Bulove Algebre

Žarko Mijajlović
Matematički fakultet
Beograd

2012

Glava 2

Bulove algebre

U primeni algebarskih metoda u logici i računarstvu, Bulove algebre imaju važno mesto. Mnogi iskazi matematičke logike, naročito oni koji se odnose na iskazni račun, zapravo su prevod nekih činjenica o Bulovim algebrama. Takođe postoje važne i napredne primene ovih struktura u teoriji skupova ali takođe u dizajnu digitalnih elektronskih kola. Bulove algebre nose ime prema engleskom matematičaru George Boole-u koji je uveo ove strukture sredinom 19. veka. Otuda je prvobitni naziv za teoriju Bulovih algebri bio algebra logike. U ovom poglavlju razmotrićemo osnovne osobine ovih struktura.

2.1 Aksiome teorije Bulovih algebri

Dvo-elementna Bulova algebra $\mathbf{2} = (2, \vee, \wedge, ', 0, 1)$, ili iskazna algebra, predstavlja najjednostavniji primer Bulove algebre. Domen ove algebre je $2 = \{0, 1\}$, dok su $\vee, \wedge, '$ operacije ovog domena definisane sledećim tablicama:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

x	x'
0	1
1	0

Drugi primer Bulove algebre je n-ti stepen algebre $\mathbf{2}$: $\mathbf{2}^n = (2^n, \bigvee, \bigwedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$, $n \in N^+$, gde je $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$. Operacije $\bigvee, \bigwedge, '$ odnose se na n-torke nula i jedinica primenjujući operacije algebre $\mathbf{2}$ po koordinatama:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bigvee (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bigwedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$.

Na primer, za $a = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ i $b = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ u $\mathbf{2}^8$ imamo:

$a \bigvee b = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$, $\quad a \bigwedge b = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$,
$a' = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$, $\quad b = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$.

Elemente Bulove algebre $\mathbf{2}^n$ takođe zapisujemo kao nizove nula i jedinica dužine n. U tom slučaju prethodni primer izgleda:

$a = 10100110$ i $b = 11010001$,
$a \bigvee b = 11110111$, $\quad a \bigwedge b = 10000000$, $\quad a' = 01011001$, $\quad b' = 00101110$.

Primetimo da $\mathbf{2}^n$ ima 2^n elemenata. Pokazaće se da je svaka konačna Bulova algebra izomorfna Bulovoj algebri $\mathbf{2}^n$ za neki $n \in N^+$. U opštem slučaju Bulova algebra je svaka algebarska struktura $\mathbf{B} = (B, \bigvee, \bigwedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ koja zadovoljava sledeće aksiome:

Aksiome teorije Bulovih algebri

1.	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	Asocijativni zakon za disjunkciju.
2.	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	Asocijativni zakon za konjunkciju.
3.	$x \vee y = y \vee x$	Komutativni zakon za disjunkciju.
4.	$x \wedge y = y \wedge x$	Komutativni zakon za konjunkciju.
5.	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	Distributivni zakon za $\wedge$ prema $\vee$.
6.	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	Distributivni zakon za $\vee$ prema $\wedge$.
7.	$x \vee 0 = x$	Zakon neutralnog elementa za 0 i $\vee$.
8.	$x \wedge 1 = x$	Zakon neutralnog elementa za 1 i $\wedge$.
9.	$x \vee x' = 1$	Zakon komplementarne dopune za $\vee$.
10.	$x \wedge x' = 0$	Zakon komplementarne dopune za $\wedge$.
11.	$0 \neq 1$	Različitost konstanti 0 i 1.

Operacije $\bigvee, \bigwedge, '$ algebre $\mathbf{B}$ nazivamo redom (bulovska) disjunkcija, konjunkcija i komplement. Reč "bulovska" podrazumeva se i najčešće se izostavlja. U slučaju dvočlane Bulove algebre $\mathbf{2}$, prefiks "bulovska" zamenjuje se sa reči "iskazna".

Bulovske operacije $\vee$ i $\wedge$ ponekad se redom nazivaju i (bulovska) unija, presek i komplement. Takođe se umesto simbola $\vee, \wedge$ koriste redom simboli operacija $+$ i $\cdot$. Na primer, 5. aksioma (Zakon distribucije) u ovoj notaciji izgleda: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, ili još jednostavnije, podrazumevajući konvenciju o vezivanju operacija $+$ i $\cdot$ i brisanju zagrada u aditivnoj notaciji, $x(y + z) = xy + xz$

Ovakvo zapisivanje bulovskih termova nazivamo *aditivnom notacijom.*

S obzirom da aksiome 2, 4, 6, 10 nastaju iz aksioma 1, 3, 5, 7, 8 uzajamnom zamenom mesta disjunkcije i konjunkcije i nule i jedinice, vidimo da za proizvoljan bulovski iskaz, tj. predikatsku formulu zapisanu u jeziku Bulovih algebri, važi sledeće tvrđenje za teoriju T_{BA} Bulovih algebri.

Teorema 2.1 (**Princip dualnosti**) *Neka je $\varphi(\vee, \wedge, ', 0, 1)$ proizvoljan bulovski iskaz. Tada je $\varphi(\vee, \wedge, ', 0, 1)$ teorema teorije T_{BA} akko je $\varphi(\wedge, \vee, ', 1, 0)$ teorema teorije T_{BA}.*

Ovo tvrđenje može se strogo dokazati indukcijom po dužini dokaza u teoriji T_{BA}. Nije teško videti da ako je $\mathbf{B} = (B, \bigvee, \bigwedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Bulova algebra da je

$\mathbf{B}^* = (B, \bigwedge, \bigvee, ', \mathbf{1}, \mathbf{0})$ takođe Bulova algebra. Prethodno tvrđenje takođe sledi iz činjenice da je preslikavanje $\theta(x) = x'$, $\theta\colon B \to B$, izomorfizam ovih algebri, tj.

$\theta\colon (B, \bigvee, \bigwedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}) \cong (B, \bigwedge, \bigvee, ', \mathbf{1}, \mathbf{0})$.

S obzirom na asocijativnost operacije $\vee$, možemo pisati $x \vee y \vee z$ umesto $(x \vee y) \vee z$ ili $x \vee (y \vee z)$. Slično značenje ima $x \wedge y \wedge z$.

Primeri Bulovih algebri.

2.2 Iskazna algebra $\mathbf{2}$ i njen stepen $\mathbf{2}^n$.

2.3 Neka je X neprazan skup i $P(X) = \{Y\colon Y \subseteq X\}$ partitivni skup skupa X (skup svih podskupova skupa X). Tada je $\mathbf{P}(X) = (P(X), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, X)$ Bulova algebra. Ovde je za $Y \subseteq X$, $Y^c = X \setminus Y$, dok je interpretacija simbola konstante 0 jednaka $\emptyset$, simbola 1 je X. Ako je $n > 0$ prirodan broj i $|X| = n$, primetimo da ova Bulova algebra ima 2^n elemenata. Takođe, ako je X beskonačan skup, tada je i $P(X)$ beskonačan, pa je i algebra $\mathbf{P}(X)$ beskonačna. Dakle postoje beskonačne Bulove algebre.

2.4 Neka je X neprazan skup i $Y \subseteq X$. Karakteristična funkcija skupa Y je preslikavanje $k_Y\colon X \to 2$ definisano na sledeći način: ako je $x \in Y$ tada $k_Y(x) = 1$, dok je za $x \in Y^c$, $k_Y(x) = 0$. Neka je B_X skup svih karakterističnih funkcija podskupova skupa X, tj. $B_X = \{k_Y\colon Y \in P(X)\}$. Tada je $\mathbf{B}_X = (B_X, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Bulova algebra, gde je za $Y, Z \subseteq X$, $k_Y \vee k_Z = k_{Y \cup Z} = k_Y + k_Z - k_Y k_Z$, $k_Y \wedge k_Z = k_{Y \cap Z} = k_Y k_Z$, $k'_Y = 1 - k_Y$. Ovde su $+$ i $\cdot$ obične aritmetičke funkcije sabiranja i množenja brojeva. Konstanta $\mathbf{0} = k_\emptyset$ je konstantna funkcija koja uzima samo vrednost 0, dok je $\mathbf{1} = k_X$ konstantna funkcija koja uzima samo vrednost 1. Dakle, $(k_Y \vee k_Z)(x) = k_Y(x) + k_Z(x) - k_Y(x)k_Z(x)$, $(k_Y \wedge k_Z)(x) = k_Y(x)k_Z(x)$, $\mathbf{1}(x) = 1$, $\mathbf{0}(x) = 0$, $x \in X$.

Sledeća teorema daje osnovne identitete koji važe u Bulovim algebrama. Naravno, oni su posledice aksioma teorije Bulovih algebri. Dovoljno je dokazati samo neke od ovih identiteta, ostali slede s obzirom na Princip dualnosti.

Teorema 2.5 *U svakoj Bulovoj algebri važe sledeći identiteti.*

1. *Zakoni idempotencije.* $x \vee x = x, \quad x \wedge x = x.$
2. $x \vee 1 = 1, \quad 1 \vee x = 1, \quad x \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge x = 0.$
3. *Zakoni apsorpcije.* $x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x.$
4. *Jedinstvenost komplementa. Ako* $x \wedge y = 0$ *i* $x \vee y = 1$, *tada* $y = x'$.
5. $x'' = x, \quad 0' = 1, \quad 1' = 0.$
6. *De Morganovi obrasci.* $(x \vee y)' = x' \wedge y', \quad (x \wedge y)' = x' \vee y'.$
7. $x \wedge y' = 0 \Leftrightarrow x \wedge y = x, \quad x \vee y' = 1 \Leftrightarrow x \vee y = x.$

Dokaz. 1. S obzirom na aksiome 8, 9, 6, 7, primenjujući ih tim redom, imamo

$$x \vee x = (x \vee x) \wedge 1 = (x \vee x) \wedge (x \vee x') = x \vee (x \wedge x') = x \vee 0 = x,$$

odakle $x \vee x = x$. Prema Principu dualnosti sledi $x \wedge x = x$.

Na sličan način dokazujemo ostala tvrđenja. Naravno, u tim dokazima možemo koristiti već dokazana tvrđenja.

2. $x \vee 1 = x \vee (x \vee x') = (x \vee x) \vee x' = x \vee x' = 1$.

3. $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$.

4. Pretpostavimo $x \wedge y = 0$ i $x \vee y = 1$. Tada:
$y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge x') = (y \vee x) \wedge (y \vee x') = (x \vee y) \wedge (y \vee x') =$
$1 \wedge (y \vee x') = (x \vee x') \wedge (y \vee x') = (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) = x' \vee (x \wedge y) =$
$x' \vee 0 = x'$, dakle $y = x'$.

5. Neka je $X = x'$ i $Y = x$. Tada $X \wedge Y = 0$ i $X \vee Y = 1$. Tada, prema (4), $Y = X'$, tj. $x = x''$.

6. Neka je $X = x \vee y$ i $Y = x' \wedge y'$. Tada:
$X \wedge Y = (x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = (x \wedge x' \wedge y') \vee (y \wedge x' \wedge y') = 0 \vee 0 = 0.$
$X \vee Y = (x \vee y) \vee (x' \wedge y') = (x \vee y \vee x') \wedge (x \vee y \vee y') = 1 \wedge 1 = 1.$
Dakle, $X \wedge Y = 0$ i $X \wedge Y = 1$, te prema (4), $Y = X'$, tj. $x' \wedge y' = (x \vee y)'$.

7. Pretpostavimo $x \wedge y' = 0$. Tada, prema De Morganovom obrascu, $x' \vee y'' = 0'$, tj. $x' \vee y = 1$. Otuda $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge 1$, odakle $((x \wedge x') \vee (x \wedge y) = x$, tj. $0 \vee (x \wedge y) = x$, dakle $x \wedge y = x$.

Obrnuto, pretpostavimo $x \wedge y = x$. Tada, prema De Morganovom obrascu, $x' \vee y' = x'$, odakle prema distributivnom zakonu $(x \wedge x') \vee (x \wedge y') = x \wedge x'$, tj. $x \wedge y' = 0$. □

Koristeći simbole $+$ i $\cdot$ umesto $\vee$ i $\wedge$ bulovski izrazi i dokazi postaju pregledniji. Dakle, u razmatranju koje sledi, $x + y$ i xy stoje redom umesto $x \vee y$ i $x \wedge y$. Na primer, identitet $x \vee x' = 1$ postaje $x + x' = 1$. Zapis bulovskih izraza pomoću $+$ i $\cdot$ nazivamo *aditivnom notacijom*.

Definicija 2.6 *Neka su $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bulovski izrazi. Tada*

$$\bigvee_{i=1}^{n} u_i \stackrel{\text{def}}{=} u_1 \vee u_2 \vee \ldots \vee u_n, \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} u_i \stackrel{\text{def}}{=} u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n.$$

U aditivnoj notaciji, jednakosti iz prethodne definicije izgledaju:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} u_i = u_1 u_2 \cdots u_n.$$

Umesto $\bigvee\limits_{i=1}^{n} u_i$ pisaćemo takođe $\bigvee\limits_{1 \le i \le n} u_i$, ili samo $\bigvee\limits_{i} u_i$ ako su granice 1 i n jasne. Slična notacija važi za ostale operatore $\bigwedge$, $\sum$ i $\prod$.

Lema 2.7 *U Bulovim algebrama važi identitet $ax + bx' + ab = ax + bx'$.*

Dokaz. $ax + bx' + ab = ax + bx' + ab(x + x') = ax + bx' + abx + abx' = ax(1 + b) + bx'(1 + a) = ax \cdot 1 + bx' \cdot 1 = ax + bx'$. □

2.2 Bulovski termi i funkcije

Bulovski termi imaju kanonske reprezentacije iz koje slede mnoge ključne teoreme o Bulovim algebrama. One odgovaraju teoremama o SDNF i SKNF kod iskaznih formula u iskaznom racunu. U razmatranju koje sledi koristiemo notaciju $+, \cdot$ umest $\vee, \wedge$.

Pod literalom promenljive x podrazumevamo bilo koji od izraza x, x'. Za bulovski term t kažemo da je predstavljen u *disjunktivnoj normalnoj formi*, što kraće zapisujemo DNF, ako je

$$t = \sum_{i \in I} u_i$$

u_i je konjunkcija literala nekih promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Na primer, term

$$t = xy + yz + xy'z' + x'yz'$$

predstavljen je u DNF.

Neka je $\mathbf{B}$ Bulova algebra i $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bulovski izraz. Dalje, neka su $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$. Tada $t^{\mathbf{B}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ označava vrednost terma t u algberi $\mathbf{B}$ za vrednosti promenljivih $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, $\ldots$, $x_n = b_n$. Umesto $t^{\mathbf{B}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ često pišemo $t(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ako to kontekst dozvoljava. Ako je $\alpha \in 2^n$, onda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ i tada $t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ kraće zapisujemo sa $t(\alpha)$. Dakle,

$$t(\alpha) = t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = t^{\mathbf{2}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Na primer, ako je $t(x, y, z) = x + yz'$ i $\alpha = (1, 0, 1)$, dakle $\alpha \in 2^3$, tada

$$t(\alpha) = t(1, 0, 1) = 1 + 0 \cdot 1' = 1 + 0 = 1.$$

Primetimo da je algebra $\mathbf{2}$ ugrađena u teoriju Bulovih algebri u sledećem smislu. S obzirom da su simboli konstanata 0, 1 elementi jezika teorije Bulovih algebri, $t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ je zapravo bulovski term. Indukcijom po složenosti terma nije teško dokazati da identitet $t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \beta$, gde je $\beta = t^{\mathbf{2}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, sledi iz askioma teorije Bulovih algebri. Dakle nema kontradikcije u značenju zapisa $t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, bez obzira što može da se čita na dva načina, jednom kao vrednost algebarskog izraza t u Bulovoj algebri $\mathbf{2}$, drugi put samo kao algebarski izraz teorije Bulovih algebri.

U tvrđenju koje sledi koristićemo sledeću konvenciju. Ako je t bulovski term i x promenljiva, tada je $t(x/1)$ term dobijen iz t zamenom u t promenljive x simbolom 1. Slično značnje ima $t(x/0)$. Radi preglednijeg zapisa, u dokazu sledećeg tvrdjenja, $t(x/1)$ i $t(x/0)$ kraće ćemo zapisivati kao t_1 i t_0. Primetimo, ako je x jedina promenljiva terma t, dakle $t = t(x)$, tada $t_1 = t(1)$ i $t_0 = t(0)$.

Lema 2.8 *Neka je t bulovski term i x promenljiva. Tada $t = t_1 x + t_0 x'$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po složenosti terma, $\mathrm{sl}(t)$ (možemo uzeti, na primer, da je $\mathrm{sl}(t)$ broj bulovskih operacija u t). Pretpostavimo induktivnu hipotezu da tvrđenje važi za sve terme čija je složenost manja od sl(t).

Neka je sl$(t) = 0$. Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

1. $t = 0$. Tada $t_0 = 0$ i $t_1 = 0$, dakle $t_1x + t_0x' = 0 \cdot x + 0 \cdot x' = 0 = t$.
2. $t = 1$. Tada $t_0 = 1$ i $t_1 = 1$, dakle $t_1x + t_0x' = x + x' = 1 = t$.
3. $t = x$. Tada $t_0 = 0$ i $t_1 = 1$, dakle $t_1x + t_0x' = 1 \cdot x + 0 \cdot x' = x = t$.
4. $t = y$, y je promenljiva različita od x. Tada $t_0 = y$ i $t_1 = y$, dakle

$$t_1x + t_0x' = y(x + x') = y = t.$$

Neka je sl$(t) = n$, $n > 0$. Tada imamo sledeće mogućnosti:

1. $t = u + v$. Dakle sl$(u) < n$ i sl$(v) < n$, te prema induktivnoj hipotezi važi

$$u = u_1x + u_0x' \quad v = v_1x + v_0x'.$$

Otuda,

$t = uv = (u_1x + u_0x') + (v_1x + v_0x') = (u_1 + v_1)x + (u_0 + v_0)x' = t_1x + t_0x'$.

2. $t = uv$. Dakle sl$(u) < n$ i sl$(v) < n$, te prema induktivnoj hipotezi važi $u = u_1x + u_0x' \quad v = v_1x + v_0x'$. Otuda,
$t = uv = (u_1x+u_0x')(v_1x+v_0x') = u_1xv_1x+u_1xv_0x'+u_0x'v_1x+u_0x'v_0x' = u_1v_1x + u_0v_0x' = t_1x + t_0x'$.

3. $t = u'$. Dakle sl$(u) < n$, te prema induktivnoj hipotezi važi $u = u_1x + u_0x'$.
Otuda
$t = u' = (u_1x + u_0x')' = (u_1' + x')(u_0' + x) = u_1'x + u_0'x' + u_1'u_0'$.
Prema Lemi 2.7 važi $u_1'x + u_0'x' + u_1'u_0' = u_1'x + u_0'x'$, dakle
$t = u_1'x + u_0'x' = t_1x + t_0x'$. □

Neka je t bulovski term i x_1, x_2 dve različite promenljive. Tada t_{11} označava term dobijen iz t najpre supstitucijom u t promenljive x_1 simbolom 1, zatim zamenom u tako dobijenom izrazu promenljive x_2 simbolom 1. Dakle, $t_{11} = t(x_1/1)(x_2/1)$. Slično značenje imaju zapisi t_{10}, t_{01}, t_{10}. Na primer, ako je $t = x_1 + x_2'x_3$, tada je $t_{10} = 1 + 0'x_3 = 1$, $t_{00} = 0 + 0'x_3 = x_3$ i slično $t_{11} = 1$, $t_{01} = 0$. Primenom prethodnog tvrdjenja najpre po x_1 zatim po x_2 nalazimo:

$$\begin{aligned} t &= t_1x_1 + t_0x_1' = (t_{11}x_2 + t_{10}x_2')x_1 + (t_{01}x_2 + t_{00}x_2')x_1 \\ &= t_{11}x_1x_2 + t_{10}x_1x_2' + t_{01}x_1'x_2 + t_{00}x_1'x_2'. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Na primer, za $t = x_1 + x_2'x_3$ prema (2.1) nalazimo

$$t = 1 \cdot x_1x_2 + 1 \cdot x_1x_2' + 0 \cdot x_1'x_2 + x_3 \cdot x_1'x_2' = x_1x_2 + x_1x_2' + x_1'x_2'x_3.$$

Definicija 2.9 $\quad x^1 = x, \quad x^0 = x'.$

Prema ovoj definiciji vidimo da je $0^0 = 1$, $0^1 = 0$, $1^0 = 0$, $1^1 = 1$. Dakle važi sledeće tvrđenje

Stav 2.10 *Neka su $\lambda, \mu \in \{0, 1\}$. Tada $\lambda^\mu = 1$ ako i samo ako $\lambda = \mu$.*

Identitet (2.1) ima sledeću generalizaciju. Najpre proširimo notaciju $t_{\lambda\mu}$, $\lambda, \mu \in \{0,1\}$. Neka je $\alpha \in 2^n$, $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, $n \geq 1$. Ovde je zapravo binarni vektor $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ zapisan kao binarni niz $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$. Dalje, neka su $x_1, x_2, \ldots x_n$ promenljive i t bulovski term. Tada je

$$t_\alpha = t(x_1/\alpha_1)(x_2/\alpha_2)\cdots(x_n/\alpha_n), \tag{2.2}$$

tj. t_α je term dobijen iz t supstitucijom promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ redom binarnim ciframa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Teorema 2.11 *Neka je t bulovski term i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ različite promenljive. Tada*

$$t = \sum_{\alpha \in 2^n} t_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po broju promenljivih n. Tvrđenje je dokazana za $n = 1$ u Lemi 2.8. Pretpostavimo induktivnu hipotezu, da tvrđenje važi za $n-1$. Dakle, prema induktivnoj hipotezi za promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ imamo

$$t = \sum_{\beta \in 2^{n-1}} t_\beta x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}. \tag{2.3}$$

Primenom Leme 2.8 na term t_β, $\beta \in 2^{n-1}$, i promenljivu x_n, dobijamo $t_\beta = t_{\beta 1} x_n + t_{\beta 0} x_n'$, te prema (2.3) imamo

$$\begin{aligned} t &= \sum_{\beta \in 2^{n-1}} (t_{\beta 1} x_n + t_{\beta 0} x_n') x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \\ &= \sum_{\beta \in 2^{n-1}} t_{\beta 1} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} x_n + \sum_{\beta \in 2^{n-1}} t_{\beta 0} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} x_n' \\ &= \sum_{\alpha \in 2^n} t_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}. \qquad \square \end{aligned}$$

Iz prethodne teoreme odmah sledi nekoliko važnih posledica. Ako je t algebarski izraza, podsetimo se da $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ znači da su promenljive koje se javljaju u t neke od promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jedine promenljive koje se javljaju u t, tada kažemo da su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tačno promeljive terma t.

Teorema 2.12 *Neka je $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bulovski term, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tačno promenljive terma t i $\Gamma = \{\alpha \in 2^n \colon t(\alpha) = 1\}$. Tada*

$$t = \sum_{\alpha \in \Gamma} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{2.4}$$

Dokaz. S obzirom da su u $t(\alpha) = t_\alpha$ sve promenljive zamenjene simbolima 0 ili 1, to je $t_\alpha = 0$ ili $t_\alpha = 1$. Prema teoremi 2.11 tvrđenje sledi. $\square$

Ako je u prethodnoj teoremi $\Gamma = \emptyset$, primetimo da je onda suma u (2.4) prazna, pa je u tom slučaju $t = 0$. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tačno promenljive terma t i $\Gamma \neq \emptyset$, tada jednakost (2.4) predstavlja *savršenu disjunktivnu normalnu formu* bulovskog terma t koju kraće obeležavamo sa SDNF. Primetimo da (2.4) u svakom slučaju predstavlja DNF terma t i da se u svakom disjunktu javlja tačno jedan literal svake promenljive x_i. Razlika od SDNF terma t javlja se samo u slučaju da niz promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sadrži promenljive koje se ne javljaju u t.

Prema principu dualnosti na sličan način uvodi se *savršena konjunktivna normalna forma* terma t koju kraće označavamo sa SKNF. U izvođenju SKNF simboli $\vee$, $\wedge$ (odnosno $+$ i $\cdot$), i 0 , 1 samo uzajamno zamene mesta. Dakle, SKNF bulovskog terma $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ izgleda:

$$t = \prod_{\alpha \in \Gamma} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i'}, \qquad \Gamma = \{\alpha \in 2^n : t(\alpha) = 0\}. \tag{2.5}$$

Primer 2.13.

x	y	z	t
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Neka je $u = xy + y'z$. Prema tablici za vrednosti terma u u Bulovoj algebri **2** nalazimo $\Gamma = \{001, 101, 110, 111\}$.

Dakle, SDNF terma u je $u = x'y'z + xy'z + xyz' + xyz$.

SKNF terma u je $u = (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z)$, $\Gamma' = \{000, 010, 011, 100\}$.

Umesto x' često se koristi zapis $\bar{x}$. U ovom zapisu SDNF terma u izgleda:

$$u = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz.$$

Ako uzmemo da je $u(x, y, z, s) = xy + y'z$, tada Teorema (2.11) daje:

$$\begin{aligned} u &= \bar{x}\bar{y}zs + x\bar{y}zs + xy\bar{z}s + xyzs + \bar{x}\bar{y}z\bar{s} + x\bar{y}z\bar{s} + xy\bar{z}\bar{s} + xyz\bar{s} \\ &= (\bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz)(s + \bar{s}) = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz \end{aligned}$$

□

Sledeća teorema daje jednostavan postupak za proveru bulovskih identiteta. Postupa je sličan onom za proveru tautologičnosti iskaznih formula.

Teorema 2.14 *Neka je bulovski identitet $u = v$ tačan u dvočlanoj Bulovoj algebri* **2**. *Tada $u = v$ važi u svakoj Bulovoj algebri.*

Dokaz Neka su u i v bulovski termi i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lista promenljivih koje se javljaju u nekom od izraza u, v. Dakle možemo uzeti da je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

i $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Prema pretpostavci za sve $\alpha \in 2^n$ važi $u^{\mathbf{2}}(\alpha) = v^{\mathbf{2}}(\alpha)$. Neka su za

$$\Gamma_u = \{\alpha \in 2^n \colon u(\alpha) = 1\}, \quad \Gamma_v = \{\alpha \in 2^n \colon v(\alpha) = 1\}.$$

Tada prema teoremi 2.12, DNF za u i v glase:

$$u = \sum_{\alpha \in \Gamma_u} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad v = \sum_{\alpha \in \Gamma_v} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Dokazujemo da je $\Gamma_u = \Gamma_v$. Pretpostavimo suprotno, da je $\Gamma_u \neq \Gamma_v$. Tada, $\Gamma_u \backslash \Gamma_v \neq \emptyset$ ili $\Gamma_v \backslash \Gamma_u \neq \emptyset$, pa možemo uzeti, na primer, $\Gamma_u \backslash \Gamma_v \neq \emptyset$. Neka je $\beta \in \Gamma_u \backslash \Gamma_v$. S obzirom da je $\beta \in \Gamma_u$, $\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2} \cdots \beta_n^{\beta_n}$ je član disjunkcije

$$u(\beta) = \sum_{\alpha \in \Gamma_u} \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_n^{\alpha_n}.$$

Prema stavu 2.10 imamo $\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2} \cdots \beta_n^{\beta_n} = 1$, dakle $\sum_{\alpha \in \Gamma_u} \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_n^{\alpha_n} = 1$, pa $u(\beta) = 1$.

S druge strane, $\beta \notin \Gamma_v$, pa u $\beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_n^{\alpha_n}$ za $\alpha \in \Gamma$ i neki $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i \neq \beta_i$. Dakle $\beta_i^{\alpha_i} = 0$. Otuda $\beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_n^{\alpha_n} = 0$, odakle sledi

$$v(\beta) = \sum_{\alpha \in \Gamma_v} \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_n^{\alpha_n} = \sum_{\alpha \in \Gamma_v} 0 = 0,$$

tj. $u(\beta) \neq v(\beta)$, suprotno pretpostavci da $u = v$ važi u Bulovoj algebri $\mathbf{2}$. Dakle, zaista $\Gamma_u = \Gamma_v$, pa u svakoj Bulovoj algebri važi

$$u = \sum_{\alpha \in \Gamma_u} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = \sum_{\alpha \in \Gamma_v} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = v.$$

□

Primer. Dokazaćemo identitet (2.5), teoremu o savršenoj konjunktivnoj normalnoj formi za term $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ primenom prethodne teoreme. Neka je Γ kao u (2.5) i $u = \prod_{\alpha \in \Gamma} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i'}$. Proverimo da identitet $t = u$ važi u algebri $\mathbf{2}$. Neka je $\beta \in 2^n$ bilo koji i neka je $t(\beta) = 0$. Pretpostavimo da je

$u(\beta) = \prod_{\alpha \in \Gamma} \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\alpha_i'} = 1.$

S obzirom da je $\beta \in \Gamma$, to je $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\beta_i'} = 1$, odakle primenom De Morganovog obrasca $\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2} \cdots \beta_n^{\beta_n} = 0$, kontradikcija. Dakle $t(\beta) = 0 \Rightarrow u(\beta) = 0$. Dokažimo implikaciju u suprotnom smeru. Pretpostavimo $u(\beta) = 0$. Tada za neki $\alpha \in \Gamma$ imamo $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\alpha_i'} = 0$, dakle $\beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_n^{\alpha_n} = 1$, odakle $\beta = \alpha$, pa $\beta \in \Gamma$, tj. $t(\beta) = 0$. Prema tome $t(\beta) = 0$ ako i samo ako $u(\beta) = 0$, pa i $t(\beta) = 1$ ako i samo ako $u(\beta) = 1$. Dakle, $t = u$ važi u algebri $\mathbf{2}$. □

Neka je $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bulovski term i $\hat{t} \colon 2^n \to 2$ preslikavanje definisano pomoću $\hat{t}(\alpha) = t(\alpha)$, $\alpha \in 2^n$. Na primer, ako je $t(x, y, z) = xy + y'z$, tada je tablicom u primeru 2.13 data tablica vrednosti funkcije $\hat{t}$. Za funkciju $f \colon 2^n \to 2$ kažemo da je bulovska ako postoji bulovski term t tako da je $f = \hat{t}$. Sledeće tvrđenje koje ima jednostavan dokaz, od fundamentalnog je značaja za arhitekturu i dizajn binarnih računara.

Teorema 2.15 *Za svaku binarnu funkciju $f\colon 2^n \to 2$ postoji bulovski term t tako da je $f = \hat{t}$.*

Dokaz. Neka je $\Gamma = \{\alpha \in 2^n \colon f(\alpha) = 1\}$ i $t = \sum_{\alpha\in\Gamma} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Tada je $f = \hat{t}$. □

Kod binarnih računara sva izračunavanja vrše se nad konačnim nizovima nula i jedinica određene dužine. Brojevi su predstavljeni u binarnom sistemu, pa se ove njihove binarne reprezentacije mogu smatrati bulovskim vektorima. Ako računar izračunava neku funkciju $F\colon 2^n \to 2^m$, na primer neku aritmetičku operaciju nad brojevima, tada je $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ gde su $f_i\colon 2^n \to 2$ binarne, dakle prema prethodnoj teoremi bulovske funkcije. Otuda teorija Bulovih algebri predstavlja moćno i osnovno sredstvo u dizajnu i analizi logičkih kola savremenih digitalnih računara.

Neka je $\mathbf{B}$ Bulova algebra i $X \subseteq B$. Kažemo da je $\mathbf{B}$ generisana skupom X, što zapisujemo $\mathbf{B} = \langle X\rangle$, ako je

$$B = \{t(g_1, g_2, \ldots, g_n)\colon n \in N^+, g_1, g_2, \ldots, g_n \in X, t \,\text{je bulovski term}\}$$

Ako je X konačan skup, na primer $X = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, tada kažemo da je $\mathbf{B}$ konačno-generisana i pišemo $\mathbf{B} = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$. U tom slučaju vidimo da za svaki $b \in B$ postoji term t tako da je $b = t(g_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Primer 2.16 **1**. Ako je X konačan skup, tada je $\mathbf{P}(X) = (P(X), \cup, \cap, \emptyset, X)$ generisana jednočanim podskupovima $\{a\}$, $a \in X$, s obzirom da je svaki $Y \subseteq X$ konačna unija jednočlani skupova.

2. Ako je $\mathbf{B} = \mathbf{2}^n$, $n \geq 2$, tada $\mathbf{B} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$, gde je

$e_1 = 100\ldots00$, $e_2 = 010\ldots00$, …, $e_n = 000\ldots01$.

s obzirom da je svaki $b \in B$ konačna disjunkcija elemenata $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Na primer,

$110101011 = e_1 + e_2 + e_4 + e_6 + e_8 + e_9$.

Teorema 2.17 *Neka je* $\mathbf{B}$ *Bulova algebra i* $\mathbf{B} = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$. *Tada važi* $|B| \leq 2^{2^n}$.

Dokaz Prema pretpostavci, za svaki $b \in B$ postoji bulovski term t tako da je $b = t(g_1, g_2, \ldots, g_n)$. Prema Teoremi 2.12 o SDNF, postoji $\Gamma \subseteq 2^n$ tako da je

$$b = t(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \sum_{\alpha\in\Gamma} g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \cdots g_n^{\alpha_n}.$$

Dakle, elemenata $b \in B$ ima najviše koliko i podskupova Γ skupa 2^n. S obzirom da podskupova skupa 2^n ima 2^{2^n}, to je $|B| \leq 2^{2^n}$. □

Dakle, svaka konačno generisana Bulova algebra je konačna i svaka beskonačna Bulova algebra nije konačno generisana.

Pojam konačno generisane Bulove algebre i teorema 2.12 omogućavaju detaljniju analizu strukture konačnih Bulovih algebri.

Teorema 2.18 *Neka je* $\mathbf{B}$ *konačna Bulova algebra i* $|B| = n$, $n \geq 2$. *Tada postoji prirodan broj* k *tako da je* $n = 2^k$.

Dokaz. Neka je $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Tada je očigledno $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$. Na primer, za term $t_i = x_i$ i $t_i = t_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ važi $b_i = t_i(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, dakle $B = \{t(b_1, b_2, \ldots, b_n) \colon t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ je bulovski term}\}$.

Neka je $u_\alpha = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \cdots b_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in 2^n$, i neka je $S = \{u_\alpha \colon u_\alpha \neq 0, \alpha \in 2^n\}$ i $k = |S|$. Primetimo da je $u_\alpha u_\beta = 0$ ako $\alpha \neq \beta$ i da je $u_\alpha u_\alpha = u_\alpha$. S obzirom da za svaki $b \in B$ postoji term t tako da je $b = t(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, prema teoremi 2.12 postoji $X \subseteq S$ tako da je

$$b = \sum_{\alpha \in X} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \cdots b_n^{\alpha_n} = \sum_{\alpha \in X} u_\alpha.$$

Dokazujemo da je izabrani skup X jedinstven, tj. ako je $b = \sum_{\alpha \in Y} u_\alpha$, $Y \subseteq S$, tada $X = Y$.

Pretpostavimo da je $X \neq Y$, dakle $Y \backslash X \neq \emptyset$ ili $X \backslash Y \neq \emptyset$, recimo $Y \backslash X \neq \emptyset$. Neka je $\beta \in 2^n$ takav da je $u_\beta \in Y \backslash X$. Tada $bu_\beta = \sum_{\alpha \in Y} u_\alpha u_\beta = u_\beta$ jer se u_β javlja u $\sum_{\alpha \in Y} u_\alpha$. S druge strane takođe imamo $bu_\beta = \sum_{\alpha \in X} u_\alpha u_\beta = 0$ jer se u_β ne pojavljuje u $\sum_{\alpha \in X} u_\alpha$, što je kontradikcija jer je $u_\beta \neq 0$. Dakle $X = Y$.

Dakle preslikavanje $\theta \colon P(S) \to B$ definisano pomoću $\theta(X) = \sum_{\alpha \in X} u_\alpha$, $X \in P(S)$, je bijekcija između $P(X)$ i B (konstantu 0 predstavićemo praznom sumom). Otuda $|B| = |P(S)| = 2^k$. $\square$

Pažljivijom analizom prethodnog dokaza vidi se da važi

$$\theta(X \cup Y) = \theta(X) + \theta(Y), \quad \theta(X \cap Y) = \theta(X) \cdot \theta(Y),$$

tj. Bulove algebre $\mathbf{B}$ i $\mathbf{P}(S)$ su izomorfne. Dakle, sa algebarskog stanovišta, one su iste. Specijalno, algebra $\mathbf{2}^k$ izomorfna je $\mathbf{P}(S)$.

2.3 Bulovo uređenje

U proizvoljnoj Bulovoj algebri $\mathbf{B} = (\mathbf{B}, +, \cdot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ uvodi se parcijalno uređenje na prirodan način. Ono je saglasno sa operacijama algebre $\mathbf{B}$ i daje drugi pogled i detaljniji uvid u njenu strukturu. Bulovo uređenje uvodimo na sledeći način.

Teorema 2.19 *Neka je binarna relacija* $\leq$ *nad domenom* B *Bulove algebre* $\mathbf{B}$ *definisana sledećom ekvivalencijom:*

$$x \leq y \Leftrightarrow x = xy, \quad x, y \in B. \tag{2.6}$$

Tada važi:

1. $(B, \leq)$ *je parcijalno uređen skup.*

2. *Uređenje* $\leq$ *saglasno je sa operacijama algebre* $\mathbf{B}$, *tj.*

$$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz, \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \qquad x, y, z \in B.$$

3. *Za* $x, y \in B$ *sledeći uslovi su ekvivlentni:*
a. $x \leq y$, **b**. $y = x + y$, **c.** $xy' = 0$.

Dokaz. **1.** Podsetimo se da je relacija $\leq$ domena B parcijalno uređenje ako i samo ako je ona refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Dakle dokazujemo ove osobine relacije $\leq$. Neka su $x, y, z \in B$. Tada

Refleksivnost: $x \leq x$ s obzirom da je $x = x \cdot x$.

Antisimetričnost: Neka je $x \leq y$ i $y \leq x$. Tada $x = xy$ i $y = yx$, dakle $x = y$.

Tranzitivnost: Pretpostavimo $x \leq y$ i $y \leq z$. Tada $x = xy$ i $y = yz$, dakle $x = xy = x(yz) = (xy)z = xz$, tj. $x \leq z$.

2. Neka je $x \leq y$, tj. $x = xy$. Tada $xz = (xy)z = xyz = (xz)(yz)$. Dakle $xz \leq yz$. Dalje, koristeći distributivni zakon za $\vee$ prema $\wedge$, imamo

$(x + z)(y + z) = xy + z = x + z,$

dakle $x + z \leq y + z$.

3. Pretpostavimo $x \leq y$, tj. $x = xy$, odakle $x+y = xy+y = (x+1)y = 1\cdot y = y$, pa $y = x + y$. Dakle (**a**) $\Rightarrow$ (**b**).

Pretpostavimo $y = x + y$. Tada $0 = yy' = (x + y)y' = xy' + yy' = xy' + 0 = xy'$, tj. $xy' = 0$. Ovim smo dokazali (**b**) $\Rightarrow$ (**c**).

Pretpostavimo $xy' = 0$. Tada, primenom De Morganovog obrasca, $x'+y = 1$, odakle $(x' + y)x = 1 \cdot x$, tj. $x = xx' + xy = 0 + xy = xy$, pa $x \leq y$. Ovim smo dokazali (**c**) $\Rightarrow$ (**a**). □

Uređenje Bulove algebre uvedeno prethodnom teoremom nazivamo *Bulovim uređenjem*. S obzirom da $0 \cdot 1 = 0$, vidimo da je $0 \leq 1$. Kao što je uobičajeno, $x < y$ označava da je $x \leq y$ i $x \neq y$. Dakle $0 < 1$.

Haseov Dijagram (prema nemačkom matematičaru Helmutu Hasse-u) je matematički dijagram - crtež koji se koristi za predstavljanje nekog konačnog parcijalno uređenog skupa $(X, \leq)$. Na crtežu su elementi domena X predstavljeni obeleženim tačkama - temenima, dok su segmentima povezani tačno susedni elementi uređenja. Za $a, b \in X$ kažemo da su susedni ako su uporedivi i između a i b nema drugih elemenata iz X, tj. ako pretpostavimo da je $a \leq b$ tada iz $a \leq x \leq b$ sledi $x = a$ ili $x = b$, i slično ako je $b \leq a$. Na crtežu je manji element predstavljen ispod svog većeg suseda. Segment može seći drugi segment, ali nije dozvoljeno da prolaze kroz druga temena osim kroz dva susedna temena koja povezuje. Haseov dijagram sa temenima označenim elementima domena X jedinstveno određuje uređenje $(X, \leq)$.

Na priloženom crtežu dati su Haseovi dijagrami Bulovih uređenja Bulovih algebri koje redom imaju 4, 8, 16 i 32 elementa. Primećujemo da su Haseovi dijagrami Bulovih algebri sa jednakim brojem elemenata nad različitim domenima isti, osim što temena nose druge oznake. To je posledica činjenice da su konačne Bulove algebre sa istim brojem elemenata izomorfne.

Bulovo uređenje i bulovske operacije date Bulove algebre povezani su na još jedan način. U toj vezi glavno mesto ima pojam supremuma i infimuma nekog podskupa parcijalno uređenog skupa.

Neka je $\mathbf{A} = (A, \leq)$ parcijalno uređen skup i $X \subseteq A$. Supremum skupa X definišemo kao najmanju gornju granica skupa X. Dakle *supremum* skupa X je element $p \in A$ koji ima sledeća dva svojstva:

$$(\forall x \in X) x \leq p, \quad ((\forall x \in A) x \leq y) \Rightarrow p \leq y, \quad y \in A. \tag{2.7}$$

Ne mora uvek da postoji supremum skupa X. Ako postoji, onda je on jedinstven i tada za supremum skupa X koristimo oznaku $\sup X$.

Na dualan način uvodi se pojam infimuma skupa X. Dakle, *infimum* skupa X je najveća donja granica skupa X, tj. to je element q koji ima sledeće dve osobine:

$$(\forall x \in X) q \leq x, \quad ((\forall x \in A) y \leq x) \Rightarrow y \leq q, \quad y \in A. \tag{2.8}$$

Slična primedba važi i za infimum, ne mora postojati za dati podskup X, ali ako postoji tada infimum skupa X označavamo sa $\inf X$.

Parcijalno uređen skup $\mathbf{A} = (A, \leq)$ je *mreža* ukoliko svaki dvočlan podskup $\{a, b\}$ podskup skupa A ima supremum i infimum.

Teorema 2.20 *Neka je* $\mathbf{B} = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ *Bulova algebra i* $(B, \leq)$ *odgovarajuće Bulovo uređenje, uvedeno pomoću 2.6. Tada je* $(B, \leq)$ *mreža i za elemente* $a, b \in B$ *važi:*

$$a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}. \tag{2.9}$$

Dokaz. Za elemente a, b dokazujemo da važi 2.7. S obzirom da je $a, b \leq a \vee b$, to je $a \vee b$ gornja granica skupa $\{a, b\}$. Dalje, neka je $a, b \leq y$. Tada $a = a \wedge y$ i $b = b \wedge y$, odakle sledi

$$a \vee b = (a \wedge y) \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge y,$$

dakle $a \vee b \leq y$. Ovim smo dokazali da je $a \vee b$ zaista najmanja gornja granica skupa $\{a, b\}$.

Na sličan način, ili prema principu dualnosti, dokazuje se da je $a \wedge b$ najveća donja granica skupa $\{a, b\}$, tj. važi $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. □

Iz priloženog crteža za Bulovu algebru sa osam elementa, prvi dijagram, vidim da je $\sup\{a, c\} = a \vee c = b'$, dok je $\inf\{a, c\} = a \wedge c = 0$.

2.4 Zadaci

Zadatak 2.4.1 Dokazati da su algebre u primerima 2.2 – 2.3 Bulove algebre.

Zadatak 2.4.2 a. Neka je $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $x \vee y = \mathrm{NZS}(x, y)$, $x \wedge y = \mathrm{NZD}(x, y)$ i $x' = 30/x$, $x, y \in B$. Dokazati da je $(B, \vee, \wedge, ', 1, 30)$ Bulova algebra.

b. Neka je $p_1, p_2, \ldots, p_n$ niz različitih prostih brojeva, $n \geq 2$, $m = p_1 p_2 \cdots p_n$ i $B = \{d \colon d | m\}$. Dokazati da je $(B, \vee, \wedge, ', 1, m)$ Bulova algebra uz iste operacije kao pod (a).

Zadatak 2.4.3 Skup $Y \subseteq X$ je *kokonačan* podskup skupa X ako je $X^c = Y \backslash X$ konačan skup. Neka je N skup prirodnh brojeva i

$B = \{X \subseteq N \colon X \text{ je konačan}\} \cup \{X \subseteq N \colon X \text{ je kokonačan}\}$.

. Dokazati da je $\mathbf{B} = (B, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, N)$ Bulova algebra.

Zadatak 2.4.4 Dokazati da u Bulovim algebrama važi:
a. $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.
b. Ako $y = x'$ tada $x = y'$.
c. $x = y$ ako i samo ako $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0$.

Zadatak 2.4.5* Dokazati da su asocijativni zakoni za $\vee$ i $\wedge$ posledice ostalih aksioma teorije Bulovih algebri.

Zadatak 2.4.6 Dokazati da je $t(x_1/1)(x_2/1) = t(x_2/1)(x_1/1)$

Zadatak 2.4.7 Neka je t_α definisano jednakošću (2.2). Dokazati da je $t_\alpha = 0$, ili $t_\alpha = 1$, ili je t_α term koji ne sadrži simbole 0 i 1.

Zadatak 2.4.8 **a**. Neka je **B** Bulova algebra iz primera 2.4.3. Dokazati da je **B** generisana jednočlanim podskupovima od N, ali nije konačno-generisana.

b. Neka je X beskonačan skup. Dokazati da $\mathbf{P}(X)$ nije nije konačno generisana, nije generisana jednočlanim podskupovima, niti je generisana konačnim podskupovima od X.

Zadatak 2.4.9 Neka je $n \geq 1$. Dokazati da je $\sum_{\alpha \in 2^n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = 1$.

Zadatak 2.4.10 Odrediti broj različitih Bulovih uređenja na skupu koji ima 4 elementa. (*R.*: 12)

Zadatak 2.4.11 Navesti primer parcijalnog uređenja koji nije mreža i primer mreže koja nije Bulova algebra.