Задатак 0.1. За које $m, n \in \mathbb{N}$ постоји субмерзија $f\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^m \to \mathbf{S}^n$ која није сурјективна?

Решење 0.1. Субмерзија је по Примеру 2.10 отворено пресликавање, а како има компактан домен $\mathbb{R}\mathbf{P}^m$ онда је по Леми A.2 и затворено. Зато је слика $f(\mathbb{R}\mathbf{P}^m)$ и отворен и затворен непразан подскуп повезаног простора $\mathbf{S}^n$, одакле је $f(\mathbb{R}\mathbf{P}^m) = \mathbf{S}^n$, те је f сурјективно. Дакле, тражени $m, n \in \mathbb{N}$ не постоје. $\triangle$

Задатак 0.2. Доказати да се произвољно глатко пресликавање између многострукости може раставити на композицију субмерзије и смештања.

Решење 0.2. Глатко пресликавање $f\colon M \to N$ је композиција пројекције $\pi_N\colon M \times N \to N$ и пресликавања $\jmath\colon M \to M \times N$ које је дато са $\jmath(p) = (p, f(p))$ за $p \in M$. Ова пресликавања су очигледно глатка, а њихове Јакобијеве матрице у односу на одговарајуће карте имају јединичну подматрицу те су пуног ранга, одакле је π_N субмерзија, а $\jmath$ имерзија. Додатно $\jmath$ је инјективно са непрекидним инверзом (рестрикција пројекције на график), те и смештање. $\triangle$

Задатак 0.3. Одредити $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ за које је $[\partial_x + x\partial_y, [\partial_x, V]] = 0 = [V, \partial_y]$ тако да важи $V_{(0,0)} = (\partial_x)_{(0,0)} + (\partial_y)_{(0,0)}$ и $V_{(1,1)} = 3(\partial_x)_{(1,1)} + 3(\partial_y)_{(1,1)}$.

Решење 0.3. Општи облик векторског поља је $V = F(x,y)\partial_x + H(x,y)\partial_y$, за неке глатке функције $F, H \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$, одакле из $[V, \partial_y] = 0$ добијамо

$$0 = [F\partial_x + H\partial_y, \partial_y] = -\frac{\partial F}{\partial y}\partial_x - \frac{\partial H}{\partial y}\partial_y,$$

одакле следи $\partial F/\partial y = 0 = \partial H/\partial y$, те $F(x,y) = f(x)$ и $H(x,y) = h(x)$ не зависе од y. Друга једначина даје

$$0 = [\partial_x + x\partial_y, [\partial_x, f\partial_x + h\partial_y]] = [\partial_x + x\partial_y, f'\partial_x + h'\partial_y] = f''\partial_x + h''\partial_y - f'\partial_y,$$

одакле следи $f'' = 0$ и $h'' = f'$. Зато је $f = Ax + B$ и $h'' = A$, те $h = (A/2)x^2 + Cx + D$, што даје општи облик решења

$$V = (Ax + B)\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{A}{2}x^2 + Cx + D)\frac{\partial}{\partial y},$$

за произвољне константе $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ које зависе од додатних услова. Из услова за вектор $V_{(0,0)}$ добијамо $B = 1$ и $D = 1$, док из услова за вектор $V_{(1,1)}$ добијамо $A + B = 3$ и $A/2 + C + D = 3$, што даје $A = 2$ и $C = 1$, за коначан резултат

$$V = (2x + 1)\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + x + 1)\frac{\partial}{\partial y},$$

што је јединствено решење. $\triangle$

Задатак 0.4. Нека је $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ отворена подмногострукост од $\mathbb{R}^2$ и $f\colon Q \to Q$ дато са $(u,v) = f(x,y) = (xy, y/x)$. Показати да је f дифеоморфизам и израчунати $f_*(x\partial_x + y\partial_y)$ и $f_*(y\partial_x)$.

Решење 0.4. Из $(u,v) = (xy, y/x)$ добијамо инверз $(x,y) = (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$, те је очигледно да су f и f^{-1} глатка, односно да је f дифеоморфизам. Јакобијева матрица је

$$T_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix},$$

те како је $\det T_{(x,y)}f = 2y/x \neq 0$, то додатно можемо потврдити да је f дифеоморфизам. Из рачуна

$$f_*(x\partial_x + y\partial_y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} = 2xy\partial_u,$$

$$f_*(y\partial_x) = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ -\frac{y^2}{x^2} \end{pmatrix} = y^2\partial_u - (y^2/x^2)\partial_v,$$

добијамо $f_*(x\partial_x + y\partial_y) = 2u\partial_u$ и $f_*(y\partial_x) = uv\partial_u - v^2\partial_v$. $\triangle$

Задатак 0.5. Испитати да ли је пресликавање $f\colon \mathbb{F}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{F}\mathbf{P}^1$ дато са $f(t:1) = (e^{t^2}:1)$ за $t \in \mathbb{F}$ и $f(1:0) = (1:0)$ глатко, где је $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Решење 0.5. За произвољну тачку $(x:1) \in U_2 = \mathbb{F}\mathbf{P}^1 \setminus \{(1:0)\}$ имамо координатну репрезентацију $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}\colon x \mapsto \varphi_2(e^{x^2}:1) = e^{x^2}$ која је глатка, те је довољно доказати да је f глатко у тачки $(1:0)$. Репрезентација у околини те тачке је $h = \varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ за које је $h(x) = \varphi_1(f(1:x)) = \varphi_1(e^{1/x^2}:1) = e^{-1/x^2}$ за $x \neq 0$ уз додатно $h(0) = 0$.

За $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ имамо $h(x) = l(x^2)$ за $x \in \mathbb{R}$, где је l чувена неаналитичка глатка функција из (1.5), те је h глатко као композиција глатких функција и f је глатко у $(1:0)$. За $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{R}$ је $\lim_{t\to 0} h(1t) = 0$ и $\lim_{t\to 0} h(it) = \infty$, те h није непрекидно у 0, а f није глатко у $(1:0)$. Дакле, f је глатко за $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, а није глатко за $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. $\triangle$

Задатак 0.6. Доказати да је $\{(x:y:z) \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2 : xy = z^2\}$ подмногострукост од $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$.

Решење 0.6. Дат подскуп $M \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ је пре свега добро дефинисан јер $(tx)(ty) = (tz)^2$ за $t \neq 0$ важи ако и само ако је $xy = z^2$. Такође, лако је приметити да је $f\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \to \mathbb{R}$ добро дефинисано са

$$f(x:y:z) = \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

те да је $M = f^{-1}(0)$. У првој карти имамо $f \circ \varphi_1^{-1}(x,y) = (x - y^2)/(1 + x^2 + y^2)$, што је глатко са Јакобијевом матрицом

$$(f \circ \varphi_1^{-1})'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(1+x^2+y^2)-2x(x-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2y(1+x^2+y^2)-2y(x-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-x^2+y^2+2xy^2}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2y(1+x+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$$

што је ранга 1 осим за $y = 0$ и $x = \pm 1$, односно за тачке $(1:\pm 1:0) \notin M$. У другој карти имамо $f \circ \varphi_2^{-1}(x,y) = (x - y^2)/(1 + x^2 + y^2)$, са симетричним резултатом. У трећој карти је $f \circ \varphi_3^{-1}(x,y) = (xy - 1)/(1 + x^2 + y^2)$, што је глатко са Јакобијевом матрицом

$$(f \circ \varphi_3^{-1})'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y(1+x^2+y^2)-2x(xy-1)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{x(1+x^2+y^2)-2y(xy-1)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y+2x-x^2y+y^3}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{x+2y-xy^2+x^3}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$$

што је ранга 1 осим за решење система $y + 2x - x^2y + y^3 = 0$ и $x + 2y - xy^2 + x^3 = 0$. Ако прву једначину помножимо са x, а другу са y и саберемо, добијамо $2(x^2 + xy + y^2) = 0$, што је могуће само за $x = y = 0$ које одговара тачки $(0:0:1) \notin M$. У сваком случају M је регуларни скуп нивоа и зато подмногострукост од $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$. $\triangle$