Diskretne strukture I

Jesen 2011
Žarko Mijajlović

Oblast izučavanja diskretne matematike su diskretne strukture, dakle familija matematičkih struktura sa konačnim ili najviše prebrojivim domenima.

Diskretna matematika graniči se ili se bavi delovima sledećih matematičkih oblasti:

1° Matematička logika.
U ovom kursu upoznaćemo elemente iskaznog i predikatskog računa.

2° Kombinatorika. Ovde se izučavaju kombinatorne funkcije na konačnim skupovima.

3° Elementi teorije skupova
U ovom delu upoznaćemo osnovne skupovne operacije i konstrukcije nad skupovima.

4° Teorija formalne izračunljivosti
U ovoj oblasti matematike utvrđuje se koncept izračunljivosti ili algoritma. Takođe se izučavaju razni algoritamski sistemi, na primer Turingove mašine, Opšte rekurzivne funkcije i URM mašine.

5° Teorija grafova. U ovoj disciplini glavno mesto u izučavanju imaju najviše prebrojivi skupovi na kojima je definisana jedna binarna relacija. Ova relacija utvrđuje povezanost između elemenata domena.

Postoje velike i važne primene diskretne matematike u računarstvu. Na primer programski jezik LISP zasnovan je na λ-računu koji je takođe jedan algoritamski sistem. Iskazni račun i s njim blisko povezane Bulove algebre imaju važno mesto u dizajnu i analizi logičkih kola koja čine osnovu savremenih digitalnih računara.
Matematička logika nam takođe daje sredstva pomoću kojih utvrđujemo korektnost nekog programa, da program stvarno izračunava funkciju koju je programer zamislio.

1. predavanje

1. Brojevne strukture imaju glavno mesto u matematici i možemo reći da na njima počiva celokupna matematika. To su

$\mathbb{N}$ - struktura prirodnih brojeva

$\mathbb{Z}$ - prsten celih brojeva

$\mathbb{Q}$ - polje racionalnih brojeva.

$\mathbb{R}$ - polje realnih brojeva

$\mathbb{C}$ - polje kompleksnih brojeva.

Domeni ovih struktura su redom:

Skup prirodnih brojeva $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Dakle iza svakog prirodnog broja n sledi njegov direktan naslednik $n+1$. Nekad se direktan naslednik prirodnog broja n označava sa n'. Postoji najmanji prirodan broj, to je 0. Slično svojstvo ima svaki neprazan podskup X skupa N. Naime važi

Princip najmanjeg broja za skup prirodnih brojeva:

Ako je $X \subseteq N$ i $X \neq \emptyset$ tada X ima najmanji element.

U to se možemo uveriti sledećim intuitivnim argumentom.

Neka je skup X opisan nekim aritmetičkim svojstvom $\varphi(x)$. Dakle, $\varphi(x)$ se može u principu zapisati pomoću simbola aritmetičkih operacija ($+$ i $\cdot$), konstanti (u ovom slučaju to su zapisi prirodnih brojeva $0, 1, 2, \dots$) i logičkih simbola. Pretpostavljeni domen promenljive x je skup N, dakle moguće vrednosti promenljive x su prirodni brojeve. Uz ove pretpostavke imamo

$$X = \{x \in N \mid \varphi(x)\}.$$

Nabrajanjem prirodnih brojeva, počev od nule, za svaki član n ovog niza usput proveravamo istinitost iskaza $\varphi(n)$. Kada prvi put naiđemo na prirodan broj m takav da je $\varphi(m)$ istinit, a to se jednom mora desiti jer je X po pretpostavci neprazan, broj m će biti najmanji element skupa X.

Zasnivanje prirodnih brojeva je težak matematički problem.

U jednom pristupu uzima se da je:

$0 = \emptyset$ (prazan skup)

$1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\}$, $4 = \{0,1,2,3\}$, ...

Dakle u ovom pristupu svaki prirodan broj n je skup svojih prethodnika, tj.

$$n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}.$$

Reči broj i brojati imaju isto etimološko poreklo koje dolazi od pojma zarezivati. Naime, u davnini kada su pastiri brojali svoja stada urezivali su zarez u raboš za svako izbrojano grlo. I tako je od urezivanja crta nastalo brojanje pa i sam pojam broja.

Skup prirodnih brojeva N zajedno sa aritmetičkim operacijama $+$ i $\cdot$, konstantom 0 i prirodnim uređenjem $\leq$ čini strukturu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Dakle

$\mathbb{N} = (N, +, \cdot, \leq, 0)$.

Skup pozitivnih prirodnih brojeva obeležavamo sa N^+. Dakle, $N^+ = \{1,2,3,\ldots\}$

Skup celih brojeva je $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

Prsten celih brojeva je algebra $\mathbb{Z} = (Z,+,-,\cdot,0,1)$ gde su $+, \cdot$ i $-$ uobičajene aritmetične operacije sabiranja, množenja i promene znaka (ili operacija suprotnog elementa). Često se uzima da je $\mathbb{Z} = (Z,+,\cdot,0,1)$ jer se operacija $-x$ može uvesti pomoću definicione aksiome $y=-x \iff x+y=0$.

Skup racionalnih brojeva Q je skup racionalnih razlomaka, tj.

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N^+ \right\}.$$

Tada je polje racionalnih brojeva algebarska struktura $\mathbb{Q} = (Q,+,\cdot,0,1)$ gde su $+$ i $\cdot$ uobičajene aritmetične operacije sa racionalnim brojevima: $\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{nn'}$, $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}$

Skup realnih brojeva R je skup svih ~~brojeva~~ koji imaju konačan ili beskonačan decimalan razvoj.

Brojevi koji imaju konačan ili periodičan razvoj su racionalni brojevi. Dakle $Q \subseteq R$. Postoje realni brojevi koji nisu racionalni. Takvi brojevi su $\sqrt{2}$ i π (količnik obima i poluprečnika kruga). Dokaz da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj je lak. Dokaz da π nije racionalan broj je težak.
Realni brojevi koji nisu racionalni nazivaju se iracionalnim.

Uređeno polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ je struktura

$\mathbb{R} = (R, +, \cdot, \leq, 0, 1)$.
Ovde su $+$ i $\cdot$ uobičajene aritmetičke operacije sabiranja i množenja realnih brojeva, i $\leq$ uređenje (poredak).

Skup kompleksnih brojeva C je $C = \{a+bi \mid a, b \in R\}$
~~gde su a, b realni brojevi~~, i je imaginarna jedinica, tj. za i važi $i^2 = -1$.

Sabiranje i množenje kompleksnih brojeva definisano je na sledeći način:

$(a+bi)+(a'+b'i) = (a+a')+(b+b')i$

$(a+bi)\cdot(a'+b'i) = ab - a'b' + (ab'+a'b)i.$

Polje kompleksnih brojeva je algebarska struktura

$\mathbb{C} = (C, +, \cdot, 0, 1)$

sa ovako definisanim operacijama $+$ i $\cdot$.
Primetimo da je svaki ~~realan~~ broj a takođe kompleksan broj jer $a = a + 0 \cdot i$.

Shodno prethodnom imamo $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$.

Za svaku strukturu $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ aritmetičke operacije $+$ i $\cdot$ su ekstenzije (produženja) odgovarajućih operacija na prethodnoj strukturi u nizu $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

2. Operatori Σ i Π.

Često ćemo biti u prilici da razmatramo opšte sume i proizvode brojeva:

(2.1) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$ i $a_0a_1a_2\cdots a_n$.

Ovde simbol $\cdots$ zamenjuje nedostajuće članove zbira, odnosno proizvoda. Na primer

$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_7 = a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$,

dakle u ovom slučaju $n=7$.

Izraze (2.1) koristimo i onda kada nije utvrđena (fiksirana) vrednost indeksa n.

Izraze (2.1) takođe zapisujemo sa $\sum_{i=0}^{n} a_i$, $\prod_{i=0}^{n} a_i$. Dakle

$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$, (definicija operatora sumiranja Σ)

$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0a_1a_2\cdots a_n$. (definicija operatora proizvoda Π).

Nije obavezno da u sumi (ili proizvodu) krenemo od prvog sabirka (činioca) a_0. Tako na primer imamo

$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n$ i slično za proizvod.

U opštem slučaju ako je dat niz $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$, $m \le n$, onda

$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n$, $\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m a_{m+1}\cdots a_n$.

Na primer, $\sum_{i=3}^{7} a_i = a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$.

Ako kontekst dozvoljava, umesto $\sum_{i=0}^{n} a_i$ (ili $\sum_{i=m}^{n} a_i$) pišemo kraće $\sum_{i} a_i$. Slično značenje ima izraz $\prod_{i} a_i$.

Osobine operatora sumiranja Σ

(1) $\sum_{i} \alpha a_i = \alpha \sum_{i} a_i$

(2) $\sum_{i} (a_i+b_i) = \sum_{i} a_i + \sum_{i} b_i$

Slični identiteti važe i za operator proizvoda Π.

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$

(4) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

Dokaz (1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_n = \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$.

(2) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1+b_1) + (a_2+b_2) + \cdots + (a_n+b_n) =$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(3) bude se radi samo o promeni tzv. "nemog" indeksa i. Ipak, treba biti pažljiv ako je a_i složen izraz.

→ Na primer $\sum_{i=1}^{n} ij = \sum_{k=1}^{n} kj = \underbrace{k1 + k\cdot 2 + \cdots + k\cdot n}$, ali

$\sum_{i=1}^{n} ij \neq \sum_{j=1}^{n} j\cdot j$ u opštem slučaju, jer

$\sum_{i=1}^{n} ij = 1\cdot j + 2\cdot j + \cdots + n\cdot j$, dok $\sum_{j=1}^{n} j\cdot j = \sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

(4) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) =$

$$\begin{aligned}
&(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + \\
&(a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \\
&\vdots \\
&(a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}) = \text{(sabirajući po kolonama)} \\
&(a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1}) + \\
&(a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{m2}) + \\
&\vdots \\
&(a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn}) = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} .
\end{aligned}$$

U dokazima ~~za~~ (1), (2) i (4) implicitno smo koristili asocijativni, komutativni i distributivni zakon za sabiranje i množenje brojeva.

Primeri 1° $\sum_{i=1}^{7} (i+k) = 28 + 7k$

2° $\sum_{i=m}^{n} 1 = n - m + 1$ za $n \geq m$.

3° $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ paran} \\ -1, & n \text{ neparan} \end{cases}$

4° $\prod_{i=1}^{n} (-1)^i = (-1)^{1+2+\cdots+n} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

5° $\prod_{i=3}^{n} \log(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{i})) = 0$, za $n \geq 4$, jer $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$ je član ovog proizvoda

ali $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ pa je $\log(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4})) = \log(1) = 0$.

Algebarski identiteti

Algebarski identiteti su formule vida $u=v$ gde su u i v algebarski izrazi (termi). Algebarski identitet $u=v$ je <u>tačan</u> ili <u>istinit</u> u nekoj algebarskoj strukturi akko se za zadate vrednosti učestvujućih promenljivih u termima u i v vrednosti terma u i v poklapaju. Sledeći identiteti su istiniti u brojevnim strukturama $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Oni su tačni i u strukturi prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ ukoliko u njima ne učestvuje simbol operacije oduzimanja, $-$.

1° $(x+y)^2 = x^2+2x+2y$

2° $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$

3° $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2$

4° $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

5° $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+3xyz$

6° $x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$, $n\in N$, $n\geq 2$.

7° $x^{2n+1}+y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\dots-xy^{2n-1}+y^{2n})$, $n\in N$, $n\geq 1$.

8° <u>Binomna formula</u> (Njutnov binomni obrazac):

$$(x+y)^n = x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\dots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+y^n,\quad n\geq 1,\ n\in N.$$

Ovde su $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ <u>binomni koeficijenti.</u>

Za binomne koeficijente takođe se koristi oznaka C_k^n. Dakle $C_k^n=\binom{n}{k}$.

$n!\overset{\text{def}}{=}1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $n\geq 1$, $0!\overset{\text{def}}{=}1$. Dakle $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$.

Formule 6°, 7° i 8° možemo zapisati i ovako:

6'. $x^n-y^n = (x-y)\sum\limits_{i=1}^{n} x^{n-i}y^{i-1}$

7'. $x^{2n+1}+y^{2n+1} = (x+y)\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2n-k}y^k$

8'. $(x+y)^n = \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$. Uzimamo da je $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$.

<u>Primeri</u> 1. Uzimajući u 6° $x=1$, $y=t$, dobijamo

$$1+t+t^2+\dots+t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$$

2. Stavljajući $x=1$, $y=t$ u 7° nalazimo

$$1-t+t^2-t^3+\dots-t^{2n-1}+t^{2n} = \frac{1-t^{2n+1}}{1-t},$$

Primetimo da se identitet 7° dobija iz identiteta 6 ako se n zameni sa $2n+1$ i y sa $-y$.

3. Ako uzmemo da je $x=1$, $y=t$, iz binomne formule dobijamo

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$$

4. Ako u binomnoj formuli uzmemo $x=1$, $y=1$, dobijamo

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

Slično, ako je $x=1$, $y=-1$ dobijamo:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

Takođe, $(1+t)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i$.

Kako je $(t+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^{n-i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}t^j = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}t^i$ upoređivanjem koeficijenata uz t^i u prethodnoj formuli nalazimo:

$$\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}.$$

5. Iz identiteta 5° nalazimo:

Ako je $x+y+z=0$ tada $x^3+y^3+z^3=3xyz$, što zapisujemo i ovako:

$$x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Svi identitet 1° – 8° gore i mnogi drugi, posledice su nekoliko osnovnih algebarskih identiteta koje nazivamo i algebarskim zakonima. To su

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$, asocijativni zakon (u aditivnoj formi)

(2) $x+y=y+x$, komutativni zakon

(3) $x+0=x$, zakon neutralnog elementa

(4) $x+(-x)=0$, zakon suprotnog elementa.

Svaka algebarska struktura $\mathbb{A}$ na kojoj su definisane algebarske operacije $+$ i $-$ i postoji konstanta $\mathbf{0}$ tj. $\mathbb{A}=(A,+,-,\mathbf{0})$, i u kojoj važe identiteti (1) – (4) naziva se Abelovom ili komutativnom grupom. Ovde je A <u>domen</u> algebre $\mathbb{A}$, dakle skup na kojem su definisane operacije $+,\cdot$ i $\mathbf{0}\in A$.

Dakle, algebre $(\mathbb{Z},+,-,0)$, $(\mathbb{Q},+,-,0)$, $(\mathbb{R},+,-,0)$, $(\mathbb{C},+,-,0)$ su Abelove grupe. Njih takođe nazivamo aditivnim delovima ~~standardnih~~ struktura $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Ovi zakoni u multiplikativnom obliku glase:

(1') $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

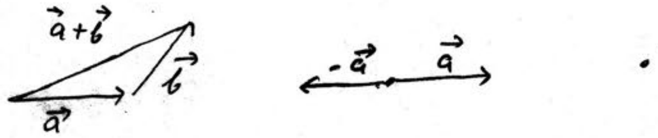
(2') $x\cdot y = y\cdot x$

(3') $x\cdot 1 = x$

(4') $x\cdot x^{-1} = 1$

Dakle, $(R\setminus\{0\},\cdot,^{-1},1)$ i $(C\setminus\{0\},\cdot,^{-1},1)$ su takođe Abelove ili komutativne grupe.

Ima i drugih algebarskih struktura koje nisu brojevne prirode ali zadovoljavaju ove zakone. Takav primer je skup geometrijskih vektora u ravni zajedno sa uobičajenom operacijom sabiranja vektora, operacijom suprotnog vektora i konstantom: 0-vektor.



← 0-vektor (nula vektor)

Komutativni prsteni su algebre $\mathbb{A}=(A,+,-,\cdot,0,1)$ koje zadovoljavaju sledeće zakone:

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$
$$x+y = y+x \qquad x\cdot y = y\cdot x$$
$$x+0 = x \qquad x\cdot 1 = x$$
$$x+(-x) = 0$$

$$x(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z) \quad \text{- distributivni zakon}$$

Uzimamo da je $x-y \overset{def}{=} x+(-y)$.

Dakle, $(\mathbb{Z},+,-,\cdot,0,1)$ je komutativan prsten (sa jedinicom 1).

Najzad, polja su komutativni prsteni koji zadovoljavaju i ovu aksiomu:

$$x\neq 0 \Rightarrow \exists y\,(x\cdot y = 1).$$

ili $x\neq 0 \Rightarrow x\cdot x^{-1}=1$ ako je uvedena operacija inverznog elementa.

Strukture $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ su polja.

<u>Primer</u> U svakom prstenu važe sledeći identiteti.

(a) $0\cdot x = 0$, (b) $(-1)\cdot x = -x$, (c) $(-x)\cdot y = -(x\cdot y)$

(d) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

<u>Dokaz</u> (a) $0+0=0, \quad (0+0)\cdot x = 0\cdot x, \quad 0\cdot x + 0\cdot x = 0\cdot x$

$-(0\cdot x) + (0\cdot x + 0\cdot x) = -(0\cdot x) + 0\cdot x$

$(-(0\cdot x) + 0\cdot x) + (0\cdot x) = 0$

$0 + 0\cdot x = 0, \quad 0\cdot x = 0.$

(b) $1+(-1)=0, \quad (1+(-1))x = 0\cdot x, \quad 1\cdot x + (-1)\cdot x = 0,$

$x + (-1)\cdot x = 0, \quad (-x) + (x + (-1)\cdot x) = (-x) + 0,$

$((-x)+x) + (-1)\cdot x = -x, \quad 0 + (-1)\cdot x = -x, \quad (-1)\cdot x = x.$

(c) slično kao (b).

(d)
$$
\begin{aligned}
(x-y)(x+y) &= x\cdot(x+y) + (-y)(x+y) \\
&= (x\cdot x + x\cdot y) + ((-y)\cdot x + (-y)\cdot y) \\
&= (x^2 + x\cdot y) + ((-(y\cdot x)) + (-(y\cdot y))) \\
&= x^2 + (x\cdot y + (-(x\cdot y)) + (-y^2))) \\
&= x^2 + (((x\cdot y) + (-x\cdot y)) + (-y^2)) \\
&= x^2 + (0 + (-y)^2) = x^2 + (-y^2) \\
&= x^2 - y^2.
\end{aligned}
$$

<u>Uređeni skupovi</u>

Relacija uređenja $\leq$ na $\mathbb{R}$ zadovoljava sledeće uslove

$x \leq x$, refleksivnost

$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$, antisimetričnost

$(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$, tranzitivnost

$x \leq y \vee y \leq x$, linearnost.

Kažemo da je $(\mathbb{R}, \leq)$ linearno uređen skup.

Takođe važi:

$x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$	uređenje $\leq$ je saglasno sa
$x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow x\cdot z \leq y\cdot z$	aritmetičkim operacijama $+$ i $\cdot$.

Strukturu $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, \leq, 0, 1)$ nazivamo uređenim poljem.

Literatura: Algebra 1, Ž. Mijajlović, Virtuelna biblioteka

Matematička indukcija i rekurzija

Matematička indukcija predstavlja važan i moćan metod za dokazivanje tvrđenja koja se odnose na prirodne brojeve. Ona proizilazi iz sledećeg svojstva skupa prirodnih brojeva N.

Neka je $S \subseteq N$ i pretpostavimo da skup S ima sledeće dve osobine:

(1) $0 \in S$

(2) Za svaki n, ako $n \in S$ tada $n+1 \in S$.

Tada $S = N$.

Zaista, prema (1) $0 \in S$, dok prema (2) tada i $1 \in S$. Opet primenjujući (2) nalazimo $2 \in S$ i tako redom $3, 4, \ldots \in S$, tj. $N \subseteq S$. S obzirom da je $S \subseteq N$, nalazimo $S = N$.

Pretpostavimo da je $\varphi(n)$ formula koja se odnosi na prirodne brojeve*) i neka je $S = \{ n \in N \mid \varphi(n) \}$, tj. S je skup svih prirodnih brojeva n za koje važi $\varphi(n)$. Tada se prethodna svojstva skupa S mogu preizraziti pomoću formule $\varphi(n)$ na sledeći način:

Princip matematičke indukcije

Neka je $\varphi(n)$ aritmetički iskaz. Pretpostavimo da za $\varphi(n)$ važi:

1. $\varphi(0)$ — baza indukcije
2. $\forall n (\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$ — induktivni korak

Tada je $\varphi(n)$ istinito za svaki prirodan broj n.

Dakle iz Principa matematičke indukcije proizilazi sledeće pravilo izvođenja

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\varphi(0), \quad \forall n (\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))}{\forall n\, \varphi(n)}$$

Ako je tvrđenje $\forall \varphi(n)$ dokazano primenom ovog pravila izvođenja, kažemo da je $\forall n\, \varphi(n)$ dokazano matematičkom indukcijom, odnosno indukcijom.

---

*) Za takvu formulu kažemo da je aritmetički iskaz. Primetimo da su vrednosti promenljive n prirodni brojevi.

~~P~~Dakle u induktivnom dokazu tvrđenja $\forall n\, \varphi(n)$, neophodno je proveriti (dokazati)

baza indukcije: $\varphi(0)$

induktivan korak: Za proizvoljan prirodan broj n, a $\varphi(n)$ povlači $\varphi(n+1)$. U ovom slučaju iskaz $\varphi(n)$ nazivamo induktivnom hipotezom.

Zaključak je: $\varphi(n)$ je istinito za svaki prirodan broj n.

Primer 1 $\quad 2^n \geq n$.

Neka je $\varphi(n)$ formula $2^n \geq n$.

$\varphi(0)$: $2^0 \geq 0$, što je tačno, jer $2^0 = 1$.

Induktivan korak: Neka je $n \in N$ i pretpostavimo $\varphi(n)$, tj. $2^n \geq n$. Možemo uzeti $n \geq 1$, jer smo tvrđenje proverili za $n=0$.

Otuda $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n \geq n+1$

Prema induktivnoj hipotezi $2^n \geq n$ $\quad$ jer smo pretpostavili $n \geq 1$.

Zaključujemo $\forall n\, \varphi(n)$, tj. za proizvoljan prirodan broj n $2^n \geq n$.

Primer 2. $0+1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

U ovom slučaju $\varphi(n)$ je $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Kako je $\sum_{i=0}^{0} i = 0$ i $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ to $\varphi(0)$ važi

Neka je $n \in N$ i pretpostavimo $\varphi(n)$ tj. $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Otuda

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Dakle dokazali smo da je za proizvoljan n važi implikacija $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$. Prema indukciji sledi $\forall n\, \varphi(n)$, tj.

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in N.$$

Napomena Ovaj identitet može se dokazati direktno:

Za n paran

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n = (1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\cdots+\left(\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)$$
$$= \frac{n}{2}(n+1)$$

Za n neparan $\quad 1+2+3+\cdots+(n-1)+n =$

$$(1+n)+(2+(n-1))+\cdots+\left(\frac{n-1}{2}+\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\right)+\frac{n+1}{2} =$$
$$\frac{n-1}{2}(n+1)+\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

U dokazu baze indukcije nije obavezno da se pretpostavi $n=0$. Ako je baza indukcije $\varphi(n_0)$ uz ostale pretpostavke induktivnog dokaza zaključujemo da $\varphi(n)$ važi za $n \geq n_0$, tj. $(\forall n \geq n_0)\ \varphi(n)$.

Primer 3 $\quad n^2 \geq n+3$

Dokaz Neka je $\varphi(n):\ n^2 \geq n+3$.

Kako je $\varphi(3):\ 3^2 \geq 3+3$, to je $\varphi(3)$ istinito.

Pretpostavimo induktivnu hipotezu $n^2 \geq n+3$.

Otuda, koristeći induktivnu hipotezu nalazimo

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geq (n+3)+2n+1 \geq 3n+4 \geq n+4 = (n+1)+3.$$

Ovim je dokazano: Za svaki prirodan broj $n \geq 3$, $n^2 \geq n+3$.

Primetimo da iskazi $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ i $\varphi(2)$ nisu tačni.

Primer 4 Dokazati $(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$

Dokaz Prema Primeru 2, $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, dakle, dovoljno je dokazati da je $\varphi(n):\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$\varphi(1)$ se trivijalno proverava, pa pretpostavimo induktivnu hipotezu $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Otuda,

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4(n+1)\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

tj. dokazali ~~smo~~ $\forall n\,(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$, čime je i tvrđenje $\forall n\,\varphi(n)$ dokazano.

Primer 5 (Moavrov obrazac). $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$, $i^2=-1$.

Dokaz Tvrđenje očigledno važi za $n=1$.

Pretpostavimo induktivnu hipotezu, $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$. Otuda

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= \cos(n\varphi)\cos\varphi - \sin(n\varphi)\sin(\varphi) + i(\cos(n\varphi)\sin\varphi + \sin(n\varphi)\cos\varphi)$$

$$= \cos(n\varphi+\varphi) + i\sin(n\varphi+\varphi) = \cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi.$$

Dakle dokazali smo: Ako tvrđenje važi za n onda ono važi i za $n+1$, n je proizvoljan prirodan broj. Otuda, prema indukciji Moavrov obrazac važi za svaki prirodan broj n.

Aritmetička i geometrijska sredina

Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Tada se

$A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ naziva aritmetičkom sredinom brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$.

$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ geometrijskom sredinom

$H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ harmonijskom sredinom i

$K(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ kvadratnom sredinom.

Dokazaćemo da važe sledeće nejednakosti za $n \geq 2$.

2.4.1. $H(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq K(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Ako negde u ovom nizu važi jednakost, na primer $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = G(a_1, a_2, \dots, a_n)$, tada $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Dokazujemo $G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Slučaj $n = 2$ Kako je $(x-y)^2 \geq 0$ odavde nalazimo $x^2 + y^2 \geq 2xy$. S obzirom da smo pretpostavili $a_1, a_2 > 0$, postoje $x, y \in R$ takvi da je $a_1 = x^2$, $a_2 = y^2$, odavde $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}$, tj. $G(a_1, a_2) \leq A(a_1, a_2)$.

Postoji jednostavan dokaz i za $n = 3$: Neka su $x, y, z \in R^+$. Tada

$x^2 + y^2 \geq 2xy$
$x^2 + z^2 \geq 2xz$
$y^2 + z^2 \geq 2yz$

Sumiranjem ovih nejednakosti nalazimo $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz$, tj.
$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0$.

S obzirom na identitet

$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) + 3xyz$

nalazimo $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.

Neka su $a_1, a_2, a_3 \in R^+$. Tada postoje $x, y, z \in R^+$ takvi da je $a_1 = x^3$, $a_2 = y^3$, $a_3 = z^3$, pa prema prethodno dobijenoj nejednakosti nalazimo

$G(a_1, a_2, a_3) \le A(a_1, a_2, a_3)$.

Nejednakost $G(a_1, a_2, a_3, a_4) \le A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ (slučaj $n=4$) lako možemo dobiti dvostrukom primenom nejednakosti $G(a_1, a_2) \le A(a_1, a_2)$:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_3a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

Koristeći ideju u prethodnom izvođenju nalazimo

$$G(a_1, \dots, a_n) \le A(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow G(a_1, a_2, \dots, a_{2n}) \le A(a_1, a_2, \dots, a_{2n}).$$

Zaista pretpostavimo da je $G(a_1, a_2, \dots, a_n) \le A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ za sve $a_1, \dots, a_n \in R^+$.
Tada

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n} = \frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{n}}{2} \geq \frac{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}\cdots a_{2n}}}{2}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\cdot\sqrt[n]{a_{n+1}\cdots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1a_2\cdots\cdots a_{2n}}.$$

Dakle dokazali smo da važi nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za $n = 2, 4, 8, 16, \dots$ tj. važi

(2-5-1) $\quad G(a_1, a_2, \dots, a_n) \le A(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad n = 2^k, \quad k \in N^+.$

Dokažimo sada da ova nejednakost važi za proizvoljno n.

Kako smo nejednakost 2.5.1 dokazali za prirodne brojeve oblika $n = 2^k$, možemo pretpostaviti da je $n \neq 2^k$ za svaki $k \in N^+$. Neka je m najmanji prirodan broj takav da je $2^{m-1} < n < 2^m$ i neka je $l \in N^+$ takav da je $n + l = 2^m$. Prema 2.5.1. važi

(2.5.2) $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^m}}{2^m} \geq (a_1a_2\cdots a_{2^m})^{\frac{1}{2^m}}$$

Neka je $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+l} = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. S obzirom da je $n+l = 2^m$ iz (2.5.2) nalazimo

$$\frac{n\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+l\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}{n+l}\geq\left(a_1a_2\cdots a_n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^l\right)^{\frac{1}{n+l}}$$

Sređivanjem ove nejednakosti nalazimo $\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n+l}\geq a_1a_2\cdots a_n\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^l$ odakle

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Čime je dokazana nejednakost $G(a_1,a_2,\ldots,a_n)\leq A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ za proizvoljne pozitivne realne brojeve $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Otuda je i $G(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n})\leq A(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n})$ odakle se odmah dobija

$H(a_1,a_2,\ldots,a_n)\leq G(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Dokažimo nejednakost $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)\leq K(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $a_1,a_2,\ldots,a_n\in R^+$.

Neka su $x_1,x_2,\ldots,x_n\in R^+$. Tada $x_i^2+x_j^2\geq 2x_ix_j$. Otuda

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(x_i^2+x_j^2)\geq 2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j$.

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(x_i^2+x_j^2)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n x_i^2+\sum_{j=1}^n x_j^2\right)=\sum_{i=1}^n\left(nx_i^2+\sum_{j=1}^n x_j^2\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^n nx_i^2+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_j^2=n\sum_{i=1}^n x_i^2+n\sum_{j=1}^n x_j^2=2n\sum_{i=1}^n x_i^2,\ \text{tj.}$$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(x_i^2+x_j^2)=2n\sum_{i=1}^n x_i^2$.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j,\ \text{tj.}$$

(3) $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j$.

Iz (1), (2) i (3) nalazimo

$2n\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\geq 2\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$, tj. $\dfrac{1}{n}\sum x_i^2\geq\left(\dfrac{1}{n}\sum_i x_i\right)^2$. Uzimajući $a_i=x_i$

dobijamo $K(a_1,\ldots,a_n)\geq A(a_1,\ldots,a_n)$.

Dokažimo da važi jednakost $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)=G(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ akko $a_1=a_2=\cdots=a_n$. Zaista, pretpostavimo, na primer, $a_1\neq a_2$. Tada $\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}$, odakle

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\cdots+a_n}{n}\geq\left(\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2a_3a_4\cdots a_n\right)^{1/n}>((a_1a_2)a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Pomoću matematičke indukcije mogu se definisati i uvoditi novi matematički objekti. Takve definicije u kojima se koristi indukcija nazivamo induktivnim ili rekurzivnim definicijama.

Primer 1. Realni niz x_n, $n \in N$, određen je sledećom rekurzivnom formulom:
$x_0 = a$, $x_{n+1} = x_n + d$, a, d su dati realni brojevi (takav niz nazivamo aritmetičkom progresijom).
1° Odrediti niz x_n
2° Naći sumu $S = \sum_{i=0}^{n} x_i$.

Rešenje Imamo: 1°

$$x_0 = a$$
$$x_1 - x_0 = d$$
$$x_2 - x_1 = d$$
$$\vdots$$
$$x_n - x_{n-1} = d$$

Sumirajući ove jednakosti nalazimo

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = a + nd$$

i skraćivanjem odgovarajućih članova x_i u ovoj sumi nalazimo

$$x_n = a + nd.$$

2° Prema 1° nalazimo

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} (a + id) = \sum_{i=0}^{n} a + d \sum_{i=0}^{n} i = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2} d$$

Primer 2 Odrediti opšti član realnog niza: $x_0 = \alpha$, $x_{n+1} = \lambda + \mu x_n$, α, λ, μ su dati realni brojevi.

Rešenje Nađimo nekoliko prvih članova niza x_n:

$$x_0 = \alpha$$
$$x_1 = \lambda + \mu x_0 = \lambda + \alpha\mu$$
$$x_2 = \lambda + \mu x_1 = \lambda + \mu(\lambda + \alpha\mu) = \lambda + \lambda\mu + \alpha\mu^2$$
$$x_3 = \lambda + \mu x_2 = \lambda + \mu(\lambda + \lambda\mu + \alpha\mu^2) = \lambda + \lambda\mu + \lambda\mu^2 + \alpha\mu^3$$

Odavde možemo naslutiti da je

$$x_n = \lambda + \lambda\mu + \lambda\mu^2 + \cdots + \lambda\mu^{n-1} + \alpha\mu^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$x_n = \alpha\mu^n + \lambda(1 + \mu + \mu^2 + \cdots + \mu^{n-1})$$

Indukcijom po n dokazujemo da je zaista tako:

$n = 1$: $\alpha\mu^1 + \lambda = \lambda + \alpha\mu = x_1$

Pretpostavimo induktivnu hipotezu $x_n = \alpha\mu^n + \lambda(1 + \mu + \cdots + \mu^{n-1})$.

Tada $x_{n+1} = \lambda + \mu x_n = \lambda + \mu(\alpha\mu^n + \lambda(1 + \mu + \cdots + \mu^{n-1})) = \alpha\mu^{n+1} + \lambda(1 + \mu + \cdots + \mu^n)$

tj. tvrđenje važi onda i za $n+1$. Prema indukciji tvrđenje važi za svako $n \in N^+$.

Ako je $\mu \neq 1$, vidimo da je $x_n = \alpha\mu^n + \lambda\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} = a + b\mu^n$, gde $a = \frac{-\lambda}{\mu - 1}$, $b = \alpha + \frac{\lambda}{\mu - 1}$.

Rekurentnu formulu $x_{n+1} = \lambda + \mu x_n$ nazivamo i linearnom diferencijskom jednačinom prvog reda.

Primer 2 Građanin Milivoje želi da kupi auto na kredit. Automobil košta 12000 EU, učešće je 20% od vrednosti vozila, kamata na godišnjem nivou 12% s tim da se mesečno obračunava. Milivoje želi da isplati kredit u 40 jednakih rata.

a) Koliki je iznos mesečne rate?

b) Kolika je ukupna kamata za ovako dogovoren kredit?

c) Ako Milivoje želi da iznos mesečne rate bude 200 EU, koliko rata treba da isplati banci?

d) Kolika je najmanja moguća rata i koliko rata treba da isplati banci Milivoje

Rešenje

Neka je

$S = 12000$ vrednost automobila $\qquad r =$ mesečna rata

$K = 0.12$ godišnja kamata

$q = 0.01$ mesečna kamata

$d = 0.2 * 12000 = 2400$ učešće

$S' = S - dS = 9600$ iznos kredita

$m = 40$ broj rata

$x_n =$ iznos preostalog kredita posle n meseci.

Posle $n+1$-og meseca preostali iznos je preostali iznos iz prethodnog meseca uvećan za mesečnu kamatu minus isplaćena rata, dakle $x_{n+1} = x_n + q x_n - r$, tj.

$$x_{n+1} = (1+q)x_n - r\ ;\ x_0 = S'$$

Odavde x_n je rešenje linearne diferencijske jednačine prvog reda čije smo opšte rešenje odredili u prethodnom primeru. Prema oznakama iz prethodnog primera

$\alpha = x_0 = S'$, $\lambda = -r$, $\mu = 1+q$, $x_n = \left(\alpha + \frac{\lambda}{\mu - 1}\right)\mu^n - \frac{\lambda}{1-\mu}$, tj.

$$x_n = \left(S' - \frac{r}{q}\right)(1+q)^n + \frac{r}{q}$$

a). Uslov za isplatu kredita u m rata je $x_m = 0$ (tj. preostali iznos kredita posle m isplaćenih rata je 0 EU). Dakle

$\left(S' - \frac{r}{q}\right)(1+q)^m + \frac{r}{q} = 0$, odakle je

$$r = \frac{q S'}{1 - (1+q)^{-m}}$$

U Milivojevom slučaju $r = \frac{0.01 \times 9600}{1 - 1.01^{-40}} \approx 292.37$ EU

b) Ukupan iznos koji je Milivoje isplatio banci je $S'' = mr$, tj. $S'' = 40 \times 292.37 = 11694.8$

Isplaćena kamata (dobit banke) je $K = S'' - S'$, u slučaju Milivoja to je $K = 11694.8 - 9600 = 2094.8$ EU.

c) Iz uslova $x_m = 0$ nalazimo

$$\left(s' - \frac{r}{q}\right)(1+q)^m + \frac{r}{q} = 0, \quad \text{odakle} \quad (1+q)^{-m} = 1 - \frac{qs'}{r} \quad \text{tj.}$$

$$m = -\frac{\ln(1 - qs'/r)}{\ln(1+q)}$$

U slučaju Milivoja to je $m = -\dfrac{\ln(1 - 0.01 * 9600/200)}{\ln(1+0.01)} \approx 65.72$

Dakle Milivoje treba da isplati 65 rata po 200 EU i 66. ratu u iznosu 144 EU.

d) $r = \dfrac{qs'}{1-(1+q)^{-m}} > qs'$, jer $1-(1+q)^{-m} < 1$. S obzirom da je $\lim_{m\to\infty}(1+q)^{-m} = 0$, ali $(1+q)^{-m} > 0$ za sve $m \in N$, granica $r_0 = qs'$ se ne može dostići ali može joj se proizvoljno približiti.

U Milivojevom slučaju $r_0 = qs' = 0.01 * 9600 = 96$ EU. Uz ratu $r_0 = 96$ EU Milivoje bi isplaćivao kamatu, glavnicu duga nikad ne bi isplatio.

Napomena 1 Banke na svojim Internet stranicama imaju tzv. kreditne kalkulatore koje izvode ovaj račun.

Napomena 2. Iznos kreditne rate obično se računa na 2 decimale, bar kada je reč o malim kreditima. U Milivojevom slučaju iznos rate na 6 decimala je $r' = 292.373740$, pa imamo razliku $\delta = r' - r = 0.003740$.

Poznat je primer jednog programera u nekoj banci (istinit slučaj) da je na ovoj razlici uzimao novac od banke tj. od njenih klijenata. Naime, taj programer napravio je "popravku" u softveru banke pomoću kojeg se automatski isplaćuju rate sa računa klijenata na račun banke. Popravka je bila u tome što se sa računa klijenta skidao iznos rate sračunat na 6 decimala, a uplaćivan iznos banci sračunat na 2 decimale, razlika δ išla je na račun programera. Velike banke u svakom trenutku imaju po nekoliko stotina hiljada pa i miliona kreditnih klijenata. Na primer, ako banka ima 300 000 kreditnih klijenata, "vešti" programer je ostvarivao svakog meseca dodatni prihod od preko 1100 EU uz pretpostavku da je prosečan iznos mesečne rate baš Milivojev. "Vešti" programer je otkriven i osuđen.

Napomena 3. Banke imaju dobro razvijene metode za pokrivanje gubitaka od otkrivenih i neotkrivenih prevara, ali i od gubitka nastalog iz "poklonjene" razlike Milivoju $\delta = r' - r = 0.003740$. Omiljen metod je uvećana kamata. Ako je projektovana kamata $k = 12\%$, kamata sa kojom se izlazi ispred klijenta je, na primer, $k' = 12.2\%$.

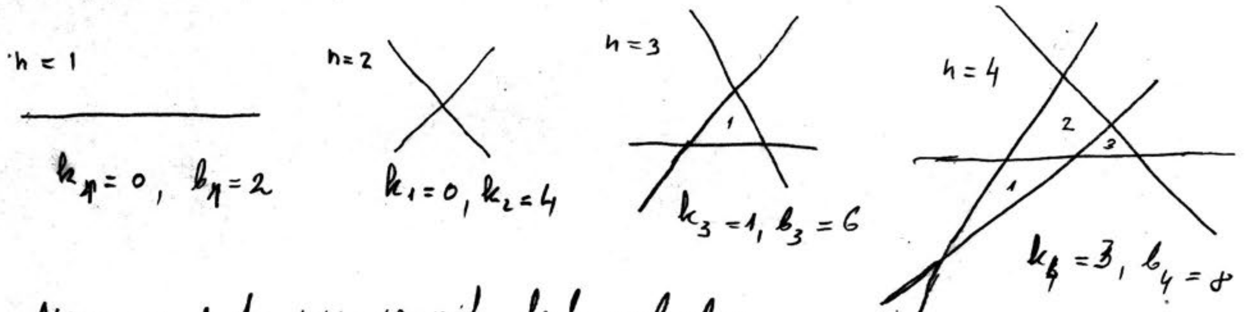
Primer 4 Neka je $S=\{l_1,l_2,\dots,l_n\}$ skup od n pravih u ravni tako da je

1° Ako $p,q\in S$, $p\neq q$, tada p i q nisu paralelne, dakle svake dve prave iz skupa S seku se.

2° Ako su $p,q,r\in S$ različite prave tada r ne prolazi kroz presek pravih p i q. Drugim rečima nikoje tri prave iz S ne prolaze kroz istu tačku.

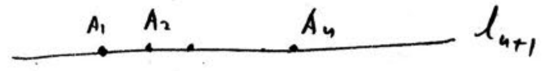
Neka je k_n broj konačnih delova i b_n broj beskonačnih delova ravni koje te prave određuju. Odrediti k_n i b_n i ukupan broj delova ravni određenih ovim pravama. Šta je veće k_n ili b_n?

Napomena: U ovom slučaju delom ravni smatra se povezan skup X ograničen pravama iz S: ako su A,B tačke iz X, tada duž AB ne preseča ni jednu pravu iz S.

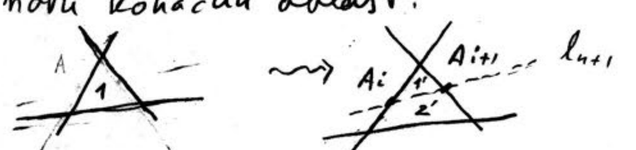


Neka je dato $n+1$ pravih $l_1,l_2,\dots,l_n,l_{n+1}$ tako da zadovoljavaju uslove zadatka.

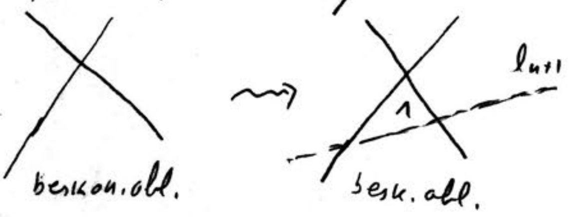
Tada prave $l_1,l_2,\dots,l_n$ određuju n presečnih tačaka $A_1,A_2,\dots,A_n$ na l_{n+1}



i $n-1$ konačnih segmenata A_iA_{i+1}, $1\le i<n$. Svaki segment određuje novu konačnu oblast:



l_{n+1} deli postojeću oblast 1 na dva dela 1' i 2' ili



l_{n+1} deli postojeću beskonačnu oblast na dva dela, jednu konačnu i jednu beskonačnu.

Dakle postavljanjem $n+1$-ve prave l_{n+1} u ravan proizvodi se $n-1$ novih konačnih oblasti, tj.

$k_{n+1}=k_n+(n-1)$, $k_1=0$ slično

$b_{n+1}=b_n+2$, $b_1=2$

Otuda

$$\sum_{i=1}^{n} k_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} (k_i + (i-1)), \text{ tj.}$$

$$\sum_{i=2}^{n+1} k_i = \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} (i-1), \text{ odakle}$$

$$k_{n+1} + \sum_{i=2}^{n} k_i = k_1 + \sum_{i=2}^{n} k_i + \frac{n(n-1)}{2}, \text{ odakle } k_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ tj.}$$

$k_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, $n = 1, 2, \dots$ i slično

$b_n = 2n$.

$p_n = k_n + b_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2n$.

$k_n < b_n$ za $1 \le n \le 6$

$k_n > b_n$ za $n \ge 7$.

Zadatak: Dato je n kružnica u ravni "u opštem međusobnom položaju", tj. svaka dva kruga seku se tačno u dve tačke, nikoje tri kružnice ne prolaze kroz istu tačku

Odrediti k_n broj konačnih delova ravni koje određuju ovih n kružnica.

Napomena: Ovde se pod delom ravni podrazumeva skup X sa osobinom: ako su $A, B \in X$, tada postoji put od tačke A u tačku B koji ne preseca niti jednu od datih kružnica.

Uputstvo: Posmatrati presečne tačke i lukove između susednih tačaka na $n+1$-voj kružnici K_{n+1} koje određuju prethodni članovi niza $K_1, K_2, \dots, K_n$.

$k_{n+1} = k_n + 2n$; $k_{n+1} = 1 + 2\frac{n(n+1)}{2}$; $k_n = 1 + n(n-1)$

Druge varijante indukcije i korišćenja rekurzije pogledati

Ž. Mijajlović, Algebra 1

D. Mitrinović, Indukcija, binomna formula, kombinatorika