$i : Aut\, \mathbb{A} \to 2^{A^2}$ – 1-1 пресликавање.

Следи да је

$|\mathrm{Aut}\, A| = |\tau(\mathrm{Aut}\, A)|$. $\mathcal{F} = \tau(\mathrm{Aut}\, A)$

$$\mathcal{F}_1 = \bigcap_{a,a',b,b'} \Big(\{ k \in 2^{A^2} \mid k(a,a') = 0 \} \cup \{ k \in 2^{A^2} \mid k(b,b') = 0 \} \cup \{ k \in 2^{A^2} \mid k(ab, a'b') = 1 \} \Big)$$

$$\mathcal{F}_2 = \bigcap_{a,a'} \Big(\{ k \in 2^{A^2} \mid k(a,a') = 0 \} \cup \bigcap_{b \neq a} \{ k \mid k(b,a') = 0 \} \Big)$$

$$\mathcal{F}_3 = \bigcap_{b} \bigcup_{a} \{ k \mid k(a,b) = 1 \}$$

$\mathcal{F}_1$ је скуп свих k која задовољавају 1°.

$\mathcal{F}_2 - 2^\circ$; $\mathcal{F}_3 - 3^\circ$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$$

$\left.\begin{array}{l} \{ k \mid k(a,b) = 0 \} \\ \{ k \mid k(a,b) = 1 \} \end{array}\right\}$ - затв.-отв. скупови

$\mathcal{F}_1$ је пресек затворених, па је и сам затв. скуп.

$\mathcal{F}_2$, такође.

$\mathcal{F}_3$ је пребројив пресек отворених скупова (то је G_δ-скуп).

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ је G_δ-скуп, па за њега важи континуум хипотеза. $\square$

(Предр. или тополог.)

D. Урадити доказ за пребројив језик.

D. Показати да је $\mathcal{F}$ заиста G_δ-скуп (тј. да је пресек затвореног и G_δ-скупа G_δ-скуп).

Релација задовољења

деф. Валуација је $\lambda : Var \to A$.

A - модел

деф. Вредност терма у A је $u^A[\lambda]$, и дефинише се индуктивно, као у алгебри.

$\varphi \in For_L$

деф. Релација задовољења $\models$:

$cл(\varphi)=0$

1° φ је $u=v$

$A \models \varphi[\lambda]$ акко $u^A[\lambda] \equiv v^A[\lambda]$

2° φ је $R(u_1,\dots,u_k)$ u_i - терми

$A \models \varphi[\lambda]$ акко $R^A(u_1^A[\lambda],\dots,u_k^A[\lambda])$

$cл(\psi)=n$

1° ψ је $\varphi_1 \wedge \varphi_2$

$A \models \psi[\lambda]$ акко $A \models \varphi_1[\lambda]$ и $A \models \varphi_2[\lambda]$

→

2° ψ је $\neg\varphi$

$A \models \psi[\lambda]$ акко није $A \models \varphi[\lambda]$

3° ψ је $\exists v_i \varphi(v_i)$

$A \models \psi[\lambda]$ акко $A \models \varphi[\lambda']$, за неко $a \in A$

$$\lambda' : \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \dots & v_{i-1} & v_i & v_{i+1} & \dots \\ \lambda(v_0) & \lambda(v_1) & & \lambda(v_{i-1}) & a & \lambda(v_{i+1}) & \end{pmatrix}$$

4° ψ је $\forall v_i \varphi(v_i)$

$A \models \psi[\lambda]$ акко $A \models \varphi[\lambda']$, за све $a \in A$.

Вредност формуле φ у моделу зависи само од слободних променљивих те формуле.

$\triangle$

- индукцијом по сложености формуле:

тр. 10 за терме и елементарне формуле

$\square$

Зато пишемо

$A \models \varphi[a_0,\dots,a_n]$

→

Ако је φ реченица, и
$\mathfrak{A} \models \varphi[\lambda]$, онда и
$\mathfrak{A} \models \varphi[\mu]$, за све μ.

- Пишемо: $\mathfrak{A} \models \varphi$, ако је φ тачно бар за једну валуацију

<u>деф.</u> $\mathfrak{A}$ је <u>модел теорије</u> T акко
$\mathfrak{A} \models \varphi \quad (\varphi \in T)$
- ознака: $\mathfrak{A} \models T$

<u>Пример</u>
Група је модел теорије група.

$T \vdash \varphi,\ \mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$

86
30.3.1993.

Нека су $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ модели језика L.

<u>деф.</u> $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ су <u>елементарно еквивалентни</u> акко за свако $\varphi \in Sent_L$
$\mathfrak{A} \models \varphi$ акко $\mathfrak{B} \models \varphi$.

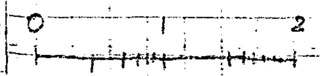
- ознака: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

Кажемо и да $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имају иста својства првог реда.

- својства првог реда:
  - бити линеарно уређен
  - бити густо лин. уређен
  - сваки елемент има наследника
    $\forall x \exists y (x<y \land \forall z (x<z \Rightarrow y \leq z))$
- својства која нису првог реда:
  - бити добро уређен скуп

Тип уређења за $(\mathbb{N}, \leq)$ се означава са ω.

$t(\mathbb{N}, \leq) = \omega$

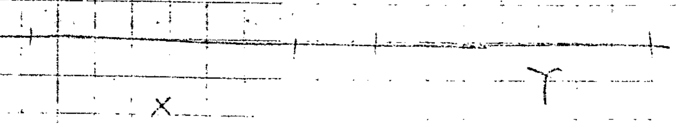


$t(S, \leq) = \omega + \omega$

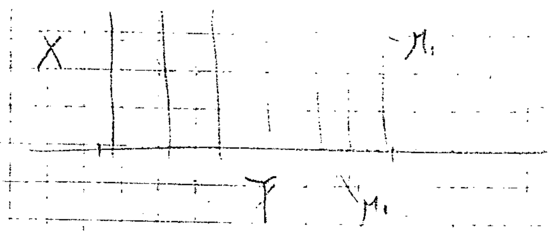
$S = \{1-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1,2\}$

$\mu_1 = t(X, \leq)$ $\quad \mu_2 = t(Y, \leq)$

$\mu_1 + \mu_2$ је онај који добијемо када на X надовежемо Y.



$\mu_1 \cdot \mu_2$



$t(X \times Y, \leq) = \mu_1 \cdot \mu_2$

$(x, y) \leq (x_1, y_1) \Leftrightarrow y < y_1 \vee (y = y_1 \wedge x \leq x_1)$

П. $(\mu_1 + \mu_2) + \mu_3 = \mu_1 + (\mu_2 + \mu_3)$

$(\mu_1 \cdot \mu_2) \cdot \mu_3 = \mu_1 \cdot (\mu_2 \cdot \mu_3)$

$1 \cdot \mu = \mu \cdot 1 = \mu \quad (\; n = t(\{1, \dots, n\}, \leq) \}$

$\mu_1 \cdot (\mu_2 + \mu_3) = \mu_1 \cdot \mu_2 + \mu_1 \cdot \mu_3$

$(\mu_1 + \mu_2) \cdot \mu_3 \neq \mu_1 \cdot \mu_3 + \mu_2 \cdot \mu_3$

$\mu_1 + \mu_2 \neq \mu_2 + \mu_1$

$\mu_1 \cdot \mu_2 \neq \mu_2 \cdot \mu_1$

П. Сви ординали $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots$ су међусобно неизоморфни, и сви ω^n су добро уређени.

{УПУТ. α, β – добро уређени $\Rightarrow \alpha + \beta, \; \alpha \cdot \beta$ добро уређени}

деф. $\mathfrak{A}$ је елементарни подмодел од $\mathfrak{B}$ ако је $\mathfrak{A}$ подмодел модела $\mathfrak{B}$, и

$\mathfrak{A} \models \varphi[\mu]$ онда $\mathfrak{B} \models \varphi[\mu]$,

за све $\varphi \in For_L$, и све валуације μ од $\mathfrak{A}$.

- пишемо: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$

$\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\mu] \longrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi[\mu]$

није $\mathfrak{A} \models \varphi[\mu] \longrightarrow$ није $\mathfrak{B} \models \varphi[\mu]$

$\mathfrak{B} \models \varphi[\mu] \longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\mu]$

Дакле, ако $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$, тада
$\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$ акко $\mathbb{B} \models \varphi[\mu]$.

Следи да су $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ елементарно еквивалентни.

$$\mathbb{A} \prec \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$$

Дакле, елементи структуре $\mathbb{A}$ „не знају" да ли се налазе у $\mathbb{A}$ или у $\mathbb{B}$, јер у оба имају иста својства.

(Т1) Нека је $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ (подмодел), и из $a_1, \dots, a_n \in A$, $\varphi \in For_L$, $\mathbb{B} \models \exists x\, \varphi[x, a_1, \dots, a_n]$ следи да постоји $a \in A$

$$\mathbb{B} \models \varphi[a, a_1, \dots, a_n]$$

Тада је $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$.

Δ
- инд. по сложености од φ

(i) $\varphi \in At_L$

(a) φ је $u = v$

$\mathbb{A} \models u^{\mathbb{A}}[\mu] = v^{\mathbb{A}}[\mu]$

$\Rightarrow \mathbb{B} \models u^{\mathbb{B}}[\mu] = v^{\mathbb{B}}[\mu]$

(б) φ је $R(u_1, \dots, u_n)$

$\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$

$\rightarrow \mathbb{A} \models R^{\mathbb{A}}(u_1^{\mathbb{A}}[\mu], \dots, u_n^{\mathbb{A}}[\mu])$

$\Rightarrow R^{\mathbb{B}}(u_1^{\mathbb{B}}[\mu], \dots, u_n^{\mathbb{B}}[\mu])$

(ii)

(a) φ је $\psi \wedge \theta$

$\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$ акко $\mathbb{A} \models \psi[\mu]$ и $\mathbb{A} \models \theta[\mu]$

акко $\mathbb{B} \models \psi[\mu]$ и $\mathbb{B} \models \theta[\mu]$

акко $\mathbb{B} \models \varphi[\mu]$

(б) φ је $\neg\psi$

$\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$ акко није $\mathbb{A} \models \psi[\mu]$

акко није $\mathbb{B} \models \psi[\mu]$

акко $\mathbb{B} \models \varphi[\mu]$

(в) φ је $\exists x\, \psi$

$\Rightarrow$) $\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$ акко $\mathbb{A} \models \psi[a, \mu]$

онда $\mathbb{B} \models \psi[a, \mu]$

онда $\mathbb{B} \models \exists x\, \psi[\mu]$

$(\Leftarrow)$ $\mathbb{B} \models \exists x\, \psi[\mu]$

онда $\mathbb{B} \models \psi[a,\mu]$, где $a \in \mathbb{A}$

онда $\mathbb{A} \models \psi[a,\mu]$

акко $\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$ $\square$

(Т2) $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ Нека за све $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{A}$ и све $b \in \mathbb{B}$ постоји $f \in Aut\,\mathbb{B}$ тако да $f(a_i)=a_i$, $f(b) \in \mathbb{A}$.

Тада је $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$.

Последице

1. Ако $\varphi \in For_L$ нема кванторa, и μ је валуација у домена $\mathbb{A}$, онда важи

$$\mathbb{A} \models \varphi[\mu] \text{ акко } \mathbb{B} \models \varphi[\mu].$$

2. Ако је $\varphi \in For_L$ егзистенцијална (тј. φ је $\exists x_1 \dots \exists x_n\, \psi$, где је ψ без квантора) онда

$\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$ акко $\mathbb{B} \models \varphi[\mu]$, μ је валуација у $\mathbb{A}$

3. Ако је $\varphi \in For_L$ универзална (тј. φ је $\forall x_1 \dots \forall x_n\, \psi$, где ψ нема квантора) и μ валуација у $\mathbb{A}$, тада важи

$\mathbb{B} \models \varphi[\mu]$ онда $\mathbb{A} \models \varphi[\mu]$.

Пример!

$\mathbb{Q} = (Q, +, \cdot, 0, 1)$
$\mathbb{R} = (R, +, \cdot, 0, 1)$] тога
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$

ψ - систем линеарних ј-на са коефицијентима у $\mathbb{Q}$

ψ је $l_1 = g_1 \wedge \dots \wedge l_m = g_m$

ψ је $\psi(x_1,\dots,x_n)$ [$x_1,\dots,x_n$ су непознате]

Систем има решење у $\mathbb{Q}$ акко

$\mathbb{Q} \models \exists x_1,\dots,x_n\, \psi[\mu]$ [μ је валуација која одређује коефицијенте]

има решења у R:

$\mathbb{R} \models \exists x_1,\dots,x_n\, \psi[\mu]$

$\rightarrow$

Формула $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi[\mu]$ је еквивалентна некој отвореној формули (о једнакости полинома, или преко детерминанта), па важи (T1).

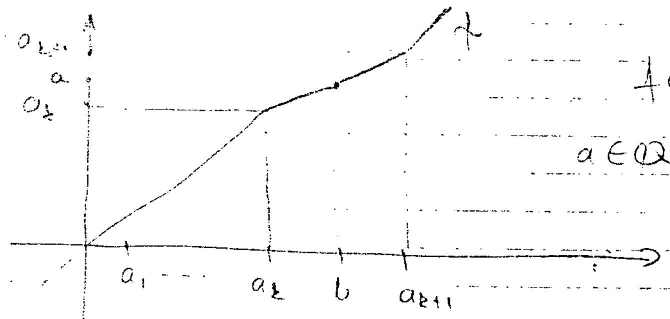
D. $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq,0,1)$ и $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq,0,1)$
Доказати да важи слично за систем линеарних ј-на и неј-на.

Пример 2

$(\mathbb{Q},\leq) \prec (\mathbb{R},\leq)$

$\triangle$ $(\mathbb{Q},\leq) \subseteq (\mathbb{R},\leq)$

$a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Q}$ $\quad b \in \mathbb{R}$



$f \in Aut(\mathbb{R},\leq)$

$a \in \mathbb{Q}$

По (T2), тврђење важи. $\square$

D. (T2)

$$\begin{cases} f \in Aut\,\mathfrak{A} \\ \mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f(a_1),\ldots,f(a_n)] \end{cases}$$

20.4.1993.

Метод нових константи

$\mathbb{A}$ - модел језика L

$a_1,\dots,a_n \in A$

$c_{a_1},\dots,c_{a_n}$ - нови симболи константи

$L \cup \{c_{a_1},\dots,c_{a_n}\} = L \cup C$

$(\mathbb{A}, a_1,\dots,a_n)$, узимамо $c_{a_k}^{\mathbb{B}} = a_k$

$C = \{\underline{a_1},\dots,\underline{a_n}\}$

$\underline{a_k}$ - име елемента a_k

Ово је, на неки начин, обрнути процес од интерпретације

(T) Нека је $\mathbb{A}$ модел језика L, $\varphi \in For_L$, и $a_1,\dots,a_n$ валуација домена $\mathbb{A}$. Нека је $\mathbb{B} = (\mathbb{A}, a_1,\dots,a_n)$. Тада важи:

$\mathbb{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ акко

$\mathbb{B} \models \varphi(\underline{a_1},\dots,\underline{a_n})$.

$\ulcorner \varphi = \varphi(v_1,\dots,v_n) \lrcorner$

Напомена

$\varphi(\underline{a_1},\dots,\underline{a_n}) \in Sent_{L\cup C}$, $C = \{\underline{a_1},\dots,\underline{a_n}\}$

Дакле, важење неке формуле увек се може свести на важење неке реченице.

$\triangle$ - индукција по сложености формуле

$\mathbb{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[a_1,\dots,a_n]$

акко $\mathbb{A} \models \varphi_1[a_1,\dots,a_n]$ и $\mathbb{A} \models \varphi_2[a_1,\dots,a_n]$

акко $\mathbb{B} \models \varphi_1(\underline{a_1},\dots,\underline{a_n})$ и $\mathbb{B} \models \varphi_2(\underline{a_1},\dots,\underline{a_n})$

акко $\mathbb{B} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\underline{a_1},\dots,\underline{a_n})$

$\square$

ЛЕМА $u^{\mathbb{A}}[a_1,\dots,a_n] = u^{\mathbb{B}}(\underline{a_1},\dots,\underline{a_n})$,

где је $u = u(v_1,\dots,v_n) \in Term_L$.

Пример

$(\mathbb{Q}, \leq) \equiv (\mathbb{R}, \leq)$

$\mathbb{A} \prec \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$

Дакле, кардинални број није својство првог реда.

σ_n је $\exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right)$

τ_n је $\sigma_n \wedge \neg \sigma_{n+1}$

$\mathbb{A} \models \sigma_n$ акко $|A| \geq n$

$\mathbb{A} \models \tau_n$ акко $|A| = n$

Дакле, својства „имати бар n елемената" и „имати тачно n ел." јесу првог реда.

Међутим, својство „бити коначан" није првог реда.
Својство „бити бесконачан", на неки начин, јесте.

$\longrightarrow$

$T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots\}$

$\mathbb{A}$ је бесконачан акко $\mathbb{A} \models T$.

(Т) Нека су $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ модели језика L. Ако је $\mathbb{A}$ коначан, и $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, онда је $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.

ЛЕМА За све $a \in A$, постоји $b \in B$, тако да је $(\mathbb{A}, a) \equiv (\mathbb{B}, b)$, ако важе услови теореме.

$\triangle$

$\underline{|A| = |B|}$:

$|A| = n \rightarrow \mathbb{A} \models \tau_n$

$\rightarrow \mathbb{B} \models \tau_n$

$\rightarrow |B| = n$

- претпоставимо супротно:

$a \in A$: $(\mathbb{A}, a) \not\equiv (\mathbb{B}, b) \quad (b \in B)$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$\longrightarrow$

$\varphi_k(x) \in For_L$

$(\mathbb{A}, a) \models \varphi_k(c)$, $(\mathbb{B}, b_k) \models \neg\varphi_k(c)$

c – симбол нове константе ($c \notin L$)

$\hookrightarrow \mathbb{A} \models \varphi_1(c) \wedge \dots \wedge \varphi_n(c)$

$\rightarrow \mathbb{A} \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)[a]$

$\rightarrow \mathbb{A} \models \exists x\, ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)(x))$

$\rightarrow \mathbb{B} \models \exists x\, ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)(x))$ $\quad \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$

$\rightarrow \mathbb{B} \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)[b_k]$, $1 \leq k \leq n$

$\rightarrow (\mathbb{B}, b_k) \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)(c)$

$\rightarrow (\mathbb{B}, b_k) \models \varphi_k(c)$ #

$\square$

Δ (за Ⓣ)

Вишеструком применом леме, за $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и неки низ $\{d_1, \dots, d_n\}$ из B, добијамо

$(\mathbb{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathbb{B}, d_1, \dots, d_n)$.

Нека је $f : A \to B$, $f(a_k) = d_k$.

f је 1-1

$(\mathbb{A}, a_1, \dots, a_n) \models c_i \neq c_j \quad (i \neq j)$

$\left[\; L \cup C : \; C = \{c_1, \dots, c_n\} \right.$

$\quad c_k^{\mathbb{A}} = a_k, \quad c_k^{\mathbb{B}} = d_k \;\Big]$

$\rightarrow (\mathbb{B}, d_1, \dots, d_n) \models c_i \neq c_j$

$\rightarrow d_i \neq d_j$

Следи да је f и НА, па је бијекција.

f је изоморфизам.

* бин. оп.

$a_k = a_i *^{\mathbb{A}} a_j$

$\rightarrow (\mathbb{A}, a_1, \dots, a_n) \models c_k = c_i * c_j$

$\rightarrow (\mathbb{B}, d_1, \dots, d_n) \models c_k = c_i * c_j$

$\rightarrow d_k = d_i *^{\mathbb{B}} d_j$

$f(a_i *^{\mathbb{A}} a_j) = f(a_i) *^{\mathbb{B}} f(a_j)$

$\square$

Последице

1. $A \prec B$, A – коначан $\Rightarrow A \cong B$.
2. Нека су A, B структуре језика L

$A = \{a_i \mid i \in I\}$ $B = \{b_i \mid i \in I\}$

$(A, a_i)_{i \in I} \equiv (B, b_i)_{i \in I}$

$\Rightarrow A \cong B$

D. Нека је $(X, \le)$ $\underbrace{\ }_{}$ пребр. густо лин. ур. скуп без крајева. Док. да је $(X, \le) \cong (\mathbb{Q}, \le)$.

Док. $(X, \le)$, $(Y, \le)$

↳ игра постоје a_n, b_n

$(X, \le, a_1) \equiv (Y, \le, b_1)$

$(X, \le, a_1, a_2) \equiv (Y, \le, b_1, b_2)$

— — —

у непарним корацима, за дати a_i тражено b_i, а у парним обрнуто.

D. Док. да се сваки предр. лин. ур. скуп утапа у уређење рац. бр.

D. Нека је $(X, \le)$ предр. лин. ур. скуп. Ако се у $(X, \le)$ може утопити сваки пребројив добро ур. скуп, онда се у $(X, \le)$ може утопити $(\mathbb{Q}, \le)$.

D. $e(LO, \kappa) = 2^\kappa$ $(\kappa \geq \aleph_0)$

$e(T, \kappa)$ је бр. неизоморфних модела теорије T, кардиналности κ.

LO – лин. уређење

27.4.1993.

Буловски модели

L - језик првог реда ; $\mathbb{B}$ - Б. ал.

деф. $\mathfrak{A} = (A, J)$ је $\mathbb{B}$-модел (буловски модел), ако је J интерпретација тако да важи:

1° $c \in Const_L \rightarrow J(c) \in A$

2° $f \in Fun_L \rightarrow J(f) : A^k \rightarrow A$ $(ar\, f = k)$

3° $R \in Rel_L \rightarrow J(R) : A^k \rightarrow \mathbb{B}$ $(ar\, R = k)$

За $\mathbb{B} = 2$, то је класичан модел.

Претпостављено да је $\mathbb{B}$ комплетна (ако се другачије не наглашава).

$L_A = L \cup \{\underline{a} \mid a \in A\}$

деф. Буловска вредност реченице $\varphi \in Sent_{L_A}$ је $\|\varphi\|_B$, где:

1° $\|c \equiv c\| = 1$ (c - симбол константе)

2° $\|c_1 \equiv c_2\| = \|c_2 \equiv c_1\|$

3° $\|c_1 \equiv c_2\| \cdot \|c_2 \equiv c_3\| \leq \|c_1 \equiv c_3\|$

4° $\|R(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)\| = R^A(a_1, \ldots, a_n)$

5° $\|c_1 \equiv c_1'\| \cdots \|c_k \equiv c_k'\| \, \|R(c_1, \ldots, c_k)\| \leq$
$\leq \|R(c_1', \ldots, c_k')\|$

6° $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \, \|\psi\|$

7° $\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$

8° $\|\varphi \rightarrow \psi\| = \|\varphi\|' + \|\psi\|$

9° $\|\neg \varphi\| = \|\varphi\|'$

10° $\|\forall x\, \varphi x\| = \prod_{x \in A} \|\varphi \underline{a}\|$

11° $\|\exists x\, \varphi x\| = \sum_{x \in A} \|\varphi \underline{a}\|$

$\prod_{i \in I} b_i = \inf_{i \in I} b_i$ $\quad \sum_{i \in I} = \sup$

↳ постоје, јер је $\mathbb{B}$ компл.

$\mathbb{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$

деф. Формула φ је тачна акко је $\|\varphi\|_B = 1$.

Производ модела

$\mathbb{A}_i \ (i\in I)$ - модели језика L

$\mathbb{A} = \prod_{i\in I} \mathbb{A}_i$ - модел језика L

$c \in Const_L \to c^{\mathbb{A}} = \langle c^{\mathbb{A}_i} \mid i\in I\rangle$

$f \in Fun_L$:

$f^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_n) = \langle f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i),\dots,a_n(i)) \mid i\in I\rangle$

$R \in Rel_L$:

$R^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_n)$ акко $R^{\mathbb{A}_i}(a_1(i),\dots,a_n(i)) \ (i\in I)$

Ако желимо да $\mathbb{A}$ буде 2^I-модел, тада узимамо:

$R^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_n) = \langle R^{\mathbb{A}_i}(a_1(i),\dots,a_n(i)) \mid i\in I\rangle$.

Линденбаумова алгебра

$\varphi, \psi \in Sent_L$, T-теорија тог језика

деф. $\varphi \sim \psi$ акко $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$

$\sim$ је рел. екв.

Важи:

$\varphi_1 \sim \psi_1$, $\varphi_2 \sim \psi_2$ онда $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \sim \psi_1 \wedge \psi_2$

итд.

$[\varphi] = \varphi/_\sim$

$\mathcal{L} = Sent_L/_\sim = \{[\varphi] \mid \varphi \in Sent_L\}$

$(\mathcal{L}, +, \cdot, ', 0, 1)$ је Булова алгебра

$[\varphi] + [\psi] = [\varphi + \psi]$

$[\varphi]\cdot[\psi] = [\varphi\cdot\psi]$

$[\varphi]' = [\varphi']$

$0 = [\varphi \wedge \neg\varphi]$

$1 = [\varphi \vee \neg\varphi]$

↳ Ове оп. су добро дефинисане

деф. <u>Линденбаумова алгебра</u> је

$$\mathcal{L}_T = (\mathcal{L}, +, \cdot, ', 0, 1).$$

T је непротивречна акко $\mathcal{L}_T$ није дегенерисана (тј. $0 \neq 1$ у $\mathcal{L}_T$)

T је комплетна акко $\mathcal{L}_T = 2$.

$T \vdash \varphi$ акко $[\varphi] = 1$.

$T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ акко $[\varphi] \leq [\psi]$.

деф. S је <u>дедуктивно затв. теорија</u> акко $S \vdash \varphi \longrightarrow \varphi \in S$.

$\mathrm{ded}\, S = \{\varphi \mid S \vdash \varphi\}$ - дедуктивно затворење

Ако је S дедуктивно затворена, $T \subseteq S$, тада је $\{[\varphi] \mid \varphi \in S\}$ филтер у $\mathcal{L}_T$.

И обратно, проширења теорије T су филтери у $\mathcal{L}_T$.

деф. X је <u>база</u> филтера F акко је $F = \{a \in M \mid a \geq x_1 \wedge \ldots \wedge x_n,\ x_1, \ldots, x_n \in X\}$.

$L = L_0 \cup C \qquad L_0 \cap C = \emptyset$

C - скуп <u>симбола константи</u>

деф. Теорија T је <u>богата</u> акко за сваку реченицу облика $\exists x \varphi x$ језика L постоји $c \in C$, тако да

$$T \vdash \exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c.$$

<u>Пример</u>

$\mathbb{A}$ - модел, $(\mathbb{A}, a)_{a \in A}$

Д. $T = Th(\mathbb{A}, a)_{a \in A}$ је богата теорија језика $L \cup \{\underline{a} \mid a \in A\}$.

$Th\, \mathbb{B}$ - сви искази тачни у $\mathbb{B}$.

T - дотална теорија језика $L = L_0 \cup C$

Нека је $\|\varphi\| = [\varphi]$, где је $\varphi \in Sent_L$

$[\varphi]$ је класа екв. у Линденбаумовој алгебри.

Ако теорија T има модел, тада је она непротивречна.

Такође, ако је T непротивречна, тада има модел, што је доста теже доказати.

1. T проширимо до дотне непротивречне теорије S.

2. Природно дуалски модел $\mathcal{L}_S$ (над Буловом алг. $\mathbb{B}$).

3. F - ултрафилтер у $\mathbb{B}$.

Природно кононску алгебру помоћу F (посебан по рел. екв.).

$x \sim y \iff$ постоји $a \in F$, $ax = ay$

D. $\sim$ је конгруенција. Ако је F ултраф., тада је $\mathbb{B}/F = 2$

$\|\varphi\|_1 = h(\|\varphi\|)$

h - хомом. из $\mathbb{B}$ у $\mathbb{B}/F$

$c_1, c_2 \in C \quad c_1 \sim c_2$ акко $T \vDash c_1 = c_2$

$\mathbb{C} = [c]$

$A = \{ \mathbb{C} \mid c \in Const_L \}$

$F \in Fun_L \quad F^A(c_1, \ldots, c_k) = [F(c_1, \ldots, c_k)] = [c]$

$\exists x\, F(c_1, \ldots, c_k) = x \to F(c_1, \ldots, c_k) = c$, јер је теорија дотална

$R^A(c_1, \ldots, c_k) = [R(c_1, \ldots, c_k)] \to$ класа екв. у $\mathcal{L}_S$

Овако дефинисано релације и ф-је. Треба проверити сагласност.

$[c_1] = [c_1'] \quad \ldots \quad [c_n] = [c_n']$

$\Rightarrow S \vdash c_1 = c_1', \ldots, c_n = c_n'$

$S \vdash F(c_1, \ldots, c_n) = c, \; F(c_1', \ldots, c_n') = c'$

$\Rightarrow S \vdash c = c' \quad \Rightarrow \quad [c] = [c']$

4.5.1993.

Ако је S богата теорија, онда постоји $\mathcal{L}_S$-модел теорије S (тј. верификује све акс. те теорије).

$\varphi \in S$ онда $\|\varphi\|_{\mathcal{L}_S} = 1$

△ $\varphi \in S \to [\varphi]_{\mathcal{L}_S} = 1$ (по деф. Линденбаумове алгебре)

$\to \|\varphi\|_{\mathcal{L}_S} = 1$ □

Г. Сада Б.ал. је Линденбаумова алгебра неке теорије.

Даље, доказали смо да постоји $\mathcal{B}$-модел теорије S.
Треба нам 2-модел.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"'] & 2 \\ \mathcal{B}/F \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

$\|\varphi\| := h\|\varphi\|_{\mathcal{L}_S}$

$\|\varphi(c_1,\dots,c_n)\| = h\|\varphi(c_1,\dots,c_n)\|_{\mathcal{L}_S}$

Овим смо добили Буловски модел, јер је h хомоморфизам.

$\mathcal{A}$ - $\mathcal{L}_S$ модел

$\mathcal{A}'$ - 2-модел (са истим доменом као $\mathcal{A}$)

$R^{\mathcal{A}'}([c_1],\dots,[c_n]) := h\|R^{\mathcal{A}}([c_1],\dots,[c_n])\|$

$\mathcal{A}' \models \varphi([c_1],\dots,[c_n])$ акко $\mathcal{A}'_e \models \varphi(c_1,\dots,c_n)$ — Ово смо раније доказали.

$\mathcal{A}'_e$ је екстензија од $\mathcal{A}'$

$\mathcal{A}'_e \models \varphi(c_1,\dots,c_n)$ акко $\|\varphi(c_1,\dots,c_n)\|_2 = 1$

△ - индукцијом по сложености реченице φ □

Ⓣ Свака непротивречна теорија садржана је у некој непротивречној потпуној теорији.

△ T - непротивречна теорија језика L

Конструишимо низ језика и теорија првог реда.

L_n - језици

T_n - теорија језика L_n

$L_0 = L$, $T_0 = T$

Нека је C_0 нови скуп симбола константи (тј. $L_0 \cap C_0 = \emptyset$),

$|C_0| = |For_{L_0}|$

$T_1 = T_0 \cup \{ \exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c_{\exists x \varphi x} \mid \varphi x \in For_{L_0} \}$

$L_1 = L_0 \cup C_0$

Индуктивно настављамо поступак.

T_n, L_n - дати

C_n - нови скуп симбола константи, довољно велик $\longrightarrow$

$C_n \cap L_n = \emptyset$, $|C_n| = |For_{L_n}|$

$L_{n+1} = L_n \cup C_n$

$T_{n+1} = T_n \cup \{ \exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c_{\exists x \varphi x} \mid \varphi x \in For_{L_n} \}$

$C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \quad L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots$

$T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$

$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ - теорија језика $L' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$

$T \subseteq S$ - очигледно

S је потпуна теорија.

$\exists x \varphi x \in For_{L'}$

φx је $\varphi(x, c_1, \dots, c_n)$

Пошто константи има коначно много, све ће бити садржане у неком L_k.

$\Rightarrow \exists x \varphi x \in For_{L_k}$ $\longrightarrow$

$\rightarrow (\exists x\, \varphi_x \Rightarrow \varphi_{c_{\exists x \varphi_x}}) \in T_{k+1} \subseteq S$

S је непротивречна.

- прет. супротно -

$S \vdash x \neq x$

Контрадикција има коначан доказ:

$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k \vdash x \neq x$

$\theta_0, \dots, \theta_k \in T_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$

Чак је $n \geq 1$, јер је $T_0 = T$ непротивречна.

⌈ T је непротивречна у језику L. Међутим, не следи директно да је непротивречна и у проширеном језику (L').

ЛЕМА T је непротивречна у језику $L \cup C$ (C - скуп константи).

△ - прет. супротно

T - против. у језику $L \cup C$

$\theta_0, \dots, \theta_k \vdash x \neq x$

↳ доказ језика $L \cup \{c_1, \dots, c_n\}$

$\{c_1, \dots, c_n\} \neq \emptyset$, јер је T непротивречна

Претпоставимо да n најмањи број такав да је $L \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ језик на коме је T непротивречна (*)

$T \vdash x \neq x$ $\quad \varphi(x,y)$ је $x \neq x$

$T \vdash \varphi(x,y)$

$\Rightarrow T \vdash \varphi(x, c_n)$

Према леми о променљивој константи, добијемо:

$T \vdash \forall y\, \varphi(x,y)$,

у језику $L \cup \{c_0, \dots, c_{n-1}\}$.

Ово је у контрадикцији са претпоставком (*). □

Претпоставимо да је $\{\Theta_0, \dots, \Theta_k\}$ минимални подскуп од S који даје контрадикцију.

Пошто је T неконтрадикторна и у језику L', у скупу $\{\Theta_0, \dots, \Theta_k\}$ не могу бити само аксиоме теорије T, тј. мора бити неки од облика

$$\exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c_{\exists x \varphi x}$$

Постоји највеће $n \in \mathbb{N}$, тако да

$$c_{\exists x \varphi x} \in C_{n+1} \setminus C_n,$$

$$\text{и } (\exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c_{\exists x \varphi x}) \in S_0.$$

$$S_0 = T \cup \{\Theta_0, \dots, \Theta_k\}$$

Даље, сви остали симболи константи у S_0 се јављају у скуповима са мањим индексом. $\Rightarrow$

$$S_1 = S_0 \setminus \{\exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c_{\exists x \varphi x}\}$$

$$S_1, \exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c_{\exists x \varphi x} \vdash x \neq x$$

$$S_1 \vdash (\exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c_{\exists x \varphi x}) \Rightarrow x \neq x$$

$$S_1 \vdash \neg(\exists x \varphi x \Rightarrow \varphi c_{\exists x \varphi x})$$

$$S_1 \vdash \exists x \varphi x, \neg \varphi c_{\exists x \varphi x}$$

$$S_1 \vdash \exists x \varphi x, \quad S_1 \vdash \neg \varphi c_{\exists x \varphi x},$$

у језику који не садржи $c_{\exists x \varphi x}$

Према леми о нов. константи добијамо:

$$S_1 \vdash \forall x \neg \varphi(x)$$

$$S_1 \vdash \neg \exists x \varphi(x)$$

Даље, из S_1 изводимо контрадикцију, што је немогуће. □

Став компактности 11. 5. 1993.

СТАВ Нека је T теорија језика L. Ако сваки коначан подскуп од T има модел, тада и T има модел.

$\triangle$ T нема модел

$\Rightarrow$ T је противречна, према теореми потпуности.

$T \vdash \triangle$

$\varphi_0, \dots, \varphi_n \in T$: $\varphi_0, \dots, \varphi_n \vdash \triangle$

$\Rightarrow$ $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ нема модел. #

$\square$

Последице

1. Ако теорија T има произвољно велике коначне моделе, онда T има бесконачни модел.

$\triangle$ $S = T \cup \{\sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\rightarrow$

σ_n је $\exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right)$

$\mathbb{A} \models S$ акко $\mathbb{A} \models T$ и $|A| \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$

акко $\mathbb{A} \models T$ и A је беск.

$S' \subseteq S$ - коначно

$m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma_n \in S'\}$

$\mathbb{A}$ - модел теорије T, $|A| \geq m$

$\Rightarrow$ $\mathbb{A} \models S'$

$\Rightarrow$ S' је непротивречно.

$\Rightarrow$ S је непротивречно, па има модел.

$\square$

2. Нека је $\mathcal{M}$ класа свих коначних група. $\mathcal{M}$ није елементарна, тј. не постоји теорија T тако да је $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T)$.

Слично важи и за класу коначних Булових алгебри и сл.

3. Нека је $\mathcal{M}$ класа свих цикличних група. Ни ова класа није елементарна.

$\triangle$ $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T)$ T - теорија језика L

$C = \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ - нове константе

$S = T \cup \{c_r \neq c_s \mid r \neq s\}$

- теорија језика L

Сваки коначан подскуп од S има модел, па и S има модел. $\square$

4. Класа $\mathcal{M}$ ... поља просте карактеристике није аксиоматска. Класа свих поља фиксиране карак. (коначне или беск.) јесте аксиоматска.

5. Став компактности повлачи аксиому избора. {Упут. Изврши се компактификација Александрова једним тачком}

Руди Рудин: Еквивалент аксиоме избора.

Пример

$\mathcal{M}$ - класа добро уређених скупова

$\mathcal{M}$ није елементарна.

$\triangle$

- претп. супротно $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T)$

$(X, \leq)$ је добро уређен ако је линеарно уређен и не садржи бесконачни опадајући ланац.

$S = T \cup \{c_0 > c_1, c_1 > c_2, c_2 > c_3, \dots\}$

$C = \{c_0, c_1, \dots\}$ - нове константе

Сваки коначан подскуп од S има модел, па и S има модел. #

$\square$

Ⓣ Нека је $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots$ низ теорија првог реда, таквих да за свако n постоји $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models T_n$, $\mathfrak{A} \not\models T_{n+1}$.

Тада $T = \bigcup T_n$ није коначно аксиоматска теорија.

△ претп. супротно

S - коначан скуп аксиома

T, S - еквивалентне теорије

$T \vdash \varphi$ акко $S \vdash \varphi$

$S = \{\theta_0, \dots, \theta_n\}$

$\Rightarrow T \vdash \theta_k \quad (1 \le k \le n)$

$\Rightarrow T_{m_k} \vdash \theta_k$, за неко m_k

$\Rightarrow T_m \vdash \theta_k \quad (1 \le k \le n)$ за неко $m \in \mathbb{N}$;

$\Rightarrow T_m$ и S су еквивалентне теорије.

$\Rightarrow T_m$ и T су еквивалентне

$\mathfrak{A} \models T_m$, $\mathfrak{A} \not\models T_{m+1}$

$\Rightarrow \mathfrak{A} \not\models T$ #

□

<u>Пример</u>

T - теорија Аб. група без торзије

T је Аб.гр. + $\{nx = 0 \Rightarrow x = 0 \mid n \in \mathbb{N}\}$

T_n = Аб.гр. + $\{2x = 0 \Rightarrow x = 0, \dots, nx = 0 \Rightarrow x = 0\}$

$T = \bigcup T_n$

Теорија T није коначно аксиоматска

Д. Теорија Аб. група са дељењем није коначно аксиоматска, као ни теорија поља карактеристике нула.

НЕСТАНДАРДНИ МОДЕЛ АРИТМЕТИКЕ

$(M,+,\cdot,',0) \equiv (N,+,\cdot,',0)$, $M \not\cong N$

M и N су елементарно еквивалентни, али не и изоморфни модели Пеанове аритметике.

$Th(N) \cup \{c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha,\beta \in R\} = S$

S је коначно непротивречно, па има модел. $M = (M,+,\cdot,',0)$.

$|M| \geq 2^{\aleph_0}$

Д. Нека је M нестандардни модел аритметике. Тада је

$$t(M,\leq) = \omega_0 + \zeta\cdot\lambda,$$

где је $\omega_0 = t(N,\leq)$

$\zeta = t(Z,\leq)$

λ – тип густог уређења без крајева

Следи, $|M| = \aleph_0 \Rightarrow \lambda = t(Q,\leq)$ ⊥

{УПУТ. $x \sim y$ акко $|x-y| < \infty$ }

18.5.1993.

Т: Сколем–Левенхајмова теорема

Ⓣ (доња)

Нека је A беск. модел језика L, $|A| \geq \|L\|$ $(\|L\| = |For_L|)$. Ако је $X \subseteq A$, онда постоји B тако да:

1° $B \prec A$

2° $X \subseteq B$

3° $|B| = \max(\|L\|, |X|)$

△

$X_0 = X$

S_n – скуп свих формула језика $L \cup \{a \mid a \in X_n\}$

$X_{n+1} = X_n \cup \{a \in A \mid a$ је сведок за $A \models \exists x\varphi_x$, $\varphi_x \in S_n\}$

$= X_n \cup \{a_{\exists x\varphi_x} \in A \mid A \models \varphi[a_{\exists x\varphi_x}],$

$\varphi_x \in S_n, A \models \exists x\varphi_x\}$

$B = \bigcup_n X_n$ $\quad |B| = \sup_{n\in N} |X_n|$ ⟶

$|X_n| \leq \max(\|L\|, |X|)$

(i) $n=0$ – важи, јер $X_0 = X$

(ii) $|X_{n+1}| \leq |X_n| + |\{a \mid a \text{ је следок} \dots\}|$

$\leq |X_n| + |S_n|$

$\leq |For_L \times X_n^{\omega}|$

$\ulcorner X_n^{\omega}$ – скуп свих коначних низова у X_n

$$|X_n^{\omega}| = \begin{cases} \aleph_0, & X_n \text{ – коначан} \\ |X_n|, & X_n \text{ – беск.} \end{cases} \lrcorner$$

$= \|L\| \cdot \max\{\aleph_0, |X_n|\}$

$= \max\{\|L\|, |X_n|\}$

$\ulcorner \max\{\varkappa, \lambda\} = \varkappa \cdot \lambda$, за беск. кардинале

$\llcorner$ следи из $\varkappa^2 = \varkappa$ $\lrcorner$

$\leq \max\{\|L\|, |X|\}$

$\Rightarrow |B| \leq \max\{\|L\|, |X|\}$

2° – очигледно важи

3° – показали смо

1° $B \preceq A$

B је затв. за операције

$a, b \in B$

$\rightarrow a \in X_n, b \in X_m$

$\rightarrow a, b \in X_n$ (ако је $n \geq m$)

$A \models \exists x (a * b = x)$, c – следок

$\rightarrow c \in X_{n+1}$

$\rightarrow a * b = c$, $c \in B$

Слично се проверава и за остале произвољне функције. Испуњени су услови Тарски-Вота $\odot$, па је $B \preceq A$.

$\square$

(T) (Горња)

Нека је $\mathbb{A}$ беск. модел језика L. Тада за сваки кардинал

$$\varkappa \geq \max\{|\mathbb{A}|, \|L\|\}$$

постоји модел $\mathbb{B}$ језика L:

1° $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$

2° $|\mathbb{B}| = \varkappa$

$\triangle$ $T = Th(\mathbb{A}, a)_{a \in A} \cup \{c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta\}$

$|I| = \varkappa$

$C = \{c_\alpha \mid \alpha \in I\}$ - нови симболи константи

$S \subseteq T$ - коначан $\rightarrow$ S има модел

(Тај модел је нека проста експанзија језика L.)

Проста експанзија - додате су само нове константе $\dashv$

Према (T) компактности, постоји

$$\mathbb{D} \models T.$$

$$\mathbb{D} = (\mathbb{D}', d_a, e_\alpha)_{a \in A, \alpha \in I}$$

$d_a = \underline{a}^{\mathbb{D}}$ $\quad e_\alpha = c_\alpha^{\mathbb{D}}$

$|D| \geq |I| = \varkappa$.

$f : a \longmapsto d_a$

f је елементарно утапање $\mathbb{A}$ у $\mathbb{D}$.

$$f : \mathbb{A} \xrightarrow{\prec} \mathbb{D}'$$

$$f(\mathbb{A}) \prec \mathbb{D}'$$

Према доњој ЛС (T) можемо конструисати $\mathbb{B} \prec \mathbb{D}$, тако да је

$f(\mathbb{A}) \prec \mathbb{B}$

$|\mathbb{B}| = \max(|X|, \|L\|)$.

$X = f(A) \cup Y$, Y узимамо довољно велико да буде $|\mathbb{B}| = \varkappa$. $\square$

Последице

1. Нека је $\mathbb{A}$ беск. модел најмање преб. језика. Тада за сваки беск. кард. број $\varkappa$ постоји модел $\mathbb{B}$ тог језика, такав да је

$$|\mathbb{B}| = \varkappa$$

и $\mathbb{A} \prec \mathbb{B}$ или $\mathbb{B} \prec \mathbb{A}$.

2. Ако теорија пребројивог језика има беск. модел, онда има модел сваке беск. кардиналности.

3. Постоје произвољно велики модели Пеанове аритметике.

P – скуп простих бројева

$P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$

$X \subseteq P$ $S_X = \{\underline{a} \mid c \mid a \in X\} \cup \{\underline{a} \nmid c \mid a \in P \setminus X\}$

$PA \cup S_X$ је коначно непротивречна, па има модел пребројив модел $\mathbb{A}_X$.

$$\mathbb{A}_X = (\mathbb{A}'_X, \underline{a}^{\mathbb{A}_X}, c^{\mathbb{A}_X})_{a \in P}$$

$$PA \models \mathbb{A}'_X$$

Тип модела $\mathbb{A}'_X$ је t_X, јер постоји $b \in A_X$:

$p \in X \Rightarrow p \mid b$

$p \in P \setminus X \Rightarrow p \nmid b$.

Пребројив модел може да има највише пребројиво много типова (јер бројеви који се односе на тај модел биће различити!), а сваки тип има модел.

Следи да постоји континуум много пребројивих неизоморфних модела ПА, који су елементарно еквиваленти.

СКОЛЕМОВ ПАРАДОКС. Ако је ZFC теорија скупова непротивречна, онда она има пребројив модел.

П. Ск.-Левен. Т је ел. акс. изводи.

Пример. Покажимо да је доказ ...

∃ корен:

$\forall x \exists \lambda \geq x,\ x^2 = \lambda$

$(A, +)$ $+ : A^2 \to A$ ...

19.5.1993.

$(\mathbb{N}, \in)$

$\in$ је деф.:

$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$

$2 \in 7,\ 1 \in 7,\ 0 \in 7$ остали $\notin 7$

$(V_\omega, \in)$: $V_0 = \emptyset$ $V_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$

$V_{n+1} = V_n \cup P(V_n)$

П. $(\mathbb{N}, \in) \cong (V_\omega, \in)$

Т Нека теорија T нема коначних модела, и нека је категорична у неком бесконачном кардиналу κ (тј. сви њени модели те кард. су изоморфни). Тада је T комплетна, па ако је скуп њених аксиома рекурзиван онда је и одлучива.

Претпоставићемо и да је језик највише пребројив.

→

△ $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ - модели за T

$\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$:

$\mathbb{C}$ - модел кард. $\varkappa$

$\Rightarrow \mathbb{A} \equiv \mathbb{C}$ (по Ск.-Левенхајмовој (Т))

$\mathbb{B} \equiv \mathbb{C}$

$\Rightarrow \mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$

T је потпуна:

$T \nvdash \varphi, \ T \nvdash \neg\varphi$

$\mathbb{A}, \mathbb{B}$ - модели за T

$\mathbb{A} \models \varphi, \ \mathbb{B} \models \neg\varphi$

$\Rightarrow \mathbb{A} \not\equiv \mathbb{B} \ \bot$

$\square$

Примери

1. T - теорија линеарног густог лин. уређења без крајева

T је $\aleph_0$-категорична. ($\mathbb{Q}$!)

$\Rightarrow$ T је комплетна и одлучива.

(1)

2. T - теорија релације еквиваленције, где је свака класа екв. бесконачна и има беск. много класа екв.

Ова теорија је $\aleph_0$-категорична.

3. T - теорија рел. екв. где је свака класа бесконачна

- тип пребројивих модела:

$tM = k$ - ако има k класа екв.

$tM = \infty$ - ако их има беск. много

Сваком типу одговара по једна $\aleph_0$-категорична теорија, па смо добили сва комплетна проширења за T:

$T_1, T_2, T_3, \ldots, T_\infty$.

T има пребројиво много комплетних проширења, па је одлучива.

4. T - теорија рел. екв.

Класа екв. је или коначна или беск.

T_k - посматрамо k-торку $(q_1, \dots, q_k)$ која нам каже колико тачно класа има елемената

Слично као малопре можемо добити предр. много коначних прошире-ња, па је и T одлучива.

Монадички рачун

- језик се састоји само од унарних предиката

(T) Монадички рачун је одлучив.

△

- случај са два предиката: P, Q

- посматрамо скупове:

$PQ,\ P^cQ,\ PQ^c,\ P^cQ^c$

$t\,M = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ - тип модела

$\alpha = |PQ| \quad \beta = |P^cQ|$

$\gamma = |PQ^c| \quad \delta = |P^cQ^c|$

Посматрамо само пребројиве моделе. Ту имамо само пребројиво много типова, а сваког типа одговара $\aleph_0$-категорична теорија (слично као у примеру 3), наша теорија ће бити одлучива. □

Tokom školske 1999/2000 godine MATEMATIČKI FAKULTET organizuje dvosemestralni kurs pod nazivom

TEORIJA MODELA

Kurs je predvidjen za studente redovnih studija matematike četvrte godine kao *izborni predmet*, za studente postdiplomskih studija matematike kao *obavezan predmet* na grupi za matematičku logiku i kao *izborni predmet* na ostalim grupama postdiplomskih studija. Studentima redovnih studija pruža se mogućnost da im se položeni ispit iz ovog predmeta delimično ili u potpunosti prizna kao ispit iz odgovarajućeg predmeta na budućim postdiplomskim studjama.

Opis kursa:

1. Prvi deo: Lekcije iz klasične teorije modela
    a. Konstrukcija ultraproizvoda i ultrastepena.
    b. Teorema kompaktnosti.
    c. Löwenheim-Skolemove teoreme.
    d. Zasićene strukture i teoreme o ispuštanju tipova.
    e. Modelski potpune teorije.
    f. Klasifikacija modela.
1. Drugi deo: Primene teorije modela
    a. Elementi nestandardne analize: zasnivanje klasičnih pojmova analize, Loebova mera, rešavanje odredjenih zadataka u realnoj i funkcionalnoj analizi i diferencijalnoj geometriji.
    b. Algebarska i diferencijalna polja u svetlu teorije modela. Rešenje XVII Hilbertovog problema.
3. Treći deo: Modeli aritmetike
    a. Gödelove teoreme nepotpunosti.
    b. Nestandardni modeli aritmetike.
    c. Drugi i Deseti Hilbertov problem.
    d. Univerzum konačne kombinatorike.

Kursom će rukovoditi prof. Žarko Mijajlović.

Predavanja će početi 1. novembra 1999. godine.

Prijave za učešće na kursu mogu se predati u Sekreterjatu Matematičkog fakulteta, ili direktno nastavniku.

Tokom školske 1999/2000 godine MATEMATIČKI FAKULTET organizuje dvosemestralni kurs pod nazivom

TEORIJA MODELA

Kurs je predvidjen za studente redovnih studija matematike četvrte godine kao *izborni predmet*, za studente postdiplomskih studija matematike kao *obavezan predmet* na grupi za matematičku logiku i kao *izborni predmet* na ostalim grupama postdiplomskih studija. Studentima redovnih studija pruža se mogućnost da im se položeni ispit iz ovog predmeta delimično ili u potpunosti prizna kao ispit iz odgovarajućeg predmeta na budućim postdiplomskim studjama.

Opis kursa:

1. Prvi deo: Lekcije iz klasične teorije modela
   a. Konstrukcija ultraproizvoda i ultrastepena.
   b. Teorema kompaktnosti.
   c. Löwenheim-Skolemove teoreme.
   d. Zasićene strukture i teoreme o ispuštanju tipova.
   e. Modelski potpune teorije.
   f. Klasifikacija modela.

1. Drugi deo: Primene teorije modela
   a. Elementi nestandardne analize: zasnivanje klasičnih pojmova analize, Loebova mera, rešavanje odredjenih zadataka u realnoj i funkcionalnoj analizi i diferencijalnoj geometriji.
   b. Algebarska i diferencijalna polja u svetlu teorije modela. Rešenje XVII Hilbertovog problema.

3. Treći deo: Modeli aritmetike
   a. Gödelove teoreme nepotpunosti.
   b. Nestandardni modeli aritmetike.
   c. Drugi i Deseti Hilbertov problem.
   d. Univerzum konačne kombinatorike.

Kursom će rukovoditi prof. Žarko Mijajlović.

Predavanja će početi 1. novembra 1999. godine.

Prijave za učešće na kursu mogu se predati u Sekreterjatu Matematičkog fakulteta, ili direktno nastavniku.

B. A.

$(x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z)$ $\quad$ $(x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z)$

$x\wedge y = y\wedge x$ $\quad$ $x\vee y = y\vee x$

$x\wedge(x\vee y) = x$ $\quad$ $x\vee(x\wedge y) = x$

$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ $\quad$ $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$

$x\wedge x' = 0$ $\quad$ $x\vee x' = 1$

Primeri:

2, 2^n, 2^X

$P(X)$, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, $Ro(\mathcal{X})$

Ω_P

$x\vee 0 = x\vee(x\wedge x') = x$ $\quad$ (Aps.)

$x\wedge 1 = x\wedge(x\vee x') = x$

~~$x\vee 0 = x\vee(x\wedge x') = (x\vee x)\wedge(x\vee x') = (x\vee x)\wedge 1 = x\vee x$~~

$x\wedge 1 = x\wedge(x\vee x') = (x\wedge x)\vee(x\wedge x') = (x\wedge x)\vee 0 = x\wedge x$

$x\wedge x = x\wedge(x\vee 0) = x$

$x\vee x = x\vee(x\cdot 1) = x$

$x\wedge 0 = x\wedge(x\wedge x') = (x\wedge x)\wedge x' = x\wedge x' = 0$, $\quad x\vee 1 = x\vee(x\vee x') = (x\vee x)\vee x' = x\vee x' = 1$

~~[illegible]~~ $x\wedge y = 0,\ x\vee y = 1 \implies y' = x$

A: $y = y\vee 0 = y\vee(x\wedge x') = (y\vee x)\wedge(y\vee x') = 1\cdot(y\vee x')$

$= y\vee x' = (y\vee x')\wedge(x\vee x') = x'\vee(x\wedge y)$

$= x'\vee 0 = x'$

~~[illegible]~~

$x' = x'\vee(x\wedge y) = (x\vee x')\wedge(x'\vee y)$

$= x'\vee y$

B, $x'' = x$: $\quad x'\wedge x = 0,\ x'\vee x = 1$

$\rightarrow x'' = x$

Posl. $2\models u = v \implies BA\models u = v$

Dok. $u = \sum_{\alpha\in\Gamma_u} X^\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma_v} X^\alpha = v$

$\Gamma_u = \{\alpha\in 2^n \mid u(\alpha) = 1\}$

C. $(x\wedge y)' = x'\vee y'$, $(x\vee y)' = x'\wedge y'$

$(x\wedge y)\vee(x'\vee y') = 1$

$(x\wedge y)\wedge(x'\vee y') = 0$ $\implies (x\wedge y)' = x'\vee y'$

$x\le y \iff x = x\wedge y$ $\quad$ urederje

$x\le x$ $\quad x\wedge x = x$

$x\le y,\ y\le x$ $\quad x = x\wedge y = y$

$x\le y,\ y\le z$, $\quad x = x\wedge y,\ y = y\wedge z$, $\quad x\wedge z = (x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z) = x\wedge y = x$

$(x\wedge y)\wedge x = x\wedge y$, $\quad (x\wedge y)\wedge y = y$ $\quad x\wedge y\le x, y$

M ~~[illegible]~~ $z\le x, y$. $\quad x = x\wedge z,\ y = y\wedge z$,

$z\wedge(x\wedge y) = (z\wedge x)\wedge y = z\wedge y = z$, $\quad$ t.j. $z\le x\wedge y$

$\rightarrow x\wedge y = \inf\{x, y\}$

$x\vee y = \sup\{x, y\}$

$t(x, Y) = t(1, Y)x + t(0, Y)x'$, $\quad t = \sum_{\alpha\in 2^N} t_\alpha X^\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma} X^\alpha$, $\quad \Gamma = \{\alpha\in 2^n \mid t_\alpha = 1\}$

$T \subseteq S$ kompl.

1° $S \vdash p$ ili $S \vdash \neg p$

$\alpha \in 2^{\mathcal{P}}$

$\alpha(p) = 1$ ako $S \vdash p$

$\alpha(p) = 0$ ako $S \vdash \neg p$

pp. $T \vdash A$

$S \vdash A$ $(*)$

$S \vdash p_1', \ldots, p_n'$

$p_1', \ldots, p_n' \vdash A'$

$S \vdash A'$

pp. $A'[\alpha] = 0$. tada $A' = \neg A$

pa $S \vdash \neg A$ # $(*)$

Dakle $A[\alpha] = 1$

ako $A \in S$ onda $S \vdash A$ pa $\bigwedge_{A \in S} A[\alpha] = 1$

$\Rightarrow$ S ima model

$\Rightarrow$ T ima model.

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$

$T_0 = T$

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\varphi_n\}, & T_n \vdash \varphi_n \\ T_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & T_n \nvdash \varphi_n \end{cases}$$

$T_n, \neg\varphi_n \vdash \Delta$

$T_n \vdash \neg\varphi_n \Rightarrow \Delta$

$T_n \vdash \neg\Delta \Rightarrow \varphi_n$

$T_n \vdash \varphi_n$ #

$S = \bigcup_n T_n$

$S \vdash \Delta \rightarrow \bigvee_n T_n \vdash \Delta$ #.

- S neprotusl.
- $T \subseteq S$
- S kompletna.

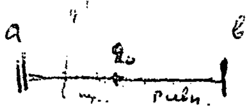
T. K. $\quad T$ k. n.

pp T nema model.

tada T protuslovna (t.p.)

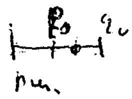
$T \vdash \Delta$

$\bigvee_{\substack{S \subseteq T \\ \text{kon}}} S \vdash \Delta$ #.

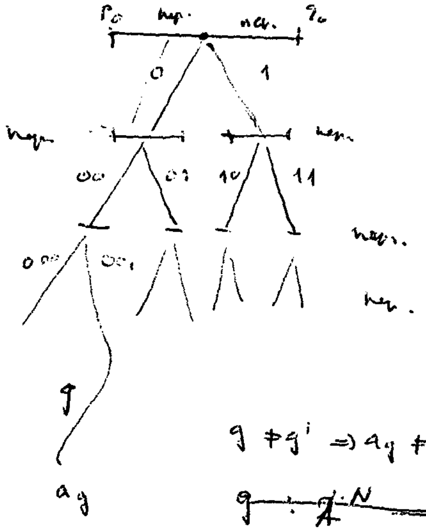


F zatv.
$|F| > \aleph_0$

q_0 - neprebr. $\quad q_0 = \inf \{ q \in \mathbb{Q} \mid [q, b]_F$ prebr. $\}$



$p_0 = \sup \{ p \in \mathbb{Q} \mid [a, p]_F$ prebrojiv $\}$



Ako je F neprebrojiv zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ onda postoje $F_1, F_2 \subseteq F$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ i F_1, F_2 su neprebrojivi.

presjek ..

$g \neq g' \Rightarrow a_g \neq a_{g'}$

~~$g : \mathbb{N} \to$~~ $\quad 2^{\mathbb{N}}$ - svi nizovi

$\underline{|2^{\mathbb{N}}| = c}$

T. SDNF

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_{n-1},0)\bar{x}_n + f(x_1,\dots,x_{n-1},1)x_n$$

$$f(X) = \sum_{\alpha\in 2^n} f(\alpha) X^\alpha$$

$$f(X) = \sum_{\substack{\alpha\in 2^n\\ \alpha_n=0}} f(\alpha)\, x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\bar{x}_n + \sum_{\substack{\alpha\in 2^n\\ \alpha_n=1}} f(\alpha)\, x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n$$

ako je f kontr.
onda $SDNF(f)=\perp$

$$= \sum_{\alpha\in 2^n} f(\alpha)\, x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$= \sum_{\alpha\in\Gamma} X^\alpha \quad \text{SDNF}, \qquad \Gamma\subseteq 2^n, \quad \Gamma=\{\alpha\in 2^n \mid f(\alpha)=1\}$$

$(\Gamma\neq\emptyset)$

Može i bez tog uslova:
$\sum_{x\in\emptyset} x = m$ - najm. el.
$\prod_{x\in\emptyset} x = M$ - najv. el.

$p\Rightarrow q\wedge r$

p	q	r	$p\Rightarrow(q\wedge r)$
0	0	0	1

p	$\Rightarrow$	q	$\wedge$	r
	0			
1			0	
		0		0
		0		1
		1		0
1		1		1
0		0		0
0		0		1
0		1		0
0		1		1

DNF:

$pqr+\bar{p}qr+\bar{p}q\bar{r}+\bar{p}\bar{q}r+\bar{p}\bar{q}\bar{r}$

$pqr+\bar{p}q(r+\bar{r})+\bar{p}\bar{q}(r+\bar{r})$

$pqr+\bar{p}q+\bar{p}\bar{q}$

$pqr+\bar{p}(q+\bar{q})$

$pqr+\bar{p}$

$pqr+\bar{p}+\bar{p}qr$

$qr(p+\bar{p})+\bar{p}$

$qr+\bar{p}$ MNDF

$(p\wedge q\wedge r)\vee\cdots\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

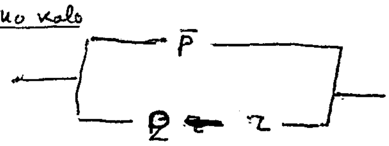
T. SKNF

$$f(X)=\prod_{\alpha\in\Gamma'}(x_1^{\alpha_1}+\dots+x_n^{\alpha_n}) \qquad \Gamma'=\{\alpha\in 2^n \mid f(\alpha)=0\}$$

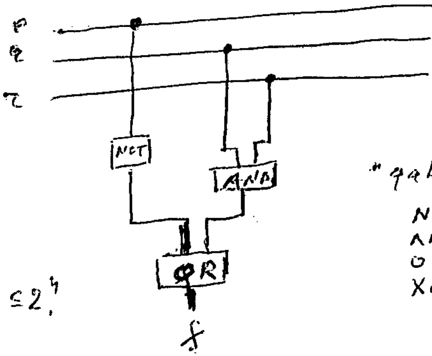
$$=\prod_{\alpha\in\Gamma'}(x_1^{\alpha_1}+\dots+x_n^{\alpha_n})$$

ako je f taut. onda $SKNF(f)=\top$

prekidačko kolo



logičko kolo



"gates"
NOT $\neg$
AND $\wedge$
OR $\vee$
XOR $\veebar$

T. funkcionalne potpunosti

$g: 2^n\to 2$ onda postoji logička f-ja f t.d. $g=f$

D. Svih f-ja $g: 2^n\to 2$ ima 2^{2^n}.
Neka je $\mathcal{F}=\{g \mid g: 2^n\to 2\}$,
$S=\{f \mid f$ je iskazna f-ja$\}$

1° $S\subseteq\mathcal{F}$

2° $|\mathcal{F}|=2^{2^n}$

Neka su $f_1=\sum_{\alpha\in\Gamma_1}X^\alpha$, $f_2=\sum_{\alpha\in\Gamma_2}X^\alpha$, $\Gamma_1\neq\Gamma_2$, $\Gamma_1,\Gamma_2\subseteq 2^n$.
Tada postoji $\beta\in\Gamma_1\setminus\Gamma_2$ (ili $\Gamma_2\setminus\Gamma_1$).

$$f_1(\beta)=\sum_{\alpha\in\Gamma_1}\beta^\alpha=\beta^\beta=1$$

$$f_2(\beta)=\sum_{\alpha\in\Gamma_2}\beta^\alpha=0$$

jer $\beta^\alpha=1$ akko $\alpha=\beta$
$\beta^\alpha=\beta_1^{\alpha_1}\cdots\beta_n^{\alpha_n}$

$0^0=\bar{0}=1$
$1^1=1$
$x^0=\bar{x}$
$x^1=x$

Dakle S ima elemenata koliko i $\mathbb{P}(2^n)$, tj.

3° $|S|=2^{2^n}$

Iz 1, 2, 3 sledi $S=\mathcal{F}$.

Nap. T.F.K. sledi i direktno, prema
dokazu T. SDNF (jer svaka tablica, dakle f-ja)
ima SDNF, dakle i predstavljiva je pomoću isk. f-le.

T. INTERPOLACIJE

Ako je $\varphi \Rightarrow \psi$ tautologija, onda postoji θ t.d.

$\models \varphi \Rightarrow \theta$, $\models \theta \Rightarrow \psi$ i $I(\theta) \subseteq I(\varphi) \cap I(\psi)$

$I(\varphi)$ = skup iskaznih slova f-le φ

$I(p \Rightarrow q \wedge r) = \{p, q, r\}$.

D. $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_n)$

$\psi = \psi(q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_n)$

$I(\varphi) = \{p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_n\}$

$I(\psi) = \{q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_n\}$

$\{r_1, \dots, r_n\} \cap \{p_1, \dots, p_k\} = \emptyset$

$\{r_1, \dots, r_n\} \cap \{q_1, \dots, q_m\} = \emptyset$

$I(\varphi) \cap I(\psi) = \{r_1, \dots, r_n\}$

$\begin{pmatrix} p_1 \dots p_k & q_1 \dots q_m & r_1 \dots r_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_k & \beta_1 \dots \beta_m & \varkappa_1 \dots \varkappa_n \end{pmatrix}$

Neka je ~~$\theta = (\bigvee_\alpha \varphi(\alpha, \dots)) \wedge (\bigwedge \psi(\beta, \dots$~~

$$\theta = \Big(\bigvee_{\alpha \in 2^k} \varphi(\alpha, r_1, \dots, r_n)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\beta \in 2^m} \psi(\beta, r_1, \dots, r_n)\Big)$$

Može i samo $\theta = \bigvee_\alpha \varphi(\alpha, r_1, \dots, r_n)$

1. $\models \varphi \Rightarrow \theta$.

Neka je $(\mu_1, \dots, \mu_k, \varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ valuacija za $(p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_n)$.

PP $\varphi(\mu_1, \dots, \mu_k, \varkappa_1, \dots, \varkappa_n) = 1$.

Tada $\bigvee_{\alpha \in 2^k} \varphi(\alpha, \varkappa_1, \dots, \varkappa_n) = 1$ jer $\mu \in 2^k$

Takođe $\bigwedge_\beta \psi(\beta, \varkappa_1, \dots, \varkappa_n) = 1$ jer

$(\varphi \Rightarrow \psi)[\mu, \beta, \varkappa] = 1$, $\beta \in 2^m$

jer $\varphi[\mu, \beta, \varkappa] = \varphi[\mu, \varkappa] = 1$ PO PP.

Dakle $\theta[\mu_1, \dots, \mu_k, \varkappa_1, \dots, \varkappa_n] = \theta[\varkappa_1, \dots, \varkappa_n] = 1$

pa $\models \varphi \Rightarrow \psi$.

2. $\models \theta \Rightarrow \psi$.

PP. $\theta[\varkappa_1, \dots, \varkappa_n] = 1$

Tada $\bigwedge_\beta \psi(\beta_1, \dots, \beta_k, \varkappa_1, \dots, \varkappa_n) = 1$

pa $\psi[\beta, \varkappa_1, \dots, \varkappa_n] = 1$, $\beta \in 2^k$, pa

$(\theta \Rightarrow \psi)[\beta, \varkappa] = 1$, $\beta \in 2^k$ pa

$\models \theta \Rightarrow \psi$

<u>Primer</u> $\underset{\varphi}{p \wedge q} \Rightarrow \underset{\psi}{p \vee r}$

$\theta = ((p \wedge 0) \vee (p \wedge 1)) \wedge (p \vee 0) \wedge (p \vee 1)$

$= p \wedge p$

$= p$

<u>Nap.</u> $\models \varphi \Rightarrow \psi$ je tautologija akko iz $\varphi[\alpha] = 1$ sledi $\psi[\alpha]$, za svaku val. α.

T. relevantnosti

Ako $\models \varphi \Rightarrow \psi$, $\not\models \neg\varphi$, $\not\models \psi$, onda $I(\varphi) \cap I(\psi) \neq \emptyset$.

D. Neka je prema T. interpolacije θ t.d. $\models \varphi \Rightarrow \theta$, $\models \theta \Rightarrow \psi$, $I(\theta) \subseteq I(\varphi) \cap I(\psi)$.

PP $I(\theta) = \emptyset$. Tada 1. $\theta = \top$, $\models \top \Rightarrow \psi$, pa $\models \psi$ #

2. $\theta = \bot$, $\models \varphi \Rightarrow \bot$, pa $\models \neg\varphi$ #.

T. maus. IR

$$\Sigma \begin{cases} P_{aa'} \wedge P_{bb'} \Rightarrow P_{ab,a'b'} \quad , \ a,a',b,b' \in A & \underline{\text{hom}} \\ P_{aa'} \Rightarrow \neg P_{ba'} \quad , \ a,a',b \in A, \ b \neq a & \underline{1-1} \\ \bigwedge_{b\in A} \bigvee_{a \in A} P_{ab} & \underline{\text{onto}} \quad \boxed{P_{ab} : \ "b = fa"} \\ P_{aa'} \Rightarrow \neg P_{ab} \ ; \ a,a',b \in A, \ b \neq a' & \underline{\text{fun}}. \end{cases}$$

$\varphi = \bigwedge_i \varphi_i$

$\varphi[\alpha] = \prod \varphi_i[\alpha]$

— $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{A}$ $\quad \alpha_f : \mathcal{P} \to 2$

$\alpha_f(P_{ab}) = 1$ akko $b = f(a)$

Tada α verifikuje aksiome Σ

— ~~Ako~~ α verifikuje aks. iz Σ.

i neka je f def. sa $b = fa$ akko $\alpha(P_{ab}) = 1$

Tada $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{A}$.

— Dakle $|\mathcal{F}| = |\mathrm{Aut}\,\mathbb{A}|$, gde

$$\mathcal{F} = \{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha \text{ je model za } \Sigma\}$$

$\Phi : \mathcal{F} \xrightarrow[1-1]{na} \mathrm{Aut}\,\mathbb{A}$

$\Phi(\alpha) = f_\alpha$

$\Phi^{-1}(f) = \alpha_f$

— $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$ gde

zatv. $\mathcal{F}_1 = \bigcap_{a,a',b,b'} \left(\{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha(P_{aa'}) = 0\} \cup \{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha(P_{bb'}) = 0\} \cup \{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha(ab, a'b')\} \right)$

zatv. $\mathcal{F}_2 = \bigcap_{a,a'} \left(\{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha(P_{aa'}) = 0\} \cup \bigcap_{b \neq a} \{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha(P_{ba'}) = 0\} \right)$

$\mathcal{F}_2'$ slično kao $\mathcal{F}_2$ (fun.)

G_δ $\quad \mathcal{F}_3 = \bigcap_b \bigcup_a \{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha(P_{ab}) = 1\}$

— $\mathcal{F}$ - G_δ podskup od K, dakle $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$.

zatv. $\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_2' = \bigcap \left(\{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha(P_{aa'}) = 0 \cup \bigcap_{b \neq a'} \{\alpha \in 2^{\mathcal{P}} \mid \alpha(P_{ab}) = 0\} \right)$

$$\Sigma : \bigwedge_{a,a',b,b' \in A} (P_{aa'} \wedge P_{bb'} \Rightarrow P_{ab,a'b'}) \quad \underline{\text{Hom}}$$

$$\bigwedge_{a,a' \in A} \left(P_{aa'} \Rightarrow \bigwedge_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} \neg P_{ba'} \right) \quad \underline{1-1}$$

$$\bigwedge_{b \in A} \bigvee_{a \in A} P_{ab} \quad \underline{\text{onto}}$$

$$\bigwedge_{a,b} \left(P_{aa'} \Rightarrow \bigwedge_{b \neq a'} \neg P_{ab} \right) \quad \underline{\text{fun.}}$$

$(\forall a,a',b,b' \in A)\,(a' = fa \wedge b' = fb \Rightarrow a'b' = fab)$
hom.

$(\forall a,a' \in A)\,(a' = fa \Rightarrow \forall b \in A \setminus \{a\}\ a' \neq fb)$
~~fun.~~ 1-1

$(\forall b \in A)\,(\exists a \in A)\,(b = fa)$ $\quad$ na

~~Pa...~~

f - fun.

$P_{ab} \wedge P_{ac} \Rightarrow b = c$

$P_{ab} \Rightarrow \neg P_{ac}$, $\quad c \neq b$

$$\bigwedge_{a,b} \left(P_{ab} \Rightarrow \bigwedge_{c \neq b} \neg P_{ac} \right)$$

$f = \{(a,b) \mid \alpha(a,b) = 1\}$
f je fun.

— Za Borelove skupove važi CH.

— Kantorov skup $K \subseteq \mathbb{R}$ je zatv. podskup moći $\mathfrak{c}$

— $2^X \approx K$ ako je X prebrojiv.

Ako je A prebrojiv onda $2^{A \times A} \approx 2^{\mathbb{N}} \approx K$.

T.K. S skup isk. f-la.
Ako svaki kon. podskup od S ima model onda S ima model, tj.
Ako za svaki kon. $\Delta \subseteq S$ postoji $\alpha \in 2^{P}$ t.d. za sve $\varphi \in \Delta$ važi $\varphi[\alpha]=1$, onda postoji $\alpha \in 2^{P}$ t.d. za svaki $\varphi \in S$ $\varphi[\alpha]=1$.

$$\bigwedge_{K\Delta \subseteq S} \bigvee_{\alpha \in 2^P} \bigwedge_{\varphi \in \Delta} \varphi[\alpha]=1 \Rightarrow \bigvee_{\alpha \in 2^P} \bigwedge_{\varphi \in S} \varphi[\alpha]=1.$$

D. $\Sigma = \{ \hat{\varphi}^{-1}(\{1\}) \mid \varphi \in S \}$

$\Sigma' \subseteq \Sigma$ kon., $\Sigma' = \{ \hat{\varphi}_1^{-1}(\{1\}), \dots, \hat{\varphi}_k^{-1}(\{1\}) \}$

$\hat{\varphi}_1^{-1}(\{1\}) \cap \dots \cap \hat{\varphi}_k^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$

$\alpha \in \hat{\varphi}_1^{-1}(\{1\}) \cap \dots \cap \hat{\varphi}_k^{-1}(\{1\})$

$\hat{\varphi}_1[\alpha]=1, \dots, \hat{\varphi}_k[\alpha]=1$; α model za $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$

Prema T.T.K $\bigcap \Sigma \neq \emptyset$, tj: postoji $\alpha \in 2^P$ t.d. $\bigwedge_{\varphi \in \Sigma} \varphi[\alpha]=1$.

Primer: $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots$ taut.
Tada za neki n $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ je taut.

pp. ni za jedan n $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ nije taut.
Dakle za svaki kon. $\{\varphi_{n_1}, \dots, \varphi_{n_k}\}$ postoji α t.d. $\hat{\varphi}_{n_1}(\alpha)=0, \dots, \hat{\varphi}_{n_k}=0$. Dakle.
$\neg\hat{\varphi}_{n_1}[\alpha]=1, \dots, \neg\hat{\varphi}_{n_k}[\alpha]=1$.
Sledi, svaki kon. podskup od $S=\{\neg\varphi_i \mid i \in N\}$ ima model, pa i S ima model α, tj:
$\neg\varphi_1(\alpha)=1, \neg\varphi_2(\alpha)=1, \dots$
tj. $\varphi_1(\alpha)=0, \varphi_2(\alpha)=0, \dots$ pa φ nije tautologija

$\hat{\varphi}: 2^P \to 2$

$\hat{\varphi}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$\hat{\varphi}^{-1}(2) = 2^P$

$\hat{\varphi}^{-1}(\{0\}) =$

$\bar{u}_p: 2^P \to 2$

$\bar{u}_p(\alpha) = \alpha(p)$

L. $\hat{\varphi}: 2^P \to 2$ neprekidna.

$\equiv$ $\varphi = \neg\psi$

$\hat{\varphi}^{-1}(\{0\}) = \{\alpha \mid \varphi[\alpha]=0\}$
$= \{\alpha \in \mid \psi[\alpha]=1\} = \hat{\psi}^{-1}(\{1\})$ otv. zat.

$\varphi = \psi \wedge \theta$

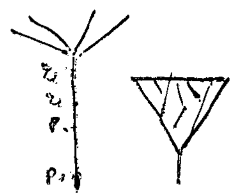
$\hat{\varphi}^{-1}(\{0\}) = \{\alpha \mid \varphi[\alpha]=0\}$
$= \{\alpha \mid (\psi \wedge \theta)[\alpha]=0\}$
$= \{\alpha \mid \psi[\alpha]=0$ ili $\theta[\alpha]=0\}$
$= \hat{\psi}^{-1}[\{0\}] \cup \hat{\theta}^{-1}[\{0\}]$ o-z.

$\psi = p$

$\hat{\psi}^{-1}(\{0\}) = \{\alpha \mid \psi[\alpha]=0\}$
$= \{\alpha \mid \alpha(p)=0\}$
$= \{\alpha \mid \bar{u}_p(\alpha)=0\}$
$= \bar{u}^{-1}(\{0\})$ o-z.

Podbaza: $\{\bar{u}_p^{-1}(\{0\}) \mid p \in P\} \cup \{\bar{u}_p^{-1}(\{1\}) \mid p \in P\}$

Baza: $\bar{u}_{p_1}^{-1}(\{0\}) \cap \dots \cap \bar{u}_{p_k}^{-1}(\{0\}) \cap \bar{u}_{q_1}^{-1}(\{1\}) \cap \dots \cap \bar{u}_{q_\ell}^{-1}(\{1\})$
$= \{\alpha \in 2^P \mid \alpha(p_1) = \dots = \alpha(p_k)=0, \alpha(q_1) = \dots = \alpha(q_\ell)=1\}$



λ fin. seq. of 0-1
$B_\lambda = \{\alpha \in 2^P \mid \alpha|\mathrm{dom}\,\lambda = \lambda\}$
$= \{\alpha \in 2^P \mid \lambda \subseteq \alpha\}$

P.3 A.I za ~~form~~ neprazne familije kon. nepr. skupova.

$\mathcal{X} = \phi$, $X \in \mathcal{X} \Rightarrow X \neq \emptyset$, kon.

Tada postoji $f : \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}$

$(\forall x \in \mathcal{X})\ f(x) \in x$.

D. Neka je $(\mathcal{X}, \leq)$ lin. uređen.

Tada za svaki $x \in \mathcal{X}$

$(x, \leq)$ je lin. uređen.

Def. za f: $f(x) = \min_{\leq}(x)$.

$(A, \leq)$ P.U.S.

R. Paa, $a \in A$

T. $Pab \wedge Pbc \Rightarrow Pac$, $a, b, c \in A$

A. $Pab \Rightarrow \neg Pba$, $a, b \in A$, $a \neq b$.

L. $Pab \vee Pba$, $a, b \in A$, $a \leq b$.

Pab

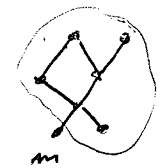
L. svaki kon. parc. ur. skup može se dopuniti do L.U.S.

$(A, \leq)$ p.u.s. $a \leq b \Rightarrow a \preccurlyeq b$

$(A, \preccurlyeq)$ l.u.s tj. $\leq \subseteq \preccurlyeq$

D. $|M| = n+1$, $m \in M$ minimalan

$(M, \leq)$



m

$M' = M \setminus \{m\}$ po IH

dopunjuje se do l.u.s.

$(M', \preccurlyeq')$ l.u.s $x \preccurlyeq' y$ za $x, y \in M'$

$(M, \preccurlyeq)$: $x \preccurlyeq y$ akko $m \preccurlyeq x$ za M

$\preccurlyeq = \preccurlyeq' \cup \{m\} \times M$.

T. Svaki p.u.s može se dopuniti do l.u.s.

$(A, \leq)$ p.u.s.

1° S kon. skup aks. R.T.A.L

S ima model prema L.

2° Prema T.K. skup svih aks. R.T.A.L ima model $\mathcal{I}$

def. $\preccurlyeq$: $a \preccurlyeq b$ akko $Pab[\mathcal{I}] = 1$, tj. $\mathcal{I}(Pab) = 1$.

$\mathbb{B} = \langle b_1, .., b_n \rangle \Rightarrow \mathbb{B}$ finite

$|\mathbb{B}| \leq 2^{2^n}$

$\mathbb{B}_a \times \mathbb{B}_{a'} \cong \mathbb{B}$ $h : B_a \times B_{a'} \longrightarrow B$

$h : (x,y) \longmapsto x+y$

P. $\mathbb{B}$ kon. $\Rightarrow \mathbb{B} = 2^n$

L. $ax + bx' + ab = ax + bx'$

$ab(ax + bx') = abx + abx' = ab(x + x') = ab$

L. $x \leq y \iff y = x \vee y$

$(\Rightarrow)$ PP. $x \leq y$ $x \wedge y = x$, $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$

$(\Leftarrow)$ PP $y = x \vee y$. $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$, $x \leq y$.

---

1. $\mathbb{B} \cong \mathbb{B}_a \times \mathbb{B}_{a'}$
2. $\mathbb{B}$ kon. $\Rightarrow \mathbb{B} \cong 2^n$ za neko n
3. $f : 2^n \to 2 \Rightarrow f$ je Bulova f-ja
4. $2 \models u = v \Rightarrow B.A. \models u = v$

- Logička kola
- Z. M - distributivna mreža,
  a. Postoji nosioca B.A. $\mathbb{B}$ t.d. $M \leq \mathbb{B}$
  b. $2 \models u = v$, u, v u jeziku $\wedge, \vee$, onda D.M. $\models u = v$

T - funkcionalne potpunosti

$t(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in P} X^\alpha$, $P \subseteq 2^n$, $\hat{t} : 2^n \to 2$

$P \neq P' \Rightarrow \hat{t}_P \neq \hat{t}_{P'}$: $\beta \in P \setminus P' \Rightarrow \hat{t}_P(\beta) = 1$, $\hat{t}_{P'}(\beta) = 0$

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$T, A \vdash B \qquad T \vdash A \Rightarrow B$

1° Ax. B

$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

$A \Rightarrow B$

2° $B = A \qquad \vdash A \Rightarrow A$

3° $B \in T \qquad B$

$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

$A \Rightarrow B$

$A_1, \ldots, A_i, \ldots, (A_i \Rightarrow B), \ldots B$

A_j

IH $\quad A \Rightarrow A_i$

$A \Rightarrow (A_i \Rightarrow B)$

$(A \Rightarrow (A_i \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$

$(A \Rightarrow A_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

$A \Rightarrow B$

P. 1° $\quad A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$

2° $\quad A, \neg A \Rightarrow B$

$\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$\neg A$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

$A \Rightarrow B$

A

B

App $\vdash A$

$A[\alpha] = 1, \; A' = A, \; \alpha \in 2$

$p_1', \ldots, p_{n-1}', p_n \vdash A$

$p_1', \ldots, p_{n-1}', \neg p_n \vdash A$

$p_1', \ldots, p_{n-1}' \vdash A, \quad \alpha \in 2^n$

$\vdots$

$\vdash A$

$T, A \vdash B$

$T, \neg A \vdash B$

$T \vdash B$

L. 1° $\quad A, B \vdash A \Rightarrow B$

2° $\quad A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$

3° $\quad \neg A, B \vdash A \Rightarrow B$

4° $\quad \neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$

1° $\quad B \vdash A \Rightarrow B$

$A, B \vdash A \Rightarrow B$

2° $\quad \vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(\cancel{A \Rightarrow B}))$

A

$A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$

$\neg B$

$\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$

$\neg(A \Rightarrow B)$

$\cancel{A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)}$

$A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$

3° $\quad \cancel{B}, B \vdash A \Rightarrow B$

$\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$

4° $\quad \neg B$

$\cancel{\neg B \Rightarrow \neg A}$

$\neg B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$

$\neg A \Rightarrow \neg B$

$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$B \Rightarrow A$

$\neg A$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow$

$A \Rightarrow B$

$\neg A \vdash A \Rightarrow B$

$\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$

$p_1', \ldots, p_n' \vdash A' \quad \alpha$

$\cancel{A[\alpha] =}$

$A' = \begin{cases} A, & A[\alpha] = 1 \\ \neg A, & A[\alpha] = 0 \end{cases}$

1° $\quad A = \neg B$

$A[\alpha] = 1, \quad A' = A$

$B[\alpha] = 0 \quad B' = \neg B$

$p_1', \ldots, p_n' \vdash B'$

$\vdash \neg B$

$\vdash A$

$\vdash A'$

$\cancel{A = \neg B}$

$A[\alpha] = 0, \quad A' = \neg A$

$B[\alpha] = 1 \quad B' = B$

$B \vdash \neg\neg B$

$p_1', \ldots, p_n' \vdash B'$

$\vdash B$

$\vdash \neg\neg B$

$\vdash A'$

2° $\quad A = (B \Rightarrow C)$

$B[\alpha] = 1, \; C[\alpha] = 1$

$B' = B, \; C' = C$

$A[\alpha] = 1, \; A' = A$

$B[\alpha] = 1, \; C[\alpha] = 0$

$B' = B, \; C' = \neg C$

$A[\alpha] = 0, \; A' = \neg A$

$p_1', \ldots, p_n' \vdash B', C'$

$\vdash B, C$

$B, C \vdash B \Rightarrow C$

$\vdash A$

$\vdash A'$

$p_1', \ldots, p_n' \vdash B', C'$

$\vdash B, \neg C$

$\vdash \neg(B \Rightarrow C)$

$\vdash A'$

SEMINARSKE TEME IZ MATEMATI^KE LOGIKE

1. Prirodni brojevi (indukcija, definicije osnovnih aritmeti~kih funkcija)
2. Realni brojevi (izgradnja)

BULOVE ALGEBRE

3. Filtri
4. Bulove algebre: Stonova teorema o reprezentaciji
5. Slobodne Bulove algebre
6. Logi~ka kola

ISKAZNI RA^UN

7. Velika teorema potpunosti za iskazni ra~un
8. Teorema kompaktnosti za iskazni ra~un sa primenama

PREDIKATSKI RA^UN

9. Monadi~ki predikatski ra~un
10. Metod eliminacije kvantora
11. Teorema potpunosti
12. Teorema kompaktnosti sa primenama
13 Konstrukcije ultraproizvoda modela sa primenama

TEORIJA SKUPOVA

14. Aksiomatika teorije skupova
15. Aksioma izbora
16. Ordinalni brojevi (definicija i aritmetika)
17. Kardinalni brojevi (definicija i aritmetika)
18. Paradoksalni skupovi

TEORIJA IZRA^UNLJIVOSTI

19. Sistemi izra~unljivosti
20. Rekurzivne funkcije
21. Rekurzivno nabrojivi skupovi
22. Primeri odlu~ivih i nedlu~ivih problema.
23. Gedelove teoreme nepotpunosti
24. Konstruktivna matematika

HILBERTOVI PROBLEMI

25. Prvi Hilbertov problem (Kontinuum hipoteza)
26. Drugi Hilberov problem
27. Deseti Hilbertov problem
28. Sedamnaesti Hilbertov problem

Osnovna literatura

1. S. Vujo{evi}, MATEMATI^KA LOGIKA.
2. @. Mijajlovi}, AN INTRODUCTION TO MODEL THEORY.
3. Ud`benici iz logike, S. Pre{i} i M. Pre{i}.
4. @. Mijajlovi}, Z. Markovi}, K. Do{en, HILBERTOVI PROBLEMI I LOGIKA.
5. @. Mijajlovi}, ODLU^IVE TEORIJE, Ra~unarstvo 1(1), 1991.
6. Grupa autora, BROJEVI, Serija Moderna matematika, [kolska knjiga, Zagreb, 1991.
7. @. Mijajlovi}, ALGEBRA.

Napomene:

1. Seminarski rad treba da sadr`i izme|u 7 i 15 stranica kucanog teksta.
2. Rad treba da sadr`i nekoliko primera (bar tri). Ovi primeri mogu biti ura|eni zadaci ({to se preferira).
3. U radu se mora citirati poreklo teorema i primera. Na kraju rada navesti spisak kori{}ene literature.
4. Rad se mora predati najkasnije 3 meseca po uzimanju teme.
5. Student mo`e izabrati samo slobodnu temu.
6. Na istoj temi mo`e raditi najvi{e dva studenta.
7. Student usmeno brani svoju temu.