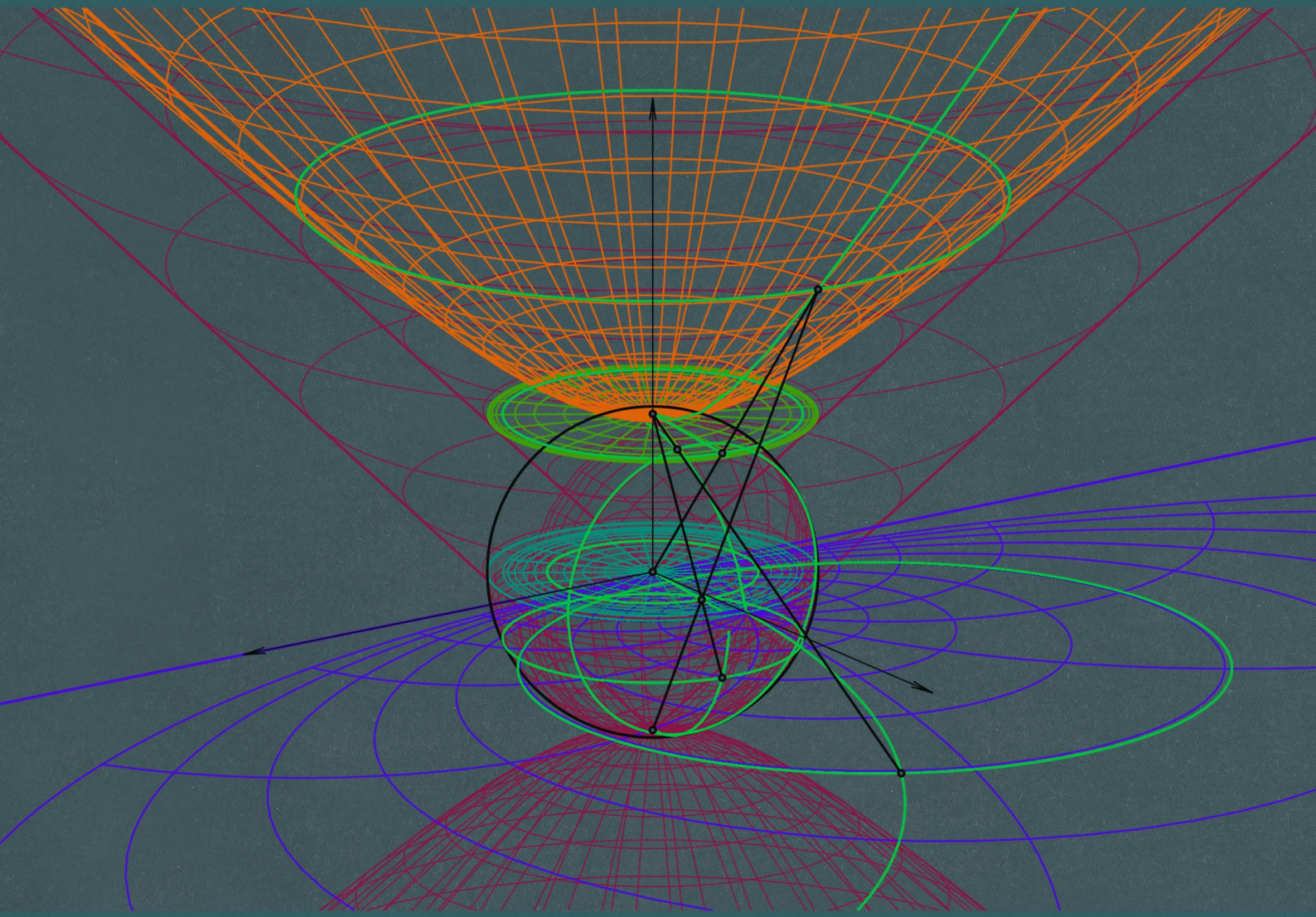


ВИША ГЕОМЕТРИЈА

ГЛАТКЕ МНОГОСТРУКОСТИ
ПСЕУДО-РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЈА
ОСЕРМАНОВЕ МНОГОСТРУКОСТИ

ВЛАДИЦА АНДРЕЈИЋ

Владица Андрејић

ВИША ГЕОМЕТРИЈА

Глатке многострукости
Псеудо-Риманова геометрија
Осерманове многострукости

БЕОГРАД, 02.07.2025

Историја сваке веће галактичке цивилизације тежи да прође кроз три засебне и препознатљиве фазе, а то су преживљавање, истраживање и продуховљење, другачије познате као фазе Како, Зашто и Где. На пример, за прву фазу особено је питање „Како ћемо да једемо?“ за другу „Зашто једемо?“, а за трећу „Куда ћемо на ручак?“

Даглас Адамс
Аутостоперски водич кроз галаксију

ПРЕДГОВОР

Кривина је најприроднија и најважнија инваријанта псеудо-Риманове геометрије. По Осерману[1] [97], појам кривине је један од централних концепата диференцијалне геометрије, који разлучује геометријско језгро предмета од оних аспеката који су аналитички, алгебарски или тополошки. Информације о кривини смештене су у тензору кривине, са којим је тешко радити, упркос многим симетријама које поседује. Издвајање геометријских информација које су кодиране унутар тензора кривине је прилично изазован задатак. Због тога је Громов[2] [64] тензор кривине описао као малог монструма (мулти)линеарне алгебре чије пуно геометријско значење остаје нејасно. Стога, уместо рада са самим тензором кривине, често користимо Јакобијеве операторе или секциону кривину који су лакши за руковање и имају бољу геометријску интерпретацију, док садрже потпуну информацију о кривини.

Наш општи циљ је да пронађемо неку врсту моста између кривине псеудо-Риманове многострукости и њених геометријских особина. Овом циљу можемо приступити на два начина. Први приступ је директан и почиње тако што опремимо многострукост метриком, при чему је онда њена кривина у потпуности одређена. Можемо је локално израчунати тако што рачунамо Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности на основу формуле (5.11), а затим користимо формулу (6.3) да бисмо добили компоненте оператора кривине, што последично даје Јакобијеве операторе.

Ако почетна метрика има неке лепе карактеристике, попут велике групе изометрија, онда је природно очекивати да она повлачи кривину која се такође лепо понаша. Уобичајено полазимо од високо симетричних многострукости које последично имају релативно једноставан тензор кривине, а затим изучавамо њихове геометријске особине, које су често уопштења особина познатих из еуклидске геометрије. Ове једноставне почетне многострукости, као што су две-тачке хомогени простори, називају се модел простори, а користе се за једноставније и конкретније изражавање суштинских карактеристика Риманове (или псеудо-Риманове) геометрије.

Други приступ иде у обратном смеру. Посматрамо општије многострукости да бисмо открили која су њихова својства репрезентативна за конкретан модел простор. Уколико не можемо да препознамо модел простор на основу ових одређених својстава, тада желимо да успоставимо потпуну класификацију псеудо-Риманових многострукости са тим особинама. Без експлицитног описа тензора кривине, покушавамо да закључимо до ког опсега посебна својства Јакобијевих оператора могу одредити метрику.

Најједноставнији случај у Римановој геометрији дешава се кад сви редуковани Јакобијеви оператори имају само једну сопствену вредност, што повлачи простор константне секционе кривине. Карактеристични полином Јакобијевог оператора који је независан на јединичном тангентном раслојењу предмет је наредног по једноставности случаја. Кључно питање је да ли овај услов одређује кривину и метрички тензор таквих Риманових многострукости које су познате као Осерманове мно-

[1] Robert Osserman (1926–2011), амерички математичар
[2] Михаил Леонидович Громов (1943), руски математичар

гострукости.

Ова књига је замишљена као монографија о Осермановим многострукостима и обједињује велики број резултата које је аутор објавио у овој области. У циљу да што већи број читалаца буде у могућности да испрати ове резултате, књига такође садржи детаљан увод у глатке многострукости, као и основе Риманове и псеудо-Риманове геометрије, те може бити коришћена као уџбеник за курс диференцијалне геометрије. Књига се може поделити на три имагинарна дела: **Део I** Глатке многострукости, састоји се од глава 1–3, **Део II** Псеудо-Риманова геометрија, састоји се од глава 4–7 и **Део III** Осерманове многострукости, састоји се од глава 8–10.

Део I (Главе 1–3) је увод у глатке многострукости. Увешћемо основне математичке објекте, нотацију и терминологију коју ћемо користити кроз ову књигу. Материјал из овог дела позајмљен је из многих извора, укључујући стандардне текстове из диференцијалне геометрије или о многострукостима: О'Нил [3] [96], Џефри Ли[4] [76], Џон Ли[5] [78], Грос[6] и Мајнренкен[7] [65], Галије[8] и Кентанс[9] [59], Морита[10] [86, Глава 1], Ту[11] [114]. Што се српског језика тиче можемо препоручити уџбеник који је написала Антић[12] [2].

Део II (Главе 4–7) представља увод у псеудо-Риманову геометрију. Одлична референца за класичан приступ псеудо-Римановој геометрији је књига коју је написао О'Нил [96]. Такође препоручујемо Џефри Ли [76]. Неке стандардне текстове из Риманове геометрије дали су Џон Ли [79] и до Кармо[13] [31]. Како инсистирамо на недефинитном случају, можемо сматрати значајним текстове које су дали Мајнренкен [83] и Кларк[14] [38]. За теорију подмногострукости препоручујемо Дахцера[15] и Тожеира[16] [41].

Део III (Главе 8–10) бави се изучавањем Осерманових многострукости и сродним тензорима. Основна литература о Осермановим многострукостима је свакако монографија коју су написали Гарсија-Рио[17], Купели[18] и Васкез-Лорензо[19] [62]. Такође можемо препоручити књиге које је написао Гилки[20] [54, 55].

Београд, септембар 2024.
Владица Андрејић

[3] Barrett O'Neill (1924–2011), амерички математичар
[4] Jeffrey M Lee (1956), амерички математичар
[5] John M Lee (1950), амерички математичар
[6] Gal Gross, канадски математичар
[7] Eckhard Meinrenken, немачко-канадски математичар
[8] Jean Henri Gallier (1949), француско-амерички математичар
[9] Jocelyn Quaintance, америчка математичарка
[10] Shigeyuki Morita (1946), јапански математичар
[11] Loring Wuliang Tu (1952), тајванско-амерички математичар
[12] Мирослава Антић (1978), српска математичарка
[13] Manfredo Perdigão do Carmo (1928–2018), бразилски математичар
[14] Pete Louis Clark (1976), амерички математичар
[15] Marcos Dajczer (1948), аргентинско-бразилски математичар
[16] Ruy Tojeiro, бразилски математичар
[17] Eduardo García-Río, шпански математичар
[18] Demir Nuri Kupeli (1957), турски математичар
[19] Ramón Vázquez-Lorenzo, шпански математичар
[20] Peter Belden Gilkey (1946), амерички математичар

САДРЖАЈ

Предговор **iii**

Садржај **v**

1 Глатке многострукости и пресликавања **1**
1.1 Локално еуклидски простори . . . 3
1.2 Тополошке особине многострукости . . . 7
1.3 Глатке многострукости . . . 11
1.4 Глатка пресликавања . . . 16
1.5 Дифеоморфизми . . . 20
1.6 Разбијање јединице . . . 23
1.7 Задаци . . . 26

2 Тангентни простори и пресликавања **28**
2.1 Тангентни вектори . . . 28
2.2 Тангентна пресликавања . . . 31
2.3 Субмерзије и имерзије . . . 34
2.4 Подмногострукости . . . 39
2.5 Векторска поља . . . 43
2.6 Глобално тангентно пресликавање . . . 48
2.7 Задаци . . . 50

3 Тензорска раслојења и поља **52**
3.1 Векторска раслојења . . . 52
3.2 Покретни репери . . . 55
3.3 Векторска поља на сфери . . . 57
3.4 Ковекторска поља . . . 60
3.5 Тензорска поља . . . 64
3.6 Извод тензорских поља . . . 68
3.7 Задаци . . . 71

4 Псеудо-Риманова метрика **72**
4.1 Скаларни производ . . . 72
4.2 Изотропни вектори . . . 75
4.3 Псеудо-Риманове многострукости . . . 78
4.4 Повлачење метричких тензора . . . 81
4.5 Музички изоморфизми . . . 84
4.6 Модел простори . . . 86
4.7 Дужина и растојање . . . 92
4.8 Задаци . . . 96

5 Повезаност **97**
5.1 Коваријантни изводи . . . 97
5.2 Леви-Чивита повезаност . . . 100
5.3 Паралелно померање . . . 103
5.4 Геодезијске криве . . . 106
5.5 Експоненцијално пресликавање . . . 109
5.6 Геодезијске и минимизујуће криве . . . 111
5.7 Комплетност . . . 114
5.8 Задаци . . . 115

6 Кривина **117**
6.1 Тензор кривине . . . 117
6.2 Алгебарски тензор кривине . . . 122
6.3 Секциона кривина . . . 125
6.4 Константна секциона кривина . . . 130
6.5 Ричијев тензор . . . 133
6.6 Ричијеви идентитети . . . 137

7 Још псеудо-Риманове геометрије **140**
7.1 Јакобијева поља . . . 140
7.2 Псеудо-Риманове подмногострукости . . . 146
7.3 Симетрични простори . . . 151

8 Осерманови услови **154**
8.1 Осерманови услови . . . 154
8.2 Примери Осерманових многострукости . . . 157
8.3 Осерманов алгебарски тензор кривине . . . 160
8.4 Ајнштајн, цвајштајн, ... 162
8.5 Лоренцов цвајштајн . . . 167
8.6 Цвајштајн подмногострукости . . . 169

9 Принцип дуалности **176**
9.1 Принцип дуалности . . . 176
9.2 Квази-Клифордов тензор кривине . . . 178
9.3 Потпуна дуалност . . . 182
9.4 Четвородимензиони цвајштајн . . . 185
9.5 Обратни проблем . . . 188
9.6 Осерманове пертурбације . . . 193

10 Осерманови тензори и многострукости **195**
10.1 Прост-корен Осерманови тензори . . . 195
10.2 Риманови Осерманови тензори . . . 198
10.3 Шурови проблеми . . . 200
10.4 Један-корен многострукости . . . 203
10.5 Два-корена Осерманове многострукости . . . 204
10.6 Два-корена Риманови тензори . . . 206
10.7 Два-корена Риманове многострукости . . . 210
10.8 Принцип пропорционалности . . . 215

A Додатак **219**
A.1 Теорија скупова 219
A.2 Топологија 220
A.3 Сопствена структура ендоморфизама 222
A.4 Самоадјунговани ендоморфизми 230
A.5 Теорија пертурбација 234
A.6 Анализа 238
A.7 Алгебра 240
A.8 Теорија бројева 241

Литература **242**

Индекс појмова **248**

Глава 1

ГЛАТКЕ МНОГОСТРУКОСТИ И ПРЕСЛИКАВАЊА

Један од најзначајнијих догађаја у историји геометрије догодио се 10. јуна 1854. када је Бернхард Риман[1] на Филозофском факултету Универзитета у Гетингену одржао предавање под називом „О хипотезама које леже у основама геометрије“ (*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*).

Риман је 1851. под руководством Гауса[2] одбранио докторску дисертацију из основа комплексне анализе. Следећи корак у његовој академској каријери био је да се квалификује за позицију приватдоцента, предавача који нема плату већ му се прослеђује новац од школарина које су плаћали студенти који изаберу да слушају његова предавања. Та позиција добијала се кроз поступак хабилитације, где се од кандидата захтевало да напише рад (*habilitationsschrift*), као и да одржи јавно предавање (*habilitationsvortrag*). Област из које ће се држати приступно предавање бирао је факултет са листе од три предлога коју је начинио кандидат. Прва два Риманова предлога биле су области у којима је већ радио и имао резултате, те је са пуним правом очекивао избор неке од њих. Међутим, противно традицији, Гаус је прескочио прве две и одабрао трећу предложену тему која је била из основа геометрије.

Риман је напорно радио да би предавање учинио разумљивим за нематематичаре у публици (присуствовало је свега неколико геометричара), тако да је имао одличну презентацију у којој су идеје биле јасно дефинисане без употребе аналитичког апарата. Иако је Гаус био задивљен јер је предавање превазишло сва његова очекивања, како је оно било само усмено, а без техничких детаља, не чуди што није остварило тренутни утицај на математички свет. Међутим, прво објављивање тог предавања у писаној форми (објавио га је Дедекинд[3] 1868. године [106], две године након Риманове смрти) изазвало је значајне реакције математичара и постало прекретница у историји геометрије.

У то време изучавале су се ствари везане за Еуклидов[4] пети постулат (данашња аксиома паралелности) у потрази за аксиомама које би чврсто поставиле темеље основног геометријског простора. Такође се трагало и за структуром простора у којем живимо, док су неки математичари почели да размишљају о егзистенцији другачијих структура. То нас доводи до нееуклидских геометрија које су проучавали Бољај[5] и Лобачевски[6] (пре њих пионирске радове имали су Сакери[7] и Омар Хајам[8]), а које одједном постају само специјални случајеви општије теорије.

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), немачки математичар
[2] Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855), немачки математичар
[3] Richard Dedekind (1831–1916), немачки математичар
[4] Еуклид из Александрије, Εὐκλείδης (3. и 4. век п.н.е), грчки математичар
[5] János Bolyai (1802–1860), мађарски математичар
[6] Николай Иванович Лобачевский (1792–1856), руски математичар
[7] Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733), италијански свештеник и математичар
[8] Умар ибн Ибрахим ал-Хајам Нишапури (1048–1131), персијски математичар, филозоф и песник

Риман је први дао обиман допринос уопштењу идеје површи на више димензије, а његова визија поставила је нов концепт простора за који је користио реч *mannigfaltigkeit*. Касније се у енглеском језику усталила реч *manifold* (у првом преводу на енглески, Клифорд[9] је користио реч *manifoldness* [107]), док ми користимо реч *многострукост*. Ово чувено Риманово предавање (преведено на енглески) и прича око њега може се прочитати код Спивака[10] [109, Глава 4].

Многострукости су основни објекти диференцијалне геометрије. Међутим, Риман није имао прецизну дефиницију овог концепта. У то време било је техничких потешкоћа дати формалну дефиницију јер општи појам тополошког простора није био дефинисан пре Фрешеа[11] (1906 [48]) и Хаусдорфа[12] (1914 [66]). Поинкаре[13] је 1895. [100] увео идеју атласа и дао дефиницију многострукости која је била претеча модерног концепта многострукости. Међутим, прву строгу аксиоматску дефиницију многострукости изложили су Веблен[14] и Вајтхед[15] 1931. [115] и 1932. године [116].

Многострукости су свуда око нас у многим облицима и могу се схватити као вишедимензиона уопштења глатких кривих и глатких површи. Опште говорећи у питању су геометријски објекти који локално изгледају као еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ и на којима можемо вршити диференцијални и интегрални рачун. Наравно, основни примери многострукости су сами еуклидски простори, глатке раванске криве (као што су елипсе, хиперболе, параболе) и глатке површи (као што су елипсоиди, хиперболоиди, параболоиди, торуси). Што се вишедимензионих примера тиче, можемо поменути јединичну n-сферу у $\mathbb{R}^{n+1}$ као и графике глатких пресликавања између еуклидских простора.

За разлику од наведених примера многострукост се не јавља увек у добро познатом простору. У општем случају, прилично је тешко размишљати о њој као геометријској фигури јер живи у веома апстрактном окружењу. Међутим, када пронађемо локалне координате на таквом скупу и изучавамо везе између њих, често се постепено појављује скривена геометријска структура. Како желимо да укључимо што је више могуће објеката неизбежно је да дефиниција многострукости буде апстрактна. Додуше, када једном препознамо објекат као многострукост на основу апстрактне дефиниције, он се кроз координате појављује у добро познатом простору и постаје веома практичан објекат.

Изучавање многострукости подразумева топологију, те претпостављамо да је читалац упућен у дефиницију и основна својства тополошких простора. Најпре полазимо од тополошког простора са одређеним својствима која нам говоре шта тачно значи да он локално личи на еуклидски простор. Међутим, та сличност са еуклидским простором мора бити довољно добра да можемо засновати парцијално диференцирање, а самим тим и све важне карактеристике диференцијалног и интегралног рачуна на многострукости. Једном када успоставимо рачун на многострукости омогућићемо многе конкретне примене. Можемо рачунати запремину (интеграцијом) или кривину (преко формула које укључују други извод), можемо изучавати класичну механику (где решавамо системе обичних диференцијалних једначина) или општу релативност (где решавамо системе парцијалних диференцијалних једначина).

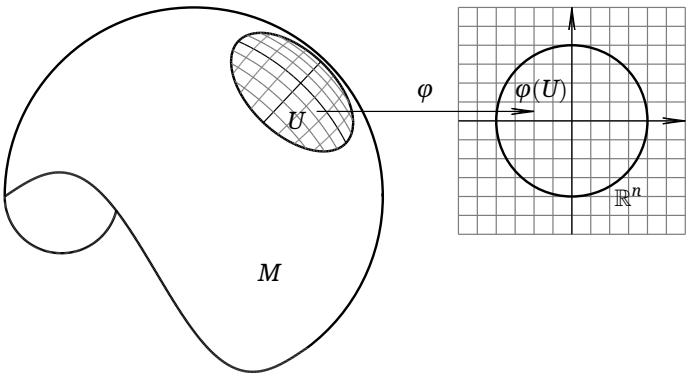
[9] William Kingdon Clifford (1845–1879), енглески математичар и филозоф
[10] Michael David Spivak (1940), амерички математичар
[11] Maurice René Fréchet (1878–1973), француски математичар
[12] Felix Hausdorff (1868–1942), немачки математичар
[13] Jules Henri Poincaré (1854–1912), француски математичар
[14] Oswald Veblen (1880–1960), амерички математичар
[15] John Henry Constantine Whitehead (1904–1960), британски математичар

1.1 Локално еуклидски простори

Многострукост можемо замислити као мрачну собу са лампом на располагању. У сваком датом тренутку, лампа нам дозвољава да обасјамо и осмотримо само један регион собе дајући нам локалну идеју о томе како та соба изгледа. У нашој причи лампа представља еуклидски простор који долази опремљен лепим координатним системом.

У проучавању географије Земље као целине, згодно је користити географске карте (мапе), које дају умањени приказ неких делова Земље на равном листу папира. Карте се често радије користе од глобуса јер су практичније за свакодневну употребу. Збирка географских карата таквих да је свака тачка Земље приказана у барем једној карти назива се атлас и даје одличан опис читаве планете, без њене стварне визуализације у тродимензионом простору.

Ову идеју локалних координата можемо формализовати за произвољан непразан скуп M. ***Карта*** (или ***локални координатни систем***) димензије $n \in \mathbb{N}_0$ на скупу M је инјективно пресликавање $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, где је $U \subseteq M$, а $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ непразан отворен скуп. Домен U карте φ зовемо ***координатна околина***, а како се он често користи то карту φ традиционално обележавамо као уређен пар (U, φ). Кажемо да је (U, φ) ***карта у*** $p \in M$ уколико $p \in U$, а ако додатно важи $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ кажемо да је карта ***центрирана*** у p. За инверзно пресликавање $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ карте φ кажемо да је ***локална параметризација***.



Кроз ову књигу, $\pi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ означава природну пројекцију која је дефинисана са $\pi_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$. ***Координатне функције*** n-димензионе карте (U, φ) на M су функције $x_i\colon U \to \mathbb{R}$ дефинисане са $x_i = \pi_i \circ \varphi$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Њихове вредности у некој тачки $p \in U$ су ***координате***, а за њих важи

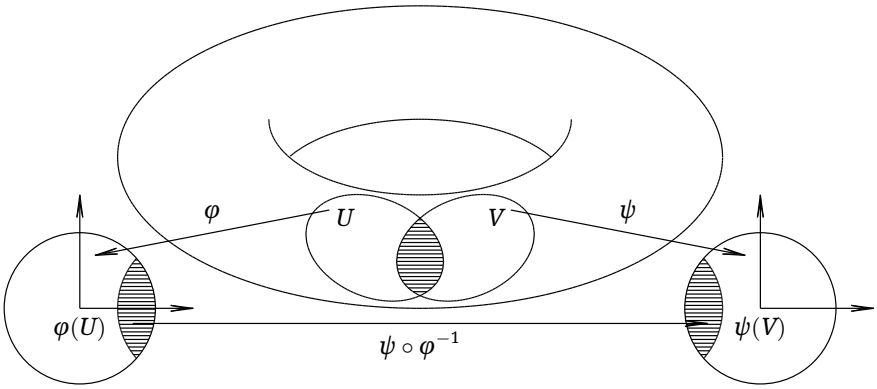
$$\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)).$$

Ако је $U \subseteq \mathbb{R}^m$ отворен подскуп еуклидског простора, за функцију $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ кажемо да је класе C^r на U за $r \in \mathbb{N}$, ако свака од њених компонента функција $\pi_i \circ f$ има непрекидне парцијалне изводе реда r. Ако је f класе C^r за свако $r \in \mathbb{N}$, онда је класе C^∞, а тада кажемо да је f ***глатка*** или ***диференцијабилна***. Функције класе C^0 су непрекидне, а оне класе C^ω су аналитичке.

За функцију између отворених подскупова еуклидских простора кажемо да је C^r-дифеоморфизам ако је бијективна при чему су и она и њен инверз класе C^r. Иако дозвољавамо избор $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$, најчешће користимо $r = \infty$, где C^∞-дифеоморфизам једноставно зовемо ***дифеоморфизам***, док је C^0-дифеоморфизам заправо ***хомеоморфизам***.

Сарадња између две карте (U, φ) и (V, ψ) на скупу M успоставља се ***функцијом преласка***, што је бијективно пресликавање $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$. За две карте кажемо да су C^r-***сагласне*** (или C^r-***компатибилне***) уколико је њихова функција

преласка C^r-дифеоморфизам (подразумева се да су тада и домен и кодомен отворени скупови). У специјалном случају кад су подскупови U и V дисјунктни сматрамо да су карте тривијално C^r-сагласне.



Фамилија карата на скупу M које су међусобно C^r-сагласне и такве да је унија свих координатних околина једнака M (свака тачка из M налази се у домену неке карте) назива се C^r-***атлас*** за M. Ако је свака карта у C^r-атласу димензије $n \in \mathbb{N}_0$, онда је n ***димензија*** тог атласа.

Како су све функције класе C^r за $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ свакако непрекидне (класе C^0), то је сваки атлас који разматрамо барем C^0-атлас, односно ***тополошки атлас***. За скуп M кажемо да је ***локално еуклидски простор*** димензије n ако поседује тополошки атлас димензије n.

Испоставља се да локално еуклидски простор M на природан начин постаје тополошки простор. Нека је $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ тополошки атлас димензије n за скуп M. ***Топологија атласа*** $\mathcal{A}$ је топологија на M у којој важи

$$V \subseteq M \text{ је отворен} \iff (\forall \alpha \in \Lambda)\, \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ је отворен.} \tag{1.1}$$

Како су $\varphi_\alpha(\emptyset) = \emptyset$ и $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap M) = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ отворени, то су $\emptyset$ и M отворени у M. Пресек је дистрибутиван у односу на унију, док је по Леми А.1 слика уније једнака унији слика, те имамо

$$\varphi_\alpha\Big(U_\alpha \cap \bigcup_\beta V_\beta\Big) = \varphi_\alpha\Big(\bigcup_\beta (U_\alpha \cap V_\beta)\Big) = \bigcup_\beta \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta),$$

одакле се види да је унија $\bigcup_\beta V_\beta$ отворених скупова V_β отворен скуп. Како је φ_α инјективно, то је по Леми А.1 слика пресека једнака пресеку слика, те имамо

$$\varphi_\alpha\Big(U_\alpha \cap \bigcap_\beta V_\beta\Big) = \varphi_\alpha\Big(\bigcap_\beta (U_\alpha \cap V_\beta)\Big) = \bigcap_\beta \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta),$$

одакле се види да је коначан пресек $\bigcap_\beta V_\beta$ отворених скупова V_β отворен скуп, што доказује да формула (1.1) заиста дефинише топологију на M.

Лема 1.1. *Ако је $\mathcal{A}$ тополошки атлас фиксиране димензије за скуп M, онда је топологија атласа $\mathcal{A}$ јединствена топологија којом M постаје тополошки простор такав да су све карте атласа $\mathcal{A}$ хомеоморфизми на своју слику.*

Доказ. Нека је $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ тополошки атлас димензије n за скуп M који постаје тополошки простор. Како захтевамо да су $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ хомеоморфизми, то фамилија $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ постаје отворен покривач од M, те је $V \subseteq M$ отворен ако и само ако за свако $\alpha \in \Lambda$ важи да је $U_\alpha \cap V \subseteq M$ отворен. Зато тражена топологија на M може бити само топологија атласа дата са (1.1).

Ако је $W \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha)$ отворен у $\mathbb{R}^n$, онда је $\varphi_\beta(U_\beta \cap \varphi_\alpha^{-1}(W)) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \cap W)$ отворен у $\mathbb{R}^n$, те је $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ отворен у M, одакле следи да је φ_α непрекидно. Ако је $V \subseteq U_\alpha$ отворен у M, онда је $\varphi_\alpha(V) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ отворен у $\mathbb{R}^n$, те је φ_α^{-1} непрекидно и φ_α је хомеоморфизам на своју слику. □

Неки аутори допуштају да димензија карте из C^r-атласа не буде унапред фиксирана. Међутим, на основу инваријантности димензије (Теорема А.5), непразан подскуп од $\mathbb{R}^m$ није хомеоморфан отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$ осим за $m = n$. Зато је n константно на компонентама повезаности од M, али је могуће да свака компонента има засебну димензију. Ми не желимо да користимо реч многострукост за просторе са миксованом димензијом, попут дисјунктне уније различитих еуклидских простора, те захтевамо да C^r-атлас има фиксирану димензију.

Лема 1.1 показује да основни концепт многострукости подразумева локално еуклидски тополошки простор M. Међутим, овакав приступ има један мањи технички проблем јер постоје многи избори тополошког атласа који дају исти тополошки простор.

За карту (U, φ) на скупу M кажемо да је C^r-***сагласна*** са C^r-атласом $\mathcal{A}$ за M ако је она C^r-сагласна са сваком од карата из $\mathcal{A}$, а то се дешава ако и само ако је унија $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ такође C^r-атлас.

Посматрајмо C^r-атлас $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ димензије n за скуп M. За $V, W \subseteq M$ и произвољно пресликавање $\psi \colon V \to \mathbb{R}^n$, како је пресек дистрибутиван у односу на унију, а формуле (А.1) и (А.2) из Леме А.1 важе за инјективно φ_α, добијамо

$$\begin{aligned} \psi(V \cap W) &= \bigcup_\alpha \psi(U_\alpha \cap V \cap W) = \bigcup_\alpha (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V \cap W)) \\ &= \bigcup_\alpha (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap W)). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Нека су (V, ψ) и (W, θ) карте на M које су C^r-сагласне са $\mathcal{A}$. Како је функција преласка $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ хомеоморфизам (као C^r-дифеоморофизам) за свако $\alpha \in \Lambda$, то из формуле (1.2) видимо да је $\psi(V \cap W)$ отворен у $\mathbb{R}^n$, као и $\theta(V \cap W)$. За функцију преласка $\theta \circ \psi^{-1} \colon \psi(V \cap W) \to \theta(V \cap W)$ имамо

$$\theta \circ \psi^{-1}\restriction_{\psi(U_\alpha \cap V \cap W)} = (\theta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}),$$

те је $\theta \circ \psi^{-1}$ класе C^r на $\psi(U_\alpha \cap V \cap W)$ за свако $\alpha \in \Lambda$, а самим тим класе C^r на $\psi(V \cap W)$. Слично је $\psi \circ \theta^{-1}$ класе C^r на $\theta(V \cap W)$, те су карте (V, ψ) и (W, θ) C^r-сагласне, што доказује наредну лему.

Лема 1.2. *Ако су две карте C^r-сагласне са C^r-атласом, онда су оне и међусобно C^r-сагласне.*

Комплетан C^r-атлас је максималан C^r-атлас у смислу да није садржан ни у једном већем C^r-атласу. Другим речима, свака карта која је сагласна са комплетним C^r-атласом се већ налази у њему.

Лема 1.3. *Сваки C^r-атлас за скуп M генерише јединствен комплетан C^r-атлас за M који га садржи.*

Доказ. Нека је $\mathcal{A}$ C^r-атлас за M, а $\overline{\mathcal{A}}$ фамилија свих карата на M које су C^r-сагласне са $\mathcal{A}$. Очигледно је $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$, док су по Леми 1.2 све карте из $\overline{\mathcal{A}}$ међусобно C^r-сагласне. Свака карта која је C^r-сагласна са $\overline{\mathcal{A}}$, C^r-сагласна је и са $\mathcal{A}$, те је већ у $\overline{\mathcal{A}}$, што доказује да је $\overline{\mathcal{A}}$ комплетан C^r-атлас. □

Комплетан атлас дозвољава велику флексибилност у избору карте, о чему говори наредна лема.

Лема 1.4. *Нека је (U,φ) карта комплетног C^r-атласа $\overline{\mathcal{A}}$ димензије n на скупу M. Ако је непразан подскуп $V \subset U$ такав да је $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ отворен, онда је $(V, \varphi\restriction_V) \in \overline{\mathcal{A}}$. Ако је $f\colon \varphi(U) \to f(\varphi(U)) \subseteq \mathbb{R}^n$ C^r-дифеоморфизам, онда је $(U, f\circ\varphi) \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Доказ. Како је $\varphi\restriction_V(V) = \varphi(V)$ отворен, а функција преласка $\varphi\restriction_V \circ \psi^{-1} = (\varphi\circ\psi^{-1})\restriction_{\psi(V\cap W)}$ C^r-дифеоморфизам за свако $(W,\psi) \in \overline{\mathcal{A}}$, то је $(V,\varphi\restriction_V) \in \overline{\mathcal{A}}$. Како је $f\circ\varphi(U)$ отворен, а $(f\circ\varphi)\circ\psi^{-1} = f\circ(\varphi\circ\psi^{-1})$ C^r-дифеоморфизам за свако $(W,\psi) \in \overline{\mathcal{A}}$, то је $(U, f\circ\varphi) \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Честа употреба Леме 1.4 односи се на случај кад је C^r-дифеоморфизам f транслација дата формулом $f(x) = x - \varphi(p)$, а која шаље $\varphi(p)$ у $0 \in \mathbb{R}^n$. Последично, за сваку тачку $p \in M$ постоји карта на M која је центрирана у p.

Наравно, топологије на M генерисане Лемом 1.1 од произвољног тополошког атласа $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ за M и од његовог комплетног тополошког атласа $\overline{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ су једнаке, јер ако су $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W) \subseteq \mathbb{R}^n$ отворени за свако α, то за свако $(V,\psi) \in \overline{\mathcal{A}}$ по формули (1.2) имамо отворен $\psi(V\cap W) \subseteq \mathbb{R}^n$.

У том смислу, локално еуклидски простор димензије n је уређен пар $(M, \overline{\mathcal{A}})$, где је M скуп, а $\overline{\mathcal{A}}$ комплетан тополошки атлас димензије n за M, те самим тим он јесте тополошки простор чију топологију одређује произвољан тополошки атлас $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$, док су све карте тог атласа хомеоморфизми на своју слику. Међутим, тополошки простор не мора да буде локално еуклидски, што видимо у наредном примеру.

Пример 1.1. Посматрајмо укрштене праве $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\} \subset \mathbb{R}^2$ са релативном топологијом. Ако је $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ хомеоморфизам за повезану околину $V \subseteq M$ тачке $0 = (0,0)$, онда су $V \setminus \{0\}$ и $\varphi(V) \setminus \{\varphi(0)\}$ хомеоморфни. Међутим, $V \setminus \{0\}$ има четири компоненте повезаности, док $\varphi(V) \setminus \{\varphi(0)\}$ има две компоненте за $n = 1$ или само једну уколико је $n > 1$, тако да M није локално еуклидски. △

Уобичајено захтевамо и додатне техничке претпоставке за тополошки простор да бисмо избегли неке патолошке случајеве са којима се не срећемо у пракси. Природно претпостављамо да је M Хаусдорфов простор, што значи да за сваке две различите тачке $p, q \in M$ постоје дисјунктни отворени подскупови $P, Q \subset M$ са $p \in P$ и $q \in Q$. У том случају уместо карата $(U,\varphi), (V,\psi) \in \overline{\mathcal{A}}$ са $p \in U$ и $q \in V$, по Леми 1.4 можемо узети њихове рестрикције $(U\cap P, \varphi\restriction_{U\cap P}), (V\cap Q, \psi\restriction_{V\cap Q}) \in \overline{\mathcal{A}}$ које имају дисјунктне координатне околине. ***Хаусдорфов услов*** је испуњен ако за сваке две различите тачке $p, q \in M$ постоје карте $(U,\varphi), (V,\psi) \in \overline{\mathcal{A}}$ са $p \in U$ и $q \in V$ тако да је $U \cap V = \emptyset$, што је еквивалентно са тим да је индукована топологија Хаусдорфова.

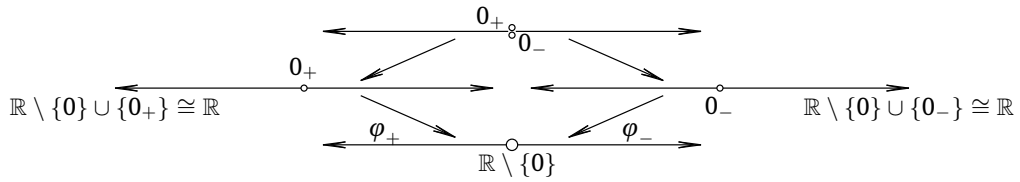
Корисно је знати да је Хаусдорфов услов аутоматски испуњен за тачке из исте координатне околине, што видимо у наредној леми.

Лема 1.5. *Нека је $(M, \overline{\mathcal{A}})$ локално еуклидски простор и $(U,\varphi) \in \overline{\mathcal{A}}$. За различите тачке $p, q \in U$ постоје $(V_p, \psi_p), (V_q, \psi_q) \in \overline{\mathcal{A}}$ тако да $p \in V_p$, $q \in V_q$ и $V_p \cap V_q = \emptyset$.*

Доказ. Различите тачке $\varphi(p), \varphi(q) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ се могу раздвојити отвореним скуповима $P \ni \varphi(p)$ и $Q \ni \varphi(q)$, где је $P \cap Q = \emptyset$, те добијамо дисјунктне $V_p = \varphi^{-1}(P) \ni p$ и $V_q = \varphi^{-1}(Q) \ni q$, док су тражене карте одговарајуће рестрикције карте φ добијене из Леме 1.4. □

Пример 1.2. ***Права са очима*** (*line with two origins*) је количнички простор дефинисан са $M = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \{-1,1\}\}/_\sim$, где је $\sim$ релација еквиваленције дата са $(x,-1) \sim (x,1)$ за $x \neq 0$. Овај простор видимо као $M = (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cup \{0_+, 0_-\}$, те нека је $\mathcal{A} = \{(U_+,\varphi_+), (U_-,\varphi_-)\}$, где су $\varphi_\pm\colon M \setminus \{0_\mp\} \to \mathbb{R}$ дати са $\varphi_\pm(x) = x$ за $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\varphi_\pm(0_\pm) = 0$. Функција преласка $\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ је хомеоморфизам, те је $\mathcal{A}$ тополошки атлас за M. Додатно, карте φ_+ и φ_- су хомеоморфизми у односу на количнику топологију простора M, што је управо топологија коју ће по Леми 1.1 генерисати атлас $\mathcal{A}$. Свака околина тачке $0_\pm$ садржи $\varphi_\pm^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon) = (-\varepsilon, 0) \cup \{0_\pm\} \cup (0,\varepsilon)$ за неко мало

$\varepsilon > 0$, те се тачке 0_+ и 0_- не могу раздвојити отвореним скуповима. Права са очима је локално еуклидски простор димензије 1 који не испуњава Хаусдорфов услов. $\triangle$



Додатно захтевамо да M задовољава другу аксиому пребројивости, односно да његова топологија има пребројиву базу. У терминима карата то значи да комплетан атлас $\overline{\mathcal{A}}$ има пребројив податлас $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Наиме, за свако $p \in M$ постоји карта у p која се по Леми 1.4 може заменити рестрикцијом на неки базни скуп, те ако M има пребројиву базу, онда има и пребројив податлас. Обратно, како отворени подскупови од $\mathbb{R}^n$ имају пребројиву базу, ако постоји пребројив податлас $\mathcal{A}$ то је M пребројива унија отворених скупова са пребројивом базом, те и он сам има пребојиву базу.

Пример 1.3. Обичну праву $\mathbb{R}$ конструишемо на необичан начин са $L = I \times [0, 1)$ тако што полуотворене интервале индексирамо по $I = \mathbb{Z}$ са топологијом коју индукује лексикографски поредак на L. Нека је ω_1 први непребројив ординал. Како се сваки скуп може добро уредити (по Цермеловој[16] теореми која користи аксиому избора), то природно можемо поставити потпуно уређен скуп $I = -\omega_1 \cup \{0\} \cup \omega_1$ по узору на $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. ***Дугачка права*** (*long line*, *Alexandroff*[17] *line*) је $L = I \times [0, 1)$ са топологијом лексикографског поретка. Скуп $\{x \in \omega_1 : x < \alpha\}$ је пребројив за свако $\alpha \in \omega_1$, те је такав и скуп $\{x \in I : \alpha < x < \beta\}$ за $\alpha, \beta \in I$, што повлачи да свако $\alpha \in I$ има свој следбеник $S(\alpha) \in I$. За свако $\alpha \in I$ генеришемо хомеоморфизме $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to (0, 2)$, где је $U_\alpha = (\{\alpha\} \times (0, 1)) \cup (\{S(\alpha)\} \times [0, 1))$, са $\varphi_\alpha(\alpha, t) = t$ и $\varphi_\alpha(S(\alpha), t) = t + 1$, те је L локално еуклидски простор димензије 1 са тополошким атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$. Дугачка права нема пребројиву базу јер је $\{(\alpha, t) \in L : t \in (1/4, 3/4)\}_{\alpha \in I}$ непребројива фамилија дисјунктних непразних отворених подскупова од L. $\triangle$

Услов пребројивог атласа, између осталог, може се користити у доказима математичком индукцијом. Већина наших примера има атлас који се састоји од коначно много карата, а није тешко приметити да уколико је M компактан, уместо комплетног атласа можемо узети коначан податлас.

Коначно долазимо до дефиниције C^r-***многострукости*** димензије $n \in \mathbb{N}_0$, што је скуп M заједно са комплетним C^r-атласом димензије n који има пребројив податлас и испуњава Хаусдорфов услов. У општем случају није погодно експлицитно дефинисати комплетан атлас јер он садржи превише карата. Због тога, уз скуп M уобичајено наводимо неки пребројив C^r-атлас $\mathcal{A}$ (што решава проблем пребројиве базе), и говоримо о C^r-многострукости $(M, \mathcal{A})$, подразумевајући да је то C^r-многострукост $(M, \overline{\mathcal{A}})$, где је $\overline{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ комплетан C^r-атлас индукован Лемом 1.3.

Пример 1.4. Наравно, основни пример C^r-многострукости димензије n је еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ што важи за свако $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$. Он је локално еуклидски димензије n што може оправдати C^r-атлас са само једном картом $(\mathbb{R}^n, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n})$, а Хаусдорфов услов је испуњен јер је $\mathbb{R}^n$ Хаусдорфов као метрички простор. $\triangle$

1.2 Тополошке особине многострукости

Тополошка многострукост димензије n или ***тополошка n-многострукост*** је C^0-многострукост димензије n. Пре свега, у питању је тополошки простор у скла-

[16] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953), немачки логичар и математичар
[17] Павел Сергеевич Александров (1896–1982), совјетски математичар

ду са Лемом 1.1. ***Карта*** (U, φ) димензије n на тополошком простору $M \supseteq U$ је сваки хомеоморфизам $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Сваке две карте истих димензија на тополошком простору су C^0-сагласне јер је њихова функција преласка хомеоморфизам као композиција хомеоморфизама. Због тога је довољно пронаћи карте димензије n на M чији домени чине отворен покривач од M да бисмо добили тополошки атлас и показали да је тополошки простор M локално еуклидски димензије n.

Ако тополошки простор M као скуп има тополошки атлас $\mathcal{A}$ којим постаје тополошка многострукост чија се топологија индукована атласом $\mathcal{A}$ слаже са топологијом од M, онда је комплетан тополошки атлас $\overline{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ једнозначно одређен, а самим тим и тополошка многострукост. То нам омогућава да тополошку многострукост опишемо без неког конкретног атласа, што је заправо стандардна дефиниција код скоро свих аутора.

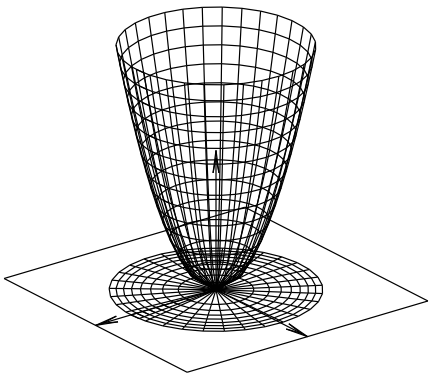
Лема 1.6. *Тополошка n-многострукост је Хаусдорфов тополошки простор са пребројивом базом који је локално еуклидски димензије n.*

Иако постоје неки важни тополошки локално еуклидски простори који не задовољавају додатне услове (видети Пример 1.2 и Пример 1.3), они су присутни у скоро свим уобичајеним геометријским фигурама, а у природи веома ретко наилазимо на простор који не задовољава све наведене услове.

Хаусдорфов услов повлачи две суштински важне последице. Прва каже да сваки конвергентан низ има јединствен лимес, док друга говори да су компактни подскупови затворени (посебно је сваки коначан скуп затворен), односно да су њихови комплементи отворени. Додатно, Хаусдорфов простор са пребројивом базом повлачи егзистенцију разбијања јединице, веома важне алатке у теорији многострукости, што је сасвим довољно да оправда наметнуте услове. Испоставља се да ће ови услови омогућити да се свака многострукост смести у неки еуклидски простор коначне димензије, као и да јој се додели Риманова метрика.

Најједноставнији примери многострукости имају атлас који се састоји од само једне карте. Тада аутоматски имамо пребројиву базу, док Хаусдорфов услов директно следи из Леме 1.5.

Пример 1.5. Нека је $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ кружни параболоид са релативном топологијом наслеђеном из $\mathbb{R}^3$. Довољно је поставити једну карту $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^2$ која је дата са $\varphi(x, y, z) = (x, y)$ и представља нормално пројектовање на раван $z = 0$, што је хомеоморфизам између параболоида и равни. Зато је параболоид M тополошка 2-многострукост. $\triangle$



Пример 1.6. За сваки отворен скуп $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ***график*** непрекидне функције $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ је подскуп од $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ дефинисан са $\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in U, y = f(x)\}$. Природна пројекција $\varphi\colon \Gamma(f) \to U$ дата са $\varphi(x, y) = x$ је непрекидна, инвертибилна и има непрекидан инверз $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$. Како је φ хомеоморфизам, то је $\Gamma(f)$ локално еуклидски простор

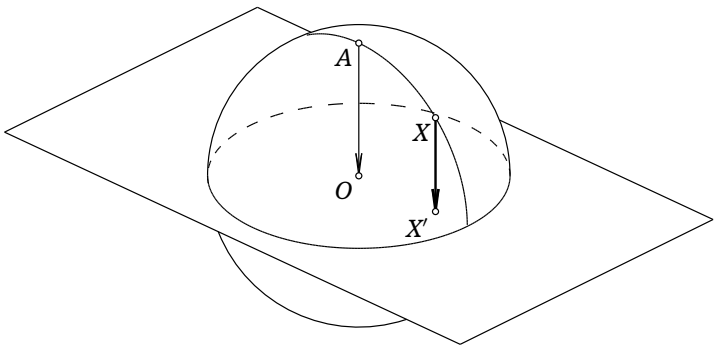
са атласом $\{(\Gamma(f), \varphi)\}$, што доказује да је $\Gamma(f)$ са релативном топологијом наслеђеном из $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ једна тополошка n-многострукост. Можемо приметити да је параболоид из Примера 1.5 само један специјални случај графика. $\triangle$

Наравно, не можемо очекивати да тополошки простор M увек има атлас који садржи само једну карту (M, φ). Уколико је M компактан, онда је таква и његова слика $\varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ при хомеоморфизму φ, али непразан отворен подскуп еуклидског простора никад није компактан, те су нам потребне барем две карте. У случају да атлас има више карата неопходно је проверити Хаусдорфов услов, али је у пракси та провера прилично рутинска. На пример, ако је M тополошки потпростор еуклидског простора, онда се Хаусдорфов услов (као и пребројива база) аутоматски наслеђује.

Пример 1.7. Јединични круг $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ са релативном топологијом је тополошка 1-многострукост, јер пресликавање $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$ дато са $\psi(t) = (\cos t, \sin t)$ има рестрикције на мале отворене скупове које су хомеоморфизми. Општије, n-димензиона сфера са јединичним полупречником центрирана у координатном почетку,

$$\mathbf{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

зове се ***n*-сфера**. Хаусдорфовост и пребројива база за $\mathbf{S}^n$ са релативном топологијом су наслеђени из $\mathbb{R}^{n+1}$. Произвољној тачки $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{S}^n$ можемо доделити отворену хемисферу $U = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n : a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} > 0\}$. Нормална пројекција скупа U на хиперраван која је дата једначином $a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = 0$ има формуле $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x'_1, \ldots, x'_{n+1})$ где је $x'_i = x_i - a_i(a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1})$ за $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Ова пројекција одређује хомеоморфизам између хемисфере U и диска којег описује скуп $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 < 1,\ a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = 0\}$, те је n-сфера тополошка n-многострукост по Леми 1.6. $\triangle$



Многострукости, као тополошки простори, деле много заједничких особина са еуклидским просторима. Како је тополошка многострукост локално еуклидска, локалне особине еуклидских простора (као што су локална компактност и локална путна повезаност) се наслеђују. Уобичајено, отворене кугле полупречника $r > 0$ са центром $p \in \mathbb{R}^n$ чине базу топологије еуклидског простора $\mathbb{R}^n$, а користићемо ознаку

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < r\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Лема 1.7. *Свака тополошка многострукост је локално компактна и локално путно повезана.*

Доказ. Нека је M тополошка n-многострукост, а $U \subseteq M$ околина тачке $p \in M$. Како је M локално еуклидска то постоји карта у $p \in M$, а она се по Леми 1.4 може модификовати, те постоји карта (V, φ) центрирана у $p \in M$ тако да је $V \subseteq U$. Скуп $\varphi(V) \ni 0$ је отворен, те постоји довољно мало $\varepsilon > 0$ тако да је $B_{2\varepsilon}(0) \subset \varphi(V)$. Кугла $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$

је путно повезана и релативно компактна, те је таква и њена хомеоморфна инверзна слика $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subset \varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon(0)}) \subset V \subseteq U$, те је M локално путно повезан и локално компактан. □

Ако је M локално компактан Хаусдорфов онда су сви компактни скупови у M затворени, и свака тачка $p \in M$ лежи у неком отвореном скупу чије је затворење компактно.

Лема 1.8. *Тополошка многострукост је повезана ако и само ако је путно повезана.*

Доказ. Како је сваки путно повезан тополошки простор повезан, а свака тополошка многострукост локално путно повезана (Лема 1.7), довољно је доказати да повезан и локално путно повезан тополошки простор јесте путно повезан. Како је свака компонента путне повезаности локално путно повезаног простора отворена, то је сам простор унија дисјунктних отворених скупова који чине компоненте путне повезаности. Зато су компоненте повезаности и компоненте путне повезаности исте, док је лема специјални случај тога. □

Профињење покривача $\mathcal{U}$ од M је нови покривач $\mathcal{V}$ од M, такав да је свако $V \in \mathcal{V}$ садржано у неком $U \in \mathcal{U}$. Једноставан пример профињења је потпокривач, али профињење је много флексибилније од тога. На пример, покривање метричког простора отвореним куглама полупречника 2 може се профинити покривањем отвореним куглама полупречника 1. Фамилија подскупова од M је ***локално коначна*** ако свака тачка из M има околину која сече само коначно много скупова из те фамилије. Кажемо да је M ***паракомпактно*** уколико сваки отворен покривач од M има локално коначно отворено профињење.

Појам паракомпактности је увео Дједоне[18] [42] као уопштење појма компактности. Сваки компактан простор је очигледно паракомпактан, док је најчувенији пример простора који није паракомпактан дугачка права из Примера 1.3. Хаусдорфовост паракомпактног простора ставља нам на располагање додатне јаче особине.

Лема 1.9. *Сваки паракомпактан Хаусдорфов простор је регуларан.*

Доказ. Нека је M паракомпактан Хаусдорфов простор, $p \in M$, а C затворен скуп који не садржи p. За свако $q \in C$ из Хаусдорфовости имамо дисјунктне отворене скупове $U_q \ni p$ и $V_q \ni q$. Како је $C \subseteq \bigcup_{q \in C} V_q$, скупови V_q и $M \setminus C$ чине отворени покривач од M. Из паракомпактности за M, постоји локално коначно отворено профињење. Ако из тога искључимо сваки отворен подскуп који не сече C добијамо локално коначну фамилију $\mathcal{A}$ отворених подскупова, од којих је сваки садржан у неком V_q, која је покривач од C. Из локалне коначности за $\mathcal{A}$, постоји отворен скуп $W \ni p$ такав да постоји само коначно много чланова $A_1, \ldots, A_k$ од $\mathcal{A}$ који секу W. Нека су $q_1, \ldots, q_k$ тачке из C такве да $A_i \subseteq V_{q_i} \ni q_i$ важи за $1 \leqslant i \leqslant k$. Дефинишимо $U = W \cap U_{q_1} \cap \cdots \cap U_{q_k}$ и $V = \bigcup \mathcal{A}$. Лако је приметити да су U и V дисјунктни отворени скупови. Зато се $p \in U$ и $C \subseteq V$ могу раздвојити околинама, те је M регуларан. □

Штавише, оригинална теорема коју је поставио Дједоне каже да је сваки паракомпактан Хаусдорфов простор нормалан, али то тврђење нам није неопходно. Сваки локално компактан Хаусдорфов простор са пребројивом базом је паракомпактан, те је зато таква и тополошка многострукост.

Лема 1.10. *Свака тополошка многострукост је паракомпактна.*

[18] Jean Dieudonné (1906–1992), француски математичар

Доказ. Нека је M локално компактан Хаусдорфов простор са пребројивом базом. Тада постоји пребројива база $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ која се састоји од релативно компактних скупова. Поставимо $K_1 = \overline{W_1}$ и индуктивно претпоставимо да су компактни K_j дефинисани за $1 \leqslant j \leqslant n$. Како је $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ отворен покривач компактног K_n, то постоји најмањи $m \in \mathbb{N}$ такав да је $K_n \subset \bigcup_{i=1}^m W_i$, те дефинишемо $K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^m \overline{W_i}$ који је компактан као коначна унија компактних скупова. На овај начин конструисали смо ***исцрпљивање*** (*exhaustion*) од M као фамилију компактних подскупова $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ од M за коју је $K_n \subset \mathrm{Int}(K_{n+1})$ и $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Нека је $\mathcal{U}$ отворен покривач од M за који тражимо локално коначно профињење. За свако $p \in M$ постоји $U_p \ni p$ из $\mathcal{U}$, као и најмање $n \in \mathbb{N}$ за које важи $p \in \mathrm{Int}(K_n)$ и $p \notin \mathrm{Int}(K_{n-1})$. Скуп $(K_n \setminus \mathrm{Int}(K_{n-1}))$ је компактан подскуп отвореног $(\mathrm{Int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2})$, те постоји коначна потфамилија која га покрива, а састоји се од скупова облика $V_p = (\mathrm{Int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}) \cap U_p$. Наравно, у случају $n = 1$ или $n = 2$ потребна је мала модификација, рецимо $V_p = \mathrm{Int}(K_3) \cap U_p$. У сваком случају овакав V_p може да исече само скупове таквог облика чије n од оригиналног одступа највише за један, а њих је коначно много. Коначно, скупови облика V_p чине нову базу која је локално коначно профињење од $\mathcal{U}$. □

Напоменимо да неки аутори дефинишу тополошку многострукост као локално еуклидски паракомпактни Хаусдорфов простор. У том случају потребно је да знамо да свака компонента повезаности локално еуклидског паракомпактног Хаусдорфовог простора има пребројиву базу. Због тога, ако локално еуклидски паракомпактни Хаусдорфов простор има пребројиво много компоненти, онда он има пребројиву базу.

1.3 Глатке многострукости

Дефиниција тополошке многострукости довољна је за изучавање тополошких особина попут компактности и повезаности. Међутим, глаткоћа није инваријанта хомеоморфизма (круг и квадрат су хомеоморфни, али квадрат није гладак), те је тополошка структура недовољна да омогући инфинитезимални рачун. Због тога тополошка многострукост захтева увођење додатне структуре.

Глатка многострукост или ***диференцијална многострукост*** димензије n је C^∞-многострукост димензије n. У складу са дефиницијом, у питању је скуп M снабдевен пребројивим C^∞-атласом $\mathcal{A}$ димензије n који задовољава Хаусдорфов услов. Кажемо да је $\mathcal{A}$ ***гладак атлас*** за M, а сваке две карте из $\mathcal{A}$ су ***глатко сагласне*** у смислу да је њихова функција преласка дифеоморфизам.

Како наша теорија претежно претпоставља глаткоћу основих објеката, често изостављамо експлицитну употребу придева „гладак“. У овој књизи, осим ако није експлицитно другачије наведено, реч ***многострукост*** ће се односити на глатку многострукост, ***атлас*** је гладак атлас, а ***сагласне*** карте су глатко сагласне. Димензију многострукости M обележавамо са $\dim M$, а уколико желимо да нагласимо да је $n = \dim M$ кажемо да је M ***n-многострукост*** или димензију наговештавамо кроз степен и пишемо да је M^n многострукост.

Гладак атлас $\mathcal{A}$ по Леми 1.1 једнозначно одређује топологију на M, али поред тополошке добијамо и додатну структуру коју зовемо ***глатка структура***, а која омогућава да промена локалних координата при преласку са једне карте на другу увек буде глатка. Глатку структуру на M суштински дефинише комплетан гладак атлас $\overline{\mathcal{A}}$, али захваљујући Леми 1.3 за њено одређивање довољно је имати гладак податлас $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$.

Уобичајено је да злоупотребом језика говоримо о многострукости M чији се (комплетан гладак) атлас $\mathcal{A}$ имплицитно подразумева, при чему карта на M увек означа-

ва карту из тог подразумеваног атласа $\mathcal{A}$. Размотримо неке добро познате примере многострукости којима на природан начин додељујемо гладак атлас чиме дефинишемо глатку структуру коју зовемо ***стандардна глатка структура***, а која ће, осим ако се експлицитно не нагласи другачије, бити управо та подразумевана.

Пример 1.8. Једина околина тачке p у 0-многострукости M која је хомеоморфна отвореном подскупу од $\mathbb{R}^0$ је само $\{p\}$, те постоји јединствена карта $\varphi\colon \{p\} \to \mathbb{R}^0$. Све карте на M су тривијално сагласне и свака 0-многострукост може бити једино пребројив дискретан простор. Напоменимо да услов пребројивог податласа (пребројиве базе) из дефиниције многострукости суштински спречава да $\mathbb{R}$ посматрамо као 0-многострукост. △

Пример 1.9. Ако тополошка многострукост M има тополошки атлас који се састоји од само једне карте онда услов сагласности тривијално важи, тај атлас је аутоматски гладак и одређује глатку структуру на M. Еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ са картом $(\mathbb{R}^n, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n})$ из Примера 1.4 је тополошка n-многострукост, а та идентичка карта одређује стандардну глатку структуру на $\mathbb{R}^n$. Такође, график било које непрекидне функције на отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$ је тополошка n-многострукост са једном картом из Примера 1.6, те самим тим и n-многострукост. Одавде следи да су многе познате површи многострукости, на пример елиптички или хиперболички параболоид. △

Пример 1.10. У Примеру 1.9 видели смо да стандардну глатку структуру на 1-многострукости $\mathbb{R}$ одређује једна карта $(\mathbb{R}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}})$. Међутим, карта $(\mathbb{R}, \varphi)$, где је $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дато са $\varphi(x) = x^3$, одређује неку нову глатку структуру на $\mathbb{R}$. Како функција преласка $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}(y) = y^{1/3}$ није глатка у нули, наше две карте нису сагласне и због тога одређују различите глатке структуре. Тако смо добили нову 1-многострукост $\widetilde{\mathbb{R}}$ што показује да иста тополошка многострукост може имати више различитих глатких структура. △

Сваки отворен подскуп $U \subset \mathbb{R}^n$ може се видети као многострукост са атласом од само једне карте $(U, \mathbb{1}_U)$. Штавише, оваква конструкција је могућа за сваки отворен подскуп произвољне многострукости, што видимо у наредним примерима.

Пример 1.11. Нека је M произвољна n-многострукост са комплетним глатким атласом $\overline{\mathcal{A}}$. Природан атлас на отвореном подскупу $U \subset M$ састоји се од карата $(V, \varphi) \in \overline{\mathcal{A}}$ за које је $V \subseteq U$. Свака тачка $p \in U$ је у домену неке карте (V, φ) на M, док је $(V \cap U, \varphi\restriction_{V\cap U})$ карта у $p \in U$ по Леми 1.4. Како су карте свакако сагласне, конструисали смо гладак атлас на U. Пребројива база и Хаусдорфов услов се наслеђују потпросторима, те $U \subset M$ на природан начин постаје n-многострукост, а кажемо да је U ***отворена подмногострукост*** од M. △

Пример 1.12. Векторски простор свих реалних $m \times n$ матрица обележавамо са $\mathbb{R}^{m\times n}$ за $m, n \in \mathbb{N}$. Како је $\mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$, то је $\mathbb{R}^{m\times n}$ по Примеру 1.9 многострукост димензије mn. ***Линеарна група*** степена $n \in \mathbb{N}$ је група $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ инвертибилних квадратних реалних матрица реда n, односно

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Како је детерминанта $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ је отворен подскуп од $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, те је $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ многострукост димензије n^2 по Примеру 1.11 као отворена подмногострукост од $\mathbb{R}^{n\times n}$. Слично, комплексна линеарна група $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, што је група инвертибилних $n \times n$ комплексних матрица реда n, је отворен подскуп од $\mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ и зато је многострукост димензије $2n^2$. △

Пример 1.13. Пример 1.12 можемо уопштити на правоугаоне матрице пуног ранга. Нека је $\mathbb{R}^{m\times n}_m$ подскуп од $\mathbb{R}^{m\times n}$ који чине матрице ранга $m < n$. За свако $A \in \mathbb{R}^{m\times n}_m$ постоји подматрица $f_A(A) \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$, где је $f_A\colon \mathbb{R}^{m\times n}_m \to \mathbb{R}^{m\times m}$ конкретна пројекција. Из непрекидности детерминанте постоји околина $U \subset \mathbb{R}^{m\times n}_m$ матрице A таква да је $\det(f_A(X)) \neq 0$ за свако $X \in U$. Зато је $\mathbb{R}^{m\times n}_m$ отворен подскуп од $\mathbb{R}^{m\times n}$, те самим тим многострукост димензије mn као отворена подмногострукост од $\mathbb{R}^{m\times n}$. △

У Примеру 1.7 смо показали да је сфера $\mathbf{S}^n$ тополошка n-многострукост иако нисмо конкретизовали карте тополошког атласа. Да бисмо показали да је $\mathbf{S}^n$ глатка многострукост потребно је задати конкретан гладак атлас, по могућству са што мање карата, што видимо у наредним примерима.

Пример 1.14. Посматрајмо тополошки атлас за сферу $\mathbf{S}^n$ из Примера 1.7. Ако искористимо само оне тачке сфере чије су све координате нула осим једне, њима одговарајуће хемисфере ће прекрити читаво $\mathbf{S}^n$. Број карата у атласу је тако смањен на $2n+2$, при чему све оне имају веома једноставне формуле. Конкретно, за свако $1 \leqslant i \leqslant n+1$ имамо пројекције на хемисферама $U_{\pm i} = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n : \pm x_i > 0\}$ које су дате са $\varphi_{\pm i}(x_1,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{n+1})$, док је $\varphi_{\pm i}(U_{\pm i}) = B_1(0) = \mathbf{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ отворена јединична кугла. Пројекције $\varphi_{\pm i}\colon U_{\pm i} \to \mathbf{B}^n$ су бијекције јер лако рачунамо њихове инверзе,

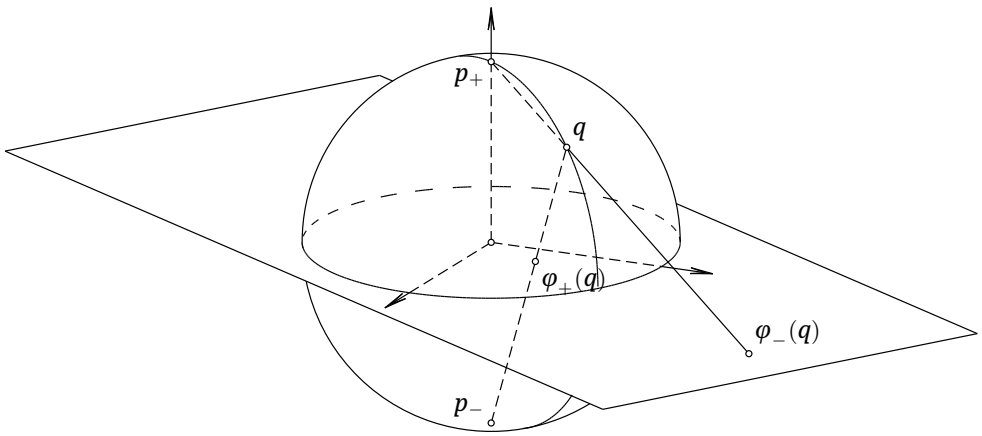
$$\varphi_{\pm i}^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (y_1,\dots,y_{i-1},\pm\sqrt{1-y_1^2-\dots-y_n^2},y_i,\dots,y_n),$$

што значи да су $(U_{\pm i},\varphi_{\pm i})$ карте на сфери $\mathbf{S}^n$. Ове карте су међусобно сагласне јер су све функције преласка глатке. На пример, за $j < i$ имамо

$$\begin{aligned}\varphi_{+j}\circ\varphi_{\pm i}^{-1}(y_1,\dots,y_n) &= \varphi_{-j}\circ\varphi_{\pm i}^{-1}(y_1,\dots,y_n)\\ &= (y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_{i-1},\pm\sqrt{1-y_1^2-\dots-y_n^2},y_i,\dots,y_n),\end{aligned}$$

што је очигледно глатко, те је $\varphi_{+j}\circ\varphi_{\pm i}^{-1}$ дифеоморфизам између V_{+j} и $V_{\pm(i-1)}$, а $\varphi_{-j}\circ\varphi_{\pm i}^{-1}$ дифеоморфизам између V_{-j} и $V_{\pm(i-1)}$, где су $V_{\pm k} = \{(y_1,\dots,y_n) \in \mathbf{B}^n : \pm y_k > 0\}$ отворени скупови. Слично се решава случај $j > i$, док случај $j = i$ суштински не постоји јер је $U_{+i} \cap U_{-i} = \emptyset$, те карте $(U_{\pm i},\varphi_{\pm i})$ чине гладак атлас за $\mathbf{S}^n$. △

Пример 1.15. У Примеру 1.14 смо искористили $2n+2$ карте да покажемо да је сфера $\mathbf{S}^n$ глатка n-многострукост. Број карата у атласу се може смањити на 2, што је оптимално јер је $\mathbf{S}^n$ компактан. Посматрајмо две тачке $p_\pm = (0,\dots,0,\pm1) \in \mathbf{S}^n$ и два скупа $U_\pm = \mathbf{S}^n \setminus \{p_\mp\}$ која покривају целокупно $\mathbf{S}^n$.



Атлас можемо направити од две ***стереографске пројекције*** $\varphi_\pm\colon U_\pm \to \mathbb{R}^n$ дефинисане са

$$\varphi_\pm(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = \frac{1}{1\pm x_{n+1}}(x_1,\dots,x_n).$$

Оваква пресликавања $\varphi_\pm$ су непрекидна, инвертибилна, и њихов инверз

$$\varphi_\pm^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{1+y_1^2+\cdots+y_n^2}(2y_1,\dots,2y_n,\mp(-1+y_1^2+\cdots+y_n^2)) \tag{1.3}$$

је такође непрекидан. Функција преласка

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{y_1^2+\cdots+y_n^2}(y_1,\dots,y_n) \tag{1.4}$$

је очигледан дифеоморфизам из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на самог себе (геометријски, у питању је инверзија у односу на сферу $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, што је инволуција), те су наше карте сагласне. Дакле, стереографске пројекције на n-сфери чине гладак атлас, те одређују глатку структуру n-многострукости $\mathbf{S}^n$.

Додатно, стереографске пројекције су сагласне са пројекцијама из Примера 1.14 јер су функције преласка глатке,

$$\varphi_s \circ \varphi_{\pm i}^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{1+sy_n}\left(y_1,\dots,y_{i-1},\pm\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2},y_i,\dots,y_{n-1}\right)$$
$$\varphi_{\pm i} \circ \varphi_s^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{1+y_1^2+\cdots+y_n^2}\left(2y_1,\dots,2y_{i-1},2y_{i+1},\dots,2y_n,-s(-1+y_1^2+\cdots+y_n^2)\right)$$

за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, као и

$$\varphi_s \circ \varphi_{\pm(n+1)}^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{1\pm s\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}(y_1,\dots,y_n)$$
$$\varphi_{\pm(n+1)} \circ \varphi_s^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{2}{1+y_1^2+\cdots+y_n^2}(y_1,\dots,y_n),$$

где је $s \in \{+,-\}$, тако да атлас са обичним и атлас са стереографским пројекцијама одређују исту глатку структуру, што је стандардна глатка структура n-сфере. △

Уобичајено је да од старих многострукости градимо нове. На пример, ако имамо две многострукости истих димензија, можемо узети њихову дисјунктну унију са унијом њихових атласа и добити нову многострукост, иако она није интересантнија од посматрања појединачних многострукости.

Пример 1.16. Посматрајмо производ $M \times N$ за m-многострукост M и n-многострукост N. За сваку тачку $(p,q) \in M \times N$ можемо изабрати карту (U,φ) у $p \in M$ и карту (V,ψ) у $q \in N$, што нам омогућава да на очигледан начин конструишемо карте производа $\varphi \times \psi \colon U \times V \to \varphi(U) \times \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ са $(\varphi \times \psi)(u,v) = (\varphi(u),\psi(v))$. Сваке две карте $(\varphi_1 \times \psi_1)$ и $(\varphi_2 \times \psi_2)$ су сагласне због $(\varphi_2 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \psi_1)^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$. Атлас производа је гладак, док су Хаусдорфовост и пребројива база наследне особине производа, те је ***производ многострукости*** $M \times N$ многострукост димензије $m+n$. Зато су торус $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ и цилиндар $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$ многострукости. Ова конструкција се може лако продужити за већи број многострукости, те је ***n-торус***, $\mathbf{T}^n = \mathbf{S}^1 \times \cdots \times \mathbf{S}^1$ (са n фактора) глатка n-многострукост. △

Лепљење је добар метод за конструкцију нових простора од неких раније познатих. На пример, лепљењем горње и доње ивице квадрата добијамо цилиндар, док даљим лепљењем граница цилиндра добијамо торус. Количничка конструкција је процес који почиње релацијом еквиваленције $\sim$ на скупу M, где сваку класу еквиваленције идентификујемо са тачком новог простора. ***Количнички скуп*** $M/_\sim$ је скуп класа еквиваленције, те постоји природна пројекција $\pi \colon M \to M/_\sim$ која тачку $p \in M$ пресликава у њој одговарајућу класу еквиваленције $\pi(p) = [p]$.

Ако је M тополошки простор природно је да количнички скуп $M/_\sim$ постане ***количнички простор*** тако што добије количничку топологију у којој је $U \subseteq M/_\sim$ отворен ако и само ако је $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ отворен. Тада је пројекција π непрекидна, а додатну усклађеност са топологијом имамо ако је и отворена. То нас мотивише да све карте (U, φ) на $M/_\sim$ поставимо тако да $\varphi \circ \pi$ буде непрекидно и отворено, јер се тада топологија од $M/_\sim$ индукована Теоремом 1.1 слаже са количничком топологијом која је индукована пројекцијом π. Међутим, чак иако је почетни простор многострукост, количнички простор често није многострукост, јер свакако треба испитати Хаусдорфов услов.

Пример 1.17. ***Реални пројективни простор*** димензије n је скуп свих једнодимензионих потпростора векторског простора $\mathbb{R}^{n+1}$. То је количнички скуп $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ одређен пројекцијом $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ која тачке $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ шаље у класе еквиваленције $\pi(x) = [x] = \mathrm{Span}\{x\}$ које постају тачке простора $\mathbb{R}\mathbf{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$. Уобичајено, класу еквиваленције вектора $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \neq 0$ записујемо у хомогеним координатама, $(x_1 : \ldots : x_{n+1}) = [(x_1, \ldots, x_{n+1})]$.

Уведимо скупове $\widetilde{U}_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ и $U_i = \pi(\widetilde{U}_i) \subseteq \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ за $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Функција $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ дата са

$$\varphi_i(x_1 : \ldots : x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

је добро дефинисана јер вредност $\varphi_i([x])$ не зависи од множења $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ неким ненула скаларом, а очигледно је бијективна са инверзом

$$\varphi_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (y_1 : \ldots : y_{i-1} : 1 : y_i : y_{i+1} : \ldots : y_n).$$

На овај начин конструисали смо стандардне карте (U_i, φ_i) на $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ за $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Оне су међусобно сагласне јер за $i > j$ функција преласка даје

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_j}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \ldots, \frac{y_n}{y_j}\right),$$

што је дифеоморфизам између отворених скупова $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \mathbb{R}^{j-1} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-j}$ и $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \mathbb{R}^{i-2} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n+1-i}$, а слично се показује и у случају $i < j$. Како сваки ненула вектор има неку ненула координату то имамо $\mathbb{R}\mathbf{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, те наше карте чине гладак атлас.

Преостаје да испитамо Хаусдорфов услов за различите тачке $p = (p_1 : \ldots : p_{n+1})$ и $q = (q_1 : \ldots : q_{n+1})$ из $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$. Ако $p, q \in U_i$ за неко $1 \leqslant i \leqslant n+1$, ствар решава Лема 1.5. У супротном постоје $1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1$ такви да је $p_i \neq 0, p_j = 0$ и $q_i = 0, q_j \neq 0$. Посматрајмо дисјунктне скупове $P = \{(x_1 : \ldots : x_{n+1}) : x_i^2 > x_j^2\}$ и $Q = \{(x_1 : \ldots : x_{n+1}) : x_i^2 < x_j^2\}$, за које важи $p \in P \subset U_i$ и $q \in Q \subset U_j$. Како су за $1 \leqslant k \leqslant n$ скупови $\{(y_1, \ldots, y_n) : |y_k| < 1\}$ отворени у $\mathbb{R}^n$, то су $\varphi_i(P)$ и $\varphi_j(Q)$ отворени у $\mathbb{R}^n$, те су по Леми 1.4 $(P, \varphi_i\restriction_P)$ и $(Q, \varphi_j\restriction_Q)$ карте комплетног глатког атласа (како $(1 : \ldots : 1) \in U_i$ за свако i нисмо могли да искористимо само оригиналне карте), што доказује Хаусдорфов услов. Коначно, $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ са уведеним стандардним атласом је n-многострукост.

Важно је напоменути да се топологија многострукости $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ која је индукована Теоремом 1.1 слаже са количничком топологијом која је индукована пројекцијом π. За свако $1 \leqslant i \leqslant n+1$, можемо посматрати пресликавање $\varphi_i \circ \pi\colon \widetilde{U}_i \to \mathbb{R}^n$ чије су формуле $\varphi_i \circ \pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots, x_{n+1}/x_i)$. Оно је очигледно непрекидно, али и отворено јер за отворен $W \subseteq \widetilde{U}_i$, како је множење са $\lambda \neq 0$ хомеоморфизам од $\widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, имамо отворен $\lambda W \subseteq \widetilde{U}_i$, одакле је $(\varphi_i \circ \pi)^{-1}((\varphi_i \circ \pi)(W)) = \bigcup_{\lambda \neq 0} \lambda W$ отворен, те је $(\varphi_i \circ \pi)(W)$ отворен. Како су сва пресликавања $\varphi_i \circ \pi$ непрекидна и отворена, топологије се слажу. $\triangle$

Пример 1.18. ***Комплексни пројективни простор*** димензије n је количнички скуп $\mathbb{C}\mathbf{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$ добијен у потпуној аналогији са $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, где је $\sim$ релација сразмерности (скалари су ненула комплексни бројеви) која индукује природну пројекцију $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathbf{P}^n$ и хомогене координате $\pi(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (z_1 : \ldots : z_{n+1})$. Карте стандардног атласа су $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, где је $U_i = \{(z_1 : \ldots : z_{n+1}) : z_i \neq 0\}$ за $1 \leqslant i \leqslant n+1$, дате са

$$\varphi_i(z_1 : \ldots : z_{n+1}) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right).$$

Оне су међусобно сагласне јер за $i > j$ функција преласка даје

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \frac{z_i}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right),$$

што је дифеоморфизам између отворених скупова $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \mathbb{C}^{j-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{n-j}$ и $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \mathbb{C}^{i-2} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{n+1-i}$, а слично се показује и у случају $i < j$. Наравно, увек треба имати у виду да је

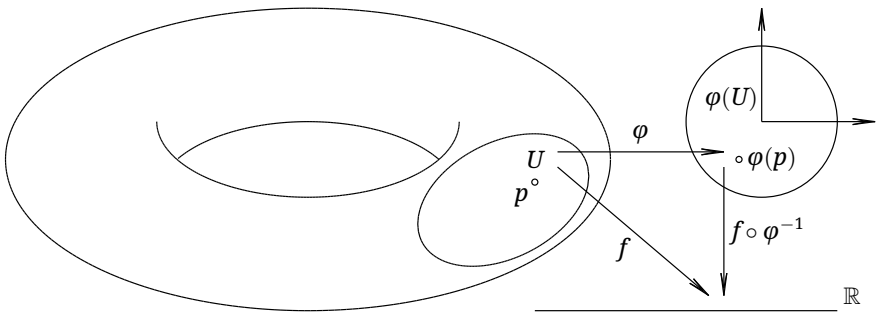
$$\frac{z_k}{z_j} = \frac{x_k + iy_k}{x_j + iy_j} = \frac{(x_k + iy_k)(x_j - iy_j)}{x_j^2 + y_j^2} = \left(\frac{x_k x_j + y_k y_j}{x_j^2 + y_j^2}, \frac{y_k x_j - x_k y_j}{x_j^2 + y_j^2}\right).$$

Аналогно доказу за $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, у $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ важи Хаусдорфов услов јер се тачке $p = (p_1 : \ldots : p_{n+1})$ и $q = (q_1 : \ldots : q_{n+1})$ из $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ за које је $p_i \neq 0, p_j = 0$ и $q_i = 0, q_j \neq 0$ могу раздвојити са $P = \{(z_1 : \ldots : z_{n+1}) : \|z_i\| > \|z_j\|\}$ и $Q = \{(x_1 : \ldots : x_{n+1}) : \|z_i\| < \|z_j\|\}$. Коначно, $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ са уведеним стандардним атласом је $2n$-многострукост чија се топологија слаже са количничком топологијом јер се као у Примеру 1.17 може показати да су сва пресликавања $\varphi_i \circ \pi$ непрекидна и отворена. $\triangle$

1.4 Глатка пресликавања

Глатка структура на многострукости M са глатким атласом $\mathcal{A}$ нам омогућава да недвосмислено дефинишемо које реалне функције на M су глатке.

Нека је $f\colon M \to \mathbb{R}$ реална функција на M. Ако је $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ карта у $p \in M$, природно можемо идентификовати f са композицијом $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$, где је $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, те тако пренети појам глаткоће функције на многострукости. За функцију $f\colon M \to \mathbb{R}$ кажемо да је ***глатка у*** $p \in M$ ако постоји карта $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ у $p \in M$ таква да је $f \circ \varphi^{-1}$ глатко у $\varphi(p)$ у уобичајеном еуклидском смислу. Функција $f\colon M \to \mathbb{R}$ је ***глатка*** ако је глатка у свим тачкама из M.



Ако је $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ нека друга карта у $p \in M$, функција преласка $\varphi \circ \psi^{-1}$ је глатка, те из декомпозиције $(f \circ \psi^{-1})\restriction_{\psi(U \cap V)} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ имамо да је $f \circ \psi^{-1}$ глатко у $\psi(p)$ ако и само ако је $f \circ \varphi^{-1}$ глатко у $\varphi(p)$. Гладак атлас нам је на овај начин омогућио да

наша дефиниција не зависи од избора карте, а $f\colon M \to \mathbb{R}$ је глатко ако и само ако је $f \circ \varphi^{-1}$ глатко за сваку карту $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Скуп свих глатких реалних функција $f\colon M \to \mathbb{R}$ на многострукости M означавамо са $\mathfrak{F}(M)$. За две функције $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ природно дефинишемо функције $f + h$ (збир), fh (производ) и αf (множење скаларом $\alpha \in \mathbb{R}$) једнакостима

$$(f+h)(p) = f(p) + h(p), \quad (fh)(p) = f(p)h(p), \quad (\alpha f)(p) = \alpha f(p),$$

које важе за свако $p \in M$. Приметимо да ове нове функције такође припадају $\mathfrak{F}(M)$, односно да скуп $\mathfrak{F}(M)$ постаје комутативан прстен са јединицом као и алгебра над $\mathbb{R}$.

Пример 1.19. Координатне функције $x_i = \pi_i \circ \varphi$ произвољне карте (U, φ) на многострукости M су глатке као функције на отвореној подмногострукости U јер је њихова координатна репрезентација $x_i \circ \varphi^{-1}$ рестрикција пројекције π_i на $\varphi(U)$, те је самим тим глатка. △

Пример 1.20. Висинска функција $f\colon \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}$ на n-сфери са стандардном глатком структуром је дата са $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}$. Уз помоћ формуле (1.3) за стереографске пројекције из Примера 1.15 можемо израчунати

$$(f \circ \varphi_{\pm}^{-1})(y_1, \ldots, y_n) = \mp \frac{-1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2}{1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2},$$

што је глатко на $\mathbb{R}^n$, те је f глатко. Алтернативно можемо искористити атлас са пројекцијама на хемисфере из Примера 1.14 (јер он такође даје стандардну глатку структуру n-сфере) да покажемо да су функције $f \circ \varphi_{\pm i}^{-1}$ глатке.

У општијем случају можемо посматрати глатку функцију $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ и њену рестрикцију $f\restriction_{\mathbf{S}^n} = f \circ \imath$, где је $\imath\colon \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ инклузија. Координатна репрезентација инклузије је $\imath \circ \varphi_{\pm}^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ дато са

$$\imath \circ \varphi_{\pm}^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2}(2y_1, \ldots, 2y_n, \mp(-1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2)),$$

што је глатко на $\mathbb{R}^n$, одакле је глатко и $f\restriction_{\mathbf{S}^n} \circ \varphi_{\pm}^{-1} = f \circ \imath \circ \varphi_{\pm}^{-1}$, те је $f\restriction_{\mathbf{S}^n}$ глатко. △

Носач (*support*) функције $f\colon M \to \mathbb{R}$ на многострукости M је затворење скупа тачака у којима f није нула,

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}} = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}.$$

Дакле, носач функције f је најмањи затворен подскуп од M ван којег је f једнака нули, односно комплемент од $\operatorname{supp}(f)$ је највећи отворен подскуп на којем је f једнака нули. Ако је $\operatorname{supp}(f)$ садржано у неком скупу $U \subseteq M$, кажемо да је f ***подржано*** (*supported*) у U. Ако је $\operatorname{supp}(f)$ компактан скуп, онда кажемо да је f ***компактно подржано***. Наравно, свака функција на компактном простору је компактно подржана.

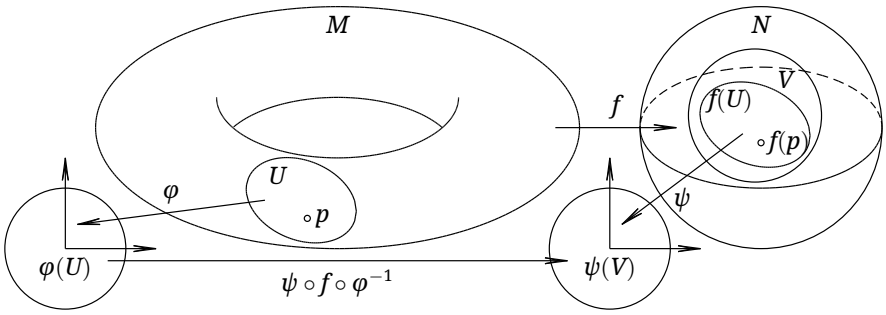
Ако је глатка функција на отвореној подмногострукости од M подржана у затвореном подскупу од M, онда се она може продужити нулом на читаву многострукост.

Лема 1.11. *Ако је U отворен подскуп многострукости M, а $f \in \mathfrak{F}(U)$ подржана у затвореном подскупу од M, онда је функција $h\colon M \to \mathbb{R}$ дефинисана са $h\restriction_U = f$ и $h\restriction_{M \setminus U} = 0$ глатка.*

Доказ. По претпоставци је $\operatorname{supp}(f) \subseteq A \subseteq U$ за неки затворен подскуп $A \subseteq M$, одакле је $h = 0$ (и зато глатко) на отвореном подскупу $M \setminus A$. Наравно, како је $h\restriction_U = f$ глатко на U, то је h глатко на $(M \setminus A) \cup U \supseteq (M \setminus U) \cup U = M$. □

Глатка структура омогућава нам да појам глаткоће продужимо на пресликавања између две многострукости M и N. Природна идеја је да пресликавање $f\colon M \to N$ поистоветимо са његовом ***координатном репрезентацијом*** $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, где је (U, φ) карта на M, а (V, ψ) карта на N. Домен репрезентације је $(f \circ \varphi^{-1})^{-1}(V) = \varphi(U \cap f^{-1}(V))$, али он у општем случају не мора бити отворен скуп, што може бити проблем. Тај проблем може се отклонити захтевом да је $f(U) \subseteq V$ јер је тада $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ пресликавање између отворених скупова $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) = \varphi(U)$ и $\psi(V)$.

За пресликавање $f\colon M \to N$ између многострукости M и N кажемо да је ***глатко у*** $p \in M$ ако постоје карте (U, φ) у $p \in M$ и (V, ψ) у $f(p) \in N$, са $f(U) \subseteq V$ такве да је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \psi(V)$ еуклидски глатко. Пресликавање $f\colon M \to N$ је ***глатко*** ако је глатко у свим тачкама из M.



Отворен домен координатне репрезентације се природно може обезбедити захтевом да је пресликавање f непрекидно, а глаткоћа очекивано повлачи непрекидност, што видимо у наредној леми.

Лема 1.12. *Глатко пресликавање између многострукости је непрекидно.*

Доказ. Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости. За $p \in M$ постоји карта (U, φ) у $p \in M$ и карта (V, ψ) у $f(p) \in N$ са $f(U) \subseteq V$, тако да је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ еуклидски глатко, самим тим и непрекидно. Рестрикција $f\restriction_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ је непрекидна као композиција непрекидних пресликавања, а како је f непрекидно на околини сваке тачке $p \in M$ онда је непрекидно на целом M. □

Да бисмо по дефиницији испитали да ли је пресликавање $f\colon M \to N$ глатко довољно је узети неки гладак атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ за M са особином да је $f(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$ за неку карту (V_α, ψ_α) на N и затим проверити да ли су сва пресликавања $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ глатка. Наравно, захваљујући глаткој структури, глаткоћа пресликавања не зависи од избора карата, што даје алтернативни начин да се постави дефиниција глатких пресликавања.

Лема 1.13. *Пресликавање $f\colon M \to N$ између многострукости је глатко ако и само ако је f непрекидно и функција $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ је еуклидски глатка за сваку карту (U, φ) на M и сваку карту (V, ψ) на N.*

Доказ. Нека је (U, φ) карта на M, а (V, ψ) карта на N. По Леми 1.12, глатко f је непрекидно, што даје отворено $f^{-1}(V)$, те функција $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ има отворен домен $D = \varphi(U \cap f^{-1}(V))$. За произвољну тачку $d \in D \neq \emptyset$, означимо $p = \varphi^{-1}(d)$, те постоје карте (U_1, φ_1) у $p \in M$ и (V_1, ψ_1) у $f(p) \in N$ са $f(U_1) \subseteq V_1$ и глатким $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$. Како је

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})\restriction_{\varphi(U \cap U_1)} = (\psi \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi^{-1}),$$

док су функције преласка $\psi \circ \psi_1^{-1}$ и $\varphi_1 \circ \varphi^{-1}$ глатке на одговарајућим околинама, то је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко на $\varphi(U \cap U_1) \ni d$ као композиција глатких пресликавања. Дакле, глатко f повлачи глатко $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Обрат је очигледан јер за $p \in M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$, произвољну карту (U, φ) у $p \in M$ по Леми 1.4 можемо рестриковати на отворен скуп $W = U \cap f^{-1}(V)$ и добити нову карту $\varphi\restriction_W$ са условом $f(W) \subseteq V$. □

Лема 1.13 покрива најчешћу дефиницију глаткоће у литератури. Пресликавање $f\colon M \to N$ између многострукости је глатко ако је функција $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ еуклидски глатка за сваку карту (U, φ) на M и сваку карту (V, ψ) на N, уз захтев да је $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ отворен скуп. На пример, $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ ће бити отворен уколико је f непрекидно.

Постоји одговарајући појам глатке функције која за домен има произвољан подскуп еуклидског простора, што се може уопштити на многострукости. За пресликавање $f\colon A \to N$, чији је домен $A \subseteq M$ произвољан подскуп многострукости, а N кодомен многострукост, кажемо да је ***глатко у*** $p \in A$, ако постоји глатко пресликавање $f_p\colon U_p \to N$ где је $U_p \subseteq M$ околина од p, тако да је $f = f_p$ на $U_p \cap A$. Наравно, $f\colon A \to N$ је ***глатко*** ако је глатко у свакој тачки од A. Уколико дозволимо да домен координатне репрезентације не буде отворен скуп може се појавити проблем из наредног примера.

Пример 1.21. Размотримо карактеристичну (индикатор) функцију $f\colon \mathbb{R} \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ скупа $\{x \in \mathbb{R} :\ x \geqslant 0\}$. Посматрамо једну карту $(\mathbb{R}, \mathbb{1})$ на $M = \mathbb{R}$ и две карте на $N = \mathbb{R}$, рецимо $((-\infty, 1), \mathbb{1})$ и $((0, +\infty), \mathbb{1})$. Координатна репрезентација од f је само њена рестрикција на домен $D = f^{-1}(V)$, где је V домен одговарајуће карте на N. За $V = (-\infty, 1)$, скуп $D = (-\infty, 0)$ је отворен и $f\restriction_D = 0$, те је глатко. Међутим, за $V = (0, +\infty)$, скуп $D = [0, +\infty)$ није отворен, али је $f\restriction_D = 1$ и зато има глатко продужење на отворен скуп. Како имамо циљ да уопштимо дефиницију глатке функције између еуклидских простора, не желимо да овакво пресликавање које није непрекидно, а самим тим ни еуклидски глатко, постане глатко. △

Дефиниција глатких пресликавања између многострукости уопштава претходне концепте. На пример, пресликавање између отворених подскупова еуклидских простора има координатну репрезентацију (у односу на идентичке карте) једнаку некој својој рестрикцији, те је глатко ако и само ако је еуклидски глатко. Слично, у случају реалне функције на многострукости имамо поклапање глатких пресликавања између многострукости са глатким функцијама које одређује глатка структура.

Како је глаткоћа пресликавања између многострукости по дефиницији локално својство то одмах имамо ***Лему о лепљењу глатких пресликавања***.

Лема 1.14. *Нека су M и N многострукости и нека је $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ отворен покривач од M. Ако постоје глатка пресликавања $f_\alpha\colon U_\alpha \to N$ за $\alpha \in \Lambda$ таква да је $f_\alpha = f_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$ за свако $\alpha, \beta \in \Lambda$, онда постоји јединствено глатко пресликавање $f\colon M \to N$ такво да је $f\restriction_{U_\alpha} = f_\alpha$ за свако $\alpha \in \Lambda$.*

Пример 1.22. Очигледан пример глатког пресликавања је идентичко пресликавање, или још општије инклузија $\imath\colon U \hookrightarrow M$ отворене подмногострукости $U \subseteq M$. Свако константно пресликавање $c\colon M \to N$ је такође глатко. △

Лема 1.15. *Композиција глатких пресликавања између многострукости је глатка.*

Доказ. Нека су $f\colon M \to N$ и $h\colon N \to P$ глатка пресликавања. Како је h глатко, за свако $p \in M$ постоје карте (V, ψ) у $f(p) \in N$ и (W, θ) у $h(f(p)) \in P$, са $h(V) \subseteq W$ такве да је $\theta \circ h \circ \psi^{-1}$ глатко. Пресликавање f је непрекидно по Леми 1.12, те је $f^{-1}(V) \ni p$ отворено и постоји карта (U, φ) у $p \in M$ са $U \subseteq f^{-1}(V)$. Како је f глатко, по Леми 1.13 је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. Одавде имамо $(h \circ f)(U) \subseteq h(V) \subseteq W$ и $\theta \circ (h \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\theta \circ h \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ је глатко као композиција глатких функција. □

Иако сама дефиниција није једноставна, често се праволинијски доказује да је конкретно пресликавање глатко. Најчешће се пресликавање запише у локалним координатама, те се његове компоненте функције препознају као композиције глатких елементарних функција или пресликавања за која већ знамо да су глатка.

Пример 1.23. Произвољно пресликавање из 0-димензионе многострукости на глатку многострукост је глатко јер је свака координатна репрезентација константна. △

Пример 1.24. Нека су M и N многострукости, а $\pi_M\colon M \times N \to M$ дато са $\pi_M(p,q) = p$, пројекција на прву компоненту. Нека је (U,φ) карта у $p \in M$, а (V,ψ) карта у $q \in N$, тада је $(U \times V, \varphi \times \psi)$ карта у $(p,q) \in M \times N$. Координатна репрезентација пројекције π_M је $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\colon (\varphi \times \psi)(U \times V) \to \varphi(U)$ дата са $(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n) \mapsto (a_1,\ldots,a_m)$, што је глатко, те је зато и π_M глатко. △

Пример 1.25. Количничка пројекција $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ из Примера 1.17 је глатка. Њена координатна репрезентација у односу на уведене координате за $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ и стандардне координате за $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ гласи

$$\varphi_i \circ \pi \circ \mathbb{1}^{-1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \varphi_i(x_1 : \ldots : x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right),$$

што је очигледно глатко за $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \widetilde{U}_i$, односно за $x_i \neq 0$. △

Лијева група[19] је многострукост G која је такође и група у алгебарском смислу са својством да су операције те групе сагласне са глатком структуром. Конкретно, захтева се да и множење $\mu\colon G \times G \to G$, $\mu(a,b) = ab$ и инверзно пресликавање $\imath\colon G \to G$, $\imath(a) = a^{-1}$ буду глатка пресликавања.

Пример 1.26. Наведимо неколико основних примера Лијевих група. Еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ је Лијева група у односу на сабирање. Скуп свих ненула комплексних бројева $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ је Лијева група у односу на множење. Јединични круг $\mathbf{S}^1$ у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ је Лијева група у односу на множење. Производ $G_1 \times G_2$ две Лијеве групе (G_1,μ_1) и (G_2,μ_2) је Лијева група у односу на множење по координатама $\mu_1 \times \mu_2$. △

Пример 1.27. Линеарна група $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A \neq 0\}$ из Примера 1.12 је многострукост као отворен подскуп од $\mathbb{R}^{n\times n}$. Како је свака компонента производа AB две матрице $A,B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (квадратни) полином по компонентама од A и B, множење матрица је очигледно глатко. По Крамеровом [20] правилу, инверзна матрица A^{-1} је количник адјунговане матрице од A и детерминанте од A. Адјунгована матрица од A је транспонат кофактор матрице од A, те су компоненте инверзне матрице полиноми (степена $n-1$) по компонентама од A, одакле следи да је инверзно пресликавање глатко. △

1.5 Дифеоморфизми

Дифеоморфизам између многострукости M и N је глатко бијективно пресликавање $f\colon M \to N$ које има гладак инверз. Уколико такав дифеоморфизам постоји кажемо да су M и N ***дифеоморфни***. Дифеоморфизам између многострукости је бијекција одговарајућих скупова која поистовећује њихове комплетне глатке атласе. Слично, ***хомеоморфизам*** између многострукости M и N је непрекидно бијективно пресликавање $f\colon M \to N$ које има непрекидан инверз, а ако постоји за многострукости кажемо да су ***хомеоморфне***. Како је свако глатко пресликавање непрекидно, то је сваки дифеоморфизам уједно и хомеоморфизам.

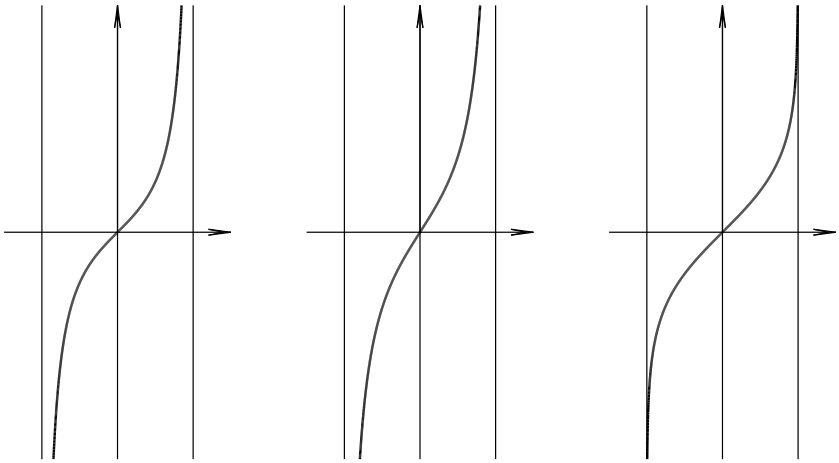
[19] Marius Sophus Lie (1842–1899), норвешки математичар
[20] Gabriel Cramer (1704–1752), швајцарски математичар

Теорија многострукости изучава особине многострукости које се чувају дифеоморфизмима, тако да сматрамо да су дифеоморфне многострукости суштински исте. За многострукости које су хомеоморфне сматрамо да су тополошки исте.

Пример 1.28. Нека је M n-многострукост. Свака карта (U, φ) на M индукује дифеоморфизам $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ из отворене подмногострукости $U \subseteq M$ на отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$. Пресликавања φ и φ^{-1} су глатка јер су такве њихове репрезентације у односу на карте (U, φ) на U и $(\varphi(U), \mathbb{1}_{\varphi(U)})$ на $\varphi(U)$, $\mathbb{1}_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1}_{\varphi(U)} = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \mathbb{1}_{\varphi(U)}^{-1}$. Обратно, сваки дифеоморфизам $f\colon U \to f(U)$ из отвореног подскупа $U \subseteq M$ на отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$ јесте карта комплетног атласа. Наиме, ако је (V, ψ) карта атласа за M, знамо да су ψ и ψ^{-1} глатка, те су глатке и функције преласка $f \circ \psi^{-1}$ и $\psi \circ f^{-1}$ као композиције по Леми 1.15, одакле следи да је карта (U, f) сагласна са атласом. △

Пример 1.29. Ако је f бијективно пресликавање из скупа P на многострукост M, тада постоји јединствен начин да P постане многострукост тако да је f дифеоморфизам. У том случају, атлас за P чине карте облика $(f^{-1}(U), \varphi \circ f)$ где су (U, φ) карте на M. △

Пример 1.30. Отворена јединична кугла $\mathbf{B}^n = B_1(0)$ у $\mathbb{R}^n$ је дифеоморфна са $\mathbb{R}^n$. У случају димензије $n = 1$ постоји много начина да направимо глатку растућу бијекцију $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, на пример



$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}, \quad f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad f(x) = \operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

У општем случају, можемо поставити дифеоморфизам $f\colon \mathbf{B}^n \to \mathbb{R}^n$ са

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}},$$

где увек важи $1 - \|x\|^2 \neq 0$ и $1 + \|y\|^2 \neq 0$, тако да су и f и f^{-1} глатка. Пресликавање

$$f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|^2}$$

је такође дифеоморфизам, али је теже доказати да је f^{-1} глатко, јер немамо експлицитну формулу. Међутим,

$$f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}$$

није дифеоморфизам, јер норма $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, за разлику од њеног квадрата $\|\cdot\|^2$, није глатка у општем случају. Конкретно, за $n = 1$ имамо

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1 - |x|)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x}{(1 - |x|)^3 |x|},$$

тако да $f''(0)$ не постоји и самим тим f није глатко. △

Пример 1.31. Пресликавање $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(x,y) = (xe^y + y, xe^y - y)$ је дифеоморфизам. Из $f(x,y) = (xe^y + y, xe^y - y) = (u,v)$ имамо $u - v = 2y$ и $u + v = 2xe^y$, одакле следи

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2e^{\frac{u-v}{2}}}, \frac{u-v}{2}\right),$$

те се лако види да је f бијективно, као и да су f и f^{-1} глатка. △

Пример 1.32. Пројективна права $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$ је дифеоморфна кругу $\mathbf{S}^1$. Да бисмо експлицитно добили дифеоморфизам можемо конструисати бијекцију која идентификује стандардни атлас $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ за $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$ са стандардним стереографским атласом $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ за $\mathbf{S}^1$, при чему је

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(1:x) \in \mathbb{R}\mathbf{P}^1 : x \in \mathbb{R}\}, & \varphi_1(1:x) &= x,\\
U_2 &= \{(x:1) \in \mathbb{R}\mathbf{P}^1 : x \in \mathbb{R}\}, & \varphi_2(x:1) &= x,\\
U_+ &= \{(x,y) \in \mathbf{S}^1 : y \neq -1\}, & \varphi_+(x,y) &= x/(1+y),\\
U_- &= \{(x,y) \in \mathbf{S}^1 : y \neq 1\}, & \varphi_-(x,y) &= x/(1-y).
\end{aligned}$$

За $f\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \to \mathbf{S}^1$, идентификација φ_1 са φ_+ значи да је $\varphi_+ \circ f \circ \varphi_1^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ идентичко, одакле следи $f\restriction_{U_1} = \varphi_+^{-1} \circ \varphi_1$. Како рачун даје

$$f(x:y) = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

за $x \neq 0$, природно f можемо додефинисати истом формулом за $x = 0$ и добити тражени дифеоморфизам чији је инверз

$$f^{-1}(x,y) = \begin{cases} (1+y:x) \text{ за } y \neq -1 \\ (x:1-y) \text{ за } y \neq 1 \end{cases}.$$

Рачун показује $\varphi_- \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, тако да је f заиста дифеоморфизам. Приметимо да смена $x = \cos t, y = \sin t$ доводи до формуле $f(\cos t : \sin t) = (\sin 2t, \cos 2t)$, те тражени дифеоморфизам такође може бити и $[e^{it}] \mapsto e^{2it}$. △

Пример 1.33. Класичан пример хомеоморфизма између многострукости које није дифеоморфизам је пресликавање $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дато са $\varphi(x) = x^3$. Оно је глатко и инвертибилно, али инверзно пресликавање није глатко. У Примеру 1.10 направили смо многострукост $\widetilde{\mathbb{R}}$ тако што смо на $\mathbb{R}$ одредили глатку структуру користећи карту $(\mathbb{R}, \varphi)$. Та глатка структура је различита од стандардне, али су многострукости $\mathbb{R}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ дифеоморфне. Пресликавање $f\colon \widetilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) = x^3$ је дифеоморфизам, јер је његова репрезентација $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ очигледно глатка, као и њен инверз. △

Пример 1.34. Нека је M многострукост са комплетним атласом $\mathcal{A}$. Произвољан хомеоморфизам $f\colon M \to M$ одређује нов атлас $\mathcal{A}'$ на M са картама $(f(U), \varphi \circ f^{-1}) \in \mathcal{A}'$ које су добијене од карата $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Тада је f дифеоморфизам ако и само ако је $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Дакле, ако је f хомеоморфизам који није дифеоморфизам, онда f дефинише нов атлас $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}$. Међутим, нова глатка структура на M није суштински различита од постојеће. Иако $f\colon M \to M$ није дифеоморфизам, оно дефинише дифеоморфизам између M и нове многострукости са атласом $\mathcal{A}'$. Зато, иако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ различити атласи, резултујуће глатке структуре су и даље дифеоморфне. △

Пример 1.35. За свако $s > 0$ можемо поставити пресликавање $F_s\colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ дефинисано са

$$F_s(x) = \|x\|^s \frac{x}{\|x\|}$$

за $x \neq 0$ и $F_s(0) = 0$. Како $x \in \mathbf{B}^n$ значи $\|x\| < 1$, то следи $\|F_s(x)\| < 1$ и добијамо $F_s(\mathbf{B}^n) \subseteq \mathbf{B}^n$. Лако је проверити да важи $F_s \circ F_t = F_{st}$, те је F_s бијекција са $(F_s)^{-1} = F_{1/s}$, док из $F_{1/s}(\mathbf{B}^n) \subseteq \mathbf{B}^n$ добијамо $F_s(\mathbf{B}^n) = \mathbf{B}^n$. Очигледно је F_s глатко на $\mathbf{B}^n \setminus \{0\}$, те остаје да се провери глаткоћа у тачки $x = 0$. Како $F_s(x) \to 0$ кад $x \to 0$, то је F_s хомеоморфизам. Како F_s није глатко у 0 за $s < 1$, а $(F_s)^{-1} = F_{1/s}$ није глатко у 0 за $s > 1$, то је F_s дифеоморфизам само за $s = 1$. На овај начин конструисали смо непребројиву фамилију хомеоморфизама на $\mathbf{B}^n$ који нису дифеоморфизми, али њихове рестрикције на $\mathbf{B}^n \setminus \{0\}$ јесу дифеоморфизми.

Нека је $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ атлас за M. За $p \in M$ постоји карта (U, φ) комплетног атласа центрирана у p таква да је $\varphi(U) = \mathbf{B}^n$. За свако $s > 0$ конструишимо нови атлас $\mathcal{A}_s = \{(V_\alpha \setminus \{p\}, \psi_\alpha\restriction_{V_\alpha \setminus \{p\}}) : \alpha \in \Lambda\} \cup \{(U, F_s \circ \varphi)\}$. Како $(F_s \circ \varphi) \circ (F_t \circ \varphi)^{-1} = F_s \circ F_t^{-1} = F_{s/t}$ није дифеоморфизам за $s \neq t$, то су комплетни атласи одређени са $\mathcal{A}_s$ међусобно различити и има их непребројиво много. Овим смо показали да ако тополошка многострукост димензије $n \geqslant 1$ има глатку структуру, онда она има непребројиво много различитих глатких структура. △

За разлику од хомеоморфизама који нису дифеоморфизми, тешко је наћи две хомеоморфне многострукости које нису дифеоморфне. Испоставља се да за $n \leqslant 3$ свака тополошка n-многострукост има глатку структуру која је јединствена до на дифеоморфизам (видети Моиз[21] [85]). Међутим, први пример егзотичне структуре многострукости открио је Милнор[22] 1956. године [84], тако што је показао да 7-сфера $\mathbf{S}^7$ има глатке структуре које нису дифеоморфне са стандардном структуром.

Занимљиво је питање да ли дата тополошка многострукост може имати глатке структуре које нису дифеоморфне. Ово питање је прилично компликовано, чак и за еуклидске просторе. Зна се да $\mathbb{R}^n$ за $n \neq 4$ има јединствену глатку структуру, до на дифеоморфизам (видети Сталингс[23] [110]). Међутим, комбинација резултата које су дали Доналдсон[24] [43] и Фридман[25] [49] водила је до открића нестандардних глатких структура на $\mathbb{R}^4$. Штавише, $\mathbb{R}^4$ има непребројиво много различитих глатких структура, међу којима нема дифеоморфних (видети Таубс[26] [112]).

Са друге стране, неке тополошке многострукости уопште не дозвољавају глатку структуру. Први пример овог дубоког резултата је компактна 10-димензиона многострукост коју је 1960. открио Кервер[27] [73]. Заправо, примери тополошких n-многострукости које не могу постати глатке су познате за свако $n \geqslant 4$. Најпознатији пример је такозвана E_8 многострукост, што је тополошка 4-многострукост коју је открио Фридман 1982. године [49].

1.6 Разбијање јединице

Како су многострукости добијене лепљењем отворених скупова из $\mathbb{R}^n$ преко дифеоморфизама, рад по целокупној многострукости може бити незгодан. Теорија разбијања јединице је прилично технички али важан алат који нам омогућава да радимо у локалним координатама. Основна идеја је да функцију константне вредности 1 разбијемо на гомилу глатких делова са којима се даље лакше ради.

Постоји велики број глатких функција на многострукости, али душу разбијања јединице чине џомбасте функције. У питању су глатки еквиваленти карактеристич-

[21] Edwin Evariste Moise (1918–1998), амерички математичар
[22] John Willard Milnor (1931), амерички математичар
[23] John Robert Stallings Jr. (1935–2008), амерички математичар
[24] Simon Kirwan Donaldson (1957), енглески математичар
[25] Michael Hartley Freedman (1951), амерички математичар
[26] Clifford Henry Taubes (1954), амерички математичар
[27] Michel André Kervaire (1927–2007), француски математичар

них функција које употребљавамо да камуфлирамо функцију $f\colon M \to \mathbb{R}$. Ако помножимо f карактеристичном функцијом скупа $U \subset M$, резултат је нула ван U, али смо изгубили непрекидност функције. Ствари се поправљају увођењем џомбасте функције b која од јединице глатко опада ка нули између унутрашњег скупа V и спољашњег отвореног скупа $U \supset \overline{V}$. Тада за $x \in V$ имамо $b(x) = 1$ одакле следи $(fb)(x) = f(x)$, док за $x \notin U$ имамо $(fb)(x) = 0$. Додатно, производ функција fb је барем онолико глатка колико је то f (осим у случају аналитичких функција).

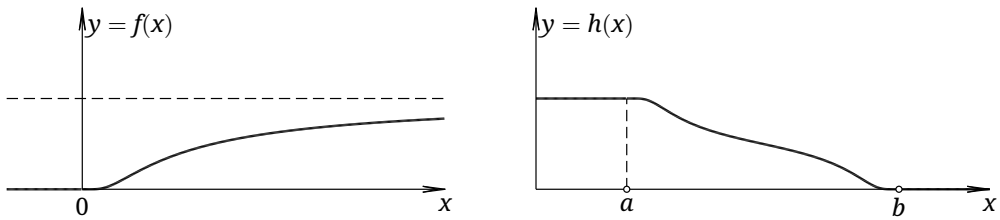
Језгро ове теорије чини глатка реална функција која је једнака нули за све негативне вредности домена, а строго је растућа за позитивне вредности. Чувена неаналитичка глатка функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ из Примера А.7, дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{за } x > 0 \\ 0 & \text{за } x \leqslant 0 \end{cases}$$

има управо такве особине. За произвољне $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $a < b$ дефинишемо глатку функцију $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$h(x) = \frac{f(b-x)}{f(b-x) + f(x-a)}.$$

Како је бар један од израза $b - x$ и $x - a$ позитиван, именилац је позитиван за свако x. Зато је функција h добро дефинисана, при чему важи $h(x) = 1$ за $x \leqslant a$, $0 < h(x) < 1$ за $a < x < b$ и $h(x) = 0$ за $x \geqslant b$.



Новодобијена функција h може се даље уопштити на $\mathbb{R}^n$ где користимо отворене кугле $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < r\}$. За $0 < a < b$ постављамо функцију $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ са $H(x) = h(\|x\|)$. Она је глатка на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ као композиција глатких функција, док је идентички једнака 1 на $B_a(0)$, те је глатка и у $0 \in \mathbb{R}^n$. Овом конструкцијом доказали смо наредну лему.

Лема 1.16. *За произвољне $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $0 < a < b$, постоји $H \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ тако да је $H(x) = 1$ за $x \in \overline{B_a(0)}$, $0 < H(x) < 1$ за $x \in B_b(0) \setminus \overline{B_a(0)}$ и $H(x) = 0$ за $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_b(0)$.*

Овај концепт се са еуклидског простора уопштава на многострукости, а у нашој теорији основна је следећа лема.

Лема 1.17. *Нека је M многострукост и U околина тачке $p \in M$. Тада постоји околина $V \ni p$ и компактно подржана глатка функција $b\colon M \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ тако да је $b\restriction_V = 1$ и* $\operatorname{supp}(b) \subset U$.

Доказ. На основу Леме 1.4 постоји карта (W, φ) која је центрирана у $p \in M$ тако да је $W \subseteq U$. Постоји довољно мало $\varepsilon > 0$ такво да је $B_{3\varepsilon}(0) \subseteq \varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^n$. Нека је $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ за $n = \dim M$ глатка функција из Леме 1.16 са $H(x) = 1$ за $\|x\| \leqslant \varepsilon$, $0 < H(x) < 1$ за $\varepsilon < \|x\| < 2\varepsilon$ и $H(x) = 0$ за $\|x\| \geqslant 2\varepsilon$. Нова функција $f = H \circ \varphi\colon W \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ је глатка и подржана у $\varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}(0)}) \subset W$, те се по Леми 1.11 може продужити нулом до $b \in \mathfrak{F}(M)$. За $V = \varphi^{-1}(B_\varepsilon(0)) \ni p$ је $b\restriction_V = 1$, а свакако важи $\operatorname{supp}(b) = \varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}(0)}) \subset W \subseteq U$. □

Функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ из Леме 1.17 зовемо ***џомбаста функција*** (*bump function*) у p, и она једноставно продужава домен глатке функције на целокупну многострукост M, о чему говори наредна лема.

Лема 1.18. *Нека је M многострукост и U околина тачке $p \in M$. За $f \in \mathfrak{F}(U)$ постоји околина $V \ni p$ и $F \in \mathfrak{F}(M)$ тако да је* $\operatorname{supp}(F) \subseteq U$ *и* $F\restriction_V = f\restriction_V$.

Доказ. Примена Леме 1.17 даје околину $V \ni p$ и џомбасту функцију $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржану у U са $b\restriction_V = 1$. Функција $bf \in \mathfrak{F}(U)$ је подржана у затвореном $\operatorname{supp}(b) \subset U \subseteq M$, те се по Леми 1.11 може продужити нулом до $F \in \mathfrak{F}(M)$ за коју важи $\operatorname{supp}(F) \subseteq U$ и $F\restriction_V = (bf)\restriction_V = f\restriction_V$. □

Кад у Леми 1.17, тачку из околине заменимо компактом, добијамо важну последицу.

Лема 1.19. *Ако је $K \subseteq U \subseteq M$ за многострукост M, компактан K и отворен U, онда постоји глатка функција $f\colon M \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ подржана у U са $f\restriction_K = 1$.*

Доказ. По Леми 1.17, за свако $p \in K \subseteq U$ постоји отворен $V_p \ni p$ и глатка функција $f_p\colon M \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ подржана у U са $f_p\restriction_{V_p} = 1$. Фамилија $\{V_p\}_{p\in K}$ је отворен покривач компакта K те има коначан потпокривач $\{V_{p_1}, \dots, V_{p_k}\}$. Функција $f\colon M \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ дата са $f = 1-(1-f_{p_1})(1-f_{p_2})\cdots(1-f_{p_k})$ је очигледно глатка. Како је $f(x) \neq 0$ ако постоји $1 \leqslant i \leqslant k$ тако да је $f_{p_i}(x) \neq 0$, то је $\operatorname{supp}(f) \subseteq \bigcup_i \operatorname{supp}(f_{p_i}) \subseteq U$, одакле је f подржана у U. Коначно, $f\restriction_{V_p} = 1$ за $1 \leqslant i \leqslant k$, те због $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_{p_i}$ важи $f\restriction_K = 1$. □

Разбијање јединице је декомпозиција $\sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha = 1$ константне функције 1 на суму глатких функција f_α. Уобичајено је да радимо са бесконачним сумама, тако да су ове функције индексиране по неком бесконачном скупу Λ и природно је захтевати да за свако $p \in M$ важи $f_\alpha(p) = 0$ за све осим коначно много $\alpha \in \Lambda$. Сума је тада добро дефинисана као функција на M, а глаткоћу можемо задржати кроз наредну дефиницију.

Разбијање јединице (*partition of unity*) на многострукости M је фамилија $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ глатких функција $f_\alpha\colon M \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, таква да је фамилија носача $\{\operatorname{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ локално коначна и важи $\sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(p) = 1$ за свако $p \in M$. Кажемо да је разбијање јединице ***подређено*** (*subordinate*) неком покривачу од M ако је фамилија свих носача профињење тог покривача.

Из дефиниције следи да за свако $p \in M$ постоји $\alpha \in \Lambda$ за које је $f_\alpha(p) > 0$, те је $\{\operatorname{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ покривач од M. Овај покривач је локално коначан те је (бесконачна) сума $\sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(p)$ добро дефинисана. Ако је $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ покривач од M и $\operatorname{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$ важи за свако $\alpha \in \Lambda$, тада кажемо да је $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ подређено $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ са истим скупом индекса као и разбијање јединице. Међутим, ако је $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ разбијање јединице подређено покривачу $\{V_\beta\}_{\beta\in\Delta}$, тада је $\{\operatorname{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ профињење од $\{V_\beta\}_{\beta\in\Delta}$ и можемо употребити пресликавање профињења $\phi\colon \Lambda \to \Delta$ које задовољава $\operatorname{supp}(f_\alpha) \subseteq V_{\phi(\alpha)}$ за свако $\alpha \in \Lambda$, и добити разбијање јединице $\{\sum_{\alpha\in\phi^{-1}(\beta)} f_\alpha\}_{\beta\in\Delta}$ које је подређено покривачу $\{V_\beta\}_{\beta\in\Delta}$ са истим скупом индекса.

Теорема 1.20. *За сваки отворен покривач многострукости постоји разбијање јединице које му је подређено.*

Доказ. Нека је $\mathcal{U}$ отворен покривач од M. Како је по Леми 1.7 M локално компактан, то постоји отворено профињење $\mathcal{U}'$ од $\mathcal{U}$ које се састоји од релативно компактних скупова. Како је по Леми 1.10 M паракомпактно, то постоји локално коначно отворено профињење $\mathcal{V}$ од $\mathcal{U}'$, самим тим и од $\mathcal{U}$.

Посматрајмо скуп $\mathcal{W} = \{U \subseteq M : U$ је отворен и $\overline{U} \subseteq V$ за неко $V \in \mathcal{V}\}$. Свако $p \in M$ има околину $V \in \mathcal{V}$, а како је по Леми 1.9 M регуларан, то тачку p и затворен скуп $M \setminus V \not\ni p$ можемо раздвојити отвореним дисјунктним скуповима $P \ni p$ и $Q \supseteq M \setminus V$. Из $P \cap Q = \emptyset$ имамо $P \subseteq M \setminus Q$, те и $\overline{P} \subseteq M \setminus Q$, док из $M \setminus V \subseteq Q$ следи $M \setminus Q \subseteq V$, те важи $\overline{P} \subseteq M \setminus Q \subseteq V$. Одавде је $p \in P \in \mathcal{W}$, што значи да је $\mathcal{W}$ покривач од M, а самим тим и отворено профињење од $\mathcal{V}$.

Нова примена паракомпактности даје локално коначно отворено профињење $\mathcal{W}'$ од $\mathcal{W}$. Сада је $\mathcal{W}' = \{W_\beta\}_{\beta\in\Delta}$ профињење од $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ и за свако $\beta \in \Delta$ постоји $\phi(\beta) \in \Lambda$ тако да је $\overline{W_\beta} \subseteq V_{\phi(\beta)}$, што дефинише пресликавање $\phi\colon \Delta \to \Lambda$ и можемо поставити

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta\in\phi^{-1}(\alpha)} W_\beta,$$

што је по конвенцији празан скуп за евентуално $\phi^{-1}(\alpha) = \emptyset$. Како је $\mathcal{W}'$ локално коначна фамилија, за сваку тачку $p \in M \setminus \bigcup_{\beta\in\phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta}$ постоји околина $U \ni p$ која сече само коначно много чланова, рецимо $W_1, \dots, W_k$. За остале W_β је тада $W_\beta \cap U = \emptyset$, одакле следи $W_\beta \subseteq M \setminus U$, те $\overline{W_\beta} \subseteq M \setminus U$ и важи $\overline{W_\beta} \cap U = \emptyset$. Због тога добијамо да је $U \setminus \bigcup_{\beta\in\phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta} = U \setminus (\overline{W_1} \cup \dots \cup \overline{W_k})$ околина тачке p, одакле следи да је $M \setminus \bigcup_{\beta\in\phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta}$ отворен, односно $\bigcup_{\beta\in\phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta}$ је затворен. Одавде је

$$\overline{X_\alpha} = \overline{\bigcup_{\beta\in\phi^{-1}(\alpha)} W_\beta} = \bigcup_{\beta\in\phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta} \subseteq V_\alpha,$$

те за свако $\alpha \in \Lambda$ постоји компактно $\overline{X_\alpha}$ садржано у отвореном V_α, одакле по Леми 1.19 постоји глатка функција $f_\alpha \in \mathfrak{F}(M)$ подржана у V_α и једнака 1 на $\overline{X_\alpha}$. Сума $f = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha$ је глатка функција која је свуда коначна и није нула. Коначно, сума нових функција f_α/f је свуда једнака 1. □

Пример 1.36. Урисонова[28] лема је позната из топологије и каже да је тополошки простор нормалан ако и само ако се свака два непразна дисјунктна затворена подскупа могу раздвојити непрекидном функцијом у смислу да постоји непрекидна функција која узима вредности 0 на једном од два подскупа и вредности 1 на другом. Нека су A и B два дисјунктна затворена подскупа многострукости M. На основу Теореме 1.20 постоји разбијање јединице $\{\psi_A, \psi_B\}$ подређено отвореном покривачу $\{M \setminus A, M \setminus B\}$. Функција $\psi_A\colon M \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ је глатка и задовољава $\psi_A\restriction_A = 0$, као и $\psi_A\restriction_B = 1 - \psi_B\restriction_B = 1$, што даје глатку верзију Урисонове леме. Посебно, свака многострукост је нормална. △

Пример 1.37. Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$ глатка функција на произвољном подскупу $A \subseteq M$. Тада за свако $a \in A$ постоји $f_a \in \mathfrak{F}(U_a)$ такво да је $U_a \subseteq M$ околина од a и $f = f_a$ на $U_a \cap A$. По Теореми 1.20 постоји разбијање јединице $\{\psi_a\}_{a\in A}$ подређено отвореном покривачу $\{U_a : a \in A\}$ од $U = \bigcup_{a\in A} U_a \subseteq M$. Како је $f_a \in \mathfrak{F}(U_a)$ и $\operatorname{supp}(\psi_a) \subseteq U_a$ добијамо $\psi_a f_a \in \mathfrak{F}(U)$, што нам омогућава да дефинишемо $F = \sum_{a\in A} \psi_a f_a \in \mathfrak{F}(U)$. За $x \in A$ имамо $F(x) = \sum_{a\in A} \psi_a f_a(x) = \sum_{a\in A} f(x)\psi_a(x) = f(x)$. Зато свако глатко $f\colon A \to \mathbb{R}$ има глатко продужење $F\colon U \to \mathbb{R}$ на отворен скуп $U \supseteq A$.

Ако додатно претпоставимо да је A затворен, тада постоји разбијање јединице $\{\psi_1, \psi_2\}$ подређено отвореном покривачу $\{U, M \setminus A\}$ од M. Како $F \in \mathfrak{F}(U)$ и $\operatorname{supp}(\psi_1) \subseteq U$ добијамо $\psi_1 F \in \mathfrak{F}(M)$, док $\operatorname{supp}(\psi_2) \subseteq M \setminus A$ повлачи $\psi_1\restriction_A = 1 - \psi_2\restriction_A = 1$, те отуда $\psi_1 F = f$ на A. Зато се свака глатка функција на затвореном подскупу од M може продужити до глатке функције на M. △

1.7 Задаци

Задатак 1.1. Да ли је глатка сагласност карата на M релација еквиваленције за сваки непразан скуп M?

[28] Павел Самуилович Урысон (1898–1924), совјетски математичар

Задатак 1.2. Дат је скуп $M = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, као и функције $\varphi = \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \colon M \setminus \{\infty\} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\psi \colon M \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, при чему је $\psi(x) = x$ за $x \neq 0$ и $\psi(\infty) = 0$. Да ли M са атласом $\{\varphi, \psi\}$ чини глатку многострукост?

Задатак 1.3. Дата је тополошка површ $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + r\} \subset \mathbb{R}^3$ са релативном топологијом. За које вредности $r \in \mathbb{R}$ постоји атлас са којим M постаје глатка многострукост?

Задатак 1.4. Одредити (што природнији) атлас тако да скуп свих афиних правих из $\mathbb{R}^2$ постане глатка многострукост.

Задатак 1.5. Испитати да ли је функција $f \colon \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}$ дата са $f(x, y, z) = \sqrt{1 - z^2}$ глатка.

Задатак 1.6. Доказати да је пресликавање $f \colon \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \to \mathbb{R}$ дато са

$$(x : y : z) \mapsto \frac{yz + xz + xy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

добро дефинисано и глатко.

Задатак 1.7. Доказати да је пресликавање $f \colon \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^1$ дато са $(t : 1) \mapsto (t + 1 : 1)$ за $t \in \mathbb{R}$ и $(1 : 0) \mapsto (1 : 0)$ глатко.

Задатак 1.8. Доказати да за свако $p \in \mathbf{B}^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ постоји дифеоморфизам $f \colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ такав да је $f(0) = p$.

Задатак 1.9. Дат је скуп $M = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, као и функције $\varphi = \mathbb{1}_{\mathbb{C}} \colon M \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ и $\psi \colon M \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, при чему је $\psi(z) = 1/z$ за $z \neq 0$ и $\psi(\infty) = 0$. Доказати да M са атласом $\{\varphi, \psi\}$ чини глатку многострукост која је дифеоморфна са $\mathbf{S}^2$.

Задатак 1.10. Испитати да ли је пресликавање $f \colon \mathbb{F}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{F}\mathbf{P}^1$ дато са $f(t : 1) = (e^{t^2} : 1)$ за $t \in \mathbb{F}$ и $f(1 : 0) = (1 : 0)$ глатко, где је $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Задатак 1.11. Нека је $f \colon M \to \mathbb{R}$ позитивна непрекидна функција на многострукости M. Доказати да постоји $h \in \mathfrak{F}(M)$ такво да за свако $p \in M$ важи $0 < h(p) < f(p)$.

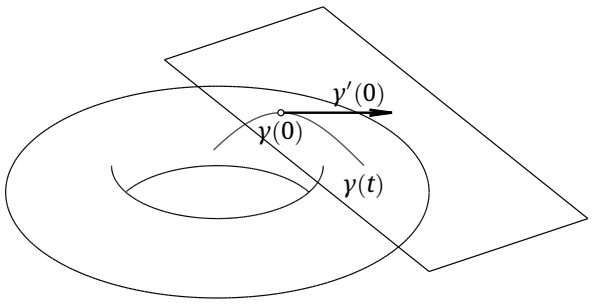
Задатак 1.12. Нека је M многострукост, $A \subset M$ затворен подскуп, а $f \colon A \to (0, \infty)$ глатко. Доказати да постоји глатко $F \colon M \to (0, \infty)$ такво да је $F\restriction_A = f$.

Глава 2

ТАНГЕНТНИ ПРОСТОРИ И ПРЕСЛИКАВАЊА

2.1 Тангентни вектори

Најинтуитивнији начин за дефинисање тангентног вектора тиче се кривих на многострукости. Нека је $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ глатка крива на n-многострукости M која пролази кроз тачку $p \in M$, где је $\varepsilon > 0$ мали реалан број. Другим речима, γ је глатко пресликавање за које је $\gamma(0) = p$. Тангентни вектор на многострукости M у тачки p може се видети као извод криве γ у нули. Међутим, ако M није смештено у неком еуклидском простору онда извод $\gamma'(0)$ нема смисла. Стандардна идеја је изабрати карту (U,φ) у $p \in M$ и идентификовати криву γ на M са кривом $\varphi \circ \gamma$ на $\mathbb{R}^n$, тако да тангентни вектор можемо добро дефинисати са $(\varphi \circ \gamma)'(0)$.



Како различите глатке криве на M које пролазе кроз p могу дати исти тангентни вектор, то постоји очигледна релација еквиваленције између њих. Две такве криве γ_1 и γ_2 су еквивалентне ако постоји карта (U,φ) у p за коју важи $(\varphi\circ\gamma_1)'(0) = (\varphi\circ\gamma_2)'(0)$. За произвољну карту (V,ψ) у p је $p \in U \cap V \neq \emptyset$ и имамо глатко $\omega = \psi \circ \varphi^{-1}$, те

$$\begin{aligned}(\psi \circ \gamma_1)'(0) &= (\omega \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) = \omega'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma_1)'(0)\\ &= \omega'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\omega \circ \varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0),\end{aligned}$$

одакле следи да еквиваленција кривих не зависи од избора карте.

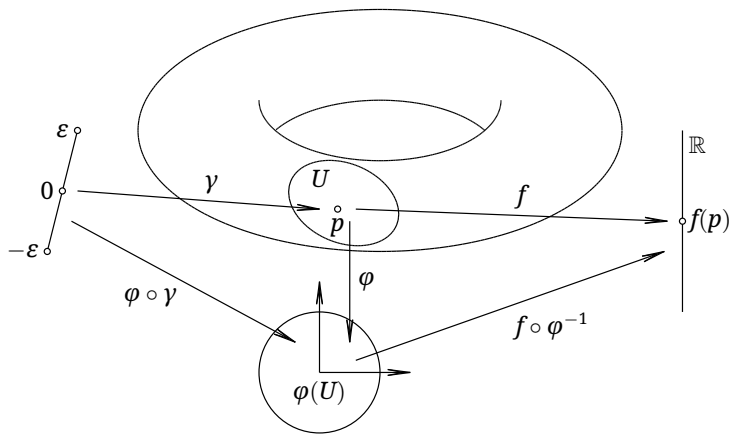
Алтернативно, можемо дефинисати $\gamma'(0)\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ са

$$(\gamma'(0))(f) = (f \circ \gamma)'(0) = \left.\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=0}$$

и посматрати везу између различитих дефиниција $\Phi\colon (\varphi \circ \gamma)'(0) \mapsto \gamma'(0)$. За еквивалентне криве γ_1 и γ_2 је

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0),$$

те Φ зависи само од класе еквиваленције криве γ.



Дефиниција тангентног вектора преко кривих јесте веома геометријска, али није одмах уочљиво одакле потиче структура векторског простора. Међутим, како важи $(\alpha f + \beta h) \circ \gamma = \alpha(f \circ \gamma) + \beta(h \circ \gamma)$, то је линеарност евидентно својство функције $\gamma'(0)$. Са друге стране, из $(fh) \circ \gamma = (f \circ \gamma)(h \circ \gamma)$ следи

$$\begin{aligned}(\gamma'(0))(fh) &= ((f \circ \gamma)(h \circ \gamma))'(0) = (f \circ \gamma)'(0) \cdot h(\gamma(0)) + (h \circ \gamma)'(0) \cdot f(\gamma(0)) \\ &= h(p)(\gamma'(0))(f) + f(p)(\gamma'(0))(h),\end{aligned}$$

те $\gamma'(0)$ задовољава Лајбницов[1] закон (правило за извод производа) у тачки p. Дакле, функција $\gamma'(0)\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ има својства карактеристична за извод, $\mathbb{R}$-линеарност и Лајбницовост у p, те за реалну функцију на $\mathfrak{F}(M)$ са тим особинама кажемо да је ***диференцирање у тачки*** (*derivation at*) $p \in M$. Особине које поседује $\gamma'(0)$ мотивишу нас да уведемо дефиницију тангентног вектора на следећи начин.

Тангентни вектор на многострукости M у тачки $p \in M$ је свако диференцирање у тачки p. Скуп T_pM свих тангентних вектора на многострукости M у тачки $p \in M$ зовемо ***тангентни простор*** од M у p. Другим речима, уколико је $X\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ такво да $X \in T_pM$, тада за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ важи линеарност $X(\alpha f + \beta h) = \alpha X(f) + \beta X(h)$ и Лајбницовост $X(fh) = f(p)X(h) + h(p)X(f)$.

Сабирање и множење скаларом уводимо на природан начин, односно тако да за $X, Y \in T_pM$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$ и $(\alpha X)(f) = \alpha X(f)$. Овако дефинисани $X + Y$ и αX су такође тангентни вектори, те је T_pM векторски простор над $\mathbb{R}$.

По својој природи многострукости су закривљени простори, и они могу бити веома компликовани за изучавање, док су векторски простори једноставнији и погоднији за рад. Кључна идеја инфинитезималног рачуна је линеарна апроксимација. Тангентни простор T_pM је векторски простор и можемо га схватити као најбољу линеарну апроксимацију многострукости M у тачки $p \in M$, те га често користимо уместо оригиналне многострукости.

Природно, изводи константне функције се поништавају. За $X \in T_pM$ и јединичну функцију $1 \in \mathfrak{F}(M)$, из Лајбницовости је $X(1) = X(1 \cdot 1) = 1(p)X(1) + 1(p)X(1) = 2X(1)$, те важи $X(1) = 0$, док за произвољно $\alpha \in \mathbb{R}$, линеарност даје $X(\alpha 1) = \alpha X(1) = 0$.

Лема 2.1. *Ако је $f \in \mathfrak{F}(M)$ константна функција на многострукости $M \ni p$, тада је $Xf = 0$ за свако $X \in T_pM$.*

Тангентни простор је дефинисан у терминима глатких функција на целокупној многострукости, док су карте у општем случају дефинисане на неким отвореним подскуповима. Међутим, тангентни вектори ипак дејствују локално на $\mathfrak{F}(M)$.

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Лема 2.2. *Ако се $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $h \in \mathfrak{F}(M)$ слажу на некој околини тачке p многострукости M, тада је $Xf = Xh$ за свако $X \in T_pM$.*

Доказ. Нека је $f = h$ на некој околини $U \ni p$. По Леми 1.17 постоји функција $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржана у U таква да је $b(p) = 1$. Како је $(f-h)b = 0$ на целокупном M, то имамо $0 = X((f-h)b) = b(p)X(f-h) + (f-h)(p)X(b) = X(f-h)$, одакле следи $Xf = Xh$. □

Претходна лема је веома важна јер дозвољава појам клице. Функције $f\colon U \to \mathbb{R}$ и $h\colon V \to \mathbb{R}$, локално дефинисане на неким околинама фиксиране тачке $p \in M$, су еквивалентне ако постоји неки отворен подскуп $W \subseteq U \cap V$, који садржи p, такав да важи $f\restriction_W = h\restriction_W$. Класу еквиваленције таквих функција зовемо ***клица*** (*germ*) у p.

Како радимо са глатким функцијама (за разлику од функција класе C^k са $k < \infty$), свака локално дефинисана глатка функција по Леми 1.18 има еквивалентну глатку функцију дефинисану на целој многострукости M. Приметимо да ако су f и h продужења еквивалентних глатких функција, по Леми 2.2 имамо $Xf = Xh$ за свако $X \in T_pM$. Дакле, тангентни вектор $X \in T_pM$ је суштински дефинисан на клицама у p, те користимо ознаку Xf и за функције $f \in \mathfrak{F}(U)$ где је $U \ni p$ отворен подскуп од M, подразумевајући вредност од X у произвољној (самим тим и свакој) функцији из $\mathfrak{F}(M)$ која је еквивалентна са f у p.

Да бисмо дефинисали парцијални извод на многострукости, потребно је да функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ пошаљемо назад у еуклидски простор преко неке карте, а затим узмемо уобичајене парцијалне изводе. Нека је (U, φ) карта на n-многострукости M у тачки $p \in M$ и нека су $x_i = \pi_i \circ \varphi$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ одговарајуће координатне функције. ***Парцијални извод*** функције $f \in \mathfrak{F}(M)$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ дефинишемо са

$$(\partial_i)_p(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i}(\varphi(p)).$$

Како наша дефиниција проистиче из извода, то одмах добијамо линеарност и Лајбницовост, те је $(\partial_i)_p\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ тангентни вектор од M у p. Штавише, испоставља се да парцијални изводи чине базу тангентног простора T_pM.

Полазимо од Адамарове[2] леме (Лема A.29), по којој ако је $U \ni a$ отворена конвексна околина у $\mathbb{R}^n$, онда за $f \in \mathfrak{F}(U)$ постоје функције $l_i \in \mathfrak{F}(U)$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ тако да за свако $x \in U$ важи

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (\pi_i(x) - \pi_i(a)) l_i(x),$$

при чему је $l_i(a) = (\partial f / \partial \pi_i)(a)$.

Адамарова лема је заправо облик првог реда Тејлорове[3] теореме. Наредна итерација развоја доводи нас до облика другог реда,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} (\pi_i(x) - \pi_i(a)) \left(l_i(a) + \sum_{j=1}^{n} (\pi_j(x) - \pi_j(a)) l_{ij}(x) \right) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} (\pi_i(x) - \pi_i(a)) \frac{\partial f}{\partial \pi_i}(a) + \sum_{i,j=1}^{n} (\pi_i(x) - \pi_i(a))(\pi_j(x) - \pi_j(a)) l_{ij}(x), \end{aligned}$$

где су $l_{ij} \in \mathfrak{F}(U)$ за $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Нека је (U, φ) карта у $p \in M$ таква да је $\varphi(U)$ конвексно (на пример отворена кугла), и нека је $f \in \mathfrak{F}(U)$. Примена претходне формуле на глатку функцију $f \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{F}(\varphi(U))$

[2] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963), француски математичар
[3] Brook Taylor (1685–1731), енглески математичар

и тачке $a = \varphi(p)$ и $x = \varphi(q)$ доноси

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i(q) - x_i(p))\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial\pi_i}(\varphi(p)) + \sum_{i,j=1}^{n}(x_i(q) - x_i(p))(x_j(q) - x_j(p))l_{ij}(\varphi(q)),$$

односно

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i(p))\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) + \sum_{i,j=1}^{n}(x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p))(l_{ij}\circ\varphi),$$

где је $l_{ij}\circ\varphi$ глатко за све $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

То нам омогућава да испитамо вредност Xf за произвољан тангентни вектор $X \in T_pM$. Почетни члан је $f(p)$, што је константа која се поништава по Леми 2.1. Из Лајбницовости следи да X поништава последњу суму јер сваки од три добијена члана има бар један фактор облика $(x_i - x_i(p))(p) = 0$. Преостаје сума у средини, где је

$$Xf = X\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i(p))\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\right) = \sum_{i=1}^{n}X(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f,$$

одакле добијамо

$$X = \sum_{i=1}^{n}X(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p. \tag{2.1}$$

Из формуле (2.1) следи да парцијални изводи $(\partial_i)_p$ генеришу тангентни простор T_pM. Са друге стране, применом парцијалних извода на координатне функције добијамо $(\partial_i)_p(x_j) = \delta_{ij}$. Тада $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\partial_i)_p = 0$ повлачи $\lambda_j = (\lambda_1(\partial_1)_p + \cdots + \lambda_n(\partial_n)_p)(x_j) = 0$ за свако $1 \leqslant j \leqslant n$, те су $(\partial_1)_p, \ldots, (\partial_n)_p$ линеарно независни и стога чине базу тангентног простора. Наредна теорема сумира претходну дискусију и успоставља основну везу између координата и тангентних вектора.

Теорема 2.3. *Нека је M n-многострукост, а (U,φ) карта у $p \in M$ са $x_i = \pi_i\circ\varphi$. Тада парцијални изводи $(\partial_1)_p, \ldots, (\partial_n)_p$ чине базу за T_pM и формула* (2.1) *важи за $X \in T_pM$.*

Вратимо се на почетак приче где смо имали глатку криву $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, карту (U,φ) у $p = \gamma(0)$ и везу $\Phi\colon(\varphi\circ\gamma)'(0) \mapsto \gamma'(0)$ која не зависи од избора еквивалентне криве. Раније смо приметили да је $\gamma'(0)$ диференцирање у p, односно $\gamma'(0) \in T_pM$.

Пресликавање Φ је инјективно јер $(\varphi\circ\gamma_1)'(0) \neq (\varphi\circ\gamma_2)'(0)$ значи да постоји неко $1 \leqslant i \leqslant n$ такво да је $(\pi_i\circ\varphi\circ\gamma_1)'(0) \neq (\pi_i\circ\varphi\circ\gamma_2)'(0)$, односно $(\gamma_1'(0))(x_i) \neq (\gamma_2'(0))(x_i)$, одакле следи $\gamma_1'(0) \neq \gamma_2'(0)$. Пресликавање Φ је такође и сурјективно јер произвољно $X \in T_pM$ по (2.1) има облик $X = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\partial_i)_p$ за неке $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. То нам омогућава да за мало $\varepsilon > 0$ конструишемо криву $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ са $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$, за коју важи

$$(\gamma'(0))(f) = (f\circ\gamma)'(0) = (f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))\cdot(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = X(f).$$

На овај начин показали смо да се T_pM може поистоветити са класама еквиваленције глатких кривих које пролазе кроз тачку p.

2.2 Тангентна пресликавања

Основна идеја диференцијалног рачуна је апроксимација глатких објеката линеарним објектима. Тангентни простор T_pM је линеарна апроксимација многострукости M у тачки $p \in M$. Наредна идеја је апроксимирати глатко пресликавање између многострукости линеарном трансформацијом тангентних простора.

Нека су M и N многострукости, а $f\colon M \to N$ глатко пресликавање. За $X \in T_pM$ и $h \in \mathfrak{F}(N)$ природно можемо поставити линеарно пресликавање $T_pf(X)\colon \mathfrak{F}(N) \to \mathbb{R}$ са

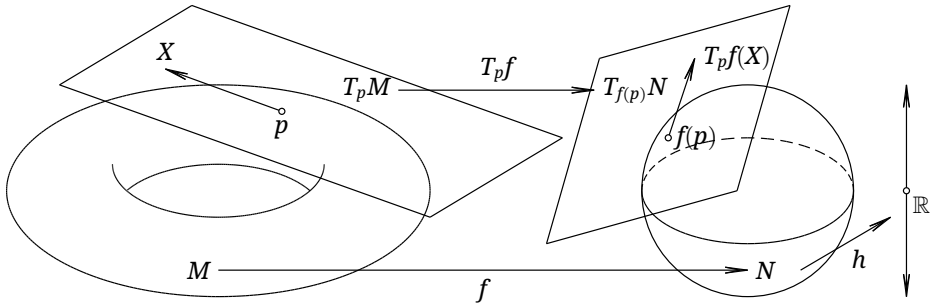
$$(T_pf(X))(h) = X(h \circ f).$$

Штавише, за $h_1, h_2 \in \mathfrak{F}(N)$ је

$$\begin{aligned} T_pf(X)(h_1h_2) &= X((h_1h_2) \circ f) = X((h_1 \circ f)(h_2 \circ f)) = (h_1 \circ f)(p)X(h_2 \circ f) + (h_2 \circ f)(p)X(h_1 \circ f) \\ &= h_1(f(p))T_pf(X)(h_2) + h_2(f(p))T_pf(X)(h_1), \end{aligned}$$

одакле следи Лајбницовост у тачки $f(p)$, док је линеарност очигледна. Можемо закључити да је $T_pf(X)$ диференцирање у тачки $f(p) \in N$, односно да важи $T_pf(X) \in T_{f(p)}N$.

Претходни резултат нам омогућава да за глатко $f\colon M \to N$ дефинишемо ***тангентно пресликавање*** од f у тачки $p \in M$ са $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ и $T_pf(X)(h) = X(h \circ f)$, где је $X \in T_pM$ и $h \in \mathfrak{F}(N)$. Тангентно пресликавање T_pf је линеарно, а вреди напоменути да га неки аутори зову ***диференцијал*** од f у p, док се користе и ознаке df_p, f'_p и D_pf.



Пример 2.1. Тангентно пресликавање идентичког пресликавања $\mathbb{1}_M\colon M \to M$ у некој тачки $p \in M$ је идентичко пресликавање $\mathbb{1}_{T_pM}\colon T_pM \to T_pM$ јер за $X \in T_pM$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$ важи $((T_p(\mathbb{1}_M))(X))(f) = X(f \circ \mathbb{1}_M) = X(f)$. △

Извод сложене функције може се једноставно уопштити за многострукости, односно тангентно пресликавање композиције једнако је композицији тангентних пресликавања.

Лема 2.4. *Ако су $f\colon M \to N$ и $h\colon N \to P$ глатка пресликавања између многострукости, тада за свако $p \in M$ важи $T_p(h \circ f) = T_{f(p)}h \circ T_pf$.*

Доказ. Резултат директно следи из праволинијског рачуна за $X \in T_pM$ и $l \in \mathfrak{F}(P)$, где добијамо $T_p(h \circ f)(X)(l) = X(l \circ h \circ f) = T_pf(X)(l \circ h) = (T_{f(p)}h(T_pf(X)))(l)$. □

Као последицу имамо да дифеоморфизам између многострукости индукује изоморфизам између одговарајућих векторских простора.

Лема 2.5. *Ако је $f\colon M \to N$ дифеоморфизам између многострукости и $p \in M$, тада је $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ изоморфизам између векторских простора и $(T_pf)^{-1} = T_{f(p)}(f^{-1})$.*

Доказ. Како су f и f^{-1} глатка, то $\mathbb{1}_{T_pM} = T_p(\mathbb{1}_M) = T_p(f^{-1} \circ f) = T_{f(p)}(f^{-1}) \circ T_pf$ важи по Леми 2.4, а слично добијамо и $\mathbb{1}_{T_{f(p)}N} = T_{f(p)}(\mathbb{1}_N) = T_{f(p)}(f \circ f^{-1}) = T_pf \circ T_{f(p)}(f^{-1})$. □

Директна последица претходне леме је глатка верзија Теореме о инваријантности димензије (Теорема A.5), која каже да m-многострукост и n-многострукост не могу бити дифеоморфне, осим у случају $m = n$. Оригиналну теорему (кад реч дифеоморфне заменимо са хомеоморфне) није тако лако доказати, али сада видимо да нам она није неопходна за нашу теорију глатких многострукости.

Ако је U отворена подмногострукост многострукости M са инклузијом $\imath$, како $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ и $\imath \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ суштински представљају исту криву, очекујемо да је тангентно пресликавање инклузије изоморфизам између одговарајућих тангентних простора.

Лема 2.6. *Нека је $U \subseteq M$ отворен подскуп са инклузијом $\imath\colon U \hookrightarrow M$. За свако $p \in U$, тангентно пресликавање $T_p\imath\colon T_pU \to T_pM$ је изоморфизам.*

Доказ. За $f \in \mathfrak{F}(U)$, по Леми 1.18 постоји продужење $F \in \mathfrak{F}(M)$ подржано у U које се слаже са f на некој околини тачке p. Ако је $T_p\imath(X) = 0 \in T_pM$ за неко $X \in T_pU$, онда је по Леми 2.2 $Xf = X(F\restriction_U) = X(F \circ \imath) = ((T_p\imath)(X))(F) = 0$ за свако $f \in \mathfrak{F}(U)$, што даје $X = 0$ и доказује да је $T_p\imath$ инјективно. Како је $\dim U = \dim M$ то је $T_p\imath$ бијекција, те самим тим и изоморфизам. □

Пример 2.2. Нека су M и N многострукости, а $\pi_M\colon M \times N \to M$ и $\pi_N\colon M \times N \to N$ канонске пројекције производа $M \times N$. За свако $(p,q) \in M \times N$, можемо дефинисати пресликавање $\pi\colon T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$ са $\pi(X) = (T_{(p,q)}\pi_M(X), T_{(p,q)}\pi_N(X))$. У супротном смеру, можемо дефинисати пресликавање $\theta\colon T_pM \times T_qN \to T_{(p,q)}(M \times N)$ са $\theta(Y,Z) = T_p\mu(Y) + T_q\nu(Z)$ где је $\mu\colon M \to M \times N$ дато са $\mu(x) = (x,q)$, а $\nu\colon N \to M \times N$ дато са $\nu(x) = (p,x)$. Рачун нам даје

$$\begin{aligned}\pi \circ \theta(Y,Z) &= (T_{(p,q)}\pi_M(T_p\mu(Y) + T_q\nu(Z)), T_{(p,q)}\pi_N(T_p\mu(Y) + T_q\nu(Z))) \\ &= (T_p(\pi_M \circ \mu)(Y) + T_q(\pi_M \circ \nu)(Z), T_p(\pi_N \circ \mu)(Y) + T_q(\pi_N \circ \nu)(Z)) = (Y,Z),\end{aligned}$$

одакле добијамо да важи $\pi \circ \theta = \mathbb{1}_{T_pM \times T_qN}$, те можемо закључити да је π сурјективно, а како је $\dim(T_{(p,q)}(M \times N)) = \dim(T_pM \times T_qN) = \dim M + \dim N$, то је π изоморфизам векторских простора. △

У наредна два примера наводимо неке специјалне случајеве у којима је тангентно пресликавање једнако нули.

Пример 2.3. Ако је $f\colon M \to N$ константно пресликавање, онда је за $h \in \mathfrak{F}(N)$ и $h \circ f$ константно, те због Леме 2.1 за свако $p \in M$ и $X \in T_pM$ важи $(T_pf(X))(h) = X(h \circ f) = 0$. Зато за свако $p \in M$ и константно пресликавање f имамо $T_pf = 0$. △

Пример 2.4. Претпоставимо да $f \in \mathfrak{F}(M)$ има локални екстремум (минимум или максимум) у тачки $p \in M$, тада за глатку криву $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ за коју је $\gamma(0) = p$ и свако $h \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ имамо $(T_pf(\gamma'(0)))(h) = \gamma'(0)(h \circ f) = (h \circ f \circ \gamma)'(0) = h'(f(p))(f \circ \gamma)'(0) = 0$, одакле следи $T_pf = 0$. △

Иако до сада тангентни простори и тангентна пресликавања изгледају прилично апстрактно, у локалним координатама ствари постају практичније. Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између m-многострукости M и n-многострукости N. Нека је (U,φ) карта у $p \in M$ са $x_j = \pi_j \circ \varphi$ за $1 \leqslant j \leqslant m$, а (V,ψ) карта у $f(p) \in N$ са $y_i = \pi_i \circ \psi$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. На основу формуле (2.1) за свако $1 \leqslant j \leqslant m$ важи

$$T_pf\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n}\left(T_pf\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)(y_i)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}. \tag{2.2}$$

Матрица тангентног пресликавања T_pf у односу на ове координатне базе је

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(y_n \circ f)}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial(y_n \circ f)}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant m}$$

и зовемо је ***Јакобијева матрица***[4] (или ***Јакобијан матрица***) од f у тачки p у односу на карте φ и ψ.

[4] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), немачки математичар

Како за елементе Јакобијеве матрице важи

$$\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial(\pi_i \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial \pi_j}(\varphi(p)),$$

видимо да је тангентно пресликавање заправо извод координатне репрезентације у одговарајућој тачки, $T_p f = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$, као и да је $T_p f = f'(p)$ у случају да је f пресликавање између отворених подскупова еуклидских простора.

Посебно уколико је $f = \mathbb{1}_M \colon M \to M$ добијамо формулу

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p, \tag{2.3}$$

која показује како се променом карте мењају координате, док је Јакобијева матрица у овом случају заправо Јакобијева матрица функције преласка $\psi \circ \varphi^{-1}$ у тачки $\varphi(p)$.

Пример 2.5. Функција преласка између поларних и стандардних координата у одговарајућим отвореним подскуповима равни је дата са $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Нека је $p \in \mathbb{R}^2$ дато поларним координатама $(r, \theta) = (3, \pi/2)$ и нека је $X \in T_p\mathbb{R}^2$ тангентни вектор чија је поларна репрезентација $X = 2(\partial/\partial r)_p - (\partial/\partial\theta)_p$. Конкретним рачуном по формули (2.3) имамо

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p &= \frac{\partial x}{\partial r}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial y}{\partial r}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p = \cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \\
\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p &= \frac{\partial x}{\partial \theta}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial y}{\partial \theta}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p = -3\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + 3\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p = -3\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p,
\end{aligned}$$

одакле добијамо $X = 2(\partial/\partial r)_p - (\partial/\partial\theta)_p = 3(\partial/\partial x)_p + 2(\partial/\partial y)_p$. △

Пример 2.6. Важно је приметити да координатни вектор $(\partial_i)_p$ тангентног простора T_pM не зависи само од конкретне координатне функције x_i, већ од целокупног координатног система, јер се извод добија диференцирањем у односу на x_i али док су преостале координате фиксиране. Нека (x, y) означава стандардне координате у $\mathbb{R}^2$, док су нове координате $(\bar{x}, \bar{y})$ дате са $\bar{x} = x$ и $\bar{y} = y + x$. Тада је

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)_p \neq \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)_p,$$

што се разликује у свакој тачки $p \in \mathbb{R}^2$. △

2.3 Субмерзије и имерзије

Нека је $f \colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости. Како тангентно пресликавање $T_p f \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ представља најбољу линеарну апроксимацију од f у тачки $p \in M$, то изучавањем алгебарских особина пресликавања $T_p f$ можемо доста тога закључити о самом f. Најважнија карактеристика тангентног пресликавања (као линеарног пресликавања) је његов ранг, јер он не зависи од избора базе. ***Ранг пресликавања*** f у тачки $p \in M$ је ранг тангентног пресликавања,

$$\operatorname{rang}_p f = \operatorname{rang} T_p f = \dim \operatorname{Im}(T_p f).$$

Ако ранг пресликавања не зависи од избора тачке $p \in M$, кажемо да је f ***константног ранга***, а ранг обележавамо са $\operatorname{rang} f$.

Ранг линеарног пресликавања има природна горња ограничења јер никад није већи од димензија како домена ($\operatorname{rang}_p f \leqslant \dim M$), тако и кодомена ($\operatorname{rang}_p f \leqslant \dim N$). Уколико се достигне горња граница за $\operatorname{rang}_p f$ кажемо да је f ***пуног ранга у*** p, а ако је додатно константног ранга кажемо да је f ***пуног ранга***. Најважнија пресликавања која изучавамо су константног ранга, а међу њима она која су пуног ранга.

У случају да је $\operatorname{rang} f = \dim M$, односно да је за свако $p \in M$ пресликавање $T_p f$ инјективно кажемо да је f ***имерзија*** (*immersion*) или ***потапање*** и тада се f локално понаша као инјективно пресликавање. У случају да је $\operatorname{rang} f = \dim N$, односно да је за свако $p \in M$ пресликавање $T_p f$ сурјективно кажемо да је f ***субмерзија*** (*submersion*) и тада се f локално понаша као сурјективно пресликавање. Напоменимо да уколико је неко пресликавање имерзија или субмерзија, у складу са нашом дефиницијом увек подразумевамо да је оно глатко.

Прототип имерзије је инклузија $\imath\colon \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ еуклидског простора у еуклидски простор веће димензије ($m \leqslant n$) дата са $\imath(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Прототип субмерзије је пројекција $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ еуклидског простора на еуклидски простор мање димензије ($m \geqslant n$) дата са $\pi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$. Штавише, испоставља се (Теорема 2.10) да је свака имерзија локално инклузија, док је свака субмерзија локално пројекција.

Пример 2.7. Свака регуларна крива γ на многострукости је имерзија јер се њен извод никад не анулира што даје $\operatorname{rang} \gamma = 1$. Посебно, $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ дата са $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ је имерзија, али иако $T_t\gamma$ јесте инјективно за свако $t \in \mathbb{R}$, γ није инјективно. △

Лема 2.7. *Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости и нека је $p \in M$. Ако је $T_p f$ инјективно онда p има околину U такву да је $f\restriction_U$ имерзија. Ако је $T_p f$ сурјективно онда p има околину U такву да је $f\restriction_U$ субмерзија.*

Доказ. Нека је $\dim M = m$ и $\dim N = n$. Ако изаберемо карту (U, φ) у $p \in M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$, свака од хипотеза значи да је Јакобијева матрица од f у односу на φ и ψ пуног ранга у p. Посматрајмо непрекидно пресликавање $T\colon U \to \mathbb{R}^{n\times m}$ дато са $T(p) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$. Како матрице пуног ранга по Примеру 1.13 чине отворен подскуп од $\mathbb{R}^{n\times m}$, то њихова инверзна слика при T даје околину од p где је Јакобијева матрица од f пуног ранга. □

Теорема о инверзној функцији из реалне анализе (Теорема A.30) даје довољан услов да глатка функција буде инвертибилна на околини неке тачке из њеног домена. ***Теорема о инверзној функцији*** може се уопштити у терминима глатких пресликавања између многострукости.

Теорема 2.8. *Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости. Ако је $T_p f$ инвертибилно за неку тачку $p \in M$, тада постоји околина $U \subseteq M$ од p таква да је $f\restriction_U\colon U \to f(U)$ дифеоморфизам.*

Доказ. Како је $T_p f$ бијекција, то је $\dim M = \dim N = n$. Изаберимо карту (U, φ) центрирану у $p \in M$ и карту (V, ψ) центрирану у $f(p) \in N$ тако да је $f(U) \subseteq V$, а $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. Како су φ и ψ дифеоморфизми, то је $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(0) = T_0(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = T_{f(p)}\psi \circ T_p f \circ T_0\varphi^{-1}$ инвертибилно. Теорема A.30 гарантује околину $W \subseteq \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ од 0 такву да је рестрикција $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\restriction_W$ дифеоморфизам на своју слику, те је рестрикција од f на $\varphi^{-1}(W)$ дифеоморфизам на своју слику као композиција дифеоморфизама. □

Пресликавање $f\colon M \to N$ између многострукости је ***локални дифеоморфизам*** ако свака тачка $p \in M$ има околину U такву да је $f(U)$ отворен у N, а $f\restriction_U\colon U \to f(U)$ дифеоморфизам. Кључне особине локалних дифеоморфизама виде се у наредној теореми.

Теорема 2.9. *Глатко пресликавање $f\colon M \to N$ је локални дифеоморфизам ако и само ако је и имерзија и субмерзија.*

Доказ. Ако је f локални дифеоморфизам то за свако $p \in M$ имамо околину $U \ni p$ такву да је $f\restriction_U\colon U \to f(U)$ дифеоморфизам, $T_p(f\restriction_U)\colon T_pU \to T_{f(p)}f(U)$ је изоморфизам по Леми 2.5, али је то и $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ по Леми 2.6, што доказује да је f и имерзија и субмерзија. Обратно, уколико је f имерзија и субмерзија то је T_pf изоморфизам за свако $p \in M$, те Теорема 2.8 даје околину тачке p на којој је рестрикција од f дифеоморфизам на своју слику. □

Уколико знамо да су многострукости M и N истих димензија, довољно је да имамо услов имерзије или субмерзије за f, јер је онда други услов директно испуњен и f је локални дифеоморфизам по Теореми 2.9.

Пример 2.8. Пресликавање $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$ дато са $\psi(t) = (\cos t, \sin t)$ има координатне репрезентације (у односу на пројекције хемисфера) дате са $t \mapsto \cos t$ за тачке у којима је $\sin t \neq 0$ и $t \mapsto \sin t$ за тачке у којима је $\cos t \neq 0$, те је ψ локални дифеоморфизам. За произвољно $a \in \mathbb{R}$ рестрикција $\psi\restriction_{(a,a+2\pi)}\colon (a, a+2\pi) \to \mathbf{S}^1 \setminus \{\psi(a)\}$ је хомеоморфизам, а самим тим и дифеоморфизам. ***Угаона функција*** на $U \subset \mathbf{S}^1$ је рестрикција инверза тог дифеоморфизма $\theta \in \mathfrak{F}(U)$, те је (U, θ) по Примеру 1.28 карта круга $\mathbf{S}^1$ са стандардном глатком структуром. Уколико идентификујемо $\mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, тада за угаону функцију важи $e^{i\theta(z)} = z$ за свако $z \in U$. Сада је лако видети да је пресликавање $f\colon \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ дато са $f(z) = z^2$ глатко, јер у новим картама има репрезентацију дату са $t \mapsto 2t + 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$. △

Пример 2.9. Нека је $\pi\colon \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ канонско количничко пресликавање које шаље x у његову класу еквиваленције $[x] = \{x, -x\}$, односно $\pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$. Ако искористимо стандардне карте φ_i на $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ и њима одговарајуће карте на $\mathbf{S}^n$ које су пројекције хемисфера на равни $x_i = 0$, добијамо координатне репрезентације које су до на знак једнаке дифеоморфизму између $\mathbf{B}^n$ и $\mathbb{R}^n$ из Примера 1.30, те је π локални дифеоморфизам, али није дифеоморфизам јер није бијекција. Локални дифеоморфизам је непрекидно пресликавање, те како је $\mathbf{S}^n$ компактан, онда је то и $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$. △

У случају да је глатко пресликавање константног ранга оно се може локално записати у једноставној канонској форми променом координата, што видимо у ***теореми о константном рангу***.

Теорема 2.10. *Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање константног ранга $r = \operatorname{rang} f$ између многострукости M и N. За свако $p \in M$ постоји карта (U, φ) центрирана у $p \in M$ и карта (V, ψ) центрирана у $f(p) \in N$ тако да је $f(U) \subseteq V$ и у којима f има координатну репрезентацију облика $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$.*

Доказ. За свако $p \in M$ постоји карта (U_1, φ_1) центрирана у $p \in M$ и карта (V_1, ψ_1) центрирана у $f(p) \in N$ тако да је $f(U_1) \subseteq V_1$ и $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ глатко. Јакобијева матрица од f у тачки p има компоненте облика

$$\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial(\pi_i \circ \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})}{\partial \pi_j}(0)$$

за $1 \leqslant i \leqslant n = \dim N$, $1 \leqslant j \leqslant m = \dim M$. Како је $\operatorname{rang}_p f = r$, то можемо испермутовати одговарајуће координате, односно врсте и колоне Јакобијеве матрице тако да у горњем левом ћошку добијемо инвертибилну квадратну подматрицу реда r. Формално, пермутовање координата је дифеоморфизам који нас по Леми 1.4 доводи до

нових карата (U_1, φ_2) и (V_1, ψ_2), у односу на које f има координатну репрезентацију $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$, тако да је подматрица Јакобијеве матрице од f у p коју чине компоненте

$$\frac{\partial(\pi_i \circ \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1})}{\partial \pi_j}(0)$$

за $1 \leqslant i, j \leqslant r$, инвертибилна. Посматрајмо функцију $\theta_1 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ дефинисану са

$$\theta_1(a_1, \ldots, a_m) = (\pi_1 \circ \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(a_1, \ldots, a_m), \ldots, \pi_r \circ \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(a_1, \ldots, a_m), a_{r+1}, \ldots, a_m),$$

чија Јакобијева матрица у тачки $0 \in \mathbb{R}^m$ је блок горња троугаона матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \pi_1 \psi_2 f \varphi_2^{-1}}{\partial \pi_1}(0) & \cdots & \frac{\partial \pi_1 \psi_2 f \varphi_2^{-1}}{\partial \pi_r}(0) & \frac{\partial \pi_1 \psi_2 f \varphi_2^{-1}}{\partial \pi_{r+1}}(0) & \cdots & \frac{\partial \pi_1 \psi_2 f \varphi_2^{-1}}{\partial \pi_m}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \pi_r \psi_2 f \varphi_2^{-1}}{\partial \pi_1}(0) & \cdots & \frac{\partial \pi_r \psi_2 f \varphi_2^{-1}}{\partial \pi_r}(0) & \frac{\partial \pi_r \psi_2 f \varphi_2^{-1}}{\partial \pi_{r+1}}(0) & \cdots & \frac{\partial \pi_r \psi_2 f \varphi_2^{-1}}{\partial \pi_m}(0) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Како на дијагонали имамо раније описану квадратну подматрицу ранга r, као и јединичну подматрицу реда $m - r$, то је $\operatorname{rang}_0 \theta_1 = m$, те по Теореми A.30 имамо дифеоморфизам на некој околини $W_1 \ni 0$. У питању је легитимна промена координата која нас по Леми 1.4 доводи до нове карте (U_3, φ_3) у $p \in M$, где је $U_3 = U_1 \cap \varphi_2^{-1}(W_1)$ и $\varphi_3 = \theta_1 \circ \varphi_2 \restriction_{U_3}$, а која је такође центрирана у p због $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(0) = 0$. Нова координатна репрезентација за f је облика

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_3^{-1}(b_1, \ldots, b_r, a_{r+1}, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_n),$$

где је $b_i = \pi_i \circ \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(a_1, \ldots, a_m)$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Због тога је Јакобијева матрица од f у односу на нове карте блок доња троугаона матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial b_{r+1}}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial b_{r+1}}{\partial b_r} & \frac{\partial b_{r+1}}{\partial a_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial b_{r+1}}{\partial a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_n}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial b_n}{\partial b_r} & \frac{\partial b_n}{\partial a_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial b_n}{\partial a_m} \end{pmatrix}.$$

Како на дијагонали имамо најпре јединичну подматрицу реда $r = \operatorname{rang} f$, то преостаје нула подматрица, што значи да $b_{r+1}, \ldots, b_n$ не зависе од $a_{r+1}, \ldots, a_m$, већ само од $b_1, \ldots, b_r$. То нам омогућава да уведемо нове промене координата $\theta_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ са

$$\theta_2(b_1, \ldots, b_r, c_{r+1}, \ldots, c_n) = (b_1, \ldots, b_r, c_{r+1} - b_{r+1}(b_1, \ldots, b_r), \ldots, c_n - b_n(b_1, \ldots, b_r)),$$

на некој околини $W_2 \ni 0$ јер је одговарајућа Јакобијева матрица блок доња троугаона матрица са јединичним матрицама на дијагонали. Тако долазимо до нове карте (V, ψ) која је центрирана у $f(p) \in N$, где је $V = V_1 \cap \psi_2^{-1}(W_2)$ и $\psi = \theta_2 \circ \psi_2 \restriction_V$, те за додатно $U = U_3 \cap f^{-1}(V)$ и $\varphi = \varphi_3 \restriction_U$ добијамо тражену координатну репрезентацију

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_m) = (b_1, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0),$$

што завршава доказ. □

Пример 2.10. Теорема о константном рангу често се примењује на имерзије и субмерзије. На пример, она показује да свака субмерзија локално изгледа као пројекција у односу на погодно изабране карте. Како је пројекција отворено пресликавање, док су карте дифеоморфизми, закључујемо да је свака субмерзија отворено пресликавање. △

Пример 2.11. Да ли постоји субмерзија $f\colon \mathbf{S}^m \to \mathbb{R}^n$ за неке $m, n \in \mathbb{N}$? Домен $M = \mathbf{S}^m$ је компактан, те за глатко $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ посматрамо $\pi_1 \circ f\colon M \to \mathbb{R}$, где је π_1 пројекција на прву компоненту, што достиже максимум на M у некој тачки $p \in M$. По Примеру 2.4 важи $0 = T_p(\pi_1 \circ f) = T_{f(p)}\pi_1 \circ T_p f$, али $T_{f(p)}\pi_1$ је сурјективно, одакле $T_p f$ није сурјективно, а самим тим f не може бити субмерзија.

Штавише, свако непрекидно пресликавање са компактним доменом је затворено (Лема А.2), док је субмерзија по Примеру 2.10 отворено пресликавање. Ако је $f\colon \mathbf{S}^m \to \mathbb{R}^n$ субмерзија, онда је слика од $\mathbf{S}^m$ непразан отворен и затворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, одакле следи $f(\mathbf{S}^m) = \mathbb{R}^n$, а како он није компактан то субмерзија f не постоји. △

Пример 2.12. Нека је $f\colon \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ дефинисано са $f((x,y), r) = (e^r x, e^r y)$. Ако искористимо угаону функцију θ из Примера 2.8 као карту круга $\mathbf{S}^1$ то добијамо координатну репрезентацију $f \circ (\theta \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}})^{-1}(t, r) = (e^r \cos t, e^r \sin t)$. Зато је f глатко са Јакобијевом матрицом

$$T_{(t,r)}(f \circ (\theta \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}})^{-1}) = \begin{pmatrix} -e^r \sin t & e^r \cos t \\ e^r \cos t & e^r \sin t \end{pmatrix},$$

чија је детерминанта $-e^{2r} \neq 0$, што даје $\operatorname{rang} f = 2$, те је f субмерзија и локални дифеоморфизам. △

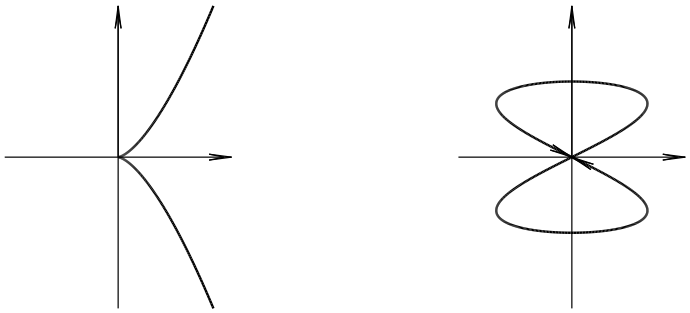
Тополошко смештање је хомеоморфизам на његову слику. Експлицитније речено, у питању је пресликавање $f\colon M \to N$ које даје хомеоморфизам између тополошких простора M и $f(M)$, где $f(M) \subseteq N$ носи релативну топологију наслеђену из N. Као последица, свако тополошко смештање је инјективно и непрекидно.

Смештање (*embedding*) или ***улагање*** је имерзија која је такође тополошко смештање. Другим речима, смештање је инјективна (глатка) имерзија чији домен је дифеоморфан њеној слици. Овај посебан случај имерзије је прилично важан и омогућава нам да уведемо појам подмногострукости.

Пример 2.13. По теореми о константном рангу свака имерзија $f\colon M \to N$ има координатну репрезентацију у форми инклузије $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Зато за свако $p \in M$ постоји околина $U \subseteq M$ од p таква да је $f\restriction_U$ смештање, што значи да свака имерзија јесте локално смештање. △

Пример 2.14. Нека је $f\colon M \to N$ инјективна имерзија. Одговор на питање да ли је f смештање своди се на проверу да ли је $f^{-1}\colon f(M) \to M$ непрекидно. Уз додатни услов да је f отворено или затворено пресликавање, то је очигледно испуњено. Уколико је M компактно, f је затворено (Лема А.2), те је смештање. Уколико је $\dim M = \dim N$ онда је f локални дифеоморфизам (Теорема 2.9), те је f отворено и самим тим смештање. △

Пример 2.15. Глатко пресликавање $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ дато са $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ је тополошко смештање. Међутим, иако јесте инјективно, оно није имерзија због $\gamma'(0) = 0$, односно $\operatorname{rang}_0 \gamma = 0$. △



Пример 2.16. Посматрајмо пресликавање $\gamma\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$ дато са $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin t)$. Како за свако $t \in (-\pi,\pi)$ имамо $\gamma'(t) \neq 0$, пресликавање γ је инјективна имерзија. Међутим, његова слика $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 4y^2(1-y^2)\}$ је компактан скуп у $\mathbb{R}^2$, али како домен није компактан то γ није тополошко смештање, а самим тим није ни смештање. $\triangle$

Пример 2.17. Нека је $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ намотавање торуса дато са

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i c t}) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \cos 2\pi c t, \sin 2\pi c t),$$

за неки ирационалан $c \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Како се $\gamma'(t)$ никад не поништава, γ је имерзија. Такође је и инјективно јер $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ повлачи и $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$ и $c(t_1 - t_2) \in \mathbb{Z}$, те добијамо $t_1 = t_2$. На основу Дирихлеове[5] теореме о апроксимацији (Лема А.33), за свако $\varepsilon > 0$ постоје цели бројеви $m, n \in \mathbb{Z}$ такви да је $|cn - m| < \varepsilon$. Како је дужина дужи краћа од кружног лука имамо

$$|\gamma(n) - \gamma(0)| = |(e^{2\pi i n}, e^{2\pi i c n}) - (1,1)| = |e^{2\pi i c n} - e^{2\pi i m}| \leqslant 2\pi|cn - m| < 2\pi\varepsilon,$$

те је $\gamma(0)$ тачка нагомилавања од $\gamma(\mathbb{Z})$. Међутим, $\mathbb{Z}$ нема тачака нагомилавања у $\mathbb{R}$ што доказује да γ није хомеоморфизам на своју слику $\gamma(\mathbb{R})$, те γ није смештање.

Други аргумент је да $\gamma(\mathbb{R})$ није локално путно повезан јер у кугли имамо пребројиво много паралелних правих које је сенчају, од којих је свака за себе (локална) компонента путне повезаности.

Трећи аргумент је да слика смештања не може бити густа, док није тешко показати да је слика $\gamma(\mathbb{R})$ густа у $\mathbf{T}^2$. Нека је $f\colon M \to N$ смештање које није субмерзија. Теорема о константном рангу даје карту (V,ψ) на N, где је $P = V \cap f(M) \neq \emptyset$ такво да важи $\psi(P) \subseteq \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Међутим, онда отворен скуп $\psi^{-1}(\psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{0\})))$ лежи у V и не сече P, те $f(M)$ није густ у N. $\triangle$

2.4 Подмногострукости

Многе познате многострукости природно се јављају као подскупови других многострукости. Грубо говорећи, подмногострукост неке многострукости M је подскуп $P \subseteq M$ који има сопствену структуру многострукости. Та структура стиче се из M преко одговарајуће инклузије која има неке лепе особине. ***Подмногострукост*** од многострукости M је подскуп $P \subseteq M$ који је многострукост таква да је одговарајућа инклузија $\imath\colon P \hookrightarrow M$ смештање. Дакле, подмногострукост има релативну топологију наслеђену из многострукости која је садржи и глатку структуру у односу на коју је инклузија смештање.

Ако је P подмногострукост од M, тада је M ***амбијентна многострукост*** за P, док је разлика димензија $\dim M - \dim P$ ***кодимензија*** од P у M. Подмногострукост

[5] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), немачки математичар

кодимензије 1 зовемо ***хиперповрш***. Напоменимо да за овако дефинисане подмногострукости неки аутори користе изразе ***смештена подмногострукост*** и ***регуларна подмногострукост***. У релаксиранијој варијанти када је одговарајућа инклузија $\imath\colon P \hookrightarrow M$ имерзија (не нужно смештање), кажемо да је P ***потопљена подмногострукост***.

Пример 2.18. У Примеру 1.20 смо показали да је инклузија $\imath\colon \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ глатка. Овог пута згодније је користити обичне пројекције из Примера 1.14, где је координатна репрезентација инклузије дата са

$$\imath \circ \varphi_{\pm i}^{-1}(y_1,\ldots,y_n) = (y_1,\ldots,y_{i-1},\pm\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2},y_i,\ldots,y_n),$$

те Јакобијева матрица садржи $n \times n$ идентичку подматрицу, одакле је $T_p\imath$ инјективно за свако $p \in \mathbf{S}^n$. Дакле, $\imath$ је инјективна имерзија, док је $\mathbf{S}^n$ компактан (затворен и ограничен у $\mathbb{R}^{n+1}$), те је $\imath$ смештање по Примеру 2.14, одакле следи да је $\mathbf{S}^n$ подмногострукост од $\mathbb{R}^{n+1}$. △

Пример 2.19. Подмногострукости кодимензије 0 многострукости M су тачно отворене подмногострукости од M. Ако је $U \subseteq M$ отворена подмногострукост са инклузијом $\imath\colon U \hookrightarrow M$, тада је очигледно да је $\imath$ смештање (U има релативну топологију, док је координатна репрезентација од $\imath$ идентичко), као и да је кодимензија 0, односно $\dim U = \dim M$. Обратно, ако је $\imath\colon U \hookrightarrow M$ смештање са кодимензијом 0, оно је имерзија, али и субмерзија, те по Теореми 2.9 оно је локални дифеоморфизам, из чега следи да је U отворен подскуп од M. △

Подмногострукости често налазимо у кодомену неког смештања, о чему говори наредна теорема.

Теорема 2.11. *Ако је $f\colon M \to N$ смештање између многострукости, тада је $P = f(M)$ са релативном топологијом тополошка многострукост и има јединствену глатку структуру са којом постаје подмногострукост од N тако да је f дифеоморфизам између M и P.*

Доказ. Како је f смештање, оно је хомеоморфизам између M и P. Свакој карти (U,φ) на M додељујемо карту $(f(U),\varphi\circ f^{-1})$ на P, што одређује јединствену глатку структуру такву да је f одговарајући дифеоморфизам (Пример 1.29). Инклузија $P \hookrightarrow N$ је композиција $f\circ f^{-1}$ дифеоморфизма $f^{-1}\colon P \to M$ и смештања $f\colon M \to N$, те је смештање, што значи да је P подмногострукост од N. □

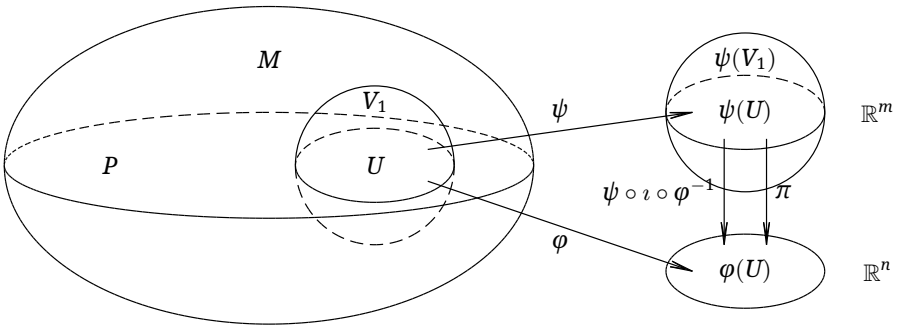
Пример 2.20. За неко фиксирано $p \in N$, пресликавање $f\colon M \to M \times N$ дато са $f(x) = (x,p)$ је смештање, те је ***кришка*** $M \times \{p\}$ подмногострукост од $M \times N$ која је дифеоморфна са M. △

Пример 2.21. Нека су M и N многострукости, а $f\colon U \to N$ глатко за отворен $U \subseteq M$. Тада је график $\Gamma(f) = \{(x,y) \in M \times N : x \in U, y = f(x)\}$ подмногострукост од $M \times N$. Пресликавање $\gamma\colon U \to M \times N$ дато са $\gamma(x) = (x,f(x))$ је глатко и важи $\gamma(U) = \Gamma(f)$. Из $\pi_M \circ \gamma = \mathbb{1}_U$ следи $T_{\gamma(x)}\pi_M \circ T_x\gamma = \mathbb{1}_{T_xM}$ за свако $x \in U$, те је $T_x\gamma$ инјективно, а γ имерзија. Инверз од $\gamma\colon U \to \Gamma(f)$ је непрекидно $\pi_M\restriction_{\Gamma(f)}$, те је γ хомеоморфизам, одакле је $\Gamma(f)$ подмногострукост од $M \times N$ дифеоморфна са U. △

Испоставља се да су све подмногострукости заправо кришке, што нас доводи до наредне теореме која представља алтернативну (и заправо најчешћу) дефиницију подмногострукости.

Теорема 2.12. *Ако је P подмногострукост димензије n од многострукости M, онда за сваку тачку $p \in P$ постоји карта (V,ψ) у $p \in M$ таква да је $\psi(V \cap P) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$.*

Доказ. Ако је $P \subseteq M$ подмногострукост димензије n, то је инклузија $\imath\colon P \hookrightarrow M$ смештање. Како је $\imath$ имерзија, по теореми о константном рангу (Теорема 2.10) за произвољно $p \in P$ постоје карте, (U, φ) центрирана у $p \in P$ и (V, ψ) центрирана у $p \in M$, тако да је $U = \imath(U) \subseteq V$ и $\psi \circ \imath \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$. Како је $\imath$ тополошко смештање, а $U \subseteq P$ отворен, постоји отворен $W \subseteq M$ такав да је $U = W \cap P$. Ако са $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ обележимо пројекцију на првих n координата, имамо $\varphi(U) = \pi \circ \psi(U)$, те је $C = \psi^{-1}((\mathbb{R}^n \setminus \varphi(U)) \times \{0\}) \subseteq V$ затворен дисјунктан са U. Ако ψ рестрикујемо на отворен $V_1 = V \cap W \setminus C$, добијамо $\psi(V_1 \cap P) = \psi(U \setminus C) = \psi(U) = \psi(V_1) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, те је $(V_1, \psi\restriction_{V_1})$ карта у $p \in M$ која задовољава тражени услов. □



Карте (V, ψ) на M за које важи $\psi(V \cap P) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ су ***кришка карте*** адаптиране за подскуп $P \subseteq M$ и оне природно индукују n-димензионе карте $(V \cap P, \psi_P)$ на P са $\psi_P = \pi \circ \psi$, где је $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ пројекција на првих n координата. Ако је (U, φ) друга кришка карта на M и $\varphi_P = \pi \circ \varphi$, имамо $\varphi_P \circ \psi_P^{-1} = \pi \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \jmath$, где је $\jmath(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$, што је глатко као композиција глатких пресликавања. Уколико у свакој тачки $p \in P$ постоји кришка карта, онда индуковане карте чине гладак атлас за P, а јасно је да преко њега P добија релативну топологију од M. Координатна репрезентација инклузије $\imath\colon P \hookrightarrow M$ је $\psi \circ \imath \circ \psi_P^{-1} = \jmath$ што је глатко, док Јакобијева матрица садржи $n \times n$ идентичку подматрицу, те је $\imath$ имерзија, а последично и смештање.

Дакле, кришка карте на P индукују природан атлас са којим P постаје подмногострукост од M. Међутим, испоставља се да је комплетан атлас подмногострукости једнозначно одређен.

Теорема 2.13. *Нека је M многострукост, $P \subseteq M$ и $n \in \mathbb{N}$. Ако за свако $p \in P$ постоји карта (V, ψ) у $p \in M$ таква да је $\psi(V \cap P) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, онда постоји јединствен комплетан атлас за P са којим постаје подмногострукост од M димензије n.*

Доказ. Нека је $\widetilde{P}$ подмногострукост од M која се састоји од скупа P и неког другог атласа тако да је инклузија $\widetilde{\imath}\colon \widetilde{P} \hookrightarrow M$ смештање. Та инклузија приликом рестрикције кодомена на $P = \widetilde{\imath}(\widetilde{P})$ постаје $\widetilde{\imath}_1\colon \widetilde{P} \hookrightarrow P$, где је $\imath \circ \widetilde{\imath}_1 = \widetilde{\imath}$. Како је $\widetilde{\imath}_1$ непрекидно (хомеоморфизам јер је $\widetilde{\imath}$ смештање), а $\psi_P \circ \widetilde{\imath}_1 \circ \varphi^{-1} = \pi \circ (\psi \circ \widetilde{\imath} \circ \varphi^{-1})$ глатко за карту (U, φ) на $\widetilde{P}$ и кришка карту (V, ψ) на M која индукује карту $(V \cap P, \psi_P)$ на P, то је $\widetilde{\imath}_1$ глатко по Леми 1.13. Како за $p \in P$ важи $T_p\widetilde{\imath} = T_p\imath \circ T_p\widetilde{\imath}_1$, а $T_p\widetilde{\imath}$ и $T_p\imath$ су инјективна, онда је такво и $T_p\widetilde{\imath}_1$, што значи да је $\widetilde{\imath}_1$ имерзија. Међутим због $\dim \widetilde{P} = \dim P$ оно је локални дифеоморфизам, а како је бијекција, онда је и дифеоморфизам, што значи да $\widetilde{P}$ и P имају исти комплетан гладак атлас. □

Теорема 2.11 проналази подмногострукости у кодомену глатког пресликавања, али можемо их приметити и у домену, јер су у пракси подмногострукости најчешће приказане као скуп решења једначина или система једначина.

Теорема 2.14. *Ако је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање константног ранга r, тада је за свако $q \in f(M)$, скуп нивоа $P = f^{-1}(q)$ подмногострукост од M кодимензије r.*

Доказ. По теореми о константном рангу, за свако $p \in P$ постоји карта (U, φ) центрирана у $p \in M$ и карта (V, ψ) центрирана у $q = f(p) \in N$, тако да f у односу на њих има репрезентацију облика $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. Како је $\varphi(U \cap P) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U) : x_1 = \dots = x_r = 0\} = \varphi(U) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-r})$, то Теорема 2.13 завршава доказ. □

Посебно, ако је f из претходне теореме субмерзија, то је скуп нивоа подмногострукост кодимензије $\dim N$. За тачку $p \in M$ кажемо да је ***регуларна тачка*** ако је $T_p f$ сурјективно, док у супротном кажемо да је ***критична тачка***. За тачку $q \in N$ кажемо да је ***регуларна вредност*** ако њена инверзна слика $f^{-1}(q)$ садржи само регуларне тачке. Скуп нивоа $f^{-1}(q)$ је ***регуларан скуп нивоа*** ако је q регуларна вредност од f.

Теорема 2.15. *Сваки регуларан скуп нивоа глатког пресликавања између многострукости је подмногострукост чија је кодимензија једнака димензији кодомена.*

Доказ. Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање и нека је $q \in N$ регуларна вредност. По Леми 2.7 скуп $U = \{p \in M : \operatorname{rang}_p f = \dim N\}$ је отворен у M и садржи $f^{-1}(q)$. Одатле је $f\restriction_U$ субмерзија, те је $f^{-1}(q)$ подмногострукост од U по Теореми 2.14. Композиција смештања $f^{-1}(q) \hookrightarrow U \hookrightarrow M$ је такође смештање, што доказује тврђење. □

Пример 2.22. Ако је функција $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$, тада је f субмерзија те је $\mathbf{S}^n = f^{-1}(1)$ подмногострукост од $\mathbb{R}^{n+1}$ димензије n. △

Пример 2.23. Размотримо подскуп $M = \{(x : y : z) \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2 : xy = z^2\} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ који је пре свега добро дефинисан јер $(tx)(ty) = (tz)^2$ за $t \neq 0$ важи ако и само ако је $xy = z^2$. Такође, лако је приметити да је $f\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \to \mathbb{R}$ добро дефинисано са

$$f(x : y : z) = \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

те да је $M = f^{-1}(0)$. У првој карти имамо глатко $f \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = (x - y^2)/(1 + x^2 + y^2)$ са Јакобијевом матрицом

$$(f \circ \varphi_1^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{(1+x^2+y^2)-2x(x-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2y(1+x^2+y^2)-2y(x-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-x^2+y^2+2xy^2}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2y(1+x+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$$

што је ранга 1 осим за $y = 0$ и $x = \pm 1$, односно за тачке $(1 : \pm 1 : 0) \notin M$. У другој карти имамо $f \circ \varphi_2^{-1}(x, y) = (x - y^2)/(1 + x^2 + y^2)$, са симетричним резултатом. У трећој карти имамо глатко $f \circ \varphi_3^{-1}(x, y) = (xy - 1)/(1 + x^2 + y^2)$ са Јакобијевом матрицом

$$(f \circ \varphi_3^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y(1+x^2+y^2)-2x(xy-1)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{x(1+x^2+y^2)-2y(xy-1)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y+2x-x^2y+y^3}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{x+2y-xy^2+x^3}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$$

што је ранга 1 осим за решење система $y + 2x - x^2y + y^3 = 0$ и $x + 2y - xy^2 + x^3 = 0$. Ако прву једначину помножимо са x, а другу са y и саберемо, добијамо $2(x^2 + xy + y^2) = 0$, што је могуће само за $x = y = 0$ које одговара тачки $(0 : 0 : 1) \notin M$. Дакле, f је субмерзија, осим у три конкретне тачке које не припадају M, а у сваком случају M је регуларни скуп нивоа и зато подмногострукост од $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$. △

Испоставља се да у свакој тачки регуларног скупа нивоа имамо лепо растављање тангентног простора.

Лема 2.16. *Ако је P регуларан скуп нивоа глатког пресликавања $f\colon M \to N$, тада за свако $p \in P$ важи $T_pP = \operatorname{Ker} T_p f$.*

Доказ. Нека је $\imath\colon P = f^{-1}(q) \hookrightarrow M$ природна инклузија. Како је $f\restriction_P = f \circ \imath$ константно једнако $q \in N$ добијамо $T_p f \circ T_p\imath = T_p f\restriction_P = 0$, одакле је $T_p\imath(T_pP) \leqslant \operatorname{Ker} T_p f \leqslant T_pM$. Потпростор T_pP има исту димензију као $\operatorname{Ker} T_p f$, те можемо закључити да су једнаки при природној идентификацији $T_p\imath(T_pP) \cong T_pP$. □

Концепт подмногострукости нам омогућава да глатком пресликавању између многострукости рестрикујемо домен или кодомен на њихове подмногострукости, при чему ће рестрикција остати глатка. Наравно, за рестрикцију домена то је очигледно јер имамо композицију глатког пресликавања и инклузије која је смештање.

Теорема 2.17. *Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање, а P подмногострукост од N, онда је рестрикција $f\colon M \to P$ такође глатка.*

Доказ. Ако је $f_1 : M \to P$ посматрана рестрикција, онда је $f = \imath \circ f_1$, где је инклузија $\imath\colon P \hookrightarrow N$ смештање. Координатна репрезентација $\psi_P \circ f_1 \circ \varphi^{-1} = \pi \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ је глатка за карту (U, φ) на M и кришка карту (V, ψ) на N која индукује карту $(V \cap P, \psi_P)$ на P, док је f_1 непрекидно јер је $\imath$ хомеоморфизам на своју слику. Зато је f_1 глатко по Леми 1.13. □

2.5 Векторска поља

У основи, векторско поље на многострукости M је пресликавање $p \mapsto X(p)$ које свакој тачки $p \in M$ додељује тангентни вектор $X(p) \in T_pM$. Како желимо да то додељивање буде глатко док p варира у M, потребно је да све тангентне просторе T_pM за $p \in M$ окупимо у јединствену заједничку многострукост. ***Тангентно раслојење*** многострукости M је дисјунктна унија тангентних простора од M,

$$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM = \bigcup_{p\in M} (\{p\} \times T_pM) = \bigcup_{p\in M} \{(p, X) : X \in T_pM\}.$$

Елемент тангентног раслојења TM можемо схватити као уређен пар (p, X), где је p тачка из M, а X тангентни вектор на M у p. Тангентно раслојење долази у пакету са природном пројекцијом $\pi\colon TM \to M$ дефинисаном са $\pi(p, X) = p$, која сваки тангентни вектор из T_pM шаље у његову основну тачку p. Напоменимо да је често погодно пар $(p, X) \in TM$ идентификовати са тангентним вектором $X \in T_pM$, а влакно $\pi^{-1}(p)$ са T_pM.

Желимо да од скупа TM направимо многострукост, односно природно доделимо гладак атлас. Нека је (U, φ) карта на M са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. За $p \in U$ по Леми 2.6 важи $T_pU = T_pM$, те је $TU = \bigsqcup_{p\in U} T_pU = \bigsqcup_{p\in U} T_pM \subseteq TM$. Тангентни вектор $X \in T_pM$ у $p \in U$ је јединствена линеарна комбинација $X = \sum_{i=1}^n X(x_i)(\partial_i)_p$, што нас мотивише да поставимо пресликавање $\widetilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) = TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ са

$$\widetilde{\varphi}(p, X) = (x_1(p), \ldots, x_n(p), X(x_1), \ldots, X(x_n)). \tag{2.4}$$

Овако дефинисано $\widetilde{\varphi}$ је бијекција са инверзом

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(\varphi(p), \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \left(p, \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right).$$

Нека су (U, φ) и (V, ψ) карте на M, тада на TM имамо одговарајуће карте $(TU, \widetilde{\varphi})$ и $(TV, \widetilde{\psi})$. Скупови $\widetilde{\varphi}(TU \cap TV) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ и $\widetilde{\psi}(TU \cap TV) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ су отворени у $\mathbb{R}^{2n}$, док за пресликавање $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ важи

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1})(\varphi(p), \lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= \widetilde{\psi}\left(p, \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) \\
&= \left(\psi(p), \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (\pi_1 \circ \psi), \ldots, \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (\pi_n \circ \psi)\right) \\
&= \left((\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)), \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial(\pi_1 \circ (\psi \circ \varphi^{-1}))}{\partial \pi_i}(\varphi(p)), \ldots, \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial(\pi_n \circ (\psi \circ \varphi^{-1}))}{\partial \pi_i}(\varphi(p))\right),
\end{aligned}$$

те је зато глатко. На овај начин оригинални атлас за M индукује гладак атлас за TM.

Како M има пребројив податлас, онда га има и TM. За $X \in T_pM$ и $Y \in T_qM$ где је $p \neq q$ (иначе ради Лема 1.5) постоје тривијално сагласне карте, φ у $p \in M$ и ψ у $q \in M$, те $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ имају дисјунктне домене који раздвајају тачке (p, X) и (q, Y), што доказује Хаусдорфов услов. Због тога тангентно раслојење TM са индукованим атласом јесте глатка многострукост димензије $2n$.

Сечење тангентног раслојења TM је свако пресликавање $X\colon M \to TM$ за које важи $\pi \circ X = \mathbb{1}_M$, где је $\pi\colon TM \to M$ природна пројекција. ***Векторско поље*** на многострукости M је глатко сечење тангентног раслојења TM, односно глатко пресликавање $X\colon M \to TM$ које свакој тачки $p \in M$ додељује тангентни вектор $X_p = X(p) \in T_pM$. Скуп свих векторских поља на многострукости M обележавамо са $\mathfrak{X}(M)$.

Нека је (U, φ) карта на M са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Тада сечење $X\colon M \to TM$ има координатну репрезентацију $\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ која се захваљујући (2.4) може изразити са $\varphi(p) \mapsto (\varphi(p), X_p(x_1), \ldots, X_p(x_n))$ за $p \in U$. Свако сечење X може се посматрати као пресликавање које глаткој функцији $f \in \mathfrak{F}(M)$ додељује функцију $Xf\colon M \to \mathbb{R}$ одређену са $(Xf)(p) = X_p(f)$. Тада је $X_p(x_i) = (Xx_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$, одакле за $v \in \varphi(U)$ имамо

$$(\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1})(v) = (v, Xx_1 \circ \varphi^{-1}(v), \ldots, Xx_n \circ \varphi^{-1}(v)), \tag{2.5}$$

те је сечење X глатко на U ако и само ако су Xx_i глатке функције за $1 \leqslant i \leqslant n$.

За свако $1 \leqslant i \leqslant n$ дефинишемо i-то ***координатно векторско поље*** $\partial_i\colon U \to TU$ са $\partial_i(p) = (\partial_i)_p$, а како је $\partial_i(x_j)\colon p \mapsto (\partial_i)_p(x_j) = \delta_{ij}$ за свако $1 \leqslant j \leqslant n$, то је $\partial_i(x_j) \in \mathfrak{F}(U)$, те имамо $\partial_i \in \mathfrak{X}(U)$ као основни пример векторског поља.

За $f \in \mathfrak{F}(M)$, координатна репрезентација од $\partial_i f$ је глатка функција

$$\partial_i f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(p) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i}(\varphi(p)),$$

одакле следи $\partial_i f \in \mathfrak{F}(U)$, док у тачки $p \in U$ за сечење $X\colon M \to TM$ имамо

$$(Xf)(p) = X_p(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_p(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) f = \sum_{i=1}^{n} X_p(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} (Xx_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p),$$

одакле на координатној околини U добијамо

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} (Xx_i) \partial_i f.$$

Уколико је $X \in \mathfrak{X}(M)$, сечење је глатко, те имамо глатке Xx_i, одакле је Xf глатко на U, а како то важи за сваку карту, добијамо $Xf \in \mathfrak{F}(M)$. Свака појединачна функција $X_p\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ је диференцирање у p, те ће се линеарност и Лајбницовост једноставно продужити на глатко сечење $X\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$. Лајбницовост по тачкама даје $X(fh) = f(Xh) + h(Xf)$ за свако $f, h \in \mathfrak{F}(M)$, а ако је X додатно и линеарно, кажемо да је X ***диференцирање***, а доказали смо да свако векторско поље јесте диференцирање.

Обратно, свако диференцирање $X\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ индукује диференцирање у тачки $p \in M$, те је са $X_p(f) = (Xf)(p)$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$ дефинисан тангентни вектор у p, а самим тим и сечење тангентног раслојења $X\colon M \to TM$. Како у свакој карти (U, φ) важи $x_i = \pi_i \circ \varphi \in \mathfrak{F}(U)$, то је $Xx_i \in \mathfrak{F}(U)$, те из (2.5) видимо да је то сечење глатко на U, а самим тим и на целом M. То комплетира доказ да векторска поља имају дуалну природу коју видимо у наредној теореми.

Теорема 2.18. *Диференцирања на многострукости су тачно глатка сечења њеног тангентног раслојења.*

Основне операције на $\mathfrak{X}(M)$ уводимо на природан начин. Сабирање и множење скаларом, $(\alpha X + \beta Y)(h) = \alpha(X(h)) + \beta(Y(h))$ за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h \in \mathfrak{F}(M)$, чине да $\mathfrak{X}(M)$ постане векторски простор над $\mathbb{R}$. Додатно, векторско поље може се множити са $f \in \mathfrak{F}(M)$ преко једнакости $(fX)(h) = fX(h)$, која чини да $\mathfrak{X}(M)$ буде модул над прстеном $\mathfrak{F}(M)$. У складу са уведеним операцијама, аналогно формули (2.1), добијамо разлагање произвољног векторског поља преко координатних векторских поља у некој карти,

$$X = \sum_{i=1}^{n} X x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Пример 2.24. Ако је $V \in T_pM$ произвољан тангентни вектор многострукости $M \ni p$, тада постоји векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ такво да је $X_p = V$. Избором неке карте (U, φ) у $p \in M$ добијамо координатне функције и одговарајуће базне тангентне векторе. Како $V = \sum_i v_i(\partial_i)_p$ важи за неке $v_i = V(x_i) \in \mathbb{R}$, то можемо дефинисати $Y \in \mathfrak{X}(U)$ са $Y = \sum_i v_i \partial_i$, да бисмо добили $Y_p = V$. По Леми 1.18 постоји $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржана у U за коју је $b(p) = 1$. Ако дефинишемо $X = bY$ на U и $X = 0$ на $M \setminus \operatorname{supp}(b)$ добијамо $X \in \mathfrak{X}(M)$ и важи $X_p = b(p)Y_p = V$. △

Множење векторских поља $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ уводимо са $(XY)(h) = X(Y(h))$ за $h \in \mathfrak{F}(M)$, што је очигледно $\mathbb{R}$-линеарно. Међутим, из Лајбницовости за X и Y добијамо

$$XY(fh) = X(Y(fh)) = X(fYh + hYf) = fX(Yh) + (Xf)(Yh) + hX(Yf) + (Xh)(Yf).$$

Пажљивим посматрањем претходне формуле, уочавамо два члана „вишка“, $(Xf)(Yh)$ и $(Xh)(Yf)$. Како у општем случају нема разлога да се они међусобно пониште, XY нема Лајбницовост, те није ни векторско поље. Међутим, ти додатни чланови су симетрични по X и Y, а пократиће се ако израчунамо $YX(fh)$ и одузмемо од $XY(fh)$. Дакле, $XY - YX$ поседује Лајбницовост и самим тим јесте векторско поље, које зовемо ***комутатор*** или ***Лијева заграда*** и обележавамо са $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$.

Комутатор на $\mathfrak{X}(M)$ природно поседује неке лепе особине. Из саме дефиниције следи антисиметрија $[Y, X] = -[X, Y]$, док линеарност векторских поља директно повлачи $\mathbb{R}$-билинеарност $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ и $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Међутим, иако комутатор јесте $\mathbb{R}$-билинеаран он није $\mathfrak{F}(M)$-билинеаран. Како за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ имамо $X(fY(h)) = fXY(h) + (Xf)(Yh)$, то добијамо корисну формулу

$$X(fY) = fXY + (Xf)Y,$$

из које лако можемо израчунати

$$[fX, hY] = fh[X, Y] + f(Xh)Y - h(Yf)X. \tag{2.6}$$

Још једно лепо својство векторских поља је ***Јакобијев идентитет***,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \tag{2.7}$$

који важи за све $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, што се може лако проверити, или показати применом Леме A.31 за подалгебру $\mathfrak{X}(M)$ алгебре свих линеарних ендоморфизама $\operatorname{End}(\mathfrak{F}(M))$ векторског простора $\mathfrak{F}(M)$ над пољем $\mathbb{R}$.

Лијева алгебра (над $\mathbb{R}$) је векторски простор над $\mathbb{R}$ опремљен $\mathbb{R}$-билинеарном антисиметричном операцијом $[-, -]$ која задовољава Јакобијев идентитет. Како векторска поља на произвољној многострукости M поседују све наведене особине, можемо рећи да је $\mathfrak{X}(M)$ Лијева алгебра.

Пример 2.25. Одредимо сва векторска поља $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ за која важи

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, V\right] = V = \left[V, \frac{\partial}{\partial y}\right].$$

Њихов општи облик је $V = a\partial_x + b\partial_y$, где су $a = a(x,y)$ и $b = b(x,y)$ неке глатке функције. Из почетних услова добијамо

$$\partial_x(a\partial_x + b\partial_y) - (a\partial_x + b\partial_y)\partial_x = \frac{\partial a}{\partial x}\partial_x + \frac{\partial b}{\partial x}\partial_y = a\partial_x + b\partial_y,$$
$$(a\partial_x + b\partial_y)\partial_y - \partial_y(a\partial_x + b\partial_y) = -\frac{\partial a}{\partial y}\partial_x - \frac{\partial b}{\partial y}\partial_y = a\partial_x + b\partial_y.$$

Из $\partial a/\partial x = a$ је $a = f(y)e^x$, док из $\partial b/\partial x = b$ следи $b = h(y)e^x$. Из $-\partial a/\partial y = a$ имамо $-f'(y) = f(y)$, те је $f(y) = Ce^{-y}$, док из $-\partial b/\partial y = b$ следи $-h'(y) = h(y)$, одакле следи $h(y) = De^{-y}$. Одавде добијамо $a = Ce^{x-y}$ и $b = De^{x-y}$ за неке константе C и D. Тражена векторска поља су облика $V = e^{x-y}(C\partial_x + D\partial_y)$, где су C и D произвољне константе. $\triangle$

Пример 2.26. Како изгледају координатна векторска поља $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ у поларним координатама, датим са $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ за $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$? Директан рачун нам даје

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Матрица коефицијената је Јакобијева матрица промене координата, а из њеног инверза

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

добијамо

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$\triangle$

Важно је имати у виду да је комутатор свуда једнак нули у два специјална случаја. У првом случају, као последица антисиметрије $[X,X] = 0$ важи за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$. Други случај тиче се координатних векторских поља из исте карте (U,φ). Парцијални изводи глатких функција су исти у било ком редоследу,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial \pi_j}\circ\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial \pi_i}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial \pi_j}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\right)\circ\varphi$$
$$= \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial \pi_i \partial \pi_j}\circ\varphi = \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial \pi_j \partial \pi_i}\circ\varphi = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

одакле следи

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0. \tag{2.8}$$

Пример 2.27. Посматрајмо два векторска поља у $\mathbb{R}^2$,

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad Y = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Рачун даје

$$XY = (1+x^2)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad YX = (1+x^2)\frac{\partial^2}{\partial y \partial x},$$

одакле добијамо

$$[X,Y] = XY - YX = 2x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Да ли је могуће пронаћи нове координате $(u,v) = f(x,y)$ такве да су X и Y баш координатна векторска поља $\partial/\partial u$ и $\partial/\partial v$? Приметимо да су векторска поља X и Y свуда линеарно независна, али то није довољно добро. Из (2.8) за координатна векторска поља важи $[\partial/\partial u, \partial/\partial v] = 0$, тако да је одговор негативан. △

Пример 2.28. Поновимо претходни пример за векторска поља у $\mathbb{R}^2$ на отвореном подскупу где је $xy > 0$,

$$X = \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = 2\sqrt{xy}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Директан рачун показује да су и XY и YX једнаки $2\sqrt{x/y}(\partial/\partial x)$ плус неки други изводи које не морамо да рачунамо јер унапред знамо да ће бити исти, одакле је $[X,Y] = 0$.

Овог пута има смисла тражити промену координата $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ за коју је потребно наместити

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = X = \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\\ 2\sqrt{xy}\frac{\partial}{\partial x} = Y = \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

одакле следи

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 2\sqrt{xy}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Најпре видимо да је $y = u + C$ за неку константу C. Затим, $\partial x/x = \partial u/(u+C)$ даје $x = (u+C)f(v)$. Даље је $(u+C)f'(v) = 2\sqrt{(u+C)f(v)(u+C)}$, одакле $f'(v) = \pm 2\sqrt{f(v)}$, те $\sqrt{f} = \pm v + \text{Const}$, односно $f = (v+D)^2$ за неку константу D. Дакле, за произвољне константе C и D, промена координата $x = (u+C)(v+D)^2$, $y = u + C$ даје $X = \partial/\partial u$, $Y = \partial/\partial v$ и добијамо позитиван одговор. △

Пример 2.29. Размотримо исто питање као раније, овог пута у случају векторских поља

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Након што установимо да је $[X,Y] = 0$, можемо увести поларне координате $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, што је добро дефинисано за $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$. Тада нам рачун даје

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r}Y, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} = X.$$

Можемо увести нову промену координата са $\rho = f(r)$, при чему чувамо θ као другу координату, тако да добијемо жељени облик $Y = \partial/\partial\rho$. Како је

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \rho} = f'(r)\frac{\partial}{\partial \rho},$$

потребно нам је $f'(r) = 1/r$, односно $f(r) = \ln r + \text{Const}$, одакле је $r = Ce^{\rho}$ и промена координата гласи $x = Ce^{\rho}\cos\theta$, $y = Ce^{\rho}\sin\theta$, за произвољну константу $C > 0$. △

2.6 Глобално тангентно пресликавање

Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости M и N. Ако објединимо тангентна пресликавања од f у свим тачкама из M, добијамо глобално дефинисано пресликавање између тангентних раслојења, $Tf\colon TM \to TN$ где је $Tf(X_p) = T_pf(X_p)$ за свако $X_p \in T_pM$. Овако дефинисано пресликавање Tf зовемо ***глобално тангентно пресликавање***, а његова рестрикција на сваки од тангентних простора $T_pM \subseteq TM$ је управо тангентно пресликавање T_pf.

Глобално тангентно пресликавање Tf гура тангентни вектор $X \in T_pM$ из домен многострукости у тангентни вектор из кодомен многострукости $f_*(X) = T_pf(X)$ који називамо ***гурање*** (*pushforward*) од X. Гурање вектора X можемо обележавати са $T_pf(X)$, $Tf(X)$ или $f_*(X)$ у зависности од тога на које везе желимо да укажемо, те да ли желимо да нагласимо основну тачку $p = \pi(X)$. Приметимо да за канонске пројекције тангентних раслојења $\pi_M\colon TM \to M$ и $\pi_N\colon TN \to N$ важи очигледна веза $\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M$.

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Теорема 2.19. *Глобално тангентно пресликавање је глатко.*

Доказ. За глатко $f\colon M \to N$ и произвољно $p \in M$ постоји карта (U, φ) у $p \in M$ са $x_j = \pi_j \circ \varphi$ $(1 \leqslant j \leqslant m = \dim M)$ и карта (V, ψ) у $f(p) \in N$ са $y_i = \pi_i \circ \psi$ $(1 \leqslant i \leqslant n = \dim N)$, где је $f(U) \subseteq V$ тако да је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. За одговарајуће карте $(TU, \widetilde{\varphi})$ на TM и $(TV, \widetilde{\psi})$ на TN очигледно важи $Tf(TU) \subseteq TV$. Координатну репрезентацију

$$\widetilde{\psi} \circ Tf \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\colon \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \to \psi(V) \times \mathbb{R}^n$$

глобалног тангентног пресликавања Tf рачунамо користећи формулу (2.2),

$$\begin{aligned} &\left(\widetilde{\psi} \circ Tf \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\right)(\varphi(p), \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \left(\widetilde{\psi} \circ Tf\right)\left(p, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) \\ =&\widetilde{\psi}\left(f(p), \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T_pf\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \widetilde{\psi}\left(f(p), \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}\right) \\ =&\left((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)), \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial(\pi_1 \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j}(\varphi(p)), \ldots, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial(\pi_n \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j}(\varphi(p))\right), \end{aligned}$$

што је глатко јер је такво $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, одакле следи да је Tf глатко. □

Ако је $f\colon M \to N$ константно пресликавање онда из Примера 2.3 имамо $T_pf = 0$ за свако $p \in M$, те важи $Tf = 0$. Штавише, важи и обрат, али очекивано само на компонентама повезаности.

Лема 2.20. *Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између повезане многострукости M и многострукости N. Ако је глобално тангентно пресликавање $Tf\colon TM \to TN$ једнако нули онда је f константно.*

Доказ. Као и раније, за произвољно $p \in M$ бирамо карту (U, φ) у $p \in M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$ са $f(U) \subseteq V$ тако да је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. Ако $Tf = 0$ применимо на координатне

векторе из T_qM, то из формуле (2.2) добијамо

$$\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(q) = \frac{\partial(\pi_i \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial \pi_j}(\varphi(q)) = 0,$$

за свако $q \in U$, $1 \leqslant j \leqslant \dim M$ и $1 \leqslant i \leqslant \dim N$. Одавде је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ константно на некој кугли око $\varphi(p)$, те је f константно на некој повезаној околини тачке p, за свако $p \in M$. Посматрајмо затворен скуп $Q = f^{-1}(\{f(q)\})$ који садржи неку фиксирану тачку $q \in M$. Како свака тачка из Q има повезану околину на којој је f константно, то је Q отворен. Једини непразан затворен и отворен подскуп повезаног простора M је само M, те је f константно на целом M. □

Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости M и N. Ако применимо глобално тангентно пресликавање на векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$, свака тачка $p \in M$ има свој одговарајући вектор $T_pf(X_p) \in T_{f(p)}N$. Међутим, у општем случају овако не добијамо векторско поље на N. На пример, ако f није сурјективно тада постоји проблем који вектор доделити тачкама из $N \setminus f(M)$. Са друге стране, ако f није инјективно имамо $f(p) = f(q)$ за неке различите тачке $p, q \in M$, али не постоји разлог зашто би вектори $T_pf(X_p)$ и $T_qf(X_q)$, који припадају истом тангентном простору $T_{f(p)}N = T_{f(q)}N$, били једнаки.

У случају да векторска поља $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y \in \mathfrak{X}(N)$ имају особину да за свако $p \in M$ важи $T_pf(X_p) = Y_{f(p)}$, за X и Y кажемо да су ***f*-везана** (*f-related*) и пишемо $X \sim_f Y$. Како $(X(h \circ f))(p) = X_p(h \circ f) = (T_pf(X_p))(h)$ и $((Yh) \circ f)(p) = (Yh)(f(p)) = Y_{f(p)}(h)$ важи за $p \in M$ и $h \in \mathfrak{F}(N)$, то имамо наредно тврђење.

Лема 2.21. *Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости и нека су $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y \in \mathfrak{X}(N)$ векторска поља. Тада $X \sim_f Y$ важи ако и само ако $X(h \circ f) = (Yh) \circ f$ важи за свако $h \in \mathfrak{F}(N)$.*

Пример 2.30. Нека је $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(t) = (\cos t, \sin t)$ и $X = d/dt \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Природно се поставља питање да ли постоји $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ такво да је $X \sim_f Y$. За потенцијално решење $Y = \mu(x,y)(\partial/\partial x) + \nu(x,y)(\partial/\partial y)$ по формули (2.2) имамо

$$Y_{f(t)} = T_tf\left(\frac{d}{dt}\right)_t = \frac{\partial \cos t}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{f(t)} + \frac{\partial \sin t}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{f(t)} = -\sin t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{f(t)} + \cos t\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{f(t)},$$

те нам је потребно $\mu(\cos t, \sin t) = -\sin t$ и $\nu(\cos t, \sin t) = \cos t$, што важи за $\mu(x,y) = -y$ и $\nu(x,y) = x$, при чему добијамо решење $Y = -y(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial y)$.

Приметимо да иако f није сурјективно, решење постоји јер услов из дефиниције тривијално важи за тачке које нису у слици $f(\mathbb{R})$. Међутим, тражено векторско поље Y није једнозначно одређено, на пример $Y = -y(x^2+y^2)(\partial/\partial x) + x(x^2+y^2)(\partial/\partial y)$ такође испуњава услове задатка. △

Теорема 2.22. *Ако је $f\colon M \to N$ дифеоморфизам између многострукости M и N, тада за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$ постоји јединствено $Y \in \mathfrak{X}(N)$ такво да је $X \sim_f Y$.*

Доказ. Како је f бијекција, то сваком $q \in N$ следује јединствено $Y_q = T_{f^{-1}(q)}f(X_{f^{-1}(q)})$, што дефинише сечење $Y = Tf \circ X \circ f^{-1}\colon N \to TN$, које је глатко као композиција глатких (Tf је глатко по Теореми 2.19), те је $Y \in \mathfrak{X}(N)$. □

Јединствено $Y \in \mathfrak{X}(N)$ из претходне теореме за које је $X \sim_f Y$ зовемо ***ґурање*** (*push-forward*) за f од $X \in \mathfrak{X}(M)$ и обележавамо са f_*X. Дакле, $f_*X \in \mathfrak{X}(N)$ је дефинисано само за дифеоморфизме $f\colon M \to N$ и може се рачунати формулом $(f_*X)_q = Tf(X_{f^{-1}(q)})$, док по Леми 2.21 за свако $h \in \mathfrak{F}(N)$ имамо

$$((f_*X)h) \circ f = X(h \circ f). \tag{2.9}$$

Кључна ствар у вези везаних векторских поља је њихова сарадња у односу на комутатор, о чему говори наредна теорема.

Теорема 2.23. *Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости M и N. Ако за векторска поља $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ важи $X_1 \sim_f Y_1$ и $X_2 \sim_f Y_2$, онда важи и $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.*

Доказ. Из Леме 2.21 за $h \in \mathfrak{F}(N)$ можемо рачунати $X_1X_2(h\circ f) = X_1((Y_2h)\circ f) = (Y_1Y_2(h))\circ f$ и $X_2X_1(h\circ f) = (Y_2Y_1(h))\circ f$, те је $[X_1, X_2](h\circ f) = (Y_1Y_2(h))\circ f - (Y_2Y_1(h))\circ f = ([Y_1, Y_2]h)\circ f$. Доказ завршава поновна примена Леме 2.21, али у супротном смеру. □

Уколико у претходној теореми поставимо дифеоморфизам $f\colon M \to N$, тада као последицу имамо да за $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ важи лепа формула

$$f_*[X_1, X_2] = [f_*X_1, f_*X_2]. \tag{2.10}$$

2.7 Задаци

Задатак 2.1. У полуравни $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ је тачка $p \in M$ дата координатама $(x,y) = (0,2)$. Изразити тангентни вектор $T_pM \ni X = 4\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$ преко $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p$ и $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p$ у поларним координатама.

Задатак 2.2. Показати да је $f\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{R}$ дато са $f(x:y) = xy/(x^2+y^2)$ добро дефинисано и глатко. Одредити максимум од f на $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$ ако постоји.

Задатак 2.3. Да ли је композиција два пресликавања константног ранга увек константног ранга?

Задатак 2.4. Доказати да се произвољно глатко пресликавање између многострукости може раставити на композицију субмерзије и смештања.

Задатак 2.5. За које $m, n \in \mathbb{N}$ постоји субмерзија $f\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^m \to \mathbf{S}^n$ која није сурјективна?

Задатак 2.6. Нека је $f\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ за $n \in \mathbb{N}$ дато са $f(x:y) = (x^n : x^{n-1}y : \ldots : xy^{n-1} : y^n)$. Доказати да је f добро дефинисано и испитати да ли је смештање.

Задатак 2.7. Нека је $f\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^3$ дато са $f((x:y),(z:w)) = (xz : xw : yz : yw)$. Доказати да је f добро дефинисано и испитати да ли је f имерзија, субмерзија или смештање.

Задатак 2.8. За које $r \in \mathbb{R}$ је скуп $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ x^2+z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$ једнодимензиона подмногострукост од $\mathbb{R}^3$?

Задатак 2.9. Доказати да је $\{(x:y:z) \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2 : xy = z^2\}$ подмногострукост од $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$.

Задатак 2.10. Доказати да је $M = \{((x_1 : \ldots : x_{n+1}),(y_1 : \ldots : y_{n+1})) \in \mathbb{R}\mathbf{P}^n \times \mathbb{R}\mathbf{P}^n : \sum_{i=1}^{n+1} x_iy_i = 0\}$ подмногострукост од $\mathbb{R}\mathbf{P}^n \times \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ и одредити $\dim M$.

Задатак 2.11. За многострукост $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ одредити векторско поље $V \in \mathfrak{X}(M)$ ако је

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}, V\right] = 2\frac{x+y}{y^2}\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad \left[y\frac{\partial}{\partial x}, V\right] = 0.$$

Задатак 2.12. Одредити $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ за које је $[\partial_x + x\partial_y, [\partial_x, V]] = 0 = [V, \partial_y]$ тако да важи $V_{(0,0)} = (\partial_x)_{(0,0)} + (\partial_y)_{(0,0)}$ и $V_{(1,1)} = 3(\partial_x)_{(1,1)} + 3(\partial_y)_{(1,1)}$.

Задатак 2.13. Одредити све константе $c \in \mathbb{R}$ за које $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ дата са

$$X = (x+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y \ln y + y)\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad Y = (2x+c)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

дозвољавају промену координата, тако да X и Y постају координатна векторска поља.

Задатак 2.14. Одредити реалне константе a и c за које векторска поља X и Y у $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ дата са

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad Y = a\frac{\partial}{\partial x} + x^c\frac{\partial}{\partial y}$$

дозвољавају промену координата, тако да X и Y постају координатна векторска поља, а затим наћи такву промену координата.

Задатак 2.15. Ако је $f\colon D \to f(D)$ дифеоморфизам дат са $(x,y) = f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, при чему је $D, f(D) \subset \mathbb{R}^2$, израчунати $(f^{-1})_*(\partial_x)$.

Задатак 2.16. Нека је $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ отворена подмногострукост од $\mathbb{R}^2$ и $f\colon Q \to Q$ дато са $(u,v) = f(x,y) = (xy, y/x)$. Показати да је f дифеоморфизам и израчунати $f_*(x\partial_x + y\partial_y)$ и $f_*(y\partial_x)$.

Задатак 2.17. Нека је $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ дато са $f(x,y) = (x : y : 1)$ и $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Колико има векторских поља $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)$ таквих да је $X \sim_f Y$? Записати неко решење (ако постоји) за Y у све три стандардне карте.

Глава 3

ТЕНЗОРСКА РАСЛОЈЕЊА И ПОЉА

3.1 Векторска раслојења

Тангентно раслојење многострукости има сопствену природну структуру глатке многострукости, што је концепт који можемо уопштити. Грубо говорећи, векторско раслојење је фамилија векторских простора, по један за сваку од тачака многострукости, слепљених заједно на неки гладак начин.

Нека је n-многострукост M ***база раслојења*** и нека је фиксирано $r \in \mathbb{N}$ ***ранг раслојења***. Посматрајмо фамилију реалних векторских простора E_p димензије r индексираних по тачкама $p \in M$, те нека је ***простор раслојења***

$$E = \bigsqcup_{p \in M} E_p.$$

Пројекција раслојења је природна пројекција $\pi \colon E \to M$ дефинисана са $\pi(v) = p$ за $v \in E_p$. ***Карта раслојења*** на E је пресликавање $\widetilde{\varphi} \colon \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^r$ за које постоји карта (U, φ) на M тако да се $\widetilde{\varphi}$ за свако $p \in U$ рестрикује на линеарни изоморфизам

$$\widetilde{\varphi}\restriction_{E_p} \colon E_p = \pi^{-1}(p) \to \{\varphi(p)\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r.$$

Атлас раслојења је гладак атлас за E који се састоји од карата раслојења на E. Сваки атлас раслојења за E одређује ***комплетан атлас раслојења*** који се састоји од свих карата раслојења које су сагласне са свим картама раслојења из датог атласа.

Векторско раслојење (или ***глатко реално векторско раслојење***) ранга r над M је глатка многострукост димензије $n + r$ коју генерише скуп E са (комплетним) атласом раслојења за E. Додатни тополошки услови из дефиниције многострукости аутоматски се преносе са базе раслојења M. Како M има пребројив податлас, то и атлас раслојења има пребојив податлас, што оправдава пребројиву базу. Ако је $x \in E_p$ и $y \in E_q$ за $p \neq q$ (случај $p = q$ одмах решава Лема 1.5), то постоје отворени дисјунктни $V_p, V_q \subset M$ који раздвајају $p \in V_p$ и $q \in V_q$, те $\pi^{-1}(V_p)$ и $\pi^{-1}(V_q)$ раздвајају x и y, што доказује Хаусдорфов услов.

Пројекција раслојења $\pi \colon E \to M$ је глатко сурјективно пресликавање у којем се крије суштинска информација векторског раслојења, те се често поистовећују. Наравно, кад не постоји опасност од забуне, лакше је поистоветити векторско раслојење са његовим простором раслојења E.

Кључна особина карте раслојења $\widetilde{\varphi}$ је да се у тачкама $p \in U$ рестрикује на линеарни изоморфизам између ***влакна*** $E_p = \pi^{-1}(p)$ над p које поседује структуру реалног векторског простора и $\mathbb{R}^r$. Као што многострукост M локално личи на отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, то векторско раслојење E над M локално личи на производ отвореног подскупа од $\mathbb{R}^n$ и векторског простора $\mathbb{R}^r$.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \varphi(U) \times \mathbb{R}^r \arrow[d, "\pi_{\varphi(U)}"] \\ U \arrow[r, "\varphi"] & \varphi(U) \end{tikzcd}$$

За функцију преласка $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^r \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^r$, где су (U, φ) и (V, ψ) одговарајуће карте на M, имамо $\pi_{\psi(U\cap V)} \circ \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \pi_{\varphi(U\cap V)}$, одакле се види да је функција преласка облика

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(x, v) = ((\psi \circ \varphi^{-1})(x), \tau(x)v),$$

где је $\tau \colon \varphi(U \cap V) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$. Одавде следи да је за проверу сагласности карата раслојења довољно испитати глаткоћу пресликавања τ.

Пример 3.1. Тангентно раслојење n-многострукости M је основни пример векторског раслојења. За карту (U, φ) на M можемо посматрати глобално тангентно пресликавање $T\varphi \colon TU \to T\varphi(U) \cong \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, које се у тачки $p \in U$ рестрикује на линеарни изоморфизам $T_p\varphi \colon T_pU = T_pM \to T_{\varphi(p)}\varphi(U) \cong \mathbb{R}^n$. Ако је (V, ψ) нека друга карта на M, то имамо $T_p\psi \circ (T_p\varphi)^{-1} = T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})$, одакле следи сагласност карата раслојења $T\psi \circ (T\varphi)^{-1}(x, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), T_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v))$ јер Јакобијева матрица глатко зависи од x. Дакле, произвољан гладак атлас за M генерише атлас раслојења за TM, те је TM векторско раслојење ранга n над M. Приметимо да из једноставног рачуна

$$T_p\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_i \frac{\partial(\pi_i \circ \varphi)}{\partial x_j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial \pi_i}\right)_{\varphi(p)} = \sum_i \frac{\partial \pi_i}{\partial \pi_j}(\varphi(p))\left(\frac{\partial}{\partial \pi_i}\right)_{\varphi(p)} = \left(\frac{\partial}{\partial \pi_j}\right)_{\varphi(p)}$$

следи да карте раслојења $T\varphi$ одговарају картама из (2.4) које смо оригинално увели кад смо дефинисали тангентно раслојење. △

Пример 3.2. Најједноставнији, али свакако важан пример векторског раслојења је ***производ раслојење***, које постоји за произвољну n-многострукост M и свако $r \in \mathbb{N}$. У питању је многострукост $E = M \times \mathbb{R}^r$ димензије $n + r$ са природном пројекцијом $\pi_M \colon M \times \mathbb{R}^r \to M$, $\pi_M(p, v) = p$. Производ раслојење ранга r над M свакој тачки $p \in M$ додељује влакно $E_p = \pi_M^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$, док су карте раслојења $\varphi \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}$, где су φ карте на M. Посебно, цилиндар $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$ је производ раслојење над кругом $\mathbf{S}^1$ путем пројекције $\pi_{\mathbf{S}^1} \colon \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$. △

Пример 3.3. Нека је P подмногострукост многострукости M, и нека је $\pi \colon E \to M$ векторско раслојење. Тада је његова рестрикција $\pi_P \colon \pi^{-1}(P) \to P$ такође векторско раслојење, обележавамо га са $E\restriction_P = \pi^{-1}(P)$ и кажемо да је ***рестрикција*** од E на P. Ако је (U, φ) карта у $p \in M$, а (U_P, φ_P) карта у $p \in P$ таква да је $U_P \subseteq U$, тада од индуковане карте $\widetilde{\varphi}$ на E добијамо индуковану карту $\widetilde{\varphi}_P$ на $E\restriction_P$ са

$$\widetilde{\varphi}_P = ((\varphi_P \circ \varphi^{-1}) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}) \circ \widetilde{\varphi}\restriction_{\pi^{-1}(U_P)} \colon \pi^{-1}(U_P) \to \varphi_P(U_P) \times \mathbb{R}^r,$$

док је функција преласка $\widetilde{\psi}_P \circ (\widetilde{\varphi}_P)^{-1}$ глатка као композиција глатких функција. △

Пример 3.4. Нека су $\pi_E \colon E \to M$ и $\pi_F \colon F \to N$ векторска раслојења ранга r_1 и r_2, онда је њихов Декартов производ $E \times F$ векторско раслојење ранга $r_1 + r_2$ над $M \times N$, чије је влакно у $(p, q) \in M \times N$ векторски простор $E_p \times E_q$. △

Пример 3.5. Нека је M многострукост, а $\pi_E\colon E \to M$ и $\pi_F\colon F \to M$ векторска раслојења ранга r_1 и r_2 над M. ***Витнијева сума***[1] од E и F је векторско раслојење $E \oplus F$ над M чије је влакно у тачки $p \in M$ директна сума $E_p \oplus F_p$, односно

$$E \oplus F = \bigsqcup_{p \in M} (E_p \oplus F_p)$$

са очигледном пројекцијом $\pi = \pi_E \circ \pi_1 = \pi_F \circ \pi_2$. За свако $p \in M$ постоји карта (U, φ) у $p \in M$ и карте раслојења $\widetilde{\varphi}\colon \pi_E^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^{r_1}$ и $\overline{\varphi}\colon \pi_F^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^{r_2}$, одакле дефинишемо $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ са $\Phi = (\varphi \circ \pi, \pi_{\mathbb{R}^{r_1}} \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi_1, \pi_{\mathbb{R}^{r_2}} \circ \overline{\varphi} \circ \pi_2)$. Нека је $\Psi\colon \pi^{-1}(V) \to \psi(V) \times \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ друго такво бијективно пресликавање, где је (V, ψ) карта у $p \in M$. Ако функцијама преласка $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ и $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$ одговарају глатка пресликавања $\tau_1\colon \varphi(U \cap V) \to \mathrm{GL}(r_1, \mathbb{R})$ и $\tau_2\colon \varphi(U \cap V) \to \mathrm{GL}(r_2, \mathbb{R})$, онда функцији преласка $\Psi \circ \Phi^{-1}$ одговара пресликавање $\tau\colon \varphi(U \cap V) \to \mathrm{GL}(r_1 + r_2, \mathbb{R})$ где је $\tau(p) = \tau_1(p) \oplus \tau_2(p)$ блок дијагонална матрица са $\tau_1(p)$ и $\tau_2(p)$ на дијагонали, што је глатко по p и доказује да је $E \oplus F$ векторско раслојење над M. △

Нека су $\pi_E\colon E \to M$ и $\pi_F\colon F \to N$ векторска раслојења. За глатко пресликавање $\Phi\colon E \to F$ кажемо да је (гладак) ***хомоморфизам раслојења*** ако постоји пресликавање $f\colon M \to N$ које задовољава $\pi_N \circ \Phi = f \circ \pi_M$ такво да је рестрикција $\Phi\restriction_{E_p}\colon E_p \to F_{f(p)}$ линеарна на влакнима за свако $p \in M$. У том случају кажемо да је f ***базно пресликавање*** од Φ, као и да Φ ***покрива*** f.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Пример 3.6. Ако је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости M и N, тада је глобално тангентно пресликавање $Tf\colon TM \to TN$ хомоморфизам раслојења које покрива f. △

Уколико је хомоморфизам раслојења $\Phi\colon E \to F$ додатно дифеоморфизам (самим тим је и f дифеоморфизам), онда за Φ кажемо да је ***изоморфизам раслојења***.

Изоморфизам раслојења $\Phi\colon E \to M \times \mathbb{R}^r$ са производ раслојењем из Примера 3.2 зове се ***тривијализација*** од E, а ако постоји, онда за векторско раслојење E кажемо да је ***тривијално***. Свака карта раслојења $\widetilde{\varphi}$ дефинише изоморфизам раслојења

$$(\varphi^{-1} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}) \circ \widetilde{\varphi}\colon E\restriction_U = \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r,$$

који зовемо ***локална тривијализација*** од E над U. Наравно, свако векторско раслојење је локално тривијално у смислу да тривијализација постоји над неком околином сваке тачке из базе. Међутим, не можемо очекивати да локална тривијализација постоји за сваки подскуп $U \subseteq M$, али ако се то деси, кажемо да је раслојење ***тривијално над*** U.

Важан специјалан случај јавља се кад су и E и F векторска раслојења над истом многострукости M. У том случају згодно је користити нешто рестриктивнију дефиницију која подразумева $f = \mathbb{1}_M$. ***Хомоморфизам раслојења над*** M је хомоморфизам раслојења који покрива идентичко пресликавање од M и чија је рестрикција на свако влакно линеарна. Ако постоји хомоморфизам раслојења $\Phi\colon E \to F$ над M који је такође и изоморфизам раслојења, онда је Φ ***изоморфизам раслојења над*** M и кажемо да су E и F ***изоморфни над*** M.

[1] Hassler Whitney (1907–1989), амерички математичар

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

3.2 Покретни репери

Сечење векторског раслојења $\pi\colon E \to M$ над отвореним скупом $U \subseteq M$ је пресликавање $\sigma\colon U \to E$ такво да је $\pi \circ \sigma = \mathbb{1}_U$. Зато свакој тачки $p \in U$, сечење σ додељује елемент из влакна E_p. Израз сечење долази из геометријске интерпретације слике $\sigma(U) \subset E$ коју видимо као подскуп простора раслојења E. Основни пример сечења је векторско поље на многострукости M, што је глатко сечење тангентног раслојења TM над M.

Ако је σ глатко сечење векторског раслојења $\pi\colon E \to M$, тада $\pi \circ \sigma = \mathbb{1}_M$ повлачи инјективност од σ и $T\sigma$, те из непрекидности од π следи да је σ смештање, а $\sigma(M)$ подмногострукост од E. Посебно, свако векторско раслојење дозвољава канонско сечење које зовемо ***нула сечење***, које свакој тачки $p \in M$ додељује нула вектор $0 \in E_p$, што даје природно смештање $M \hookrightarrow E$.

Пример 3.7. Сечење производ раслојења $\pi_M\colon M \times \mathbb{R}^r \to M$ је $\sigma\colon M \to M \times \mathbb{R}^r$ које има облик $\sigma = (\mathbb{1}_M, f)$ за неко пресликавање $f\colon M \to \mathbb{R}^r$, те је σ глатко ако и само ако је f глатко. Зато је глатко сечење производ многострукости ранга r над M суштински једнако глатком пресликавању $f\colon M \to \mathbb{R}^r$. △

Скуп свих глатких сечења од E над $U \subseteq M$ означавамо са $\Gamma(U, E)$, док ако је $U = M$ користимо ознаку $\Gamma(E) = \Gamma(M, E)$. Приметимо да је скуп $\Gamma(U, E)$ векторски простор над $\mathbb{R}$ у односу на сабирање и множење скаларом који су дефинисани по тачкама са $(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2)(p) = c_1\sigma_1(p) + c_2\sigma_2(p)$ за $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, E)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $p \in U$. Као у случају векторских поља $\mathfrak{X}(U) = \Gamma(TU) = \Gamma(U, TM)$, глатка сечења од E могу се множити глатким функцијама $f \in \mathfrak{F}(U)$ са $(f\sigma)(p) = f(p)\sigma(p)$, те је $\Gamma(U, E)$ модул над прстеном $\mathfrak{F}(U)$.

Нека је M многострукост димензије n, а $U \subseteq M$ неки њен отворен подскуп. Посматрајмо векторско раслојење $\pi\colon E \to M$ ранга r. ***Локални покретни репер*** за E над U је уређена r-торка $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ глатких сечења над U ($\sigma_i \in \Gamma(U, E)$ за $1 \leqslant i \leqslant r$) таква да вектори $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_r(p)$ чине базу влакна E_p за свако $p \in U$. Посебно, локални покретни репер за E над M зовемо ***глобални покретни репер*** за E.

Најчешће је посматрано векторско раслојење баш тангентно раслојење ($E = TM$), те тада за покретне репере за TM кажемо да су ***покретни репери многострукости*** M. Другим речима, локални покретни репер многострукости M над U је уређена m-торка векторских поља на U чије вредности у свакој тачки $p \in U$ чине базу тангентног простора T_pM. За многострукост која дозвољава глобални покретни репер кажемо да је ***паралелизабилна***.

Пример 3.8. Ако је (U, φ) произвољна карта многострукости M, а $x_i = \pi_i \circ \varphi$ одговарајуће координатне функције, тада координатна векторска поља чине локални покретни репер многострукости

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

над U и зовемо га ***координатни покретни репер***. Наравно, свака тачка многострукости има околину над којом постоји такав локални покретни репер. Координатна векторска поља у оквиру неке карте омогућавају да се векторска поља изразе на згодан начин. △

Пример 3.9. Стандардна база $(e_1, \dots, e_r)$ за $\mathbb{R}^r$ са $E_i(p) = (p, e_i)$ за $1 \leqslant i \leqslant r$ и $p \in M$ даје глобални покретни репер $(E_1, \dots, E_r)$ за производ раслојење $M \times \mathbb{R}^r$. $\triangle$

Пример 3.10. Нека је $\pi\colon E \to M$ векторско раслојење ранга r. Локална тривијализација $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ од E над $U \subseteq M$ генерише локални покретни репер заснован на Примеру 3.9, где дефинишемо $\sigma_i = \Phi^{-1} \circ E_i\colon U \to E$ за $1 \leqslant i \leqslant r$. Како је $\pi = \pi_U \circ \Phi$ имамо $\pi \circ \sigma_i = \pi \circ \Phi^{-1} \circ E_i = \pi_U \circ E_i = \mathbb{1}_U$, те је σ_i сечење, а оно је глатко јер је Φ дифеоморфизам. Како се Φ рестрикује у изоморфизам и $\Phi \circ \sigma_i = E_i$, то је $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ локални покретни репер за E над U и кажемо да је тај покретни репер ***одговарајући за*** Φ.

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, bend left, "\pi"] & & U \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, bend right, "\pi_U"'] \\
& U \arrow[ul, bend left, "\sigma_i"] \arrow[ur, bend right, "E_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Обратно, ако је $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ локални покретни репер за E над U, онда је пресликавање $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ дато са $\Phi(\sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma_i(p)) = (p, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ за свако $p \in U$, локална тривијализација од E над U. $\triangle$

Из претходног примера видимо да је егзистенција локалног покретног репера за E над U еквивалентна са егзистенцијом локалне тривијализације над U. Као последицу имамо наредну теорему.

Теорема 3.1. *Векторско раслојење E над многострукости M је тривијално ако и само ако постоји глобални покретни репер за E над M. Посебно, тангентно раслојење TM је тривијално ако и само ако је многострукост M паралелизабилна.*

Пример 3.11. Многострукост M димензије n са атласом од само једне карте $\{(M, \varphi)\}$ индукује природну глобалну тривијализацију $(\varphi^{-1} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}) \circ \widetilde{\varphi}\colon TM \to M \times \mathbb{R}^n$, одакле следи да је тангентно раслојење TM тривијално, а сама многострукост M паралелизабилна. $\triangle$

Пример 3.12. Нека је G Лијева група са неутралом $e \in G$. Посматрајмо $f\colon G \times T_eG \to TG$ задато са $f(p, X) = (T_eL_p)(X)$, где је $L_p\colon G \to G$ дифеоморфизам дефинисан са $L_p(q) = pq$. Тада је пресликавање f^{-1} глобална тривијализација као дифеоморфизам између TG и $G \times T_eG \cong G \times \mathbb{R}^{\dim G}$, те је свака Лијева група паралелизабилна. $\triangle$

Нека је $\pi\colon E \to M$ векторско раслојење. ***Подраслојење*** од E је подскуп $D \subseteq E$ такав да је рестрикција $\pi\restriction_D\colon D \to M$ векторско раслојење, а инклузија $\imath\colon D \hookrightarrow E$ хомоморфизам раслојења над M. Посебно, ***дистрибуција*** на M је подраслојење тангентног раслојења, а његова димензија је ранг тог подраслојења. Наредна теорема нам даје критеријум за проверу да ли унија неких потпростора чини подраслојење.

Теорема 3.2. *Нека је E векторско раслојење над многострукости M и претпоставимо да за свако $p \in M$ имамо k-димензиони линеарни потпростор $D_p \subseteq E_p$. Тада је $D = \bigsqcup_{p \in M} D_p \subseteq E$ подраслојење од E ако и само ако свака тачка из M има околину $U \subseteq M$ над којом постоји локални покретни репер за D.*

Доказ. Користимо Пример 3.10 и везу између локалних тривијализација и локалних покретних репера. Ако је D подраслојење онда локална тривијализација лако даје тражени локални покретни репер за D. Са друге стране, нека је $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ локални покретни репер за D над неким отвореним подскупом који садржи $p \in M$. Можемо га допунити до локалног покретног репера $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ за E над неком околином U од p. Тај локални покретни репер је одговарајући за локалну тривијализацију $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ која је дефинисана са $\Phi(\sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma_i(q)) = (q, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Међутим, Φ

шаље $D \cap \pi^{-1}(U)$ у подскуп $\{(q, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0) : q \in U; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \subseteq U \times \mathbb{R}^r$, што је подмногострукост. Штавише, пресликавање $\Psi\colon D \cap \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ дефинисано са $\Psi(\sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(q)) = (q, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ је локална тривијализација од D, те је D векторско раслојење. □

Претпоставимо да су $\pi_E\colon E \to M$ и $\pi_F\colon F \to M$ векторска раслојења и да је $\Phi\colon E \to F$ хомоморфизам раслојења над M. ***Рангом*** од Φ у тачки $p \in M$ је ранг линеарног пресликавања $\Phi\restriction_{E_p}$, те уколико је он исти за свако $p \in M$ кажемо да Φ има ***константан ранг***. Дефинишимо подскупове $\operatorname{Ker}\Phi \subseteq E$ и $\operatorname{Im}\Phi \subseteq F$ са

$$\operatorname{Ker}\Phi = \bigsqcup_{p\in M} \operatorname{Ker}(\Phi\restriction_{E_p}) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\Phi = \bigsqcup_{p\in M} \operatorname{Im}(\Phi\restriction_{E_p}).$$

Како влакна раслојења свуда имају исту димензију, да би $\operatorname{Ker}\Phi$ и $\operatorname{Im}\Phi$ били подраслојења, неопходно је да Φ има константан ранг. Међутим, важи и обрат, као што се може видети из наредне теореме која нам омогућава да добијемо нова подраслојења (видети Ли [78, Теорема 10.34]).

Теорема 3.3. *Нека су E и F векторска раслојења над многострукости M и нека је $\Phi\colon E \to F$ хомоморфизам раслојења над M. Ако Φ има константан ранг, онда је $\operatorname{Ker}\Phi$ подраслојење од E, а $\operatorname{Im}\Phi$ подраслојење од F.*

Доказ. Претпоставимо да Φ има константан ранг ρ. За произвољно $p \in M$ можемо изабрати локални покретни репер $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ за E над околином $U \ni p$. Пресликавања $\Phi \circ \sigma_i\colon U \to F$ за $1 \leqslant i \leqslant r$ су глатка сечења од F над U. Како та сечења разапињу $(\operatorname{Im}\Phi)\restriction_U$, можемо претпоставити (након што испремештамо индексе уколико је потребно) да елементи $\Phi \circ \sigma_1(p), \ldots, \Phi \circ \sigma_\rho(p)$ чине базу за $\operatorname{Im}(\Phi\restriction_{E_p})$. Из непрекидности они остају линеарно независни у некој околини $V \ni p$, те је због константног ранга $(\Phi \circ \sigma_1, \ldots, \Phi \circ \sigma_\rho)$ локални покретни репер за $\operatorname{Im}\Phi$ над V, што доказује да је $\operatorname{Im}\Phi$ подраслојење од F.

Посматрајмо подраслојење $E_0 \subseteq E\restriction_V$ разапнуто са $\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho$. Како је хомоморфизам раслојења $\Phi\restriction_{E_0}\colon E_0 \to (\operatorname{Im}\Phi)\restriction_V$ бијективан он је изоморфизам раслојења. Дефинишимо хомоморфизам раслојења $\Psi\colon E\restriction_V \to E\restriction_V$ са $\Psi = \mathbb{1} - (\Phi\restriction_{E_0})^{-1} \circ \Phi$ да бисмо видели да је $\Phi \circ \Psi = 0$ како на E_0, тако и на $(\operatorname{Ker}\Phi)\restriction_V$. Међутим, E_0 и $(\operatorname{Ker}\Phi)\restriction_V$ заједно разапињу $E\restriction_V$, те Ψ своје вредности узима у $(\operatorname{Ker}\Phi)\restriction_V$ одакле је $\operatorname{Im}\Psi = (\operatorname{Ker}\Phi)\restriction_V$ подраслојење од $E\restriction_V$, што доказује да је $\operatorname{Ker}\Phi$ подраслојење од E. □

3.3 Векторска поља на сфери

Питање о томе колико постоји линеарно независних векторских поља на сфери је класичан проблем диференцијалне топологије. Нека $\operatorname{Span}(M) \in \mathbb{N}_0$ означава максималан број линеарно независних векторских поља на многострукости M. Ми смо заинтересовани за вредности $\operatorname{Span}(\mathbf{S}^{n-1})$, тако да посматрамо векторска поља на сфери $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Свакој тачки $x \in \mathbf{S}^{n-1}$ желимо да на гладак начин доделимо вектор $V(x)$ тангентан на x, односно ортогоналан на позициони вектор тачке x. Нула вектор је ортогоналан на све, што нам не одговара (јер нарушава линеарну независност), те тражимо векторска поља која нигде нису нула. Такво векторско поље можемо (глатко) нормирати да добијемо $\|V(x)\| = 1$ за свако x, после чега се потрага своди на глатка пресликавања $V\colon \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{S}^{n-1}$ таква да $V(x) \perp x$ важи за свако $x \in \mathbf{S}^{n-1}$.

Пример 3.13. Размотримо стандардни тополошки аргумент, где тражено векторско поље V генерише хомотопију $h_t(x) = x\cos(\pi t) + V(x)\sin(\pi t)$ између идентичког

$h_0 = \mathbb{1}_{\mathbf{S}^{n-1}}$ и антиподалног пресликавања $h_1 = -\mathbb{1}_{\mathbf{S}^{n-1}}$. Степен непрекидног пресликавања сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ на саму себе је исти за хомотопна пресликавања, те је $(-1)^n$ (степен антиподалног пресликавања као композиција n рефлексија) једнак 1 (степен идентичког пресликавања), одакле следи да је n парно. Закључујемо да за непарно n тражено векторско поље не постоји, што даје $\mathrm{Span}(\mathbf{S}^{2k}) = 0$. Ова тврдња је добро позната ***теорема о чешљању јежа*** (*hairy ball theorem*) која каже да не постоји свуда ненула непрекидно векторско поље на парнодимензионим сферама, или слободније речено, не можемо почешљати јежа а да не остане да штрчи неки чуперак. △

Пример 3.14. За парно n можемо идентификовати $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^{n/2}$, те поставити $V(x) = ix$ што очигледно јесте векторско поље на свим сферама непарне димензије, што даје $\mathrm{Span}(\mathbf{S}^{2k+1}) > 0$. У специјалном случају за $n = 2$ добијамо глобални покретни репер на кругу $\mathbf{S}^1$ који се састоји од једног векторског поља датог са $V(x) = ix$, што можемо описати као јединично тангентно векторско поље које је усмерено математички позитивно. △

Векторско поље на $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ можемо потражити у облику $V(x) = Ax$ за неку матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Како захтевамо $Ax \perp x$, то имамо

$$x^\intercal Ax = 0 \tag{3.1}$$

за свако $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, а самим тим (одговарајућим скалирањем) и за свако $x \in \mathbb{R}^n$. Поларизацијом (3.1), $0 = (x+y)^\intercal A(x+y) = x^\intercal Ay + y^\intercal Ax = x^\intercal Ay + x^\intercal A^\intercal y = x^\intercal(A + A^\intercal)y$ важи за свако $x, y \in \mathbb{R}^n$, те је $A + A^\intercal = 0$. Дакле, последица услова (3.1) је антисиметрична матрица $A = -A^\intercal$. Важи и обрат јер антисиметрична матрица A повлачи $2x^\intercal Ax = x^\intercal(A + A^\intercal)x = 0$, те закључујумо да траженом векторском пољу једнозначно одговара нека антисиметрична матрица A.

Додатно, како је V нормирано то важи $\|V(x)\| = \|x\|$, што повлачи $(Ax)^\intercal(Ax) = x^\intercal x$, одакле је $x^\intercal(A^\intercal A - \mathbb{1})x = 0$, што одговара услову (3.1) за матрицу $A^\intercal A - \mathbb{1}$ која мора бити антисиметрична. Међутим $A^\intercal A - \mathbb{1}$ је очигледно симетрична, одакле следи $A^\intercal A = \mathbb{1}$, односно $A^2 = -\mathbb{1}$. Тражено векторско поље зависи од антисиметричне ортогоналне матрице A, а како је тада $(\det A)^2 = \det(A^2) = \det(-\mathbb{1}) = (-1)^n$, то можемо додатно потврдити да непарно n не долази у обзир.

Ако постоје $V_1, \ldots, V_k \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}^{n-1})$ тако да су вектори $V_1(x), \ldots, V_k(x) \in T_x\mathbf{S}^{n-1} \cong x^\perp$ линеарно независни за свако $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, тада Грам[2]–Шмитов[3] поступак конструише векторска поља са условом да су $V_1(x), \ldots, V_k(x)$ међусобно ортогонални за $x \in \mathbf{S}^{n-1}$. Због тога можемо претпоставити да за одговарајуће матрице $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ додатно важи $A_i x \perp A_j x$ за $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$. То доноси једначину $x^\intercal(A_i^\intercal A_j)x = 0$, која попут (3.1) повлачи антисиметричност за $A_i^\intercal A_j$. Тако добијамо $-A_iA_j = A_i^\intercal A_j = -(A_i^\intercal A_j)^\intercal = -A_j^\intercal A_i = A_jA_i$. Коначно, претходно наведени услови описују се Хурвицовом[4] релацијом

$$A_iA_j + A_jA_i = -2\delta_{ij}\,\mathbb{1}, \tag{3.2}$$

која важи за свако $1 \leqslant i, j \leqslant k$.

Класичан проблем је одредити паралелизабилне сфере $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, односно оне за које важи $\mathrm{Span}(\mathbf{S}^{n-1}) = n - 1$. Користећи методе алгебарске топологије, Бот[5] и Милнор [25], те независно од њих Кервер [72], доказали су 1958. да су једине паралелизабилне сфере оне са $n \in \{1, 2, 4, 8\}$. Ово питање уско је повезано са егзистенцијом нормираних алгебри са дељењем над реалним бројевима којих укупно има четири, а то су: реални бројеви $\mathbb{R}$, комплексни бројеви $\mathbb{C}$, кватерниони $\mathbb{H}$ и октониони

[2] Jørgen Pedersen Gram (1850–1916), дански математичар
[3] Erhard Schmidt (1876–1959), немачки математичар
[4] Adolf Hurwitz (1859–1919), немачки математичар
[5] Raoul Bott (1923–2005), мађарско-амерички математичар

$\mathbb{O}$. Конкретно, једине паралелизабилне сфере су $\mathbf{S}^0$, $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{S}^7$, које редом одговарају алгебрама $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$.

Пример 3.15. У случају $n = 4$ можемо поставити три антисиметричне ортогоналне матрице које испуњавају Хурвицове релације (3.2) са

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На овај начин добијамо три ортонормирана векторска поља на $\mathbf{S}^3$, те је сфера $\mathbf{S}^3$ паралелизабилна. Није тешко приметити да матрице A_1, A_2, A_3 одговарају множењу јединичним кватернионима $i, j, k \in \mathbb{H}$. △

Антисиметричне ортогоналне матрице за које важи (3.2) су независно посматрали Хурвиц [70] и Радон[6] [101] (такође видети Екман[7] [44]), што је уско повезано са ***Хурвиц–Радон функцијом*** $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ која је дата са

$$\rho(a \cdot 2^{4b+c}) = 8b + 2^c \quad \text{за} \quad 0 \leqslant c \leqslant 3 \quad \text{и} \quad 2 \nmid a. \tag{3.3}$$

Њихова алгебарска конструкција дала је доњу границу, $\operatorname{Span}(\mathbf{S}^{n-1}) \geqslant \rho(n) - 1$. Међутим, Адамс[8] је искористио софистициране технике теорије хомотопије да би омогућио коначно решење 1962. године [1]. Одговор је да не постоји још независних векторских поља сем оних која су већ конструисана.

Теорема 3.4. *За свако $n \in \mathbb{N}$ важи* $\operatorname{Span}(\mathbf{S}^{n-1}) = \rho(n) - 1$.

Последично, једине паралелизабилне сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ су оне за које је $\rho(n) = n$, што се дешава само за $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Пример 3.16. Иако сфера $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ не дозвољава свуда ненула векторско поље, на њој постоји векторско поље које је нула у тачно једној тачки. Стереографској пројекцији која је дата са $\varphi_-(x, y, z) = (x/(1-z), y/(1-z)) = (u, v)$ одговарају координатна векторска поља

$$\frac{\partial}{\partial u} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = (\varphi_-^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \circ \varphi_- \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}^2 \setminus \{p_+\}),$$

где је $x_1 = u \circ \varphi_-$. Друга карта, $\varphi_+(x, y, z) = (x/(1+z), y/(1+z)) = (\overline{u}, \overline{v})$ сагласна је са φ_- на пресеку $\mathbf{S}^2 \setminus \{p_+, p_-\}$, а веза добијена из (1.4) гласи

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right).$$

За $y_1 = \overline{u} \circ \varphi_+$ и $y_2 = \overline{v} \circ \varphi_+$ можемо израчунати

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial(\overline{u} \circ \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})}{\partial u} \circ \varphi_- = \frac{\partial \frac{u}{u^2+v^2}}{\partial u} \circ \varphi_- = \frac{v^2 - u^2}{(u^2+v^2)^2} \circ \varphi_- = (\overline{v}^2 - \overline{u}^2) \circ \varphi_+ = \frac{y^2 - x^2}{(1+z)^2}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial(\overline{v} \circ \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})}{\partial u} \circ \varphi_- = \frac{\partial \frac{v}{u^2+v^2}}{\partial u} \circ \varphi_- = \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2} \circ \varphi_- = (-2\overline{u}\overline{v}) \circ \varphi_+ = \frac{-2xy}{(1+z)^2}, \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{y^2 - x^2}{(1+z)^2} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{-2xy}{(1+z)^2} \frac{\partial}{\partial y_2},$$

[6] Johann Karl August Radon (1887–1956), аустријски математичар
[7] Beno Eckmann (1917–2008), швајцарски математичар
[8] John Frank Adams (1930–1989), британски математичар

те се векторско поље $\partial/\partial x_1$ може продужити и на тачку p_+. Конкретном формулом

$$V_q = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_q & \text{за } q \in \mathbf{S}^2 \setminus \{p_+\} \\ \left(\dfrac{y^2 - x^2}{(1+z)^2}\dfrac{\partial}{\partial y_1} + \dfrac{-2xy}{(1+z)^2}\dfrac{\partial}{\partial y_2}\right)_q & \text{за } q \in \mathbf{S}^2 \setminus \{p_-\} \end{cases}$$

се V добро дефинише у свакој тачки сфере $\mathbf{S}^2$, а како је глатко у локалним координатама очигледно имамо $V \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}^2)$. Наравно, $V_{p_+} = 0$, док је $V_q = (\partial/\partial x_1)_q \neq 0$ на $\mathbf{S}^2 \setminus \{p_+\}$. △

Наравно, сваких k линеарно независних векторских поља на сфери разапињу k-димензиону дистрибуцију. Међутим, иако свака дистрибуција није одређена на тај начин неким векторским пољима, знамо да сфера $\mathbf{S}^m$ дозвољава k-димензиону непрекидну дистрибуцију за $2k \leqslant m$ ако и само ако дозвољава k линеарно независних непрекидних векторских поља (видети Стинрод[9] [111, Теорема 27.16]). Одавде имамо наредну последицу Теореме 3.4.

Теорема 3.5. *Сфера $\mathbf{S}^{n-1}$ за $\rho(n) \leqslant k \leqslant n-1-\rho(n)$ не дозвољава k-димензиону дистрибуцију.*

3.4 Ковекторска поља

Котангентни простор многострукости M у тачки $p \in M$ је дуални простор тангентног простора,

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

Елементи котангентног простора T_p^*M су ***тангентни ковектори*** у p, што су линеарне функције $\omega_p \colon T_pM \to \mathbb{R}$. По узору на векторско поље, желимо да истражимо пресликавање ω које ће свакој тачки $p \in M$ глатко доделити ковектор ω_p у p.

На пример, за сваку функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ дефинишемо њен ***диференцијал*** df, тако што тачки $p \in M$ доделимо ковектор $df_p \in T_p^*M$ дат са $df_p(X_p) = X_p(f)$ за $X_p \in T_pM$. Тангентно пресликавање у овом важном специјалном случају $f \in \mathfrak{F}(M)$ рачунамо у некој карти (U, φ) у $p \in M$ по (2.2), одакле добијамо $T_pf(\partial/\partial x_j)_p = (\partial f/\partial x_j)(p)(d/dt)_{f(p)}$, те из линеарности тангентног пресликавања важи

$$T_pf(X_p) = X_p(f)\left(\frac{d}{dt}\right)_{f(p)}$$

за $X_p \in T_pM$. Одавде следи да ако искористимо предности идентификације $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, тада диференцијал df_p природно можемо поистоветити са тангентним пресликавањем T_pf.

Нека је M n-многострукост, а (U, φ) карта у произвољној тачки $p \in M$ са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. По Теореми 2.3, вектори $(\partial/\partial x_1)_p, \ldots, (\partial/\partial x_n)_p$ чине базу тангентног простора T_pM. Како је $(dx_i)_p(\partial/\partial x_j)_p = (\partial/\partial x_j)_p(x_i) = \delta_{ij}$ за $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то ковектори $(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p$ чине базу котангентог простора T_p^*M која је дуална датој бази за T_pM. Додатно, за $\omega_p \in T_p^*M$ и $X_p \in T_pM$, из (2.1) имамо

$$\omega_p(X_p) = \omega_p\left(\sum_{i=1}^n X_p(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^n X_p(x_i)\,\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{i=1}^n \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (dx_i)_p(X_p),$$

[9] Norman Earl Steenrod (1910–1971), амерички математичар

одакле добијамо

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (dx_i)_p. \tag{3.4}$$

Теорема 3.6. *Нека је M n-многострукост, а (U, φ) карта у $p \in M$ са $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Тада ковектори $(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p$ чине базу за T_p^*M и* (3.4) *важи за свако $\omega_p \in T_p^*M$.*

Како желимо да пресликавање $\omega \colon p \mapsto \omega_p$ буде глатко потребно је да његов кодомен буде многострукост. По узору на тангентно раслојење конструишемо ***котангентно раслојење***

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$$

многострукости M као унију свих котангентних простора. Као у случају тангентног раслојења, котангентно раслојење иде у пакету са пројекцијом $\pi \colon T^*M \to M$ која је природно дата са $\pi(\omega_p) = p$ за $\omega_p \in T_p^*M$. Слично конструкцији тангентног раслојења користимо карте (U, φ) са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$ да бисмо направили карте раслојења $\widetilde{\varphi} \colon \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ са

$$\widetilde{\varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (dx_i)_p \right) = (\varphi(p), \lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Ако је $\widetilde{\psi} \colon \pi^{-1}(V) \to \psi(V) \times \mathbb{R}^n$ још једно такво пресликавање, овог пута индуковано картом (V, ψ) са координатним функцијама $y_i = \pi_i \circ \psi$, тада из

$$(dx_i)_p = \sum_{j=1}^{n} \left((dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \right) (dy_j)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)(dy_j)_p$$

имамо

$$\begin{aligned}(\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1})(\varphi(p), \lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= \widetilde{\psi} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (dx_i)_p \right) = \widetilde{\psi} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right) (dy_j)_p \right) \\ &= \left(\psi(p), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial x_i}{\partial y_1}(p), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial x_i}{\partial y_n}(p) \right).\end{aligned}$$

Одговарајуће пресликавање $\tau \colon \varphi(U \cap V) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ је облика

$$\tau(\varphi(p)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n}(p) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}(p) \end{pmatrix}$$

што је глатко, а заправо је пресликавање које $z \in \varphi(U \cap V)$ шаље у транспонат Јакобијеве матрице $T_{\psi \circ \varphi^{-1}(z)}(\varphi \circ \psi^{-1})$. Зато је T^*M векторско раслојење са атласом раслојења који чине карте раслојења $\widetilde{\varphi}$, а самим тим T^*M је и глатка многострукост димензије $2n$.

Сечења котангентног раслојења су пресликавања $\omega \colon M \to T^*M$ за која важи $\pi \circ \omega = \mathbb{1}_M$. ***Ковекторско поље*** на многострукости M дефинишемо као глатко сечење котангентног раслојења T^*M, а скуп свих ковекторских поља обележавамо са $\mathfrak{X}^*(M) = \Gamma(T^*M)$.

Ако је (U, φ) карта на M са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$, тада је свако сечење ω котангентног раслојења T^*U линеарна комбинација $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx_i$, за неке функције $a_i \colon U \to \mathbb{R}$. Глаткоћа тих коефицијент функција зависи од глаткоће сечења јер за карту раслојења $\widetilde{\varphi}$ од T^*U важи $\widetilde{\varphi} \circ \omega = (\varphi, a_1, \ldots, a_n)$, те је ω глатко ако и само ако је $a_i \in \mathfrak{F}(U)$ за све $1 \leqslant i \leqslant n$.

Лема 3.7. *Ако је (U,φ) карта на n-многострукости M са координатним функцијама x_i, тада је сечење $\omega = \sum_{i=1}^n a_i\,dx_i$ котангентног раслојења T^*U глатко ако и само ако су све коефицијенти функције $a_i\colon U \to \mathbb{R}$ глатке.*

За $f \in \mathfrak{F}(M)$, можемо посматрати диференцијал df који у оквиру карте (U,φ) мора бити облика $df = \sum_{i=1}^n a_i\,dx_i$. Применом на координатне векторе добијамо коефицијент функције

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) f = (df)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^n a_i\,dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^n a_i\delta_{ij} = a_j,$$

које су очигледно глатке, те имамо ковекторско поље $df \in \mathfrak{X}^*(M)$, као и локално изражавање,

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i. \tag{3.5}$$

Пример 3.17. Диференцијал функције $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дате са $f(x,y) = xy^2\sin x$ рачунамо по формули (3.5),

$$df = \frac{\partial(xy^2\sin x)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(xy^2\sin x)}{\partial y}\,dy = y^2(\sin x + x\cos x)\,dx + 2xy\sin x\,dy.$$

△

Пример 3.18. Иако је диференцијал глатке функције ковекторско поље, постоје ковекторска поља која нису диференцијал неке глатке функције. На пример, ако постоји $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$ такво да је $dx + x\,dy = df$, онда имамо $\partial f/\partial x = 1$ и $\partial f/\partial y = x$, одакле најпре следи $f(x,y) = x + \gamma(y)$, а затим $\gamma'(y) = x$, што је немогуће. △

Из формуле (3.5), директно се можемо уверити да диференцијал $d\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ има лепе особине из наредне леме.

Лема 3.8. *За свако $f,h \in \mathfrak{F}(M)$, $l \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, важи формула* (3.5) *као и*

$$\begin{aligned} d(\alpha f + \beta h) &= \alpha df + \beta dh,\\ d(fh) &= f dh + h df,\\ d(l\circ f) &= (l'\circ f)df. \end{aligned}$$

Наравно, за константно $f \in \mathfrak{F}(M)$ је $df = 0$, док $df = 0$ за повезано M повлачи константно f, што је последица Леме 2.20.

За произвољно сечење ω котангентног раслојења T^*M и векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$, природно дефинишемо функцију $\omega(X)\colon M \to \mathbb{R}$ са $\omega(X)_p = \omega_p(X_p)$ за $p \in M$. Произвољна функција $f\colon M \to \mathbb{R}$ пролази кроз ω због $\omega(fX)_p = \omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p(X_p) = (f\omega(X))_p$, одакле следи $\omega(fX) = f\omega(X)$. У некој карти (U,φ) на M, из формула (3.4) и (2.1) можемо израчунати

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^n \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\,dx_i\left(\sum_{j=1}^n Xx_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^n \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)Xx_j\,dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^n \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)Xx_i.$$

Уколико је ω глатко сечење, Лема 3.7 даје $\omega(\partial_i) \in \mathfrak{F}(U)$, одакле је $\omega(X)$ глатко на произвољној координатној околини, те је $\omega(X) \in \mathfrak{F}(M)$. Обратно, ако је $\omega(X) \in \mathfrak{F}(M)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$, то посебно важи за ∂_i, те је $\omega = \sum_{i=1}^n \omega(\partial_i)\,dx_i$ глатко по Леми 3.7. Дакле, ковекторско поље $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ се може препознати и као пресликавање $\omega\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$.

Лема 3.9. *Сечење ω котангентног раслојења T^*M је глатко ако и само ако за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$ важи $\omega(X) \in \mathfrak{F}(M)$.*

Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости M и N. Дуално глобалном тангентном пресликавању $f_* = Tf\colon TM \to TN$ које гура векторе из M у N, можемо посматрати пресликавање које окреће стрелицу и враћа назад ковекторе из N у M. ***Повлачење*** (*pullback*) је пресликавање $f^*\colon T^*N \to T^*M$ дефинисано са

$$(f^*(\omega_{f(p)}))(X_p) = \omega_{f(p)}(f_*(X_p))$$

за ковектор $\omega_{f(p)} \in T^*_{f(p)}N$ и вектор $X_p \in T_pM$ у тачки $p \in M$.

За разлику од векторских поља која у општем случају не можемо гурнути глатким пресликавањем, ковекторска поља се увек могу повући глатким пресликавањем. За $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$ дефинишемо ***повлачење*** $f^*\omega$ као сечење котангентног раслојења T^*M тако да је $(f^*\omega)_p = f^*(\omega_{f(p)})$ за $p \in M$, односно да $(f^*\omega)_p(X_p) = \omega_{f(p)}(f_*(X_p))$ важи за свако $X_p \in T_pM$. Такође се могу повлачити и функције $h \in \mathfrak{F}(N)$ тако што дефинишемо $f^*h = h \circ f \in \mathfrak{F}(M)$.

Лема 3.10. *За глатко пресликавање $f\colon M \to N$ и $\omega, \tau \in \mathfrak{X}^*(N)$, те $h \in \mathfrak{F}(N)$ важи*

$$\begin{aligned} f^*(dh) &= d(f^*h), \\ f^*(\omega + \tau) &= f^*\omega + f^*\tau, \\ f^*(h\omega) &= (f^*h)(f^*\omega). \end{aligned}$$

Доказ. Повлачење и диференцијал комутирају јер за $p \in M$ и $X_p \in T_pM$ имамо

$$(f^*dh)_p(X_p) = (dh)_{f(p)}(f_*(X_p)) = (f_*(X_p))h = X_p(h \circ f) = X_p(f^*h) = (d(f^*h))_p(X_p),$$

док преостале две једнакости лако проверавамо. □

Теорема 3.11. *Ако је $f\colon M \to N$ глатко и $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$ онда је $f^*\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Доказ. За $p \in M$ имамо карту (U, φ) у $p \in M$ са $x_j = \pi_j \circ \varphi$ за $1 \leqslant j \leqslant m = \dim M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$ са $y_i = \pi_i \circ \psi$ за $1 \leqslant i \leqslant n = \dim N$, тако да је $f(U) \subseteq V$ и $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. Како је $\omega\restriction_V = \sum_{i=1}^n a_i\, dy_i$ за неке $a_i \in \mathfrak{F}(V)$, то из (3.5) имамо

$$(f^*\omega)\restriction_U = \sum_{i=1}^n (f^*a_i) f^*(dy_i) = \sum_{i=1}^n (f^*a_i)\, d(f^*y_i) = \sum_{i=1}^n (a_i \circ f)\, d(y_i \circ f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i \circ f) \frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Како су коефицијент функције $\sum_{i=1}^n (a_i \circ f)(\partial(y_i \circ f)/\partial x_j)$ глатке, то је $f^*\omega$ глатко на U по Леми 3.7. Дакле, $f^*\omega$ је глатко у свакој тачки $p \in M$, одакле следи $f^*\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. □

Пример 3.19. Нека је $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ дато са $(u, v) = f(x, y, z) = (x^2y, y \sin z)$, а $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^2)$ дато са $\omega = u\, dv + v\, du$. Директним рачуном имамо

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (f^*u)(f^*dv) + (f^*v)(f^*du) = (u \circ f)\, d(v \circ f) + (v \circ f)\, d(u \circ f) \\ &= (x^2y)\, d(y \sin z) + (y \sin z)\, d(x^2y) = x^2y(\sin z\, dy + y \cos z\, dz) + y \sin z(2xy\, dx + x^2\, dy), \end{aligned}$$

одакле добијамо $f^*\omega = 2xy^2 \sin z\, dx + 2x^2y \sin z\, dy + x^2y^2 \cos z\, dz$. △

3.5 Тензорска поља

Појам тензорског поља на многострукости M уопштава појмове глатких реалних функција $\mathfrak{F}(M)$, векторских поља $\mathfrak{X}(M)$ и ковекторских поља $\mathfrak{X}^*(M)$, те омогућава још компликованије објекте на многострукости. Тензори се јављају у много различитих облика, а њихова општа карактеристика је мултилинеарност.

У неком општем случају можемо посматрати модул $\mathcal{V}$ над прстеном K, као и њему дуалан модул $\mathcal{V}^* = \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, K)$. ***Тензор*** типа $(r,s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ на $\mathcal{V}$ је K-мултилинеарно пресликавање $A\colon (\mathcal{V}^*)^r \times (\mathcal{V})^s \to K$. Скуп $\mathfrak{T}^r_s(\mathcal{V})$ свих тензора типа (r,s) на $\mathcal{V}$ је модул над K са уобичајеним дефиницијама сабирања и множења са елементом из K.

Тензорско поље A на многострукости M је тензор на $\mathfrak{F}(M)$-модулу $\mathfrak{X}(M)$. То заправо значи да је $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно пресликавање

$$A\colon \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s} \to \mathfrak{F}(M),$$

тензорско поље типа $(r,s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Самим тим, скуп $\mathfrak{T}^r_s(M)$ свих тензорских поља на M типа (r,s) је модул над $\mathfrak{F}(M)$.

Пример 3.20. Тензорско поље уопштава раније уведене појмове. У специјалном случају $(r,s) = (0,0)$ тензорска поља су глатке функције на M, $\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$. По Леми 3.9, ковекторска поља $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ су $\mathfrak{F}(M)$-линеарна пресликавања $\omega\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$, тако да је $\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$. Што се векторских поља тиче, свако $X \in \mathfrak{X}(M)$ одређује тензорско поље $\overline{X}\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(M)$ са $\overline{X}(\omega) = \omega(X)$, док је очигледна обратна веза $Xf = df(X) = \overline{X}(df)$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$. Тако добијамо идентификацију $\mathfrak{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$, те убудуће користимо исту ознаку, $\overline{X} = X \in \mathfrak{X}(M)$, односно за свако $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ важи $X(\omega) = \omega(X)$. △

Испитивање да је неко пресликавање $A\colon \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$ тензорско поље своди се на проверу да је оно $\mathfrak{F}(M)$-линеарно по свакој компоненти (односно по свакој променљивој понаособ). Често је адитивност по компонентама очигледна, тако да је суштинско питање да ли се функције из $\mathfrak{F}(M)$ могу извући испред A на свакој компоненти,

$$A(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, fX_i, \ldots, X_s) = fA(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_s).$$

Пример 3.21. Дефинишимо пресликавање $E\colon \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ са $E(\omega, X) = \omega(X)$. Оно је очигледно $\mathfrak{F}(M)$-линеарно и по првој и по другој компоненти, те је $E \in \mathfrak{T}^1_1(M)$. △

Пример 3.22. За фиксирано $0 \neq \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ дефинишемо $F\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ са $F(X,Y) = X(\omega(Y))$. Пресликавање F је $\mathfrak{F}(M)$-линеарно по првој компоненти, али је по другој компоненти само адитивно, $F(X, fY) = X(\omega(fY)) = X(f\omega(Y)) = (Xf)\omega(Y) + fF(X,Y)$, тако да F није тензорско поље. △

Пример 3.23. Свако $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно $A\colon \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ природно се идентификује са $\overline{A}\colon \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M)$ које је дато са $\overline{A}(\omega, X_1, \ldots, X_s) = \omega(A(X_1, \ldots, X_s))$ и индукује тензорско поље $\overline{A} \in \mathfrak{T}^1_s(M)$. Због тога можемо користити исту ознаку, $\overline{A} = A$, те подразумевати да важи $A \in \mathfrak{T}^1_s(M)$. △

За тензоре типа $(0,s)$ кажемо да су ***коваријантни*** реда s, док за тензоре типа $(r,0)$ кажемо да су ***контраваријантни*** реда $r \geqslant 1$. На пример, реалне глатке функције и ковекторска поља су коваријантни тензори, док су векторска поља контраваријантни тензори.

Док се могу сабирати само тензори истог типа, било која два тензора могу се множити. За $A_1 \in \mathfrak{T}^{r_1}_{s_1}(M)$ и $A_2 \in \mathfrak{T}^{r_2}_{s_2}(M)$ дефинишемо $A_1 \otimes A_2 \colon \mathfrak{X}^*(M)^{r_1+r_2} \times \mathfrak{X}(M)^{s_1+s_2} \to \mathfrak{F}(M)$ са

$$\begin{aligned}(A_1 \otimes A_2)&(\omega_1, \dots, \omega_{r_1+r_2}, X_1, \dots, X_{s_1+s_2})\\ &= A_1(\omega_1, \dots, \omega_{r_1}, X_1, \dots, X_{s_1})\, A_2(\omega_{r_1+1}, \dots, \omega_{r_1+r_2}, X_{s_1+1}, \dots, X_{s_1+s_2}).\end{aligned}$$

Тада је $A_1 \otimes A_2$ тензор типа $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ који зовемо ***тензорски производ*** A_1 и A_2. Посебно за $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$ имамо $A \otimes f = f \otimes A = fA$, док се додатно у случају $A \in \mathfrak{F}(M)$ тензорски производ своди на обично множење функција у $\mathfrak{F}(M)$.

Тензорски производ је $\mathfrak{F}(M)$-линеаран, јер $(f_1A_1 + f_2A_2) \otimes B = f_1 A_1 \otimes B + f_2 A_2 \otimes B$ важи за $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(M)$, $A_1, A_2 \in \mathfrak{T}^{r_1}_{s_1}(M)$, $B \in \mathfrak{T}^{r_2}_{s_2}(M)$, као и сличан идентитет по другој компоненти. Такође, директно из дефиниције следи да је тензорски производ асоцијативан, те за тензоре A, B, C произвољних типова често пишемо без заграда $A \otimes B \otimes C$. Приметимо да за коваријантан тензор A и контраваријантан тензор B по дефиницији важи $A \otimes B = B \otimes A$. Међутим, иако функције комутирају са било чим, $f(A \otimes B) = (fA) \otimes B = A \otimes (fB)$, тензорски производ у општем случају није комутативан.

Пример 3.24. На координатној околини имамо $(dx_1 \otimes dx_2)(\partial_1, \partial_2) = dx_1(\partial_1)\, dx_2(\partial_2) = 1$, као и $(dx_2 \otimes dx_1)(\partial_1, \partial_2) = dx_2(\partial_1)\, dx_1(\partial_2) = 0$, тако да је $dx_1 \otimes dx_2 \neq dx_2 \otimes dx_1$. △

По узору на векторско и ковекторско поље, тензорском пољу A на многострукости M такође можемо доделити вредност A_p у свакој тачки $p \in M$. Испоставља се да та вредност A_p не зависи од целокупних векторских и ковекторских поља, чак ни од њихових вредности у некој околини тачке p, већ искључиво од њихових појединачних вредности у самој тачки p.

Лема 3.12. *Ако неко ковекторско поље $\omega_1, \dots, \omega_r$ или неко векторско поље $X_1, \dots, X_s$ има вредност 0 у тачки $p \in M$, тада за $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ важи $A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0$.*

Доказ. Нека је (U, φ) карта у $p \in M$ са $x_i = \pi_i \circ \varphi \in \mathfrak{F}(U)$. По Леми 1.17 постоји џомбаста функција $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржана у U са $b(p) = 1$, што омогућава продужења $bX_j(x_i) \in \mathfrak{F}(M)$ и $b\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$, те $b\omega_j(\partial_i) \in \mathfrak{F}(M)$ и $b\, dx_i \in \mathfrak{X}^*(M)$. Из мултилинеарности тензора имамо једнакости

$$\begin{aligned}b^2 A(\dots, X_j, \dots) &= A(\dots, \sum_{i=1}^n bX_j(x_i)\, b\partial_i, \dots) = \sum_{i=1}^n bX_j(x_i)\, A(\dots, b\partial_i, \dots),\\ b^2 A(\dots, \omega_j, \dots) &= A(\dots, \sum_{i=1}^n b\omega_j(\partial_i)\, b\, dx_i, \dots) = \sum_{i=1}^n b\omega_j(\partial_i)\, A(\dots, b\, dx_i, \dots),\end{aligned}$$

које рачунамо у тачки $p \in M$. Ако је $(X_j)_p = 0$ за неко $1 \leqslant j \leqslant s$, то је $(bX_j(x_i))(p) = 0$, одакле следи $A(\dots, X_j, \dots)(p) = 0$. Сасвим слично, $(\omega_j)_p = 0$ за неко $1 \leqslant j \leqslant r$ повлачи $(b\omega_j(\partial_i))(p) = 0$, одакле је $A(\dots, \omega_j, \dots)(p) = 0$. □

Теорема 3.13. *Вредност $A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p)$ тензора $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ у тачки $p \in M$ зависи само од појединачних вредности $(\omega_1)_p, \dots, (\omega_r)_p, (X_1)_p, \dots, (X_s)_p$.*

Доказ. Нека је $(\omega_i)_p = (\overline{\omega}_i)_p$ за $\omega_i, \overline{\omega}_i \in \mathfrak{X}^*(M)$, $1 \leqslant i \leqslant r$ и $(X_j)_p = (\overline{X}_j)_p$ за $X_j, \overline{X}_j \in \mathfrak{X}(M)$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Вредност разлике

$$\begin{aligned}A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) &- A(\overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_r, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_s)\\ &= A(\omega_1 - \overline{\omega}_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) + A(\overline{\omega}_1, \omega_2 - \overline{\omega}_2 \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)\\ &\qquad + \dots + A(\overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_r, \overline{X}_1, \dots, X_s - \overline{X}_s)\end{aligned}$$

у тачки $p \in M$ једнака је 0 јер се сваки од $r + s$ чланова по Леми 3.12 анулира у p. □

Директно из Теореме 3.13 следи да тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ има вредност A_p у свакој тачки $p \in M$, што је функција $A_p \colon (T^*_pM)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$A_p((\omega_1)_p, \dots, (\omega_r)_p, (X_1)_p, \dots, (X_s)_p) = A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p).$$

Лако је проверити $\mathbb{R}$-мултилинеарност функције A_p, тако да рестрикцијом тензорског поља $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ на тачку $p \in M$ добијамо тензор $A_p \in \mathfrak{T}^r_s(T_pM)$. Као што је векторско поље глатко сечење тангентног раслојења, тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ се може посматрати као глатко сечење одговарајућег тензорског раслојења које свакој тачки $p \in M$ додељује тензор A_p. Посебно, ова интерпретација омогућава да рестрикцију $A\restriction_U$ тензорског поља $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ на отворен подскуп $U \subset M$ видимо као добро дефинисано тензорско поље на U, односно $A\restriction_U \in \mathfrak{T}^r_s(U)$.

Нека је (U, φ) карта на n-многострукости M, а $x_i = \pi_i \circ \varphi$ њене координатне функције. Координатне формуле, (2.1) за векторска поља и (3.4) за ковекторска поља, могу се лако проширити на тензорска поља произвољног типа. ***Компоненте*** тензорског поља $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ у односу на дату карту су функције

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = A\left(dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}, \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}\right) \in \mathfrak{F}(U),$$

које дефинишемо за све индексе $1 \leqslant i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leqslant n$.

Компоненте ковекторског поља $\omega \in \mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ су $\omega_j = \omega(\partial_j)$, и оне се виде у формули (3.4), $\omega = \sum_j \omega_j \, dx_j$. Слично, компоненте векторског поља $X \in \mathfrak{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$ су $X^i = X(dx_i) = dx_i(X) = X(x_i)$ и оне се појављују у формули (2.1), $X = \sum_i X^i \partial_i$.

Пример 3.25. Уколико је $A \in \mathfrak{T}^1_s(M)$ представљено са $A \colon \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ као у Примеру 3.23, онда су његове компоненте одређене са

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}\right) = \sum_{j=1}^{n} A^j_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

јер је $A(dx_j, \partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s}) = dx_j(A(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s})) = \sum_k A^k_{i_1 \dots i_s} \, dx_j(\partial_k) = A^j_{i_1 \dots i_s}$. △

Произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ се може изразити преко компоненти са

$$A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leqslant n} (\omega_1)_{i_1} \cdots (\omega_r)_{i_r} (X_1)^{j_1} \cdots (X_s)^{j_s} A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}, \tag{3.6}$$

те ако искористимо $(\omega_k)_i = \omega_k(\partial_i) = \partial_i(\omega_k)$ и $(X_k)^j = X_k(dx_j) = dx_j(X_k)$ добијамо

$$A = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leqslant n} A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_s}. \tag{3.7}$$

Можемо приметити да су у фиксираној карти компоненте суме тензора једноставно суме компонената, док се компоненте тензорског производа могу записати са

$$(A \otimes B)^{i_1 \dots i_{r+r'}}_{j_1 \dots j_{s+s'}} = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \cdot B^{i_{r+1} \dots i_{r+r'}}_{j_{s+1} \dots j_{s+s'}}.$$

На скупу тензора постоји интересантна операција која тензоре типа (r, s) сабија у тензоре типа $(r-1, s-1)$, а општа дефиниција заснива се на следећем специјалном случају.

Лема 3.14. *Постоји јединствено $\mathfrak{F}(M)$-линеарно пресликавање $C \colon \mathfrak{T}^1_1(M) \to \mathfrak{F}(M)$ такво да је $C(X \otimes \omega) = \omega(X)$ за све $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Доказ. У координатној околини U свако $A \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ се по формули (3.7) изражава са $A = \sum_{i,j=1}^n A^i_j \partial_i \otimes dx_j$. Како захтевамо $C(\partial_i \otimes dx_j) = dx_j(\partial_i) = \delta_{ij}$, то морамо дефинисати $C(A) = \sum_{i=1}^n A^i_i = \sum_{i=1}^n A(dx_i, \partial_i)$. Овакво C има тражене особине на U. За проширење пресликавања на целу многострукост довољно је показати да је ова дефиниција независна од избора координатног система, те провера

$$\sum_k A\left(dy_k, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \sum_k A\left(\sum_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} dx_i, \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial y_k} A\left(dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$
$$= \sum_{i,j} \delta_{ij} A\left(dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_i A\left(dx_i, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

комплетира доказ. □

Пресликавање C из претходне леме зове се $(1,1)$ ***контракција*** и чини основу за општији случај. Наиме, ако изаберемо једно контраваријантно место $1 \leqslant i \leqslant r$ и једно коваријантно место $1 \leqslant j \leqslant s$ и применимо C на пресликавање

$$(\omega_i, X_j) \mapsto A(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s),$$

добијамо $(1,1)$ тензор за фиксиране $\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_s$. Тако имамо $(C^i_j A)(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_s) \in \mathfrak{F}(M)$, одакле следи $C^i_j A \in \mathfrak{T}^{r-1}_{s-1}(M)$ и кажемо да је $C^i_j A$ ***контракција*** од A над i, j. Што се тиче компоненти контракције, имамо

$$(C^i_j A)^{p_1 \ldots p_{r-1}}_{q_1 \ldots q_{s-1}} = \sum_{k=1}^n A^{p_1 \ldots p_{i-1}\, k\, p_i \ldots p_{r-1}}_{q_1 \ldots q_{j-1}\, k\, q_j \ldots q_{s-1}}.$$

Пример 3.26. Контракција тензора може се видети као уопштење трага. Линеарни оператор $L \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ на коначно-димензионом векторском простору $\mathcal{V}$ има репрезентацију $L \in \mathfrak{T}^1_1(\mathcal{V})$ (видети Пример 3.23). У односу на неку базу $(e_1, \ldots, e_n)$ у $\mathcal{V}$, компоненте тензора одговарају улазима матрице, јер важи $L(e_i) = \sum_j L^j_i e_j$ (видети Пример 3.25). Зато је $CL = \sum_j L^j_j = \mathrm{Tr}\, L$, што значи да је контракција од L једнака трагу од L. △

Повлачење ковекторског поља уопштавамо на повлачење коваријантног тензора. Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости. ***Повлачење коваријантног тензора*** $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ дефинишемо са

$$(f^* A)(X_1, \ldots, X_s) = A(f_*(X_1), \ldots, f_*(X_s))$$

за свако $p \in M, X_i \in T_pM$. У свакој тачки $p \in M$, повлачење $f^*(A)$ даје $\mathbb{R}$-мултилинеарну функцију из $(T_pM)^s$ у $\mathbb{R}$, што је $(0,s)$ тензор на T_pM. Координатни рачун показаће да је $f^*(A)$ коваријантно тензорско поље на M.

Дакле, за глатко $f\colon M \to N$ и свако $s \geqslant 0$ имамо $\mathbb{R}$-линеарно $f^*\colon \mathfrak{T}^0_s(N) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$. Додатно, за $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ и $B \in \mathfrak{T}^0_t(N)$ имамо $f^*(A \otimes B) = f^*(A) \otimes f^*(B)$. Такође, за глатко $h\colon N \to P$ важи $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*\colon \mathfrak{T}^0_s(P) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$.

У општем случају, преуређивање аргумената тензора не мора остварити неки очекивани разултат на његову вредност. Међутим, неки тензори не мењају своју вредност приликом преуређивања аргумената. За коваријантан или контраваријантан тензор (реда бар 2) кажемо да је ***симетричан*** ако његова вредност остаје непромењена приликом замене било која два аргумента. Уколико свака таква замена проузрокује промену знака онда за тај тензор кажемо да је ***антисиметричан***.

Симетричан део коваријантног тензора A реда s је нови коваријантни тензор $\operatorname{Sym} A$ реда s који је дат са

$$(\operatorname{Sym} A)(X_1, \dots, X_s) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} A(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)}),$$

где је S_s симетрична група од s елемената, односно група пермутација скупа $\{1, \dots, s\}$. Лако је видети да је $\operatorname{Sym} A$ симетричан, као и да је A симетричан ако и само ако је $\operatorname{Sym} A = A$.

Ако су A и B симетрични коваријантни тензори, тада $A \otimes B$ у општем случају није симетричан. Међутим, њихов ***симетричан производ*** $AB = \operatorname{Sym}(A \otimes B)$ јесте симетричан тензор, а лако је проверити да је он комутативан ($AB = BA$) и $\mathbb{R}$-билинеаран ($(\alpha A + \beta B)C = \alpha AC + \beta BC$). Посебно, ако су ω и τ ковекторска поља, тада је

$$\omega\tau = \frac{1}{2}(\omega \otimes \tau + \tau \otimes \omega),$$

а често користимо ω^2 као краћу ознаку за симетричан производ $\omega\omega$.

3.6 Извод тензорских поља

За сада смо размотрили само алгебарску страну тензорских поља, те је време да успоставимо диференцијални рачун. ***Извод*** тензорског поља на многострукости M је фамилија $\mathbb{R}$-линеарних пресликавања

$$\nabla = \nabla^r_s \colon \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_s(M), \quad (r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,$$

таквих да за произвољна тензорска поља A, B и произвољну контракцију C важе једнакости

$$\nabla(A \otimes B) = \nabla A \otimes B + A \otimes \nabla B, \tag{3.8}$$

$$\nabla(CA) = C(\nabla A). \tag{3.9}$$

На основу дефиниције, извод ∇ је $\mathbb{R}$-линеаран, чува тип тензора, поштује Лајбницово правило и комутира са контракцијама.

За $f \in \mathfrak{F}(M)$ је $fA = f \otimes A$, тако да важи $\nabla(fA) = (\nabla f)A + f\nabla A$. Посебно, у специјалном случају $(r, s) = (0, 0)$, ∇^0_0 је диференцирање на $\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$, те постоји јединствено векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ такво да је $\nabla f = Xf$ за свако $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Како извод тензорског поља није $\mathfrak{F}(M)$-линеаран, у општем случају вредност од ∇A у тачки $p \in M$ не може се уобичајено одредити из самог A_p. Међутим, она се може наћи из вредности од A на произвољно малој околини од p, а тај локални карактер извода видимо у наредном тврђењу.

Теорема 3.15. *Ако је ∇ извод тензорског поља на многострукости M и $U \subset M$ отворен подскуп, тада постоји јединствен извод ∇_U на U такав да је $\nabla_U(A\restriction_U) = (\nabla A)\restriction_U$ за свако тензорско поље A на M.*

Доказ. За свако $p \in U$ по Леми 1.17 постоји џомбаста функција $b_p \in \mathfrak{F}(M)$ која је подржана у U и идентички једнака 1 на некој околини $V_p \ni p$. За произвољно тензорско поље $T \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ имамо $b_pT \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, што нам омогућава да дефинишемо $(\nabla_U T)_p = (\nabla(b_pT))_p$. Најпре се може показати да ова дефиниција не зависи од избора џомбасте функције, те да важи $\nabla_U T \in \mathfrak{T}^r_s(U)$. Након тога преостаје да се покаже да је ∇_U извод тензора на U, да има тражене особине рестрикције, као и да је јединствен. □

Лајбницова формула за тензоре (3.8) може се преобликовати и уопштити. Упоређивањем функције $A(\omega_1,\dots,X_s)\in\mathfrak{F}(M)$ из (3.6) са тензором $A\otimes\omega_1\otimes\dots\otimes X_s\in\mathfrak{T}^{r+s}_{r+s}(M)$ чије су компоненте

$$(A\otimes\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_r\otimes X_1\otimes\dots\otimes X_s)^{i_1\dots i_r l_1\dots l_s}_{j_1\dots j_s k_1\dots k_r}=A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(\omega_1)_{k_1}\dots(\omega_r)_{k_r}(X_1)^{l_1}\dots(X_s)^{l_s},$$

видимо да након $r+s$ контракција, у којима ћемо упарити i_t са k_t, а j_t са l_t, добијамо једнакост

$$A(\omega_1,\dots,\omega_r,X_1,\dots,X_s)=C^1_1C^2_2\dots C^r_rC^{r+1}_1\dots C^{r+s}_s(A\otimes\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_r\otimes X_1\otimes\dots\otimes X_s),$$

одакле извод доноси

$$\begin{aligned}\nabla\big(A(\omega_1,\dots,\omega_r,X_1,\dots,X_s)\big)=&(\nabla A)(\omega_1,\dots,\omega_r,X_1,\dots,X_s)\\&+\sum_{i=1}^{r}A(\omega_1,\dots,\nabla\omega_i,\dots,\omega_r,X_1,\dots,X_s)\\&+\sum_{j=1}^{s}A(\omega_1,\dots,\omega_r,X_1,\dots,\nabla X_j,\dots,X_s).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Из формуле (3.10) следи да се члан који укључује ∇A може изразити у терминима извода ∇ примењеног само на функције, векторска поља и ковекторска поља. Штавише, како

$$(\nabla\omega)(X)=\nabla(\omega X)-\omega(\nabla X)\tag{3.11}$$

важи за $\omega\in\mathfrak{X}^*(M)$ то је довољно знати само изводе функција и векторских поља. Испоставља се да важи и обрат, односно да од одговарајућих информација на $\mathfrak{F}(M)$ и $\mathfrak{X}(M)$ заиста можемо конструисати извод тензора.

Теорема 3.16. *За дато векторско поље $\nabla^0_0\colon\mathfrak{F}(M)\to\mathfrak{F}(M)$ и $\mathbb{R}$-линеарно пресликавање $\nabla^1_0\colon\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ такво да $\nabla^1_0(fX)=(\nabla^0_0f)X+f\nabla^1_0X$ важи за све $f\in\mathfrak{F}(M)$ и $X\in\mathfrak{X}(M)$, постоји јединствен извод ∇ тензорског поља на M чији су ∇^0_0 и ∇^1_0 одговарајући делови.*

Доказ. Јединственост следи из формуле (3.10) коју користимо да комплетирамо ∇. Најпре, за $\omega\in\mathfrak{X}^*(M)$ због (3.11) морамо поставити $(\nabla^0_1\omega)(X)=\nabla^0_0(\omega(X))-\omega(\nabla^1_0X)$, одакле је

$$\begin{aligned}(\nabla^0_1\omega)(fX)&=\nabla^0_0(\omega(fX))-\omega(\nabla^1_0fX)=\nabla^0_0(f\omega(X))-\omega((\nabla^0_0f)X+f\nabla^1_0X)\\&=(\nabla^0_0f)\omega(X)+f\nabla^0_0(\omega(X))-(\nabla^0_0f)\omega(X)-f\omega(\nabla^1_0X)=f(\nabla^0_1\omega)(X),\end{aligned}$$

што значи да $\nabla^0_1\omega$ јесте $\mathfrak{F}(M)$-линеарно и зато важи $\nabla^0_1\omega\in\mathfrak{X}^*(M)$. Такође је једноставно уочити да $\nabla^0_1\colon\mathfrak{X}^*(M)\to\mathfrak{X}^*(M)$ јесте $\mathbb{R}$-линеарно. По формули (3.10), ∇^r_sA за $r+s\geqslant 2$ и $A\in\mathfrak{T}^r_s(M)$ мора бити изражено са

$$\begin{aligned}(\nabla^r_sA)(\omega_1,\dots,\omega_r,X_1,\dots,X_s)&=\nabla^0_0\big(A(\omega_1,\dots,\omega_r,X_1,\dots,X_s)\big)\\&-\sum_{i=1}^{r}A(\omega_1,\dots,\nabla^0_1\omega_i,\dots,\omega_r,X_1,\dots,X_s)-\sum_{j=1}^{s}A(\omega_1,\dots,\omega_r,X_1,\dots,\nabla^1_0X_j,\dots,X_s),\end{aligned}$$

те га тако и дефинишемо. Даље се, као и раније, проверава да ∇^r_sA јесте $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно, односно да $\nabla^r_sA\in\mathfrak{T}^r_s(M)$, као и да $\nabla^r_s\colon\mathfrak{T}^r_s(M)\to\mathfrak{T}^r_s(M)$ јесте $\mathbb{R}$-линеарно. Наредни корак је директна провера да важи $\nabla(A\otimes B)=\nabla A\otimes B+A\otimes\nabla B$.

Преостаје доказати да извод комутира са контракцијама. За $C\colon\mathfrak{T}^1_1(M)\to\mathfrak{F}(M)$ имамо $\nabla C(X\otimes\omega)=\nabla(\omega(X))=(\nabla\omega)(X)+\omega(\nabla X)=C(X\otimes\nabla\omega+\nabla X\otimes\omega)=C\nabla(X\otimes\omega)$, одакле C и ∇ комутирају на тензорима облика $X\otimes\omega$. Локалност од ∇ пребацује причу на координатне околине, где знамо да су сва тензорска поља типа $(1,1)$ суме тензорских производа. На крају се овај процес може проширити на контракције тензора произвољног типа. □

Пример 3.27. За свако $V \in \mathfrak{X}(M)$, по претходној теореми постављамо извод L_V тензорског поља на M са $L_V(f) = Vf$ за свако $f \in \mathfrak{F}(M)$ и са $L_V(X) = [V, X]$ за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$. Услови теореме су испуњени јер $(L_V)^0_0 = V$ јесте векторско поље, $(L_V)^1_0 = [V, \cdot]$ је $\mathbb{R}$-линеарно, док је испуњена и једнакост $L_V(fX) = [V, fX] = (Vf)X + f[V, X] = (L_V f)X + fL_V X$. Овај извод L_V зовемо ***Лијев извод*** у односу на V. △

Лема 3.17. *Ако је $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ онда за Лијев извод важи $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$.*

Доказ. Најпре проверавамо формулу за $f \in \mathfrak{F}(M) = \mathfrak{T}^0_0(M)$, где је

$$[L_X, L_Y]f = L_X L_Y f - L_Y L_X f = XYf - YXf = [X, Y]f = L_{[X,Y]}f.$$

Након тога доказујемо формулу за $V \in \mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^1_0(M)$, где користимо Јакобијев идентитет (2.7) за

$$L_X L_Y V - L_Y L_X V = [X, [Y, V]] - [Y, [X, V]] = [X, [Y, V]] + [X, [V, Y]] + [V, [Y, X]] = [[X, Y], V] = L_{[X,Y]}V.$$

Како се $[L_X, L_Y]$ и $L_{[X,Y]}$ слажу на $\mathfrak{T}^0_0(M)$ и $\mathfrak{T}^1_0(M)$, по Теореми 3.16 довољно је још само доказати да је $[L_X, L_Y]$ извод тензорског поља. Почетни услови су очигледни, те преостаје да се провере особине (3.8) и (3.9). Контракције комутирају са L_X и L_Y, те је $[L_X, L_Y]C = L_X L_Y C - L_Y L_X C = CL_X L_Y - CL_Y L_X = C[L_X, L_Y]$, док из

$$L_X L_Y(A \otimes B) = L_X L_Y A \otimes B + L_X A \otimes L_Y B + L_Y A \otimes L_X B + A \otimes L_X L_Y B,$$

потврђујемо Лајбницово правило $[L_X, L_Y](A \otimes B) = [L_X, L_Y]A \otimes B + A \otimes [L_X, L_Y]B$, што комплетира доказ. □

Пример 3.28. Рачуни из доказа Леме 3.17 могу се директно спровести до краја јер за $\omega \in \mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^0_1(M)$ из

$$\begin{aligned} L_X L_Y \omega(V) &= L_X(L_Y \omega(V)) - L_Y \omega(L_X V) \\ &= L_X(L_Y(\omega(V)) - \omega(L_Y V)) - L_Y(\omega(L_X V)) + \omega(L_Y L_X V) \\ &= XY(\omega(V)) - X(\omega([Y, V])) - Y(\omega([X, V]) + \omega(L_Y L_X V) \end{aligned}$$

добијамо

$$\begin{aligned} (L_X L_Y - L_Y L_X)\omega(V) &= (XY - YX)(\omega(V)) - \omega((L_X L_Y - L_Y L_X)V) \\ &= [X, Y](\omega(V)) - \omega(L_{[X,Y]}V) = L_{[X,Y]}\omega(V), \end{aligned}$$

што се даље уопштава на произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, где

$$\begin{aligned} L_X L_Y A(\omega_1, \dots, V_s) =& L_X(L_Y A(\omega_1, \dots, V_s)) - \sum_i L_Y A(\dots, L_X \omega_i, \dots) - \sum_j L_Y A(\dots, L_X V_j, \dots) \\ =& L_X L_Y(A(\omega_1, \dots, V_s)) - L_X \sum_k A(\dots, L_Y \omega_k, \dots) - L_X \sum_l A(\dots, L_Y V_l, \dots) \\ & - \sum_i L_Y(A(\dots, L_X \omega_i, \dots)) + \sum_i \sum_l A(\dots, L_X \omega_i, \dots, L_Y V_l, \dots) \\ & + \sum_i \sum_{k \neq i} A(\dots, L_Y \omega_k, \dots, L_X \omega_i, \dots) + \sum_i A(\dots, L_Y L_X \omega_i, \dots) \\ & - \sum_j L_Y(A(\dots, L_X V_j, \dots)) + \sum_j \sum_k A(\dots, L_Y \omega_k, \dots, L_X V_j, \dots) \\ & + \sum_j \sum_{l \neq j} A(\dots, L_Y V_l, \dots, L_X V_j, \dots) + \sum_j A(\dots, L_Y L_X V_j, \dots) \end{aligned}$$

повлачи

$$\begin{aligned}(L_XL_Y - L_YL_X)A(\omega_1,\dots,V_s) &= (XY-YX)(A(\omega_1,\dots,V_s)) - \sum_i A(\dots,(L_XL_Y-L_YL_X)\omega_i,\dots)\\ &\quad - \sum_j A(\dots,(L_XL_Y-L_YL_X)V_j,\dots)\\ &= [X,Y](A(\omega_1,\dots,V_s)) - \sum_i A(\dots,L_{[X,Y]}\omega_i,\dots) - \sum_j A(\dots,L_{[X,Y]}V_j,\dots)\\ &= L_{[X,Y]}A(\omega_1,\dots,V_s),\end{aligned}$$

али свакако је боље и брже избећи овај непотребан рачун. △

3.7 Задаци

Задатак 3.1. Доказати да на сфери $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ постоји ковекторско поље које је нула у тачно једној тачки.

Задатак 3.2. На многострукости $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ дата је функција $f \in \mathfrak{F}(M)$ са $f(x,y) = x/(x^2+y^2)$. Израчунати диференцијал df како у стандардним, тако и у поларним координатама. Одредити скуп свих тачака $p \in M$ у којима је $df_p = 0$.

Задатак 3.3. За $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) = f(s,t) = (st, e^t)$ и $\omega = x\,dy - y\,dx$ израчунати $f^*\omega$.

Задатак 3.4. За $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = f(\theta,\varphi) = ((\cos\varphi+2)\cos\theta, (\cos\varphi+2)\sin\theta, \sin\varphi)$ и $\omega = z^2\,dx$ израчунати $f^*\omega$.

Задатак 3.5. Нека је M многострукост и $A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$. Показати да је $\operatorname{Sym} A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ јединствено симетрично такво да је $(\operatorname{Sym} A)(X,X,\dots,X) = A(X,X,\dots,X)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Задатак 3.6. Показати да је симетричан производ асоцијативан за симетричне коваријантне тензоре.

Задатак 3.7. Нека је M паралелизабилна многострукост димензије 2 са глобалним покретним репером (∂_1,∂_2). Пресликавање $\det\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ је дато преко компоненти векторских поља у односу на (∂_1,∂_2) са $\det(X,Y) = X^1Y^2 - X^2Y^1$. Да ли је $\det \in \mathfrak{T}^0_2(M)$? Да ли постоје $\omega,\tau \in \mathfrak{X}^*(M)$ тако да је $\det = \omega\otimes\tau$?

Задатак 3.8. Нека је ∇ извод тензорског поља на многострукости $\mathbb{R}^n$ такав да за све $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ и $1 \leqslant i \leqslant n$ важи $\nabla f = \partial_1 f$ и $\nabla(dx_i) = dx_1 + dx_i$. Одредити општи облик за ∇X, где је $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Посебно записати $\nabla\partial_1$ и $\nabla\partial_2$.

Глава 4

ПСЕУДО-РИМАНОВА МЕТРИКА

4.1 Скаларни производ

Нека је $\mathcal{V}$ векторски простор над $\mathbb{R}$ коначне димензије. ***Билинеарна форма*** на $\mathcal{V}$ је $\mathbb{R}$-билинеарна функција $g\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$. За билинеарну форму g на $\mathcal{V}$ кажемо да је ***симетрична*** ако $g(X,Y)=g(Y,X)$ важи за свако $X,Y\in\mathcal{V}$. Другим речима, симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ је симетричан коваријантни тензор реда два на $\mathcal{V}$. Она је јединствено одређена одговарајућом квадратном формом $\varepsilon\colon \mathcal{V}\to\mathbb{R}$ која је дата са

$$\varepsilon_X = g(X,X), \tag{4.1}$$

јер је можемо реконструисати користећи поларизациони идентитет

$$g(X,Y)=\frac{1}{4}(\varepsilon_{X+Y}-\varepsilon_{X-Y}), \tag{4.2}$$

или еквивалентно $g(X,Y)=(\varepsilon_{X+Y}-\varepsilon_X-\varepsilon_Y)/2$.

Кажемо да је симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ ***недегенерисана*** ако услов да $g(X,Y)=0$ важи за свако $Y\in\mathcal{V}$ повлачи $X=0$. Додатно, ако за свако $X\neq 0$ важи $g(X,X)>0$ онда је g ***позитивно дефинитно***. Слично, ако за свако $X\neq 0$ важи $g(X,X)<0$ онда је g ***негативно дефинитно***. Ако је g позитивно дефинитно или негативно дефинитно кажемо да је g ***дефинитно***, док је у супротном ***недефинитно***. Евидентно, ако је g дефинитно онда је и недегенерисано, док обрат не важи.

Скаларни производ g на $\mathcal{V}$ је недегенерисана симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$. Коначнодимензиони реални векторски простор $\mathcal{V}$ опремљен скаларним производом g на $\mathcal{V}$ зовемо ***простор са скаларним производом*** $(\mathcal{V},g)$. Како скаларни производ g и одговарајућа квадратна форма ε због (4.1) и (4.2) носе једнаке информације, ради једноставности кажемо да је $(\mathcal{V},g)$ ***квадратни векторски простор***. Посебно, ***унутрашњи производ*** је позитивно дефинитан скаларни производ, док је у том случају $(\mathcal{V},g)$ ***простор са унутрашњим производом***.

У присуству неке базе $(E_1,\dots,E_n)$ од $\mathcal{V}$, свака билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ има одговарајућу ***Грамову матрицу*** G са елементима $g_{ij}=g(E_i,E_j)$ за $1\leqslant i,j\leqslant n$. Грамова матрица садржи комплетну информацију од g јер из билинеарности добијамо $g(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i,\sum_{j=1}^n \beta_j E_j)=\sum_{i,j=1}^n \alpha_i\beta_j g_{ij}$, што се у матричној нотацији може записати са $g(X,Y)=X^{\mathsf{T}}GY$, где $X,Y\in\mathcal{V}$ доживљавамо као колона матрице. Симетричност од g очигледно је еквивалентна симетричности одговарајуће Грамове матрице, $G^{\mathsf{T}}=G$. Коначно, услов недегенерисаности повлачи $\det G\neq 0$, што значи да је Грамова матрица инвертибилна, о чему говори наредна лема

Лема 4.1. *Симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$ је недегенерисана ако и само ако је њена Грамова матрица у односу на било коју базу од $\mathcal{V}$ инвертибилна.*

Доказ. Нека је G Грамова матрица за g у односу на базу $(E_1, \ldots, E_n)$. Ако је $\det G = 0$, тада постоји вектор $Y \neq 0$ такав да је $GY = 0$, што повлачи $g(X, Y) = X^\intercal GY = 0$ за свако $X \in \mathcal{V}$ и нарушава недегенерисаност. Обратно, ако је $\det G \neq 0$, тада $GY \neq 0$ важи за свако $Y \neq 0$, те постоји $1 \leqslant i \leqslant n$ такво да је $g(E_i, Y) = E_i^\intercal GY \neq 0$, одакле је g недегенерисано. □

Пример 4.1. Основни пример унутрашњег производа је стандардни скаларни производ еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ дат са $g(X, Y) = X^\intercal Y = \sum_i x_i y_i$, а његова Грамова матрица у односу на канонску базу је јединична. Најједноставнији пример недефинитног скаларног производа је дат са $g(X, Y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ на $\mathbb{R}^2$. Овако дефинисано g је очигледно билинеарно, његова Грамова матрица G у односу на канонску базу је дијагонална са 1 и -1 на дијагонали, те је G симетрична и инвертибилна. △

Нека је $(\mathcal{V}, g)$ квадратни векторски простор. ***Норма*** или ***дужина*** вектора $X \in \mathcal{V}$ је ненегативан број $\|X\| = \sqrt{|g(X, X)|}$, док је његова ***квадратна норма*** $\varepsilon_X = g(X, X)$, те је зато $|\varepsilon_X| = \|X\|^2$. Знак од ε_X разврстава све ненула векторе $X \in \mathcal{V}$ у три различите класе, што указује на ***узрочни карактер*** вектора. Ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ је ***простoран*** (*spacelike*) ако $\varepsilon_X > 0$; ***временски*** (*timelike*) ако $\varepsilon_X < 0$; ***изотропан*** (***светлосни***, *null*) ако $\varepsilon_X = 0$. Посебно, вектор $X \in \mathcal{V}$ је ***дефинитан*** (*nonnull*) за $\varepsilon_X \neq 0$, а уколико је $\varepsilon_X \in \{-1, 1\}$ ($\|X\| = 1$) онда је он ***јединичан*** (*unit*).

Напоменимо да смо узрочни карактер нула вектора оставили неодређеним. Природно, нула вектор се може сматрати изотропним, али кад кажемо да је вектор изотропан подразумеваћемо да он није нула. Неки аутори, посебно они који често раде у Лоренцовој геометрији (на пример О'Нил [96]), сматрају да је нула вектор простoран. Последња могућност је да нула вектор у себи има сва три узрочна карактера (видети Ли [76]).

Кажемо да су два вектора $X, Y \in \mathcal{V}$ ***међусобно ортогонална*** ако је $g(X, Y) = 0$, што обележавамо са $X \perp Y$. Слично, за подскупове $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$, који су најчешће потпростори, кажемо да су ***ортогонални*** и пишемо $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ако $g(X, Y) = 0$ важи за све $X \in \mathcal{A}$ и $Y \in \mathcal{B}$, а природно можемо писати и $X \perp \mathcal{A}$ ако је $\operatorname{Span}\{X\} \perp \mathcal{A}$. ***Ортогонални потпростор*** (или ***нормалан потпростор***) неког потпростора $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ дефинишемо са $\mathcal{W}^\perp = \{X \in \mathcal{V} : X \perp \mathcal{W}\} \leqslant \mathcal{V}$, што је максимални потпростор од $\mathcal{V}$ који је ортогоналан на $\mathcal{W}$.

У дефинитном случају, ортогонални потпростор $\mathcal{W}^\perp$ је познат као ***ортогонални комплемент*** од $\mathcal{W}$, јер тада важи $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$. Међутим, за недефинитно g у општем случају $\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$ није целокупно $\mathcal{V}$, тако да ортогонал $\mathcal{W}^\perp$ некад није комплемент од $\mathcal{W}$. У сваком случају, ортогонал има неке добро познате особине које истичемо у наредне две леме.

Лема 4.2. *За произвољан потпростор $\mathcal{W}$ квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ важи* $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V}$.

Доказ. Продужимо базу $(E_1, \ldots, E_k)$ за $\mathcal{W}$ до базе $(E_1, \ldots, E_n)$ за $\mathcal{V}$. Вектор $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$ припада $\mathcal{W}^\perp$ ако и само ако важи $0 = g(X, E_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_{ij}$ за свако $1 \leqslant j \leqslant k$. Добијен је хомоген систем од $k = \dim \mathcal{W}$ линеарних једначина са $n = \dim \mathcal{V}$ непознатих, али по Леми 4.1 врсте од матрице коефицијената су линеарно независне, тако да је систем ранга k, што повлачи да скуп решења има димензију $n - k$. Међутим, скуп решења $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ по конструкцији даје тачно све $X \in \mathcal{W}^\perp$, те је зато $\dim \mathcal{W}^\perp = n - k$. □

Лема 4.3. *За потпростор $\mathcal{W}$ квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ важи* $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

Доказ. Како је $\mathcal{W} \perp \mathcal{W}^\perp$, то свакако важи $\mathcal{W} \leqslant (\mathcal{W}^\perp)^\perp$. Са друге стране, по Леми 4.2 имамо $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}^\perp + \dim (\mathcal{W}^\perp)^\perp$, те $\dim (\mathcal{W}^\perp)^\perp = \dim \mathcal{W}$, одакле следи $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$. □

За потпростор $\mathcal{W}$ квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$, рестрикција скаларног производа $g\restriction_{\mathcal{W}} = g\restriction_{\mathcal{W}\times\mathcal{W}}$ је симетрична билинеарна форма на $\mathcal{W}$. Штавише, ако је g позитивно дефинитно, онда је $g\restriction_{\mathcal{W}}$ позитивно дефинитан скаларни производ на $\mathcal{W}$. Међутим, ако је g недефинитно онда $g\restriction_{\mathcal{W}}$ не мора бити недегенерисано.

Пример 4.2. Ако је $S \in \mathcal{V}$ просторни, а $T \in \mathcal{V}$ временски вектор, онда лако можемо конструисати изотропан вектор са

$$N = S + \frac{-g(S,T) \pm \sqrt{(g(S,T))^2 - \varepsilon_S \varepsilon_T}}{\varepsilon_S} T,$$

јер је коефицијент уз T решење квадратне једначине $\varepsilon_{S+xT} = \varepsilon_S + 2xg(S,T) + x^2\varepsilon_T = 0$. Ако је g недефинитно онда постоје и просторни и временски вектори, а самим тим и изотропно N, те за $\mathcal{W} = \mathrm{Span}\{N\} \leqslant \mathcal{V}$ рестрикција $g\restriction_{\mathcal{W}}$ није недегенерисана. △

Особине рестрикције скаларног производа квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ преносимо на потпростор $\mathcal{W}$, за који кажемо да је ***недегенерисан***, ***позитивно дефинитан*** или ***негативно дефинитан***, ако је таква његова рестрикција $g\restriction_{\mathcal{W}}$. ***Радикал*** од $\mathcal{W}$ је потпростор $\mathrm{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp$ и може нам послужити за карактеризацију недегенерисаних потпростора.

Лема 4.4. *Нека је $\mathcal{W}$ потпростор квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$. Тада су еквивалентни искази:* $\mathrm{rad}(\mathcal{W})$ *је тривијалан, $\mathcal{W}$ је недегенерисан, $\mathcal{W}^\perp$ је недегенерисан, $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$.*

Доказ. По дефиницији, $\mathcal{W}$ је недегенерисан ако је 0 једини вектор из $\mathcal{W}$ ортогоналан на $\mathcal{W}$, односно за $\mathrm{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$. Из Леме 4.3 је $\mathrm{rad}(\mathcal{W}) = \mathrm{rad}(\mathcal{W}^\perp)$, те су недегенерисаности од $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^\perp$ еквивалентне. Из Грасманове[1] формуле имамо једнакост између $\dim(\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp) + \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp)$ и $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp$, што је $\dim \mathcal{V}$ по Леми 4.2. Одавде следи да је $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$ еквивалентно са $\mathrm{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$. □

Наравно, како је скаларни производ недегенерисан, то је $\mathrm{rad}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^\perp = \{0\}$. Ортогоналну директну суму обележавамо са $\oplus$, те за недегенерисан $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ можемо писати $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$.

Скаларни производ g на $\mathcal{V}$ се дијагонализује једноставном применом Леме 4.4. Као и обично, за скуп међусобно ортогоналних јединичних вектора кажемо да је ***ортонормиран***. Сваки скуп који се састоји од $\dim \mathcal{V}$ ортонормираних вектора у $\mathcal{V}$ свакако чини базу у $\mathcal{V}$ и таква база увек постоји.

Лема 4.5. *Сваки квадратни векторски простор има ортонормирану базу.*

Доказ. Доказ иде индукцијом по $n = \dim \mathcal{V}$, док је случај $\dim \mathcal{V} = 1$ очигледан. За $n > 1$ можемо изабрати дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ (иначе $\varepsilon_X = 0$ важи за све $X \in \mathcal{V}$, те је $g = 0$ дегенерисано), а његовим скалирањем добијамо јединично $E_1 = (1/\sqrt{|\varepsilon_X|})X$. Једнодимензиони потпростор $\mathrm{Span}\{E_1\}$ је недегенерисан, те је по Леми 4.4 то и $\mathrm{Span}\{E_1\}^\perp$. По индукцијској хипотези, постоји ортонормирана база $(E_2, \ldots, E_n)$ од $\mathrm{Span}\{E_1\}^\perp$. Како важи $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{E_1\} + \mathrm{Span}\{E_1\}^\perp$, то је $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ тражена ортонормирана база. □

Недефинитан скаларни производ често има додатно појављивање $\varepsilon_{E_i} \in \{-1, 1\}$ за векторе из ортонормиране базе $(E_1, \ldots, E_n)$ у формулама које одговарају онима за позитивно дефинитан случај. Ако је $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$ тада је $g(X, E_j) = \alpha_j g(E_j, E_j)$, те $\alpha_j = g(X, E_j)/g(E_j, E_j) = \varepsilon_{E_j} g(X, E_j)$, одакле добијамо

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{E_i} g(X, E_i) E_i. \tag{4.3}$$

[1] Hermann Günther Graßmann (1809–1877), немачки физичар, математичар и лингвиста

Лема 4.6. *Ако је* $(E_1, \dots, E_n)$ *ортонормирана база квадратног векторског простора* $(\mathcal{V}, g)$, *тада се свако* $X \in \mathcal{V}$ *јединствено изражава формулом* (4.3).

Грамова матрица скаларног производа g у односу на ортонормирану базу $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ је дијагонална матрица јер важи $g_{ij} = g(E_i, E_j) = \delta_{ij}\varepsilon_{E_i}$. Кад год је то згодно, векторе у ортонормираној бази уређујемо тако да се најпре појаве негативни знаци, $\varepsilon_{E_i} = -1$ за $1 \leqslant i \leqslant \nu$, а затим позитивни, $\varepsilon_{E_i} = 1$ за $\nu < i \leqslant n$. Ортонормирана допуна базе и даље је могућа узимајући ове знаке у обзир.

Индекс скаларног производа g на $\mathcal{V}$ је највећи број $\operatorname{Ind}(g) \in \mathbb{N}_0$ који је димензија негативно дефинитног потпростора од $\mathcal{V}$. Број негативних ε_{E_i} једнак је индексу од g што успоставља следећу теорему познату као ***Силвестеров закон инерције***[2].

Теорема 4.7. *Број негативних* ε_{E_i} *не зависи од избора ортонормиране базе* $(E_1, \dots, E_n)$ *у квадратном векторском простору* $(\mathcal{V}, g)$ *и једнак је индексу од* g.

Доказ. Ако је $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{V}$ негативно дефинитан, а $\mathcal{S} \leqslant \mathcal{V}$ позитивно дефинитан, имамо $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{0\}$, одакле Грасманова формула даје $\dim \mathcal{T} + \dim \mathcal{S} = \dim(\mathcal{T} + \mathcal{S}) \leqslant \dim \mathcal{V} = n$. Потпростор $\mathcal{S} = \operatorname{Span}\{E_{\nu+1}, \dots, E_n\}$ је позитивно дефинитан, што даје $\dim \mathcal{T} \leqslant \nu$, док је $\dim \mathcal{T} = \nu$ за негативно дефинитан $\mathcal{T} = \operatorname{Span}\{E_1, \dots, E_\nu\}$, те добијамо $\operatorname{Ind}(g) = \nu$. □

Индекс квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ димензије n је индекс његовог скаларног производа $\nu = \operatorname{Ind}(\mathcal{V}) = \operatorname{Ind}(g)$, док је ***сигнатура*** уређен пар (p, q) који представља број негативних ε_{E_i} и број позитивних ε_{E_i}. По Теореми 4.7, бројеви $0 \leqslant p, q \leqslant n$ не зависе од избора ортонормиране базе и важи $p = \nu$, $q = n - \nu$.

Вреди напоменути да је $(\mathcal{V}, -g)$ такође квадратни векторски простор, а за њега важи $\operatorname{Ind}(-g) = n - \operatorname{Ind}(g)$. Квадратни векторски простори $(\mathcal{V}, g)$ и $(\mathcal{V}, -g)$ размењују бројеве у сигнатури (сигнатура првог је $(\operatorname{Ind}(g), \operatorname{Ind}(-g))$), али разлика између њих није суштинска, те је уобичајено да се индекс нормира са $\nu \leqslant n/2$, што би значило да временских координата нема више од просторних.

Нека су $(\mathcal{V}, g^{\mathcal{V}})$ и $(\mathcal{W}, g^{\mathcal{W}})$ квадратни векторски простори. Кажемо да линарно пресликавање $L \colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ чува скаларни производ ако $g^{\mathcal{W}}(LX, LY) = g^{\mathcal{V}}(X, Y)$ важи за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Такво пресликавање L је обавезно инјективно јер $LX = 0$ повлачи $g^{\mathcal{V}}(X, Y) = 0$ за све $Y \in \mathcal{V}$ одакле следи $X = 0$. Наравно, ако L чува скаларни производ онда чува и одговарајуће квадратне форме, док обрат следи из поларизације. ***Линеарна изометрија*** је линеарно бијективно пресликавање које чува скаларни производ.

Лема 4.8. *Линеарна изометрија* $L \colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *постоји ако и само ако квадратни векторски простори* $\mathcal{V}$ *и* $\mathcal{W}$ *имају исту димензију и индекс.*

Доказ. Ако је L линеарна изометрија онда је $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ и L пресликава ортонормирану базу од $\mathcal{V}$ у ортонормирану базу од $\mathcal{W}$, те Теорема 4.7 даје $\operatorname{Ind} \mathcal{V} = \operatorname{Ind} \mathcal{W}$. Обратно, можемо преуредити ортонормиране базе $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ и $(F_1, \dots, F_n)$ од $\mathcal{W}$ тако да је $g^{\mathcal{V}}(E_i, E_i) = g^{\mathcal{W}}(F_i, F_i)$, те дефинисати линеарну изометрију са $L(E_i) = F_i$. □

4.2 Изотропни вектори

У квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$, ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ који је ортогоналан на самог себе ($X \perp X$) зове се изотропан вектор. Ако је g дефинитно онда је нула вектор једини вектор са нормом нула, те изотропни вектори постоје само у случају недефинитног g. Скуп свих изотропних вектора $\{X \in \mathcal{V} : X \neq 0, \varepsilon_X = 0\}$ зовемо ***изотропни конус***. Како наша реалност углавном прихвата само позитивно дефинитну метрику, изотропни вектори су прилично незгодни и често контраинтуитивни, али су и кључни у разумевању псеудо-Риманових многострукости.

[2] James Joseph Sylvester (1814–1897), енглески математичар

Лема 4.9. *Сваки квадратни векторски простор $\mathcal{V}$ сигнатуре (p,q) може се раставити као ортогонална сума $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$, где је $\mathcal{V}^+$ максималан позитивно дефинитан потпростор димензије q, а $\mathcal{V}^-$ максималан негативно дефинитан потпростор димензије p.*

Доказ. Нека је $(T_1,\dots,T_p,S_1,\dots,S_q)$ ортонормирана база у $\mathcal{V}$ са $\varepsilon_{T_i} = -1$ за $1 \leqslant i \leqslant p$ и $\varepsilon_{S_j} = 1$ за $1 \leqslant j \leqslant q$. Потпростори $\mathcal{V}^- = \mathrm{Span}\{T_1,\dots,T_p\}$ и $\mathcal{V}^+ = \mathrm{Span}\{S_1,\dots,S_q\}$ су међусобно ортогонални и имају тривијалан пресек, при чему је $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ + \mathcal{V}^-$. □

Лема 4.9 даје растављање $N = S + T$ произвољног изотропног $N \in \mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$ са $S \in \mathcal{V}^+$ и $T \in \mathcal{V}^-$. Из $\mathcal{V}^+ \perp \mathcal{V}^-$ је $g(S,T) = 0$, одакле следи $0 = \varepsilon_N = g(S+T,S+T) = \varepsilon_S + \varepsilon_T$. Услов $N \neq 0$ повлачи $S \neq 0$, те $\varepsilon_S \neq 0$ и коначно $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Дакле, произвољан изотропан $N \in \mathcal{V}$ може се раставити као збир $N = S + T$ међусобно ортогоналних S и T, са $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Међутим, претходно растављање није јединствено, чак ни у истој равни $\mathrm{Span}\{S,T\}$.

Лема 4.10. *Сваки изотропан N из квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ може се раставити са $N = S + T$, тако да је $S,T \in \mathcal{V}$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T = 1$.*

Доказ. Већ смо имали растављање $N = S+T$ са $g(S,T) = 0$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Посматрајмо $S_1 = \theta S + (1-\theta)T$ и $T_1 = (1-\theta)S + \theta T$ за неко $\theta > 1/2$. Тада имамо $S_1, T_1 \in \mathcal{V}$ са $S_1 + T_1 = S + T = N$ и

$$g(S_1,T_1) = g(\theta S + (1-\theta)T, (1-\theta)S + \theta T) = \theta(1-\theta)(\varepsilon_S + \varepsilon_T) = 0.$$

Добијамо да је $\varepsilon_{S_1} = \theta^2\varepsilon_S + (1-\theta)^2\varepsilon_T = (\theta^2 - (1-\theta)^2)\varepsilon_S = (2\theta - 1)\varepsilon_S > 0$, док $g(S_1,T_1) = 0$ повлачи $\varepsilon_{S_1} + \varepsilon_{T_1} = \varepsilon_{S_1+T_1} = \varepsilon_N = 0$ и зато $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1} > 0$. Ова конструкција, за свако $\theta > 1/2$ даје ново растављање, те за $\theta = (1+\varepsilon_S)/(2\varepsilon_S) > 1/2$ добијамо $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1} = 1$, и самим тим ново растављање

$$N = \left(\frac{\varepsilon_S + 1}{2\varepsilon_S}S + \frac{\varepsilon_S - 1}{2\varepsilon_S}T\right) + \left(\frac{\varepsilon_S - 1}{2\varepsilon_S}S + \frac{\varepsilon_S + 1}{2\varepsilon_S}T\right)$$

са траженим својствима. □

Пример 4.3. Нова растављања могућа су и ван равни $\mathrm{Span}\{S,T\}$. Ако је $\dim \mathcal{V} > 2$, тада постоји дефинитан $W \in \mathcal{V}$ такав да је $W \perp \mathrm{Span}\{S,T\}$. Желимо $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ тако да је $S_1 = \alpha S + \beta T + \gamma W$ и $T_1 = (1-\alpha)S + (1-\beta)T - \gamma W$, што обезбеђује $S_1 + T_1 = S + T = N$. Из $S_1 \perp T_1$ имамо

$$0 = g(S_1,T_1) = \alpha(1-\alpha)\varepsilon_S + \beta(1-\beta)\varepsilon_T - \gamma^2\varepsilon_W = ((\alpha - \alpha^2) - (\beta - \beta^2))\varepsilon_S - \gamma^2\varepsilon_W,$$

и зато

$$\gamma^2\varepsilon_W = (\alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta)\varepsilon_S. \tag{4.4}$$

Како је

$$\varepsilon_{S_1} = \alpha^2\varepsilon_S + \beta^2\varepsilon_T + \gamma^2\varepsilon_W = (\alpha^2 - \beta^2)\varepsilon_S + (\alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta)\varepsilon_S = (\alpha - \beta)\varepsilon_S,$$

последњи услов $\varepsilon_{S_1} > 0$ је испуњен за $\alpha > \beta$. Изаберимо $\alpha + \beta < 1$ за просторан W или $\alpha + \beta > 1$ за временски W. Ово, заједно са $\alpha > \beta$, према (4.4) одређује коначне услове за α и β. На крају имамо да свако α и β који су ограничени последњим неједнакостима конструишу ново растављање, где је $\gamma = \pm\sqrt{(\alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta)\varepsilon_S/\varepsilon_W}$. △

За потпростор квадратног векторског простора кажемо да је ***потпуно изотропан*** ако се састоји само од вектора чија је норма нула. Користећи идентитет (4.2) видимо да су свака два вектора у потпуно изотропном потпростору међусобно ортогонална. Одатле следи да за сваки потпуно изотропан потпростор $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ важи $g\restriction_{\mathcal{W}} = 0$. Зато је $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}^{\perp}$ и последично $\mathrm{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$.

Вреди напоменути да је радикал произвољног потпростора $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ потпуно изотропан јер важи $\mathrm{rad}(\mathrm{rad}(\mathcal{U})) = \mathrm{rad}(\mathcal{U})$. У најопштијем случају, сваки комплементарни потпростор $\mathcal{W}$ за $\mathrm{rad}(\mathcal{U})$ у смислу уобичајене линеарне алгебре доводи до радикалног раздвајања $\mathcal{U} = \mathrm{rad}(\mathcal{U}) \oplus \mathcal{W}$. Лако је приметити да је $\mathcal{W}$ далеко од тога да буде јединствен, али он је свакако недегенерисан.

Пример 4.4. Нека је $\mathcal{U}$ произвољан потпростор квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$. Претпоставимо да је $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{N}$ ортогонална сума недегенерисаног $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ и потпуно изотропног $\mathcal{N} \leqslant \mathcal{V}$. Најпре показујемо да је $\mathcal{N}$ јединствено одређено. Са једне стране имамо $\mathcal{N} \leqslant \mathcal{U}$, док $\mathcal{N} \perp \mathcal{W}, \mathcal{N}$ даје $\mathcal{N} \perp \mathcal{U}$, те је $\mathcal{N} \leqslant \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \mathrm{rad}(\mathcal{U})$. Са друге стране, како недегенерисан и потпуно изотропан потпростор имају тривијалан пресек, то имамо $\dim \mathrm{rad}(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{W} + \mathrm{rad}(\mathcal{U})) - \dim \mathcal{W} \leqslant \dim \mathcal{U} - \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{N}$. Како је $\mathcal{N} \leqslant \mathrm{rad}(\mathcal{U})$ и $\dim \mathrm{rad}(\mathcal{U}) \leqslant \dim \mathcal{N}$, то добијамо јединственост, $\mathcal{N} = \mathrm{rad}(\mathcal{U})$, што нас доводи до радикалног раздвајања.

Претпоставимо да постоји још једно такво разлагање, $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathrm{rad}(\mathcal{U}) = \mathcal{W}' \oplus \mathrm{rad}(\mathcal{U})$ за неки недегенерисан $\mathcal{W}' \leqslant \mathcal{V}$. Ако је $(E_1, \ldots, E_k)$ ортонормирана база за $\mathcal{W}$, тада из $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}' \oplus \mathrm{rad}(\mathcal{U})$ можемо раставити $E_i = E'_i + N_i$ где $E'_i \in \mathcal{W}'$ и $N_i \in \mathrm{rad}(\mathcal{U})$. Међутим, како је $g(E_i, E_j) = g(E'_i + N_i, E'_j + N_j) = g(E'_i, E'_j)$, то је $(E'_1, \ldots, E'_k)$ ортонормирана база за $\mathcal{W}'$, при чему $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}'$ имају исту сигнатуру. Тако инваријантно уводимо ***сигнатуру*** потпростора $\mathcal{U}$ квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ као уређену тројку (p, q, r), где је (p, q) сигнатура квадратног векторског простора $(\mathcal{W}, g\restriction_{\mathcal{W}})$, а $r = \dim \mathrm{rad}(\mathcal{U})$. △

За потпуно изотропан потпростор $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ је $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^{\perp} = \dim \mathcal{V}$ по Леми 4.2, те из $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}^{\perp}$ следи $\dim \mathcal{W} \leqslant (\dim \mathcal{V})/2$. Штавише, димензија потпуно изотропног потпростора никад није већа од индекса.

Теорема 4.11. *За потпуно изотропан потпростор $\mathcal{W}$ квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ је $\dim \mathcal{W} \leqslant \min(\mathrm{Ind}(g), \dim \mathcal{V} - \mathrm{Ind}(g))$, а посебно важи $\dim \mathcal{W} \leqslant (\dim \mathcal{V})/2$.*

Доказ. Нека је $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$ растављање из Леме 4.9. Из Грасманове формуле имамо једнакост $\dim \mathcal{W} = \dim(\mathcal{W} + \mathcal{V}^+) + \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}^+) - \dim \mathcal{V}^+$. Како важи $\mathcal{W} + \mathcal{V}^+ \leqslant \mathcal{V}$ и $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}^+ = \{0\}$, то добијамо $\dim \mathcal{W} \leqslant \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{V}^+ = \dim \mathcal{V}^- = \mathrm{Ind}(g)$. Последично, $\dim \mathcal{W} \leqslant \mathrm{Ind}(-g) = \dim \mathcal{V} - \mathrm{Ind}(g)$. □

Пример 4.5. Ако је $(\mathcal{V}, g)$ квадратни векторски простор сигнатуре (p, q), онда он има ортонормирану базу $(T_1, \ldots, T_p, S_1, \ldots, S_q)$, где су T_i временски, а S_i просторни. Граница из Теореме 4.11 се лако достиже конструкцијом потпуно изотропног потпростора $\mathrm{Span}\{S_1 + T_1, S_2 + T_2, \ldots, S_\nu + T_\nu\}$, где је $\nu = \min(p, q)$. Могуће су и многе друге конструкције, јер се елементи базе могу пермутовати, док се појединачни елементи могу мењати супротним вектором. Димензија максималног потпуно изотропног потпростора од $(\mathcal{V}, g)$ назива се ***Витов индекс***[3]. Можемо приметити да је Витов индекс ν заправо мањи од бројева $\mathrm{Ind}(g)$ и $\mathrm{Ind}(-g)$. △

Сваки потпуно изотропан потпростор квадратног векторског простора има свој изотропан суплемент о чему говори наредна теорема (на пример, видети Кларк [38, Теорема 6.2]).

[3] Ernst Witt (1911–1991), немачки математичар

Теорема 4.12. *Нека је $\mathcal{W}$ потпуно изотропан потпростор квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$. За сваку базу $(N_1, \dots, N_k)$ од $\mathcal{W}$ постоји одговарајућа база $(M_1, \dots, M_k)$ некој потпуно изотропној потпростора од $\mathcal{V}$ који са $\mathcal{W}$ има тривијалан пресек тако да $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ важи за $1 \leqslant i, j \leqslant k$.*

Доказ. Доказ ћемо извести индукцијом по k, где је случај $k = 0$ тривијалан. Поставимо $\mathcal{P} = \operatorname{Span}\{N_1, \dots, N_{k-1}\}$. Како $\operatorname{Span}\{N_k\}$ није потпростор од $\mathcal{P}$, то $\mathcal{P}^\perp$ није потпростор од $\operatorname{Span}\{N_k\}^\perp$, те постоји $X \in \mathcal{P}^\perp$ такво да је $g(X, N_k) \neq 0$. Тада је

$$M_k = \frac{-\varepsilon_X}{2(g(X, N_k))^2} N_k + \frac{1}{g(X, N_k)} X$$

изотропан са $g(N_k, M_k) = 1$. Потпростор $\operatorname{Span}\{N_k, M_k\} = \operatorname{Span}\{N_k, X\} \leqslant \mathcal{P}^\perp$ је недегенерисан јер има ортонормирану базу $((N_k + M_k)/\sqrt{2}, (N_k - M_k)/\sqrt{2})$. Одавде је $\mathcal{P}$ потпростор недегенерисаног $\operatorname{Span}\{N_k, M_k\}^\perp$ којег посматрамо као квадратни векторски простор, те применом индукцијске хипотезе добијемо $(M_1, \dots, M_{k-1})$, што са M_k комплетира базу потпуно изотропног простора са траженим својствима. □

4.3 Псеудо-Риманове многострукости

Метрички тензор или ***метрика*** на многострукости M је симетрично коваријантно тензорско поље реда два на M које је недегенерисано у свакој тачки и има константан индекс. Другим речима, метрика је пресликавање $g\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ које свакој тачки $p \in M$ глатко додељује скаларни производ $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ на тангентном простору T_pM, тако да индекс $\operatorname{Ind}(g_p)$ не зависи од p. ***Псеудо-Риманова многострукост*** (*pseudo-Riemannian manifold*, *semi-Riemannian manifold*) је многострукост M опремљена метриком g.

Строго говорећи, псеудо-Риманова многострукост је уређен пар (M, g). Две различите метрике на истој многострукости успостављају различите псеудо-Риманове многострукости. Често се дешава да псеудо-Риманова многострукост има подразумевану конкретну метрику, те је тада обележавамо исто као и саму глатку многострукост.

Заједнички индекс $0 \leqslant \nu = \operatorname{Ind}(g_p) = \operatorname{Ind}(g) = \operatorname{Ind}(M) \leqslant \dim M = n$ свих скаларних производа g_p зовемо ***индекс*** псеудо-Риманове многострукости (M, g). Како разлика између g и $-g$ у псеудо-Римановој многострукости није суштинска, не умањујући општост можемо претпоставити да индекс задовољава $\nu \leqslant n/2$.

Занимљиво је посматрати неке специјалне случајеве у зависности од индекса. Најчешће се изучава случај $\nu = 0$, где за M кажемо да је ***Риманова многострукост***. У овом случају g је ***Риманова метрика***, а карактерише је то да је g_p позитивно дефинитан скаларни производ на T_pM за свако $p \in M$. Ако је $\nu = 1 \neq n$ онда је M ***Лоренцова многострукост***[4], а одговарајућа метрика је ***Лоренцова***. Псеудо-Риманова многострукост сигнатуре (ν, ν) је ***Клајнова многострукост***[5], она је обавезно парне димензије, док за њену метрику кажемо да је ***Клајнова*** или ***неутрална***.

Нека је (U, φ) карта на псеудо-Римановој n-многострукости (M, g), где су $x_i = \pi_i \circ \varphi$ њене координатне функције. Компоненте метричког тензора g на U су $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ за $1 \leqslant i, j \leqslant n$, те за векторска поља $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ важи

$$g(X, Y) = g\left(\sum_{i=1}^n X(x_i)\partial_i, \sum_{j=1}^n Y(x_j)\partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^n g(\partial_i, \partial_j) X(x_i) Y(x_j) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, dx_i(X)\, dx_j(Y),$$

[4] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), холандски физичар
[5] Felix Klein (1849–1925), немачки математичар

одакле метрички тензор можемо изразити са

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

где је $dx_i\, dx_j = (dx_i \otimes dx_j + dx_j \otimes dx_i)/2$ симетричан производ ковекторских поља.

Пример 4.6. Најједноставнији и најважнији пример Риманове многострукости је еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ са ***еуклидском метриком*** $\bar{g}$ која представља класичан унутрашњи производ на сваком тангентном простору под природном идентификацијом $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. У стандардним координатама можемо записати

$$\bar{g} = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2, \tag{4.5}$$

односно $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$, што даје јединичну Грамову матрицу $G = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Убудуће у било ком геометријском контексту ***еуклидски простор*** $\mathbb{R}^n$ означава Риманову многострукост $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$. △

Пример 4.7. У стандардној метрици $\bar{g}$ из (4.5) за $\mathbb{R}^n$, за било које $1 \leqslant \nu \leqslant n$ можемо променити првих ν знакова из плуса у минус, што нас доводи до метричког тензора $g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, (dx_i)^2$ где имамо $\varepsilon_i = -1$ за $1 \leqslant i \leqslant \nu$ и $\varepsilon_i = +1$ за $\nu + 1 \leqslant i \leqslant n$. Резултујућа псеудо-Риманова многострукост $\mathbb{R}^n_\nu = (\mathbb{R}^n, g)$ је ***псеудо-еуклидски простор*** индекса ν. Посебно, Лоренцову многострукост $\mathbb{R}^n_1$ за $n \geqslant 2$ зовемо ***простор Минковскої***[6], а специјално $\mathbb{R}^4_1$ представља најједноставнији пример релативистичког простор-времена. △

Пример 4.8. ***Вокерова метрика***[7] дефинише се на неком отвореном подскупу M од $\mathbb{R}^{2n}$ са уобичајеним координатама $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, преко Грамове матрице у односу на природни глобални покретни репер $(\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_{2n})$ са

$$g = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ f_{12} & f_{22} & \ldots & f_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots & f_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

где су $f_{ij} = f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ за $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ произвољне глатке функције на M. Матрица из (4.6) је очигледно симетрична и инвертибилна (детерминанта је $(-1)^n \neq 0$).

У креирању псеудо-Риманове многострукости неопходно је обезбедити константност индекса за сваки појединачни скаларни производ. Из (4.6) се јасно види да је $\mathcal{W}_p = \mathrm{Span}\{(\partial_{n+1})_p, (\partial_{n+2})_p, \ldots, (\partial_{2n})_p\}$ n-димензиони потпуно изотропан потпростор квадратног векторског простора $(T_p\mathbb{R}^{2n}, g_p)$ за сваку тачку $p \in M$. Из Теореме 4.11 добијамо $n = \dim \mathcal{W}_p \leqslant \mathrm{Ind}(g_p) \leqslant \dim M - \dim \mathcal{W}_p = n$, што је могуће само за $\mathrm{Ind}(g_p) = n$. Закључујемо да је g Клајнова метрика, те на располагању имамо огромну фамилију псеудо-Риманових многострукости (M, g) сигнатуре (n, n). △

[6] Hermann Minkowski (1864–1909), немачки математичар
[7] Arthur Geoffrey Walker (1909–2001), британски математичар

Често се уместо метричког тензора g посматра одговарајућа квадратна норма $\varepsilon_X = g(X,X)$ за $X \in TM$ која по (4.2) у потпуности одређује метрички тензор. Ова квадратна форма ε зове се ***дужински елемент*** (*line element*) од M и обележавамо је са ds^2. У терминима координатног система имамо $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$, односно

$$\varepsilon_X = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i(X)\, dx_j(X) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j.$$

Ако су p и p' блиске тачке са координатама $(x_1,\dots,x_n)$ и $(x_1+\Delta x_1,\dots,x_n+\Delta x_n)$ у некој карти, тада тангентни вектор $\Delta p = \sum_i \Delta x_i \partial_i$ у p показује апроксимативно ка p'. Због тога очекујемо да квадрат растојања ds од p до p' буде апроксимативно $|\Delta p|^2 = g(\Delta p, \Delta p) = \sum_{i,j} g_{ij}(p)\Delta x_i\, \Delta x_j$, као што се дешава у формули за ds^2, што оправдава ту неуобичајену ознаку.

У присуству метричког тензора можемо говорити о ортонормираним векторским пољима. Нека је U отворен подскуп псеудо-Риманове n-многострукости (M,g). ***Локални ортонормирани покретни репер*** за M над U је локални покретни репер $(E_1,\dots,E_n)$ за M над U који у свакој тачки $p \in U$ формира ортонормирану базу тангентног простора T_pM. На пример, координатни покретни репер $(\partial_1,\dots,\partial_n)$ је глобални ортонормирани покретни репер за $(\mathbb{R}^n, \overline{g})$.

Пример 4.9. Посматрајмо отворен подскуп $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Поставимо јединично векторско поље E_1 тангентно на радијалне линије и јединично векторско поље E_2 тангентно на кругове центриране у координатном почетку. Тада векторска поља

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad E_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

чине локални ортонормирани покретни репер над U (видети Пример 2.29 за рачуне). Међутим, (E_1,E_2) не може бити координатни покретни репер у односу на неки избор локалних координата јер важи $[E_1,E_2] = -(\partial/\partial\theta)/r^2 \neq 0$. △

Ортонормирани покретни репери су веома корисни у изучавању Риманових и псеудо-Риманових многострукости. За Риманову многострукост ствари су једноставне јер Грам–Шмитов поступак глатко конструише локални ортонормирани покретни репер почевши од произвољног локалног покретног репера. Риманов случај је лаган јер вектори чије се норме јављају у имениоцима нигде нису нула. Међутим, у случају недефинитне метрике потребно је да избегнемо изотропне векторе, те морамо бити опрезни.

Теорема 4.13. *Постоји локални ортонормирани покретни репер над околином сваке тачке псеудо-Риманове многострукости.*

Доказ. Нека је (M,g) псеудо-Риманова n-многострукост, а $p \in M$ произвољна тачка. Размотримо локални координатни покретни репер $(\partial_1,\dots,\partial_n)$ над неком координатном околином $U \ni p$ и произвољну ортонормирану базу $(V_1,\dots,V_n)$ у T_pM. Како за неку матрицу преласка $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ важи $(V_1,\dots,V_n) = ((\partial_1)_p,\dots,(\partial_n)_p)A$, то нови локални покретни репер $(X_1,\dots,X_n)$ постављамо са $((X_1)_q,\dots,(X_n)_q) = ((\partial_1)_q,\dots,(\partial_n)_q)A$ за свако $q \in U$. Како је $g_p((X_i)_p,(X_j)_p) = g_p(V_i,V_j) = \pm\delta_{ij}$ и $g(X_i,X_j) \in \mathfrak{F}(U)$, то због непрекидности постоји околина $W \subseteq U$ од p у којој за свако $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ важи

$$|g(X_i,X_i)| > a = \frac{3}{4} + \frac{1}{3n} < 1 \quad \text{и} \quad |g(X_i,X_j)| < b = \frac{1}{6n}.$$

Грам–Шмитов поступак омогућава да индуктивно конструишемо ортогонални покретни репер $(Y_1,\dots,Y_n)$ над W такав да за свако $1 \leqslant j < k \leqslant n$ имамо

$$|g(Y_j,Y_j)| > d = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad |g(Y_j,X_k)| < c = \frac{1}{2n}.$$

Нека је $Y_1 = X_1$. Претпоставимо да смо индуктивно поставили $(Y_1, \dots, Y_{j-1})$ за неко $2 \leqslant j \leqslant n$ и дефинишимо

$$Y_j = X_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g(Y_i, X_j)}{g(Y_i, Y_i)} Y_i.$$

Јасно је да на овај начин добијамо $g(Y_j, Y_i) = 0$ за $1 \leqslant i \leqslant j-1$. Додатно смо обезбедили

$$\begin{aligned}
|g(Y_j, Y_j)| &= \left| g(X_j, X_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(g(Y_i, X_j))^2}{g(Y_i, Y_i)} \right| \\
&\geqslant |g(X_j, X_j)| - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|g(Y_i, X_j)|^2}{|g(Y_i, Y_i)|} > a - n\frac{c^2}{d} = d, \\
|g(Y_j, X_k)| &= \left| g(X_j, X_k) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g(Y_i, X_j) g(Y_i, X_k)}{g(Y_i, Y_i)} \right| \\
&\leqslant |g(X_j, X_k)| + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|g(Y_i, X_j)||g(Y_i, X_k)|}{|g(Y_i, Y_i)|} < b + n\frac{c^2}{d} = c,
\end{aligned}$$

за свако $1 \leqslant j < k \leqslant n$, што смо и желели. Како је $\|Y_i\| = \sqrt{|g(Y_i, Y_i)|} \in \mathfrak{F}(W)$ свуда ненула то можемо поставити $E_i = Y_i / \|Y_i\| \in \mathfrak{X}(W)$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, чиме добијамо тражени ортонормирани локални покретни репер $(E_1, \dots, E_n)$ над $W \ni p$. □

Вреди напоменути да услов константног индекса у дефиницији метричког тензора није превише јак. Наиме, како тај услов нисмо користили у доказу претходне теореме, а дошли смо до непрекидних функција $g(E_i, E_i) \in \mathfrak{F}(W)$ које морају бити константне (1 или -1), то закључујемо да је индекс константан на свакој компоненти повезаности наше многострукости.

4.4 Повлачење метричких тензора

Кад правимо нове многострукости од старих, често постоји одговарајући начин да се на новој многострукости изведе метрика из старе метрике. У ту сврху потребно нам је повлачење коваријантног тензорског поља. Нека је $f\colon M \to N$ глатко пресликавање између многострукости M и псеудо-Риманове многострукости (N, g). Повлачење метрике $g \in \mathfrak{T}^0_2(N)$ је $f^*g \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ тако да у свакој тачки $p \in M$ за $X_p, Y_p \in T_pM$ имамо

$$(f^*g)_p(X_p, Y_p) = g_{f(p)}(f_*(X_p), f_*(Y_p)),$$

а како је g симетрично то је такво и f^*g. Међутим, ако f није имерзија онда f_* није инјективно и за неку тачку $p \in M$ постоји $0 \neq X_p \in T_pM$ такво да је $f_*(X_p) = 0$, што даје $(f^*g)_p(X_p, Y_p) = 0$ за свако $Y_p \in T_pM$, те $(f^*g)_p$ није недегенерисано. Због тога f^*g може бити метрика само уколико је f имерзија, али то у општем случају није довољно.

Пример 4.10. Посматрајмо јединични круг $\mathbf{S}^1$ који је смештен у $\mathbb{R}^2_1$ природним смештањем $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, где је θ локална координата. Повлачење метричког тензора гласи $f^*g = f^*(-dx^2 + dy^2) = -(-\sin\theta\, d\theta)^2 + (\cos\theta\, d\theta)^2 = \cos 2\theta\, d\theta^2$, што је дегенерисано за $\theta \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$, а ту мења и индекс. △

Међутим, у Римановом случају имерзија јесте и довољан услов. Ако је f_* инјективно, онда позитивно дефинитно g повлачи позитивно дефинитно f^*g, те је f^*g Риманова метрика.

Теорема 4.14. *Ако је (N, g) Риманова многострукост, а $f\colon M \to N$ имерзија, тада је (M, f^*g) Риманова многострукост.*

Нека је P подмногострукост псеудо-Риманове многострукости (M, g), а $\imath\colon P \hookrightarrow M$ одговарајућа инклузија. Уколико је $\imath^*g$ метрика на P тада кажемо да је $(P, \imath^*g)$ ***псеудо--Риманова подмногострукост*** од (M, g). Тангентни простор T_pP може се видети као потпростор од T_pM, али нема неког разлога зашто би он морао бити недегенерисан у односу на g_p, као што нам нико не гарантује да уколико је то испуњено имамо константан $\mathrm{Ind}(g_p)$.

Захваљујући Теореми 4.14 ствари су доста једноставније у Римановом случају. Ако је P подмногострукост Риманове многострукости (M, g) са инклузијом $\imath\colon P \hookrightarrow M$, онда је $(P, \imath^*g)$ ***Риманова подмногострукост*** од (M, g). Како у сваком $p \in P$ важи $T_pP \leqslant T_pM$, Риманову метрику $\imath^*g$ на P добијамо једноставном применом метричког тензора g.

Ако знамо координатну репрезентацију имерзије, онда се индукована Риманова метрика може лако израчунати. У некој карти са координатним функцијама x_i важи

$$f^*g = f^*\left(\sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j\right) = \sum_{i,j} f^*(g_{ij}) f^*(dx_i) f^*(dx_j) = \sum_{i,j} (g_{ij} \circ f)\, d(x_i \circ f)\, d(x_j \circ f),$$

што примењујемо на наредним конкретним примерима.

Пример 4.11. Нека је $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ дато са $f(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, што је имерзија чија је слика хеликоид. Индуковану метрику $f^*\bar{g}$ рачунамо са

$$\begin{aligned} f^*\bar{g} &= f^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) = d(u\cos v)^2 + d(u\sin v)^2 + d(v)^2 \\ &= (\cos v\, du - u\sin v\, dv)^2 + (\sin v\, du + u\cos v\, dv)^2 + dv^2 = du^2 + (u^2+1)\, dv^2. \end{aligned}$$

△

Трансформација Риманове метрике под променом координата може се посматрати као идентичко пресликавање са различитим координатама у домену и кодомену.

Пример 4.12. Еуклидска метрика $\bar{g} = dx^2 + dy^2$ на $\mathbb{R}^2$ у поларним координатама се рачуна као повлачење идентичког пресликавања. Како је $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$, то имамо

$$\begin{aligned} \bar{g} &= dx^2 + dy^2 = d(r\cos\theta)^2 + d(r\sin\theta)^2 \\ &= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

△

Риманова метрика подразумева позитивну дефинитност и она је најчешће изучавана метрика. Једна лепа особина Риманових метрика је да их има у изобиљу.

Теорема 4.15. *Свака многострукост дозвољава Риманову метрику.*

Доказ. Нека је M многострукост са глатким атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$. По Теореми 1.20 постоји разбијање јединице $(\psi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ подређено отвореном покривачу $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. У свакој карти постоји Риманова метрика $g_\alpha = \varphi_\alpha^*\bar{g}$ индукована стандардном еуклидском метриком из (4.5). Због локалне коначности постоји коначно много ненула чланова у околини сваке тачке, те $g = \sum_{\alpha\in\Lambda} \psi_\alpha g_\alpha$ дефинише симетрично коваријантно тензорско поље реда два. За $0 \neq X \in T_pM$ имамо $g_p(X, X) = \sum_{\alpha\in\Lambda} \psi_\alpha(p)(g_\alpha)_p(X, X)$. Како је сваки члан ненегативан, сума је ненегативна, а због $\sum_{\alpha\in\Lambda} \psi_\alpha(p) = 1$, бар један од $\alpha \in \Lambda$ има $\psi_\alpha(p) > 0$. Зато важи $g_p(X, X) > 0$, те је g позитивно дефинитна метрика. □

Важно је приметити да постоји огроман избор у конструкцији метрике g за дату многострукост. Конкретно, разне метрике на истој многострукости могу имати прилично различите геометријске особине. Међутим, исти поступак не ради у недефинитном случају, иако можемо конструисати метрику индекса ν на свакој координатној околини за свако $0 < \nu < n$. Разлог је тај што збир две метрике индекса ν може бити дегенерисан, те не мора да буде метрика.

Пример 4.13. Нека су (M, g_M) и (N, g_N) псеудо-Риманове многострукости, те нека су $\pi_M \colon M \times N \to M$ и $\pi_N \colon M \times N \to N$ природне пројекције. На производ многострукости $M \times N$ можемо дефинисати ***производ метрику*** са $g_M \times g_N = \pi_M^*(g_M) + \pi_N^*(g_N)$. Ако искористимо природан изоморфизам $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$ из Примера 2.2 добијамо да је одговарајућа Грамова матрица блок дијагонална где су блокови појединачне Грамове матрице. Псеудо-Риманову многострукост $(M \times N, g_M \times g_N)$ зовемо ***псеудо-Риманов производ*** од (M, g_M) и (N, g_N). △

Пример 4.14. Општије од претходног примера, за сваку строго позитивну функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ можемо поставити

$$g_M \times_f g_N = \pi_M^*(g_M) + (f \circ \pi_M)\pi_N^*(g_N).$$

Овог пута Грамова матрица у тачки (p, q) је блок дијагонална матрица где је први блок Грамова матрица за g_M у тачки p, а други Грамова матрица од g_N у тачки q множена позитивном константом $c = f(p) > 0$. Очигледно важе симетричност и недегенерисаност, док из $\operatorname{Ind}(cg_N) = \operatorname{Ind}(g_N)$ следи $\operatorname{Ind}(g) = \operatorname{Ind}(g_M) + \operatorname{Ind}(g_N)$. Псеудо-Риманову многострукост $M \times_f N = (M \times N, g_M \times_f g_N)$ зовемо ***уврнути производ*** (*warped product*), што се у случају $f = 1$ своди на стандардни псеудо-Риманов производ. △

Нека су (M, g_M) и (N, g_N) две псеудо-Риманове многострукости. Глатко пресликавање $f \colon M \to N$ између одговарајућих многострукости је ***псеудо-Риманова имерзија*** уколико чува метричке тензоре, $f^*(g_N) = g_M$, што можемо експлицитно записати са

$$(g_M)_p(X_p, Y_p) = (g_N)_{f(p)}(T_pf(X_p), T_pf(Y_p))$$

за свако $p \in M$ и $X_p, Y_p \in T_pM$. Свако такво пресликавање је имерзија, што оправдава име и доноси неједнакости $\dim M \leqslant \dim N$ и $\operatorname{Ind} g_M \leqslant \operatorname{Ind} g_N$.

Изометрија из (M, g_M) у (N, g_N) је псеудо-Риманова имерзија $f \colon M \to N$ која је такође дифеоморфизам. Кажемо да су псеудо-Риманове многострукости ***изометричне*** уколико постоји изометрија између њих. Ако је псеудо-Риманова имерзија f само локални дифеоморфизам онда кажемо да је у питању ***локална изометрија***. Како је такво f већ имерзија, за локалну изометрију по Теореми 2.9 додатно важи још само то да је $\dim M = \dim N$.

Лако је увидети да су композиција две изометрије и инверз изометрије такође изометрије, као што је то и идентичко пресликавање. Бити изометричан је зато релација еквиваленције, те можемо рећи да је изометрија нарочита врста пресликавања која омогућава појам изоморфизма у категорији псеудо-Риманових многострукости. ***Псеудо-Риманова геометрија*** представља изучавање особина псеудо-Риманових многострукости које су инваријантне у односу на локалне или глобалне изометрије.

За фиксирану псеудо-Риманову многострукост M, изометрија $f \colon M \to M$ се зове ***изометрија од*** M. Скуп свих изометрија од M чини групу $\mathcal{I}(M)$, коју зовемо ***група изометрија*** од M. Значајна јака теорема тврди да група изометрија $\mathcal{I}(M)$ псеудо-Риманове многострукости M има структуру Лијеве групе у односу на компактно-отворену топологију [80, Последица 2]. За Риманове многострукости ову теорему су установили Мајерс[8] и Стинрод 1939. године [87].

[8] Sumner Byron Myers (1910–1955), амерички математичар

Пример 4.15. Нека је $f\colon \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ дато са $f(z) = z^2$, где је $\imath\colon \mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$, те $\mathbf{S}^1$ има Риманову метрику $g = \imath^*\bar{g}$. Како је f имерзија, по Теореми 4.14 је f^*g Риманова метрика. Дакле, f је Риманова имерзија, али како f није дифеоморфизам то она није изометрија. $\triangle$

Пример 4.16. Нека је $(\mathcal{V}, g)$ квадратни векторски простор димензије n. Избор базе на $\mathcal{V}$ индукује бијективно линеарно пресликавање што је хомеоморфизам између $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$, те је $\mathcal{V}$ многострукост. Постоји канонски линеарни изоморфизам $X \mapsto X_Z$ из $\mathcal{V}$ на сваки тангентни простор $T_Z\mathcal{V}$ који је дат као извод по правцу

$$X_Z h = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(Z + tX),$$

где нас $g_Z(X_Z, Y_Z) = g(X, Y)$ доводи до метричког тензора на многострукости $\mathcal{V}$ која тако постаје псеудо-Риманова многострукост. Ако је $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ линеарна изометрија на квадратним векторским просторима $(\mathcal{V}, g^{\mathcal{V}})$ и $(\mathcal{W}, g^{\mathcal{W}})$, тада је

$$T_Z f(X_Z)(h) = X_Z(h \circ f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(f(Z) + tf(X)) = f(X)_{f(Z)} h,$$

што даје $T_Z f(X_Z) = f(X)_{f(Z)}$, одакле следи

$$\begin{aligned}(f^*g^{\mathcal{W}})_Z(X_Z, Y_Z) &= g^{\mathcal{W}}_{f(Z)}(f_*X_Z, f_*Y_Z) = g^{\mathcal{W}}_{f(Z)}(f(X)_{f(Z)}, f(Y)_{f(Z)}) \\ &= g^{\mathcal{W}}(f(X), f(Y)) = g^{\mathcal{V}}(X, Y) = g^{\mathcal{V}}_Z(X_Z, Y_Z),\end{aligned}$$

те је f псеудо-Риманова имерзија. Како је линеарно пресликавање глатко, линеарни изоморфизам f је дифеоморфизам, те је f изометрија између псеудо-Риманових многострукости $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$. Одавде следи да је квадратни векторски простор $\mathcal{V}$ димензије n и индекса ν као псеудо-Риманова многострукост изометрична са $\mathbb{R}^n_\nu$. Заправо, координатни изоморфизам било које ортонормиране базе у $\mathcal{V}$ је изометрија. $\triangle$

4.5 Музички изоморфизми

Није лоше имати у виду да псеудо-Риманова метрика индукује изоморфизам између векторских и ковекторских поља. За дату псеудо-Риманову многострукост (M, g) можемо дефинисати пресликавање $\flat\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ које зовемо ***снизилица*** (*flat*), а које векторском пољу $X \in \mathfrak{X}(M)$ додељује ковекторско поље $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$ дефинисано са $X^\flat(Y) = g(X, Y)$ за свако $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

За произвољну тачку $p \in M$ можемо рестриковати снизилицу и добити пресликавање $\flat\colon TM \to T^*M$, односно $\flat_p\colon T_pM \to T_p^*M$, које вектор $X_p \in T_pM$ шаље у ковектор $X_p^\flat \in T_p^*M$ дат са $X_p^\flat(Y_p) = g_p(X_p, Y_p)$ за свако $Y_p \in T_pM$.

Услов недегенерисаности симетричне билинеарне форме $g_p \in \mathfrak{T}^0_2(T_pM)$ еквивалентан је услову $\operatorname{Ker}(\flat_p) = 0$, односно томе да је $\flat_p$ инјективно. Како радимо само са коначним димензијама то имамо $\dim T_pM = \dim T_p^*M = \dim M$, те је недегенерисаност еквивалентна услову да је $\flat_p$ изоморфизам. Како је метрика увек недегенерисана, то је снизилица изоморфизам између одговарајућих тангентних и котангентних простора, односно између векторских и ковекторских поља.

Погледајмо шта се дешава у карти (U, φ) са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Ако је $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$, тада имамо

$$X^\flat = \sum_{j=1}^n X^\flat\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{j=1}^n g\left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i\, dx_j = \sum_{j=1}^n X_j\, dx_j,$$

где је $X_j = \sum_{i=1}^n g_{ij}X^i$. Можемо рећи да је $X^\flat$ добијено од X спуштањем индекса, што је и разлог зашто операцију зовемо снизилица. Матрица снизилице у терминима координатне базе је заправо Грамова матрица од g.

Са друге стране, инверзни изоморфизам $\sharp = \flat^{-1}\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$ зовемо ***повисилица*** (*sharp*). Повисилица ковекторско поље $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ шаље у векторско поље $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ такво да $\omega(X) = g(\omega^\sharp, X)$ важи за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$. У координатама матрица повисилице је инверзна матрици снизилице.

Како је g недегенерисано, Грамова матрица са улазима g_{ij} је инвертибилна у свакој тачки, те постоји њој инверзна матрица са улазима g^{jk}, где је $\sum_{j=1}^n g_{ij}g^{jk} = \delta_{ik}$. Компоненте инверзне матрице глатко зависе од почетних компоненти, те су и функције g^{ij} глатке на U. Како је g симетрично, имамо

$$g^{jk} = \sum_{i=1}^n g^{ik}\delta_{ij} = \sum_{i,l=1}^n g^{ik}(g_{il}g^{lj}) = \sum_{i,l=1}^n (g^{ik}g_{li})g^{lj} = \sum_{l=1}^n \delta_{kl}g^{lj} = g^{kj},$$

те је инверз такође симетричан, $g^{jk} = g^{kj}$. Сада за $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i\, dx_i$ имамо $\omega^\sharp = \sum_{j=1}^n \omega^j\partial_j$, где је $\omega^j = \sum_{i=1}^n g^{ij}\omega_i$ и кажемо да је $\omega^\sharp$ добијено од ω дизањем индекса.

Пресликавања $\flat\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ и $\sharp\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$ су ***музички изоморфизми***, симпатично име које је пропагирао (и вероватно сковао) Берже[9] [17].

Вероватно најважнија примена повисилице је проширење класичног градијента на псеудо-Риманове многострукости. Ако је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и $f \in \mathfrak{F}(M)$, онда је ***градијент*** од f векторско поље $\operatorname{grad} f = df^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ добијено из диференцијала $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ дизањем индекса. Градијент можемо изразити формулом

$$g(\operatorname{grad} f, X) = df(X) = Xf,$$

која важи за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$, док у локалним координатама имамо

$$\operatorname{grad} f = df^\sharp = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g^{ij}\, df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Посебно, за природне координате псеудо-еуклидског простора $\mathbb{R}^n_\nu$ координатни покретни репер је ортонормиран, те се формула своди на $\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\partial_i f\partial_i$, што даје уобичајену формулу за еуклидски простор у којем градијент има исте компоненте као и df.

Снизилица и повисилица се могу применити на тензоре произвољног типа и на било којој позицији индекса. На тај начин се контраваријантни тензор преводи у коваријантни или обратно. На пример, у случају тензора $A \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ можемо снизити горњи индекс тако да добијемо коваријантни тензор $A^\flat \in \mathfrak{T}^0_3(M)$ чије су компоненте $A_{ijk} = (A^\flat)_{ijk} = \sum_{l=1}^n g_{il}A^l_{jk}$.

У општем случају снизилица може прећи на одговарајући аргумент јер из једнакости (3.6) имамо

$$A^\flat(\dots, X, \dots) = \sum_i \sum \cdots X^i \cdots (A^\flat)^{\cdots}_{\cdots i} = \sum_i \sum \cdots X^i \cdots \sum_j g_{ji}A^{\cdots j}_{\cdots}$$
$$A(\dots, X^\flat, \dots) = \sum_j \sum \cdots (X^\flat)_j \cdots A^{\cdots j}_{\cdots} = \sum_j \sum \cdots \sum_i g_{ji}X^i \cdots A^{\cdots j}_{\cdots},$$

што аналогно важи и за повисилицу. Конкретно, $A^\flat(X, Y, Z) = A(X^\flat, Y, Z)$ за $A \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

[9] Marcel Berger (1927–2016), француски математичар

Снизилице и повисилице такође имају важну примену да продуже контракцију. На пример, за симетричан коваријантни тензор $A \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ дизањем једног индекса (свеједно којег јер је A симетричан) имамо $A^\sharp \in \mathfrak{T}^1_1(M)$, одакле применом контракције добијамо $\mathrm{tr}_g(A) = C(A^\sharp) \in \mathfrak{F}(M)$, што је ***траг*** од A у односу на g. У координатама то је $\mathrm{tr}_g(A) = C(A^\sharp) = \sum_{i=1}^n A_i{}^i = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}A_{ij}$, што се у случају ортонормиране базе своди на обичан траг матрице.

Примена музичких изоморфизама омогућава да истражимо под којим условима нека n-многострукост дозвољава метрику унапред фиксираног индекса $0 < \nu < n$.

Теорема 4.16. *Многострукост дозвољава метрику индекса ν ако и само ако дозвољава ν-димензиону дистрибуцију.*

Доказ. Нека је (M, g) псеудо-Риманова n-многострукост индекса $0 < \nu < n$. Можемо изабрати Риманову метрику $\bar{g}$ на M и увести $T \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ са $T(X) = (X^\flat)^{\bar{\sharp}}$ за $X \in \mathfrak{X}(M)$, где је $\bar{\sharp}$ повисилица у односу на $\bar{g}$. Другим речима, ми конструишемо линеарни оператор $T\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ такав да $g(X, Y) = \bar{g}(T(X), Y)$ важи за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Матрица од T у односу на $\bar{g}$ поклапа се са Грамовом матрицом за g, што даје карактеристични полином $\det(\lambda\,\mathbb{1} - T) = (\lambda - 1)^{n-\nu}(\lambda + 1)^\nu$. Зато је $T + \mathbb{1}$ хомоморфизам тангентног раслојења над M константног ранга $n - \nu$, што по Теореми 3.3 доноси ν-димензиону дистрибуцију $\mathrm{Ker}(T + \mathbb{1})$ на M. Штавише, имамо и декомпозицију $TM = \mathrm{Ker}(T + \mathbb{1}) \oplus \mathrm{Ker}(T - \mathbb{1})$.

Са друге стране, егзистенција ν-димензионе дистрибуције D на Римановој многострукости (M, g) повлачи егзистенцију комплементарне дистрибуције $D^\perp$ такве да важи $TM = D \oplus D^\perp$ и $T_pM = D_p \oplus D_p^\perp$ за $p \in M$. Тада можемо раставити метрику као директну суму метрика раслојења $g = g_D \oplus g_{D^\perp}$, где су g_D и $g_{D^\perp}$ одговарајуће рестрикције, што омогућава да направимо метрику $(-g_D) \oplus g_{D^\perp}$ индекса ν. □

Иако од свуда ненула векторског поља на многострукости директно добијамо једнодимензиону дистрибуцију, обрат није очигледан иако су њихова постојања блиско повезана. Техникама алгебарске топологије може се показати да је услов постојања свуда ненула векторског поља на многострукости M еквивалентан томе да је M или некомпактна или има Ојлерову[10] карактеристику $\chi(M) = 0$, што је такође еквивалентно егзистенцији једнодимензионе дистрибуције на M (видети О'Нил [96, Пропозиција 5.37]). Због тога, свака некомпактна многострукост дозвољава Лоренцову метрику, док су торус и Клајнова флаша једине компактне дводимензионе многострукости за које то важи. Конкретну конструкцију Лоренцове метрике из векторског поља имамо у наредном примеру.

Пример 4.17. Претпоставимо да постоји свуда ненула векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ на многострукости M. По Теореми 4.15 можемо изабрати Риманову метрику g на M. Посматрајмо коваријантни тензор $g_L \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ дефинисан са

$$g_L = g - \frac{2}{g(X, X)} X^\flat \otimes X^\flat,$$

који је очигледно симетричан. Јасно је да важи $g_L(X, X) = -g(X, X) < 0$, док $g(X, Y) = 0$ повлачи $g_L(Y, Z) = g(Y, Z)$. Зато је ортогонална база квадратног векторског простора (T_pM, g_p) која укључује вектор X_p такође ортогонална база у односу на $(g_L)_p$ за свако $p \in M$, што доказује да је g_L Лоренцова метрика. △

4.6 Модел простори

На развој Риманове и псеудо-Риманове геометрије велики утицај имали су одређени високо симетрични простори названи модел простори. Они представљају вео-

[10] Leonhard Euler (1707–1783), швајцарски математичар

ма добре примере, тако да апстрактније псеудо-Риманове многострукости можемо упоређивати са овим једноставнијим просторима и потражити заједничке особине. Главна одлика модел простора је да су они високо симетрични, што значи да поседују велику групу изометрија.

Најважнија примена Лијевих група у геометрији укључује њихово дејство на многострукости. ***Дејство*** (слева) групе G на многострукости M је пресликавање $\theta\colon G \times M \to M$, где $\theta(h,p)$ често скраћено обележавамо са $h \cdot p$, које задовољава $h_1 \cdot (h_2 \cdot p) = (h_1 h_2) \cdot p$ и $e \cdot p = p$ за свако $h_1, h_2 \in G$ и $p \in M$, где је e јединични елемент од G. Ако је дато дејство од G на M, за свако $p \in M$ ***група изотропије*** (или ***стабилизатор***) од G у p је подгрупа $G_p = \{h \in G : h \cdot p = p\}$ од G која се састоји од свих елемената који фиксирају p. Дејство од G на M је ***слободно*** ако су сви G_p тривијални, што значи да $h \cdot p = p$ повлачи $h = e$. ***Орбита*** тачке $p \in M$ је скуп $G \cdot p = \{h \cdot p : h \in G\}$ тачака из M у које p може бити померено преко елемената од G. Дејство је ***транзитивно*** ако има тачно једну орбиту, што значи да за сваки пар тачака $p, q \in M$ постоји $h \in G$ такво да је $h \cdot p = q$.

Уколико је G Лијева група, дејство $\theta\colon G \times M \to M$ је ***глатко дејство*** ако је θ глатко. У том случају, за свако $h \in G$, пресликавање $\theta_h\colon M \to M$ дато са $\theta_h(p) = h \cdot p$ је дифеоморфизам, јер је θ_h глатко као и његов инверз $\theta_{h^{-1}}$.

Да бисмо описали симетрије псеудо-Риманове многострукости (M, g) полазимо од њене групе изометрија $\mathcal{I}(M)$ која природно дефинише дејство на M са $f \cdot p = f(p)$ за $f \in \mathcal{I}(M)$ и $p \in M$. Штавише, вреди напоменути да за свако $f \in \mathcal{I}(M)$, глобално тангентно пресликавање Tf пресликава TM у себе и рестрикује се у линеарну изометрију $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}M$ за свако $p \in M$. Псеудо-Риманова многострукост M је ***хомогена*** ако група изометрија $\mathcal{I}(M)$ дејствује транзитивно на M, што значи да за свако $p, q \in M$ постоји изометрија $f \in \mathcal{I}(M)$ таква да је $f(p) = q$.

Група изотропије од $\mathcal{I}(M)$ у тачки $p \in M$ је њена подгрупа $\mathcal{I}_p(M)$ која садржи све $f \in \mathcal{I}(M)$ за које је $f(p) = p$. За $p \in M$ и $f \in \mathcal{I}_p(M)$, линеарно пресликавање T_pf шаље T_pM у себе, те добијамо ***изотропну репрезентацију*** $I_p\colon \mathcal{I}_p(M) \to \mathrm{GL}(T_pM)$ која је дата са $I_p(f) = T_pf$. Кажемо да је M ***изотропна у*** $p \in M$ ако изотропна репрезентација од $\mathcal{I}_p(M)$ дејствује транзитивно на скупу јединичних вектора из T_pM, што значи да за све јединичне векторе $X, Y \in T_pM$ постоји изометрија $f \in \mathcal{I}_p(M)$ таква да је $f_*(X) = Y$. Псеудо-Риманова многострукост је ***изотропна*** ако је изотропна у свакој тачки.

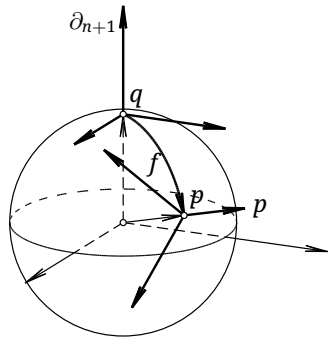
Хомогена псеудо-Риманова многострукост геометријски изгледа исто кад је посматрамо из било које тачке, док она која је изотропна изгледа исто у свим правцима. Наравно, хомогена псеудо-Риманова многострукост која је изотропна у једној тачки је изотропна у свакој тачки. Међутим, испоставља се да је изотропна псеудо-Риманова многострукост хомогена (видети Теорему 7.11).

Три модел простора Риманове геометрије су еуклидски простори, сфере и хиперболички простори. Основна и најважнија модел Риманова многострукост је еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ са еуклидском метриком $\bar{g}$ из (4.5) (Пример 4.6). Напоменимо да је Пример 4.16 показао да је сваки квадратни векторски простор индекса 0 изометричан са $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$. Лако је конструисати изометрије на Римановој многострукости $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, јер свака ортогонална линеарна трансформација на $\mathbb{R}^n$ чува еуклидску метрику као што то ради и свака транслација.

Наредни модел простор је сфера $\mathbf{S}^n$ чија инклузија $\imath\colon \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ индукује Риманову метрику $\mathring{g} = \imath^*\bar{g}$ на $\mathbf{S}^n$ коју зовемо ***окружла метрика***. Сфера $(\mathbf{S}^n, \mathring{g})$ је Риманова многострукост која је хомогена и изотропна.

Пример 4.18. Линеарно дејство ортогоналне групе $\mathrm{O}(n+1)$ на $\mathbb{R}^{n+1}$ чува и $\mathbf{S}^n$ и еуклидску метрику, те његова рестрикција на $\mathbf{S}^n$ дејствује изометрично. Посматрајмо северни пол $q(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbf{S}^n$ са стандардном базом $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ у $T_q\mathbf{S}^n$. Нека је $p \in \mathbf{S}^n$ произвољна тачка са ортонормираном базом $(E_1, \ldots, E_n)$ у $T_p\mathbf{S}^n$. Како су ови базни вектори тангентни на сферу, они су ортогонални на p, те је $(E_1, \ldots, E_n, p)$ ортонор-

мирана база у $T_p\mathbb{R}^{n+1}$. Ако је $f \in \mathrm{O}(n+1)$ матрица чије су колоне управо ти базни вектори, онда $f\colon (\partial_1, \dots, \partial_{n+1}) \mapsto (E_1, \dots, E_n, p)$, те посебно $f(q) = f(\partial_{n+1}) = p$. Штавише, како f дејствује линеарно на $\mathbb{R}^{n+1}$, тангентно пресликавање $T_q f\colon T_q\mathbb{R}^{n+1} \to T_p\mathbb{R}^{n+1}$ у стандардним координатама има репрезентацију која је дата истом матрицом као и f, одакле добијамо $f_*\partial_i = E_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$.



На овај начин смо пронашли изометрију f која преводи q у p, док ортонормирану базу од q гура у изабрану ортонормирану базу од p, те је $\mathbf{S}^n$ хомогена и изотропна многострукост. △

Глатко пресликавање $f\colon M \to N$ између псеудо-Риманових многострукости (M, g_M) и (N, g_N) је ***конформно*** ако $f^*(g_N) = hg_M$ важи за неку позитивну функцију $h \in \mathfrak{F}(M)$. Ако постоји конформни дифеоморфизам између псеудо-Риманових многострукости кажемо да су оне ***конформно еквиваленте***. Две метрике g_1 и g_2 на многострукости M су ***конформне*** ако постоји позитивна функција $h \in \mathfrak{F}(M)$ таква да је $g_2 = hg_1$, односно ако је идентичко пресликавање између (M, g_1) и (M, g_2) конформно. У Римановој геометрији је познато да су две метрике конформне ако и само ако дефинишу исте углове, док је дифеоморфизам конформни ако и само ако чува углове.

Пример 4.19. Сфера је локално конформно еквивалентна еуклидском простору, а стереографска пројекција је конформни дифеоморфизам између $\mathbf{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ и $\mathbb{R}^n$. Размотримо стереографску пројекцију $\varphi = \varphi_-$ из Примера 1.15 која је дата са

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n), \tag{4.7}$$

и чији инверз је

$$\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}(2y_1, \dots, 2y_n, -1 + y_1^2 + \dots + y_n^2). \tag{4.8}$$

За произвољну тачку $s \in \mathbb{R}^n$ и вектор $V \in T_s\mathbb{R}^n$, из

$$\varphi_*^{-1}V = \sum_{i=1}^{n+1} (\varphi_*^{-1}V)(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n+1} V(x_i \circ \varphi^{-1})\frac{\partial}{\partial x_i},$$

можемо израчунати индуковану метрику,

$$(\varphi^{-1})^*\mathring{g}(V, V) = \mathring{g}(\varphi_*^{-1}V, \varphi_*^{-1}V) = \overline{g}(\varphi_*^{-1}V, \varphi_*^{-1}V) = \sum_{i=1}^{n+1} (V(x_i \circ \varphi^{-1}))^2,$$

где је

$$V(x_i \circ \varphi^{-1}) = V\left(\frac{2y_i}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}\right) = 2\frac{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)V(y_i) - y_i V(y_1^2 + \dots + y_n^2)}{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^2}$$

за $1 \leqslant i \leqslant n$, са додатним

$$V(x_{n+1} \circ \varphi^{-1}) = V\left(\frac{-1+y_1^2+\cdots+y_n^2}{1+y_1^2+\cdots+y_n^2}\right) = 2\frac{V(y_1^2+\cdots+y_n^2)}{(1+y_1^2+\cdots+y_n^2)^2}.$$

Како је $V(y_1^2+\cdots+y_n^2) = \sum_{i=1}^n 2y_iV(y_i)$, то имамо

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1})^*\mathring{g}(V,V) =& \frac{4}{(1+y_1^2+\cdots+y_n^2)^4}\Big((V(y_1^2+\cdots+y_n^2))^2 \\ &+\sum_{i=1}^n((1+y_1^2+\cdots+y_n^2)V(y_i)-y_iV(y_1^2+\cdots+y_n^2))^2\Big) \\ =& 4\frac{(V(y_1))^2+\cdots+(V(y_n))^2}{(1+y_1^2+\cdots+y_n^2)^2} = \frac{4}{(1+y_1^2+\cdots+y_n^2)^2}\overline{g}(V,V).\end{aligned}$$

Другим речима, важи

$$(\varphi^{-1})^*\mathring{g} = \frac{4}{(1+y_1^2+\cdots+y_n^2)^2}\overline{g},$$

где $\overline{g}$ репрезентује еуклидску метрику на $\mathbb{R}^n$, те је зато ова стереографска пројекција φ конформни дифеоморфизам. Одавде следи да је сфера ***локално конформно равна***, што значи да свака тачка из $\mathbf{S}^n$ има околину која је конформно еквивалентна неком отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$. △

Трећу класу модел Риманових многострукости чини хиперболички простор $\mathbf{H}^n$ који дефинишемо са

$$\mathbf{H}^n = \{X = (x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : g(X,X) = -1,\ x_0 > 0\}$$

као псеудо-Риманову подмногострукост простора Минковског $\mathbb{R}_1^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, g)$. Геометријски гледано, у питању је горњи део дводелног хиперболоида који је задат једначином $x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = 1$. Посматрајмо глатку функцију $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ дефинисану са $f(X) = g(X,X)$. Како је

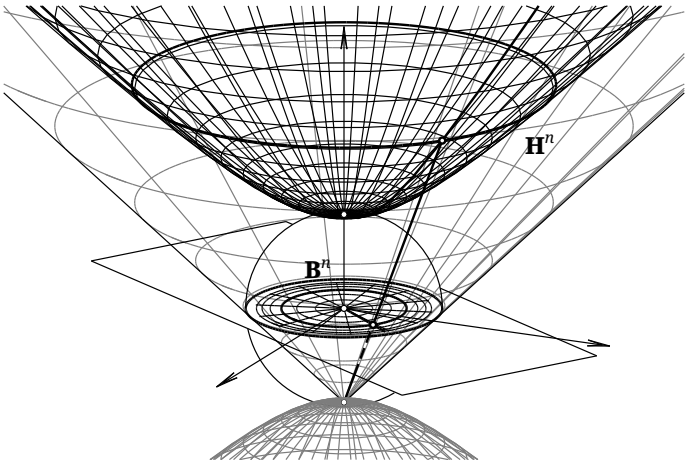
$$df_X(Y_X) = Y_Xf = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(X+tY) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f(X)+2tg(X,Y)+t^2f(Y)) = 2g(X,Y) = 2g_X(X_X,Y_X),$$

то важи $df_X = 2(X_X)^\flat$, те T_Xf има ранг 1 за свако $X \neq 0$, одакле следи да је -1 регуларна вредност од f. По Теореми 2.15, регуларни скуп нивоа $f^{-1}(-1)$ је подмногострукост кодимензије 1, што такође важи за његов отворен подскуп $\mathbf{H}^n$. Штавише, по Леми 2.16 за свако $X \in \mathbf{H}^n$ имамо $T_X\mathbf{H}^n = \operatorname{Ker} T_Xf = \operatorname{Ker} X^\flat = X^\perp$. Због $g(X,X) = -1 < 0$, рестрикција амбијентне метрике на $X^\perp$ је позитивно дефинитна, те g индукује Риманову метрику $h = \imath^*g$ на $\mathbf{H}^n$.

Пример 4.20. Посматрајмо ***хиперболичку стереографску пројекцију*** π из $\mathbf{H}^n$ у хиперраван $x_0 = 0$ преко тачке $(-1,0,\ldots,0)$. Из њене формуле

$$\pi(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{1+x_0}(x_1,\ldots,x_n),$$

видимо да $\|\pi(x_0,x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{(x_0-1)/(x_0+1)} \nearrow 1$ кад $x_0 \to +\infty$, те је $\operatorname{Im}(\pi) = \mathbf{B}^n$ јединична отворена кугла у $\mathbb{R}^n$. Због тога нас дифеоморфизам $\pi\colon \mathbf{H}^n \to \mathbf{B}^n$ доводи до другог модела који зовемо ***Поинкареов кугла модел*** $\mathbf{HB}^n = (\mathbf{B}^n, (\pi^{-1})^*h)$, где је h метрика на $\mathbf{H}^n$.



Након што израчунамо инверз,

$$\pi^{-1}(y_1,\dots,y_n)=\frac{1}{1-y_1^2-\dots-y_n^2}(1+y_1^2+\dots+y_n^2,2y_1,\dots,2y_n),$$

као и раније, постављамо произвољну тачку $s\in\mathbf{B}^n$ и вектор $V\in T_s\mathbf{B}^n$. Из

$$\pi_*^{-1}V=\sum_{i=0}^{n}(\pi_*^{-1}V)(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i=0}^{n}V(x_i\circ\pi^{-1})\frac{\partial}{\partial x_i},$$

добијамо,

$$(\pi^{-1})^*h(V,V)=h(\pi_*^{-1}V,\pi_*^{-1}V)=g(\pi_*^{-1}V,\pi_*^{-1}V)=-(V(x_0\circ\pi^{-1}))^2+\sum_{i=1}^{n}(V(x_i\circ\pi^{-1}))^2,$$

где је

$$V(x_i\circ\pi^{-1})=V\left(\frac{2y_i}{1-y_1^2-\dots-y_n^2}\right)=2\frac{(1-y_1^2-\dots-y_n^2)V(y_i)+y_iV(y_1^2+\dots+y_n^2)}{(1-y_1^2-\dots-y_n^2)^2}$$

за $1\leqslant i\leqslant n$, са додатним

$$V(x_0\circ\pi^{-1})=V\left(\frac{1+y_1^2+\dots+y_n^2}{1-y_1^2-\dots-y_n^2}\right)=2\frac{V(y_1^2+\dots+y_n^2)}{(1-y_1^2-\dots-y_n^2)^2}.$$

Одавде је

$$\begin{aligned}(\pi^{-1})^*h(V,V)=&\frac{4}{(1-y_1^2-\dots-y_n^2)^4}\Big(-(V(y_1^2+\dots+y_n^2))^2\\&+\sum_{i=1}^{n}((1-y_1^2-\dots-y_n^2)V(y_i)+y_iV(y_1^2+\dots+y_n^2))^2\Big)\\=&4\frac{(V(y_1))^2+\dots+(V(y_n))^2}{(1-y_1^2-\dots-y_n^2)^2}=\frac{4}{(1-y_1^2-\dots-y_n^2)^2}\overline{g}(V,V),\end{aligned}$$

што даје метрику за $\mathbf{HB}^n$,

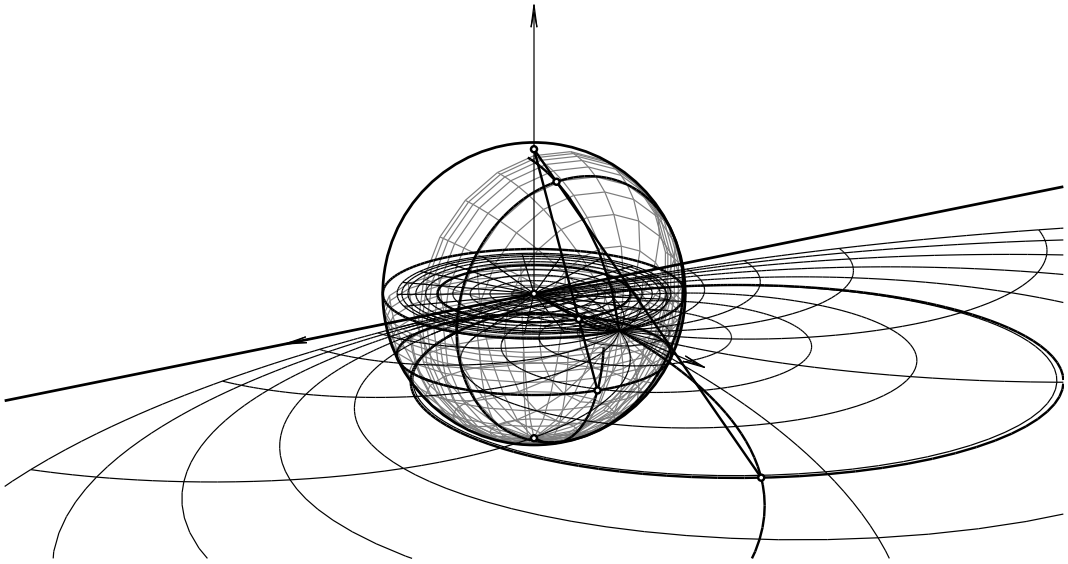
$$h_2=(\pi^{-1})^*h=4\frac{(dy_1)^2+\dots+(dy_n)^2}{(1-y_1^2-\dots-y_n^2)^2}. \tag{4.9}$$

На овај начин добили смо Риманове многострукости $\mathbf{H}^n=(\mathbf{H}^n,h)$ и $\mathbf{HB}^n=(\mathbf{B}^n,h_2)$ које су изометричне. △

Пример 4.21. Нека је $\varphi\colon \mathbf{S}^n \setminus \{q\} \to \mathbb{R}^n$ стереографска пројекција из Примера 4.19 са формулама (4.7) и (4.8), те нека је $\rho\colon \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ ротација дефинисана једначином $\rho(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_{n+1}, x_n)$ која хемисферу $\{x_{n+1} < 0\}$ преводи у хемисферу $\{x_n > 0\}$. Посматрајмо дифеоморфизам

$$\psi = \varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1} \colon \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$$

и његову рестрикцију из кугле $\mathbf{B}^n$ на полупростор $\mathbf{U}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_n > 0\}$. Тада пресликавање $\psi\restriction_{\mathbf{B}^n} \colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{U}^n$ доноси трећи модел хиперболичког простора, ***Поинкареов полупростор модел*** $\mathbf{HU}^n = (\mathbf{U}^n, (\psi^{-1})^* h_2)$.



Можемо израчунати инверз $f = \psi^{-1} = \varphi \circ \rho^{-1} \circ \varphi^{-1}$ у координатама,

$$\begin{aligned}
f(z_1, \dots, z_n) &= \varphi \circ \rho^{-1} \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) \\
&= \varphi \circ \rho^{-1} \left(\frac{1}{1 + z_1^2 + \dots + z_n^2} (2z_1, \dots, 2z_n, -1 + z_1^2 + \dots + z_n^2) \right) \\
&= \varphi \left(\frac{1}{1 + z_1^2 + \dots + z_n^2} (2z_1, \dots, 2z_{n-1}, -1 + z_1^2 + \dots + z_n^2, -2z_n) \right) \\
&= \frac{1}{(1 + z_n)^2 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2} (2z_1, \dots, 2z_{n-1}, -1 + z_1^2 + \dots + z_n^2).
\end{aligned}$$

За произвољну тачку $p \in \mathbf{U}^n$ добијамо

$$\begin{aligned}
f_* \frac{\partial}{\partial z_n} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \\
&= \frac{2((1 + z_n)^2 - z_1^2 - \dots - z_{n-1}^2) \frac{\partial}{\partial y_n} \circ f - 4(1 + z_n) \sum_{i=1}^{n-1} z_i \frac{\partial}{\partial y_i} \circ f}{((1 + z_n)^2 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2)^2},
\end{aligned}$$

одакле за индуковану метрику $h_3 = f^* h_2$, уз смену $z^2 = z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2$, имамо

$$\begin{aligned}
h_3 \left(\frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial z_n} \right) &= h_2 \left(f_* \frac{\partial}{\partial z_n}, f_* \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \\
&= \frac{4}{(1 - (y_1 \circ f)^2 - \dots - (y_n \circ f)^2)^2} \frac{4((1 + z_n)^2 - z^2)^2 + 16(1 + z_n)^2 z^2}{((1 + z_n)^2 + z^2)^4} \\
&= 16 \frac{((1 + z_n)^2 + z^2)^2}{(((1 + z_n)^2 + z^2)^2 - 4z^2 - (-1 + z^2 + z_n^2)^2)^2} = \frac{1}{z_n^2}.
\end{aligned}$$

Међутим, из формуле (4.9) видимо да су метрике h_2 и $\bar{g}$ конформне на $\mathbf{B}^n$, док Пример 4.19 показује да је f^{-1} конформни дифеоморфизам између $(\mathbf{B}^n, \bar{g})$ и $(\mathbf{U}^n, \bar{g})$, одакле следи да су метрике h_3 и $\bar{g}$ конформне на $\mathbf{U}^n$. То је разлог зашто нам је довољно да израчунамо $h_3(V, V)$ за неко добро изабрано векторско поље, на пример за $V = \partial/\partial z_n$. Одавде коначно добијамо

$$h_3 = f^* h_2 = \frac{(dz_1)^2 + \cdots + (dz_n)^2}{z_n^2}. \tag{4.10}$$

Како су Риманове многострукости $\mathbf{H}^n$, $\mathbf{HB}^n$ и $\mathbf{HU}^n$ све међусобно изометричне, често користимо једноставну нотацију $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$ да укажемо на било који од ових хиперболичких модела који је у датом контексту најзгоднији. △

Пример 4.22. Симетрије од $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$ се најлакше виде у хиперболоид моделу $\mathbf{H}^n$. ***Лоренцова група*** $\mathrm{O}(1, n)$ је група линеарних пресликавања из $\mathbb{R}^{n+1}_1$ на себе које чувају метрику Минковског. Сваки елемент из $\mathrm{O}(1, n)$ чува хиперболоид $\{x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = 1\}$ који се састоји од две компоненте које су одређене са $\{x_0 > 0\}$ и $\{x_0 < 0\}$. Подгрупа $\mathrm{O}^+(1, n)$ која чува смер времена састоји се од пресликавања која шаљу компоненту $\{x_0 > 0\}$ у себе, те зато дејствује на $\mathbf{H}^n$ као изометрија. Аналогно можемо пратити аргументе из Примера 4.18 да бисмо закључили да постоји изометрија из $\mathrm{O}^+(1, n)$ која произвољну тачку q шаље у произвољну тачку p, а произвољну ортонормирану базу за $T_q\mathbf{H}^n$ гура у произвољну ортонормирану базу за $T_p\mathbf{H}^n$, те је хиперболички простор $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$ хомоген и изотропан. △

Дефиниције еуклидских, сферичних и хиперболичких метрика могу се прилагодити тако да добијемо основне моделе псеудо-Риманових многострукости који су хомогени и изотропни. Први пример је свакако псеудо-еуклидски простор $\mathbb{R}^n_\nu$ индекса $\nu > 0$ из Примера 4.7.

За остале моделе посматрамо псеудо-Риманову подмногострукост псеудо-еуклидског простора $(\mathbb{R}^{n+1}_\nu, g)$ која је дата са $M = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu : g(X, X) = c\}$ за неки скалар $c = \pm 1$. Слично конструкцији хиперболичког модела $\mathbf{H}^n$ постављамо функцију $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ са $f(X) = g(X, X)$. Тада важи $df_X = 2X^\flat$, те је c регуларна вредност од f одакле је $M = f^{-1}(c)$ подмногострукост димензије n, док метрику повлачимо из амбијентне метрике g. Како је $T_X M = \operatorname{Ker} T_X f = \operatorname{Ker} X^\flat = X^\perp$ и $g(X, X) = c$, видимо да се индекс смањује за један само уколико је $c < 0$.

Псеудо-Риманова многострукост $(M, \imath^* g)$ за $c = 1$ има индекс ν и зовемо је ***псеудосфера***, док за $c = -1$ има индекс $\nu - 1$ и зовемо је ***псеудохиперболички простор***. Посебно, ***де Ситеров простор***[11] је псеудосфера $\mathbf{dS}^n$ смештена у $\mathbb{R}^{n+1}_1$, док псеудохиперболички простор $\mathbf{AdS}^n$ смештен у $\mathbb{R}^{n+1}_2$ зовемо ***анти-де Ситерев простор***. На овај начин поставили смо три модел простора Лоренцове геометрије, а то су простори Минковског, де Ситерови и анти-де Ситерови простори.

4.7 Дужина и растојање

На еуклидским просторима одмах имамо концепт растојања између тачака, тако да дефиницију дужине криве оправдава сума растојања за добру полигоналну апроксимацију. Риманове многострукости нису унапред метрички простори, док псеудо-Риманове многострукости (са недефинитном метриком) уопште нису метрички простори. Међутим, позитивно дефинитан скаларни производ на тангентном простору Риманове многострукости доноси концепт дужине тангентних вектора. Одатле природно добијамо могућност да меримо дужину криве, што нам омо-

[11] Willem de Sitter (1872–1934), холандски математичар, физичар и астроном

гућава да дефинишемо растојање између тачака на повезаној Римановој многострукости која постаје метрички простор.

Нека је M глатка многострукост. ***Крива*** (или ***глатка параметарска крива***) на M је глатко пресликавање $\gamma\colon I \to M$, где је $I \subseteq \mathbb{R}$ неки отворен интервал. Како је I отворена подмногострукост реалне праве $\mathbb{R}^1$, то има идентичку карту која се састоји од једне координатне функције $u = \mathbb{1}_I$. ***Брзина*** криве $\gamma\colon I \to M$ дефинисана је као гурање координатног векторског поља, $\gamma' = T\gamma \circ (d/du)\colon I \to TM$. Прецизније, крива γ сваком $t \in I$ додељује ***вектор брзине*** $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ дефинисан са

$$\gamma'(t) = (T_t\gamma)\left(\frac{d}{du}\right)_t = \gamma_*\left(\frac{d}{du}\right)_t,$$

где је $(d/du)_t \in T_tI$ канонски базни вектор у t који пресликава $f \in \mathfrak{F}(I)$ у стари добри извод $f'(t)$ у смислу анализе.

Кажемо да је крива γ ***регуларна*** ако $\gamma'(t) \neq 0$ важи за све $t \in I$, што повлачи да је γ имерзија. Концепт регуларних кривих може се продужити на затворене ограничене интервале $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Пресликавање $\gamma\colon [a,b] \to M$ је ***регуларни сегмент криве*** ако се продужава на регуларну криву која је дефинисана на неком отвореном интервалу који садржи $[a,b]$. Општије, непрекидно пресликавање $\gamma\colon [a,b] \to M$ је ***допуштена крива*** (или ***део по део регуларни сегмент криве***) из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ уколико постоји коначан низ $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ бројева $t_i \in \mathbb{R}$, који зовемо ***разбијање*** од $[a,b]$, тако да је рестрикција $\gamma\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ регуларни сегмент криве за свако $1 \leqslant i \leqslant k$.

Уобичајени концепт из анализе о дужини криве у еуклидском простору природно се уопштава за псеудо-Риманову многострукост (M,g). Постојање метрике g омогућава нам да меримо величину вектора брзине. ***Брзина*** криве $\gamma \in \mathfrak{F}(I)$ у некој тачки $t \in I$ је магнитуда њеног вектора брзине у t,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{|g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))|}.$$

Како је растојање које објекат пређе једнако интегралу брзине над временским интервалом, дефинишемо ***дужину лука*** допуштене криве $\gamma\colon [a,b] \to M$ са

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

Функција брзине је ограничена и непрекидна свуда на $[a,b]$ осим евентуално у конечно много тачака у којима γ није глатка, те је интеграбилна у Римановом (или Лебеговом[12]) смислу, тако да је $L(\gamma)$ добро дефинисан коначан ненегативан број.

Репараметризација криве $\gamma\colon I \to M$ је крива облика $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi\colon I' \to M$, где је $I' \subseteq \mathbb{R}$ неки интервал, а $\varphi\colon I' \to I$ дифеоморфизам. Како су интервали повезани, φ мора бити строго монотона (или растућа или опадајућа) на I'. Кажемо да је $\widetilde{\gamma}$ ***параметризација унапред*** ако је φ растућа ($\varphi' > 0$), док је ***параметризација уназад*** ако је опадајућа ($\varphi' < 0$).

Општије, ***репараметризација*** допуштене криве $\gamma\colon [a,b] \to M$ је допуштена крива облика $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, где је $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ хомеоморфизам за који постоји разбијање $c = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = d$ од $[c,d]$ такво да је рестрикција $\varphi\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ дифеоморфизам на његову слику за свако $1 \leqslant i \leqslant k$. Ако извод φ' не мења знак кажемо да је одговарајућа репараметризација ***монотона***.

Важно је приметити да је дужина лука допуштене криве инваријантна у односу на монотоне репараметризације, где за $\varphi' > 0$ имамо

$$L(\gamma \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\|\,dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi(t_{i-1})}^{\varphi(t_i)} \|\gamma'(\varphi(t))\|\,d(\varphi(t)) = L(\gamma).$$

[12] Henri Lebesgue (1875–1941), француски математичар

Иако се дужина лука на Римановој многострукости понаша слично као на еуклидском простору, у случају недефинитне метрике израз дужина може нас навести на странпутицу. На пример, изотропна крива има дужину нула. Да бисмо избегли потенцијалне проблеме где ненула изотропно $\gamma'(t)$ има брзину нула, фокусираћемо се на Риманову геометрију.

Нека је (M, g) Риманова многострукост. Тада допуштена крива $\gamma\colon [a, b] \to M$ има позитивну брзину $\|\gamma'(t)\| > 0$ за свако t осим тачака из одговарајућег разбијања од $[a, b]$. Посматрајмо функцију $s\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ коју називамо ***функција дужине лука*** од γ, а дефинишемо са

$$s(t) = L(\gamma\restriction_{[a,t]}) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du,$$

што је свуда непрекидно, а по основној теореми из анализе је глатко гдегод је то γ, са изводом $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Како $s'(t) > 0$ важи за све глатке тачке $t \in [a, b]$, функција s је строго растућа на $[a, b]$. Тада њен инверз $\varphi = s^{-1}\colon [0, L(\gamma)] \to [a, b]$ одређује репараметризацију унапред $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ од γ, где

$$\|\widetilde{\gamma}'(t)\| = \|\gamma'(s^{-1}(t)) \cdot (s^{-1})'(t)\| = \left\| \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{s'(s^{-1}(t))} \right\| = \left\| \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} \right\| = 1$$

важи гдегод је γ глатко. Таква репараметризација $\widetilde{\gamma}$ има ***јединичну брзину***, док њена функција дужине лука има једноставан облик $s(t) = t$. За допуштену криву јединичне брзине чији је интервал параметара облика $[0, b]$ за неко $b > 0$ кажемо да је ***параметризована дужином лука***.

Лема 4.17. *Свака допуштена крива на Римановој многострукости може се репараметризовати дужином лука јединственом репараметризацијом унапред.*

Уведимо концепт растојања између тачака на повезаној Римановој многострукости (M, g). За сваки пар тачака $p, q \in M$ постављамо ***путни простор*** $\Omega_{p,q}$ свих допуштених кривих из p у q. Овај простор није празан, што видимо у наредној леми.

Лема 4.18. *Сваке две тачке повезане многострукости могу се повезати допуштеном кривом.*

Доказ. Повезана многострукост M је путно повезана, те се сваке две тачке $p, q \in M$ могу повезати непрекидним путем $\gamma\colon [a, b] \to M$. Из компактности, постоји разбијање $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ од $[a, b]$ такво да је $\gamma\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ садржано у координатној околини која је дифеоморфна еуклидској кугли, за свако $1 \leqslant i \leqslant k$. Тада, свако $\gamma\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ можемо заменити праволинијским путем у координатама, што доноси допуштену криву из p у q. □

Претходна лема нам дозвољава да добро дефинишемо ***Риманово растојање*** $d(p, q)$ између тачака $p, q \in M$ са

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \in \Omega_{p,q}\}.$$

Пример 4.23. Инфимум дужине криве у дефиницији за $d(p, q)$ не мора да се реализује. Посматрајмо избушену раван $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ као Риманову подмногострукост од $\mathbb{R}^2$. Растојање између тачака $p(-1, 0)$ и $q(1, 0)$ је $d(p, q) = 2$, али ово растојање се не реализује ниједном допуштеном кривом, јер сваки такав пут у $\mathbb{R}^2$ пролази кроз $(0, 0)$. △

Из дефиниције директно следи да је $d(p, q) = d(q, p) \geqslant 0$ и $d(p, p) = 0$. Додатно, неједнакост троугла $d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q)$ за све $p, q, r \in M$ следи из чињенице да се допуштена крива из p у q може добити комбиновањем једне из p у r и друге из r у q

(евентуално уз промену времена почетка параметризације), чија дужина је једнака збиру дужина почетних допуштених кривих. Да би (M, d) постао метрички простор, потребно нам је још само да покажемо да $d(p, q) = 0$ повлачи $p = q$. Да бисмо ово доказали уводимо наредно тополошко тврђење.

Лема 4.19. *Нека су X и Y тополошки простори, где је Y компактан. За свако непрекидно $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, функција $h\colon X \to \mathbb{R}$ дата са $h(x) = \min_{y \in Y} f(x, y)$ је добро дефинисана и непрекидна.*

Доказ. За свако фиксирано $x \in X$, функција $f_x\colon Y \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f_x(y) = f(x, y)$ је непрекидна са компактним доменом, одакле следи да је $f_x(Y)$ компактан интервал, те добијамо $h(x) = \min f_x(Y)$. За непрекидност од h довољно је проверити да су $h^{-1}(-\infty, a)$ и $h^{-1}(b, \infty)$ отворени. Лако је видети да је $h^{-1}(-\infty, a) = \pi_X \circ f^{-1}(-\infty, a)$ отворен, где је $\pi_X\colon X \times Y \to X$ (непрекидна и отворена) канонска пројекција. Са друге стране за свако $x \in h^{-1}(b, \infty)$ и $y \in Y$ постоји околина $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq f^{-1}(b, \infty)$. Како је Y компактан то постоје $y_1(x), \ldots, y_{k(x)}(x) \in Y$ тако да је $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(x)} V_{x,y_i(x)}$, те добијамо

$$\{x\} \times Y \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{k(x)} U_{x,y_i(x)} \right) \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(x)} (U_{x,y_i(x)} \times V_{x,y_i(x)}) \subseteq f^{-1}(b, \infty),$$

одакле следи да је $h^{-1}(b, \infty) = \bigcup_{x \in h^{-1}(b,\infty)} \bigcap_{i=1}^{k(x)} U_{x,y_i(x)}$ отворен. □

Фиксирајмо тачку p са n-многострукости M, те нека је (U, φ) карта центрирана у p са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Еуклидска метрика $\bar{g}$ на U дефинисана са $\bar{g}(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}$ доноси еуклидско растојање $\bar{d}$ дато са

$$\bar{d}(q, r) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i(q) - x_i(r))^2}.$$

Не умањујући општост, координатна околина U може се редуковати на неку куглу $\{q \in U : \bar{d}(p, q) < \varepsilon\}$ за мало $\varepsilon > 0$. Нека је $f\colon U \times \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ глатка функција дата са $f(q, V) = g(V, V)(q) = g_q(V_q, V_q)$, при чему идентификујемо $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{S}^{n-1}$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \partial_i \in \mathfrak{X}(U)$. Како је $\mathbf{S}^{n-1}$ компактан, примена Леме 4.19 доноси добро дефинисане непрекидне позитивне функције $\mu, \nu\colon U \to \mathbb{R}$ дефинисане са

$$\mu(q) = \min_{V \in \mathbf{S}^{n-1}} f(q, V) = \min_{\bar{g}_q(V,V)=1} g_q(V, V) = \min_{0 \neq V \in T_qM} \frac{g_q(V, V)}{\bar{g}_q(V, V)} > 0,$$

$$\nu(q) = \max_{V \in \mathbf{S}^{n-1}} f(q, V) = \max_{\bar{g}_q(V,V)=1} g_q(V, V) = \max_{0 \neq V \in T_qM} \frac{g_q(V, V)}{\bar{g}_q(V, V)} > 0.$$

То повлачи

$$\mu(q)\bar{g}_q(V, V) \leqslant g_q(V, V) \leqslant \nu(q)\bar{g}_q(V, V)$$

за свако $V \in T_qM$, што нам омогућава да упоредимо две метрике g и $\bar{g}$ за $q \in U$. Нека је $\gamma\colon [a, b] \to M$ допуштена крива из p у $q \in U$ и

$$c = \min_{t \in [a,b]} \sqrt{\mu(\gamma(t))} > 0, \quad C = \max_{t \in [a,b]} \sqrt{\nu(\gamma(t))} > 0.$$

Ако γ потпуно лежи у U тада је

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt \geqslant c \int_a^b \sqrt{\bar{g}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt \geqslant c\bar{d}(p, q).$$

У супротном, γ напушта U, и постоји најмање s такво да $\gamma(s) \notin U$, и поново је

$$L(\gamma) \geqslant \int_a^s \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt \geqslant c \int_a^s \sqrt{\bar{g}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt \geqslant c\varepsilon \geqslant c\bar{d}(p, q).$$

У сваком случају, узимањем инфимума следи $d(p, q) \geqslant c\bar{d}(p, q)$. Са друге стране, ако је γ праволинијски пут у еуклидској метрици $\bar{g}$, тада он лежи у U и имамо

$$C\bar{d}(p, q) = C \int_a^b \sqrt{\bar{g}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt \geqslant \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt = L(\gamma) \geqslant d(p, q).$$

Као последицу добијамо

$$0 < c\bar{d}(p, q) \leqslant d(p, q) \leqslant C\bar{d}(p, q), \tag{4.11}$$

што доказује да је $d(p, q) > 0$ за $q \neq p$. Штавише, (4.11) показује да су еуклидско растојање $\bar{d}$ и Риманово растојање d упоредиви на околини од p, што значи да су метричка топологија и топологија многострукости (која долази од еуклидског растојања) еквивалентне.

Теорема 4.20. *Повезана Риманова многострукост са Римановим растојањем је метрички простор чија је метричка топологија иста као топологија многострукости.*

4.8 Задаци

Задатак 4.1. Нека су $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ простори са унутрашњим производом исте коначне димензије. Ако је $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ пресликавање које чува координатни почетак и растојања ($f(0) = 0$ и $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$), онда је f линеарна изометрија.

Задатак 4.2. Нека је $(\mathcal{V}, g)$ недефинитан квадратни векторски простор, а b симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$. Доказати да је $b = cg$ за неко $c \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $b(N, N) = 0$ за сваки изотропан $N \in \mathcal{V}$.

Задатак 4.3. Нека је $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ дато са $f(x, y) = (\sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}, x+y, x-y)$. Израчунати f^*g за метрику Минковског $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbb{R}^3)$, те показати да је то Риманова метрика у $\mathbb{R}^2$.

Задатак 4.4. Доказати да је псеудосфера димензије n, индекса ν и полупречника r дифеоморфна са $\mathbb{R}^\nu \times \mathbf{S}^{n-\nu}$. Доказати да је псеудохиперболички простор димензије n, индекса ν и полупречника r дифеоморфан са $\mathbb{R}^{n-\nu} \times \mathbf{S}^\nu$.

Глава 5

ПОВЕЗАНОСТ

5.1 Коваријантни изводи

У циљу увођења кривине на псеудо-Римановим многострукостима неопходно је проучавати геодезијске, псеудо-Риманова уопштења правих линија. У оригиналном смислу, геодезијска је најкраћа рута између две тачке на површи, те делује примамљиво дефинисати геодезијске као криве које минимизују дужину, барем између блиских тачака. Међутим, псеудо-Риманове многострукости са недефинитном метриком нису метрички простори, те њихове геодезијске не минимизују растојања. Чак иако ограничимо посматрања само на Риманове многострукости, постављање минимизујућег својства за дефиницију има великих техничких потешкоћа.

Зато ћемо изабрати и уопштити неку другу особину правих линија. Добар кандидат је својство да су праве линије једине криве у еуклидском простору које имају параметризације са убрзањем нула, што преносимо на псеудо-Риманове многострукости.

Нека је $\gamma\colon I \to M$ крива на псеудо-Римановој многострукости (M,g). Вектор брзине у тренутку $t \in I$ представља извод $\gamma'(t)$, а нови извод $\gamma''(t)$ доводи нас до убрзања. Дакле, потребно је направити количник одузимањем вектора $\gamma'(t+h) \in T_{\gamma(t+h)}M$ и $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, што није згодно јер они живе у различитим просторима. У случају апстрактне многострукости ова разлика нема смисла, те нам је потребан начин да упоредимо вредности векторског поља у различитим тачкама, односно да повежемо блиске тангентне просторе. Та повезаност је додатна информација на многострукости која омогућава диференцирање векторских поља као и интерпретацију убрзања криве.

Размотримо најпре дешавања у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$. Функцију $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ можемо диференцирати у тачки $p \in \mathbb{R}^n$ у правцу вектора $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ са

$$D_{X_p}f = \lim_{t\to 0}\frac{f(p+tX_p)-f(p)}{t} = (f\circ\gamma)'(0) = \gamma'(0)f = X_p(f), \tag{5.1}$$

где је $\gamma(t) = p + tX_p$. На сличан начин векторско поље $Y = \sum_{i=1}^n Y^i\partial_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ диференцирамо са

$$\begin{aligned} D_{X_p}Y &= \lim_{t\to 0}\frac{Y(p+tX_p)-Y(p)}{t} = \sum_{i=1}^n \lim_{t\to 0}\frac{Y^i(p+tX_p)\partial_i - Y^i(p)\partial_i}{t} \\ &= \sum_{i=1}^n D_{X_p}Y^i\partial_i = \sum_{i=1}^n X_p(Y^i)\partial_i. \end{aligned} \tag{5.2}$$

У случају произвољне многострукости M, која није нужно смештена у неки еуклидски простор, можемо искористити резултат из (5.1) и диференцирати функцију

$f \in \mathfrak{F}(M)$ у правцу вектора $X_p \in T_pM$ са $\nabla_{X_p} f = X_p(f)$. Међутим, у општем случају не постоји канонска база тангентног простора T_pM, те је резултат из (5.2) неупотребљив директно. Како не постоји канонски начин да дефинишемо диференцирање векторских поља на апстрактној многострукости, користимо формулу (5.2) да установимо особине које $D_{X_p}Y$ поседује у $\mathbb{R}^n$, да бисмо преко њих засновали општу теорију.

За векторско поље $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ дефинишемо D_XY са $(D_XY)_p = D_{X_p}Y$ за свако $p \in \mathbb{R}^n$. Како смо из (5.2) установили $(D_XY)_p = \sum_{i=1}^n X_p(Y^i)(\partial_i)_p$, то векторска поља X и Y доносе ново векторско поље

$$D_XY = \sum_{i=1}^n X(Y^i)\partial_i \tag{5.3}$$

и $\mathbb{R}$-билинеарну бинарну операцију $D\colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Очигледна је $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$-линеарност по првом аргументу, док по другом аргументу имамо Лајбницовост, јер за $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ важи

$$D_X(fY) = \sum_{i=1}^n X(fY^i)\partial_i = \sum_{i=1}^n (Xf)Y^i\partial_i + \sum_{i=1}^n fX(Y^i)\partial_i = (Xf)Y + fD_XY.$$

Уочене особине нас мотивишу да на произвољној многострукости уведемо операцију повезаности.

Повезаност (***конексија***, *connection*, *affine connection*, *linear connection*) на многострукости M је $\mathbb{R}$-билинеарно пресликавање $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ са ознаком $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, које је $\mathfrak{F}(M)$-линеарно по првом аргументу, а Лајбницово по другом аргументу. Симбол ∇ читамо „набла“ или „дел“, док $\nabla_X Y$ зовемо ***коваријантни извод*** од Y у односу на X.

За произвољно $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ и $f, h \in \mathfrak{F}(M)$, можемо записати формуле коваријантног извода на следећи начин. Како је повезаност $\mathfrak{F}(M)$-линеарна по првом аргументу, то имамо

$$\nabla_{fX+hY}Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z. \tag{5.4}$$

Повезаност није $\mathfrak{F}(M)$-линеарна по другом аргументу, већ само $\mathbb{R}$-линеарна,

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \tag{5.5}$$

док одступање од $\mathfrak{F}(M)$-линеарности видимо кроз Лајбницово правило

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y. \tag{5.6}$$

Мотивациона операција D дефинисана са (5.3) свакако испуњава услове дефиниције и зовемо је ***стандардна повезаност*** на $\mathbb{R}^n$.

Коваријантни извод ∇_X у односу на векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ продужава се за произвољно тензорско поље на M. Природно имамо $\nabla_X f = Xf$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$, док $\nabla_X Y$ формулама (5.5) и (5.6) комплетира услове Теореме 3.16, одакле постоји јединствен извод тензорског поља на M који уопштава коваријантни извод.

За произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ имамо $\nabla_X A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, те додатно дефинишемо пресликавање $\nabla A\colon \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^{s+1} \to \mathfrak{F}(M)$ са

$$\nabla A(\omega_1, \ldots, \omega_r, Y_1, \ldots, Y_s, X) = (\nabla_X A)(\omega_1, \ldots, \omega_r, Y_1, \ldots, Y_s).$$

Како је $\nabla_X A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ то ∇A јесте $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно по првих $r + s$ аргумената, а из (5.4) је $\mathfrak{F}(M)$-линеарно по последњем аргументу. Ново тензорско поље $\nabla A \in \mathfrak{T}^r_{s+1}(M)$ добијено на овакав начин зовемо ***потпун коваријантни извод*** од A. Кажемо да је тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ ***паралелно*** ако је $\nabla A = 0$.

Пример 5.1. За $f \in \mathfrak{F}(M)$ имамо $(\nabla f)(X) = \nabla_X f = Xf = df(X)$, те је потпун коваријантни извод функције једнак њеном диференцијалу, $\nabla f = df$. Додатно, уколико је $\nabla f = 0$, то је $df = 0$, а како се диференцијал поистовећује са тангентним пресликавањем имамо $Tf = 0$, те из доказа Леме 2.20 видимо да је f локална константа. Дакле, ако је $\nabla f = 0$, то је f локално константно, а за повезану многострукост M и глобално константно. △

Пример 5.2. Коваријантни тензор реда два $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f)$ зовемо ***Хесијан***[1] од f. Ако са C обележимо $(1,1)$ контракцију, рачун даје

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_Y f) &= \nabla_X(\nabla f(Y)) = \nabla_X(C(\nabla f \otimes Y)) = C(\nabla_X(\nabla f \otimes Y)) = C(\nabla_X \nabla f \otimes Y + \nabla f \otimes \nabla_X Y)\\ &= (\nabla_X \nabla f)(Y) + \nabla f(\nabla_X Y) = \nabla^2 f(Y,X) + \nabla_{\nabla_X Y} f,\end{aligned}$$

одакле следи $\nabla^2 f(Y,X) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$. △

Иако је повезаност дефинисана на глобалним векторским пољима, она је заправо локални оператор, о чему говори наредна теорема.

Теорема 5.1. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M. Вредност векторског поља $\nabla_X Y$ у $p \in M$ зависи само од вредности за $Y \in \mathfrak{X}(M)$ у околини од p и вредности за $X \in \mathfrak{X}(M)$ у p.*

Доказ. Зависност по компоненти Y као извод тензора имамо у Теореми 3.15, док зависност по компоненти X видимо у Теореми 3.13 ако за фиксирано Y посматрамо $\mathfrak{T}^1_1(M) \ni T\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ дато са $T(X) = \nabla_X Y$. □

Нека је $V \in T_pM$ тангентни вектор у тачки $p = \pi(V) \in M$, а $Z \in \mathfrak{X}(U)$ векторско поље где је $U \subseteq M$ околина тачке p. Теорема 5.1 нам омогућава да добро дефинишемо $\nabla_V Z = (\nabla_X Y)_p$, где су $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ произвољна векторска поља за која важи $X_p = V$ и $Y\restriction_U = Z$.

Нека је ∇ повезаност на n-многострукости M, а $(E_1, \ldots, E_n)$ локални покретни репер над отвореним подскупом $U \subseteq M$. Најчешће је то координатни покретни репер са $E_i = \partial_i$, али је корисно извести рачун у општем случају. За $1 \leqslant i, j \leqslant n$ коваријантни извод $\nabla_{E_i} E_j$ се може изразити у терминима тог покретног репера са

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k E_k.$$

На овај начин добијамо n^3 функција $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(U)$ које зовемо ***Кристофелови симболи***[2] од ∇ у односу на дати покретни репер. Ако је $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ и $Y = \sum_{j=1}^n Y^j E_j$, онда је

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X\Big(\sum_j Y^j E_j\Big) = \sum_j (XY^j) E_j + \sum_j Y^j \nabla_{\sum_i X^i E_i} E_j\\ &= \sum_j (XY^j) E_j + \sum_{i,j} X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j = \sum_k (XY^k) E_k + \sum_{i,j,k} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k,\end{aligned}$$

одакле следи

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(XY^k + \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) E_k,$$

[1] Ludwig Otto Hesse (1811–1874), немачки математичар

[2] Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), немачки математичар и физичар

што значи да је повезаност на U у потпуности одређена својим Кристофеловим симболима. У случају координатног покретног репера, претходна формула се своди на једнакост

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(X(Y(x_k)) + \sum_{i,j=1}^{n} X(x_i) Y(x_j) \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{5.7}$$

одакле се лако може закључити локалност повезаности из Теореме 5.1.

Штавише, у случају да се гладак атлас многострукости састоји од само једне карте, $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ је глобални покретни репер и испоставља се да произвољан избор n^3 глатких функција $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(M)$ помоћу једнакости (5.7) дефинише повезаност ∇. Најпре видимо да за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ очигледно имамо $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$. Такође је очигледна $\mathbb{R}$-линеарност по Y и $\mathfrak{F}(M)$-линеарност по X. Преостаје још Лајбницовост по Y што је једноставан праволинијски рачун.

Пример 5.3. Ако све Кристофелове симболе поставимо да буду нула, из формуле (5.7) добијамо $\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} XY^k \partial_k$ што је стандардна повезаност $D_X Y$ за $M = \mathbb{R}^n$. △

Пример 5.4. Произвољан избор глатких функција $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(U_\alpha)$ генерише повезаност ∇^α на свакој координатној околини U_α. За разбијање јединице ψ_α које је подређено атласу можемо поставити $\nabla_X Y = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y$, што нам омогућава да конструишемо приличан број повезаности на многострукости M. Глаткоћа се лако види, као и $\mathbb{R}$-линеарност по Y и $\mathfrak{F}(M)$-линеарност по X. Што се тиче Лајбницовости по Y, неће свака линеарна комбинација повезаности чинити повезаност, али због $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$ имамо $\nabla_X(fY) = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha (fY) = \sum_\alpha \psi_\alpha ((Xf)Y + f\nabla_X^\alpha Y) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$. △

5.2 Леви-Чивита повезаност

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и нека је ∇ повезаност на M. Кажемо да је повезаност ∇ ***метричка*** (или да чува метрику) ако је g паралелно тензорско поље, $\nabla g = 0$. За метричку повезаност за $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$0 = (\nabla g)(Y, Z, X) = (\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z),$$

што даје слагање метрике g и повезаности ∇,

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \tag{5.8}$$

Пресликавање $\tau \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ дефинисано са $\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ зовемо ***торзија***. Торзија је евидентно $\mathfrak{F}(M)$-билинеарно пресликавање и самим тим $\tau \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ (видети Пример 3.23). Кажемо да је повезаност ***симетрична*** уколико је без торзије, односно $\tau = 0$, што за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ даје једнакост

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{5.9}$$

Како је комутатор координатних векторских поља једнак нули, то се симетричност повезаности огледа у једнакости $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$, односно у симетрији $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ између Кристофелових симбола у односу на координатни покретни репер.

Пример 5.5. У Примеру 5.2 смо са $\nabla^2 f(Y, X) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y) f$ изразили Хесијан функције $f \in \mathfrak{F}(M)$, одакле следи $\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) = (\tau(X, Y)) f$, те је симетричност повезаности еквивалентна симетричности Хесијана. △

Често захтевамо да повезаност задовољи последња два услова, што даје нови концепт повезаности у којем учествује метрика. ***Леви-Чивита повезаност***[3] на псеудо-Римановој многострукости (M, g) је симетрична метричка повезаност. Другим речима, Леви-Чивита повезаност је пресликавање $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ које задовољава формуле (5.4), (5.5), (5.6), (5.8) и (5.9) за свако $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ и све $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, а испоставља се да све њих можемо заменити једном општом једнакошћу. Посматрајмо следећи израз,

$$X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)).$$

Како је ∇ метричка, након три примене формуле (5.8) добијамо

$$g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - g(Y, \nabla_Z X - \nabla_X Z) + g(Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X).$$

Како је ∇ симетрична, трострука примена формуле (5.9) даје

$$g(X, [Y,Z]) - g(Y, [Z,X]) - g(Z, [X,Y]) + 2g(\nabla_X Y, Z).$$

Одавде добијамо једнакост

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X, [Y,Z]) + g(Y, [Z,X]) + g(Z, [X,Y]), \quad (5.10)$$

коју зовемо ***Косилова формула***[4], а која је веома корисна јер одређује Леви-Чивита повезаност.

Теорема 5.2. *Пресликавање $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ је Леви-Чивита повезаност ако и само ако за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ важи Косилова формула* (5.10).

Доказ. Већ смо се уверили да Леви-Чивита повезаност ∇ задовољава Косилову формулу, јер је изведена из њених особина. Обратно, остаје нам да докажемо формуле (5.4), (5.5), (5.6), (5.8) и (5.9) под претпоставком да (5.10) важи за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Користићемо чињеницу да $g(V, X) = g(W, X)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$ повлачи $V^\flat = W^\flat$, те и $V = W$. У предстојећим рачунима функције $f \in \mathfrak{F}(M)$ аутоматски излазе испред тензорског поља g, док за комутатор можемо користити специјалне случајеве формуле (2.6). На пример, провера Лајбницовости (5.6), за свако $Z \in \mathfrak{X}(M)$ даје

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY, Z) =& X(g(fY,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(g(X,fY)) \\
&- g(X, [fY,Z]) + g(fY, [Z,X]) + g(Z, [X,fY]) \\
=& X(fg(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(fg(X,Y)) \\
&- g(X, f[Y,Z] - (Zf)Y) + fg(Y, [Z,X]) + g(Z, f[X,Y] + (Xf)Y) \\
=& 2fg(\nabla_X Y, Z) + (Xf)g(Y,Z) - (Zf)g(X,Y) + g(X, (Zf)Y) + g(Z, (Xf)Y) \\
=& 2fg(\nabla_X Y, Z) + 2g((Xf)Y, Z) = 2g(f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z).
\end{aligned}$$

Симетрија (5.9) следи из једноставног рачуна,

$$\begin{aligned}
&2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\
&\quad = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X, [Y,Z]) + g(Y, [Z,X]) + g(Z, [X,Y]) \\
&\qquad - Y(g(X,Z)) - X(g(Z,Y)) + Z(g(Y,X)) + g(Y, [X,Z]) - g(X, [Z,Y]) - g(Z, [Y,X]) \\
&\quad = g(Z, [X,Y]) - g(Z, [Y,X]) = 2g([X,Y], Z).
\end{aligned}$$

На сличан начин доказујемо да (5.10) повлачи и преостале формуле (5.4), (5.5) и (5.8). □

[3] Tullio Levi-Civita (1873–1941), италијански математичар
[4] Jean-Louis Koszul (1921–2018), француски математичар

Ако уведемо пресликавање $F(X,Y)\colon \mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{F}(M)$ са

$$F(X,Y)\colon Z\mapsto X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))-g(X,[Y,Z])+g(Y,[Z,X])+g(Z,[X,Y]),$$

није тешко показати да је оно $\mathfrak{F}(M)$-линеарно, што даје $F(X,Y)\in\mathfrak{X}^*(M)$. По Теореми 5.2, ∇ је Леви-Чивита повезаност ако и само ако $2g(\nabla_X Y,Z)=F(X,Y)Z$ важи за свако $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$. Овај услов еквивалентан је са $2(\nabla_X Y)^\flat=F(X,Y)\in\mathfrak{X}^*(M)$, односно са

$$\nabla_X Y=\frac{1}{2}F(X,Y)^\sharp,$$

одакле следи егзистенција и јединственост Леви-Чивита повезаности.

Теорема 5.3. *Свака псеудо-Риманова многострукост дозвољава јединствену Леви-Чивита повезаност.*

Јединствену Леви-Чивита повезаност на псеудо-Римановој n-многострукости (M,g) можемо изразити тако што израчунамо Кристофелове симболе у произвољној карти (U,φ) на M. Применом Косилове формуле на координатна векторска поља добијамо

$$F(\partial_i,\partial_j)=\sum_{l=1}^n F(\partial_i,\partial_j)\partial_l\,dx_l=\sum_{l=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x_j}g_{li}-\frac{\partial}{\partial x_l}g_{ij}\right)dx_l,$$

одакле је

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\frac{1}{2}F(\partial_i,\partial_j)^\sharp=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n g^{lk}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x_j}g_{li}-\frac{\partial}{\partial x_l}g_{ij}\right)\partial_k,$$

што нам доноси експлицитну формулу

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right). \tag{5.11}$$

Размотримо понашање јединствене Леви-Чивита повезаности из Теореме 5.3 у случају изометрије $f\colon M\to N$. Како је f дифеоморфизам, то користећи формуле (2.9) и (2.10), за свако $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ добијамо

$$\begin{aligned}X(g_M(Y,Z))&=X((f^*g_N)(Y,Z))=X(g_N(f_*Y,f_*Z)\circ f)=f_*X(g_N(f_*Y,f_*Z))\circ f,\\ g_M(X,[Y,Z])&=(f^*g_N)(X,[Y,Z])=g_N(f_*X,f_*[Y,Z])\circ f=g_N(f_*X,[f_*Y,f_*Z])\circ f.\end{aligned}$$

У светлу тога, Косилова формула (5.10) даје

$$2g_N(f_*(\nabla_X Y),f_*Z)\circ f=2g_M(\nabla_X Y,Z)=2g_N(\nabla_{f_*X}f_*Y,f_*Z)\circ f,$$

одакле следи

$$f_*(\nabla_X Y)=\nabla_{f_*X}f_*Y, \tag{5.12}$$

што значи да се Леви-Чивита повезаност чува изометријама.

Лема 5.4. *Потпун коваријантни извод метричке повезаности комутира са музичким изоморфизмима.*

Доказ. Посматрајмо снизилицу, која спушта p-ти контраваријантни индекс, произвољног тензора $A\in\mathfrak{T}_s^r(M)$, где за компоненте важи

$$(A^\flat)_{j_1\dots j_s k}^{i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}\dots i_r}=\sum_l A_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_{p-1}li_{p+1}\dots i_r}g_{kl}=\sum_l(A\otimes g)_{j_1\dots j_s kl}^{i_1\dots i_{p-1}li_{p+1}\dots i_r}=(C(A\otimes g))_{j_1\dots j_s k}^{i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}\dots i_r},$$

одакле следи $A^\flat = C(A \otimes g)$, где је $C = C^p_{s+2}$ одговарајућа контракција. За $X \in \mathfrak{X}(M)$, како је $\nabla g = 0$, имамо

$$\nabla_X(A^\flat) = \nabla_X C(A \otimes g) = C\nabla_X(A \otimes g) = C(\nabla_X A \otimes g + A \otimes \nabla_X g) = C(\nabla_X A \otimes g) = (\nabla_X A)^\flat,$$

те добијамо

$$\nabla(A^\flat)(\dots, X) = \nabla_X(A^\flat)(\dots) = (\nabla_X A)^\flat(\dots) = (\nabla A)(\dots, Y^\flat, \dots, X) = (\nabla A)^\flat(\dots, X),$$

што значи да снизилица комутира са коваријантним изводом, $\nabla(A^\flat) = (\nabla A)^\flat$. Како су повисилица и снизилица једно другом инверз (кад се примењују на исту позицију индекса), то имамо

$$(\nabla A)^\sharp = (\nabla(A^{\sharp\flat}))^\sharp = (\nabla(A^\sharp))^{\flat\sharp} = \nabla(A^\sharp),$$

те и повисилица комутира са коваријантним изводом $\nabla(A^\sharp) = (\nabla A)^\sharp$. □

5.3 Паралелно померање

Нека је $\gamma\colon I \to M$ крива на многострукости M, а $\gamma'\colon I \to TM$ њена брзина. У оквиру неке карте (U, φ) у $\gamma(t) \in M$ са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$, за функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ је

$$\gamma'(t)f = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i}(\varphi(\gamma(t)))\frac{d(\pi_i \circ \varphi \circ \gamma)}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt}(t).$$

Ако са $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ обележимо компоненте криве, тада се брзина у координатама изражава са

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)}. \tag{5.13}$$

Векторско поље дуж криве $\gamma\colon I \to M$ је глатко пресликавање $V\colon I \to TM$, такво да је $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ за свако $t \in I$, односно важи $\pi \circ V = \gamma$. Скуп свих векторских поља дуж криве γ означавамо са $\mathfrak{X}(\gamma)$ и он је један модул над $\mathfrak{F}(I)$. Основни пример векторског поља дуж криве γ је брзина те криве $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$, што се у координатама изражава формулом (5.13).

Велику класу примера добијамо из произвољног векторског поља $X \in \mathfrak{X}(M)$, тако што за криву $\gamma\colon I \to M$ поставимо $X_\gamma = X \circ \gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$, односно важи $X_\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$ за $t \in I$. За $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ кажемо да је ***продуживо*** ако постоји векторско поље X на околини слике од γ такво да имамо $V = X_\gamma$. Међутим, уколико је $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ и $\gamma'(t_1) \neq \gamma'(t_2)$ за неке $t_1, t_2 \in I$, тада $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$ очигледно није продуживо. Штавише, брзина инјективне имерзије $\gamma\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin t)$ из Примера 2.16 није продужива.

Повезаност ∇ на многострукости M доноси оператор $\nabla/dt\colon \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ чије су природне особине исказане једнакостима

$$\frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla V}{dt} + \frac{\nabla W}{dt}, \tag{5.14}$$

$$\frac{\nabla}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{\nabla V}{dt}, \tag{5.15}$$

$$\frac{\nabla X_\gamma}{dt}(t) = \nabla_{\gamma'(t)}X, \tag{5.16}$$

за $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(I)$.

Теорема 5.5. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M, а $\gamma\colon I \to M$ крива. Тада постоји јединствен оператор $\nabla/dt\colon \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ који задовољава формуле* (5.14), (5.15) *и* (5.16) *за све $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(I)$.*

Доказ. Претпоставимо да оператор ∇/dt задовољава наметнуте особине. За произвољно $t_0 \in I$ посматрамо карту (U, φ) у $\gamma(t_0) \in M$ са $x_i = \pi_i \circ \varphi$. У околини I_0 тачке $t_0 \in I$ где је $\gamma(I_0) \subseteq U$ можемо локално изразити $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ са $V(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t)(\partial_j)_{\gamma(t)}$, где је $v_j(t) = (V(t))(x_j)$. Применом формула (5.14) и (5.15) добијамо

$$\frac{\nabla V}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\nabla}{dt}\left(v_j(\partial_j)_\gamma\right) = \sum_{j=1}^n \left(v_j'(\partial_j)_\gamma + v_j \frac{\nabla}{dt}(\partial_j)_\gamma\right).$$

Из формуле (5.16) уз локално изражено $\gamma'(t)$ преко компоненти $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ из (5.13) имамо

$$\frac{\nabla(\partial_j)_\gamma}{dt}(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\partial_j = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)(\nabla_{\partial_i}\partial_j)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t) \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))(\partial_k)_{\gamma(t)},$$

одакле коначно добијамо

$$\frac{\nabla V}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \left(v_k'(t) + \sum_{i,j=1}^n v_j(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\right)(\partial_k)_{\gamma(t)}. \tag{5.17}$$

Тражени оператор у тачки $t_0 \in I$ мора бити изражен формулом (5.17) одакле следи јединственост. Што се егзистенције тиче, у општем случају можемо покрити $\gamma(I)$ неким координатним околинама и дефинисати оператор са (5.17) у свакој карти понаособ, где већ доказана јединственост повлачи да се вишеструке дефиниције слажу кад год се координатне околине преклапају. Наравно, преостаје да се провери да овако дефинисан оператор заиста испуњава особине (5.14), (5.15) и (5.16). □

Коваријантни извод од $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ***дуж криве*** $\gamma\colon I \to M$ је $V' = \nabla V/dt \in \mathfrak{X}(\gamma)$. За $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ кажемо да је ***паралелно дуж*** γ у односу на ∇ ако је $V' \equiv 0$. Испоставља се да је векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ паралелно ($\nabla X = 0$) ако је паралелно дуж сваке криве на M.

Пример 5.6. Посматрајмо стандардну повезаност $D_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i)\partial_i$ на $\mathbb{R}^n$ из формуле (5.3). За њу је $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$, те формула (5.17) даје $V'(t) = \sum_{k=1}^n v_k'(t)(\partial_k)_{\gamma(t)}$. Одавде је $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ паралелно дуж криве γ ако и само ако је $v_k' \equiv 0$ за свако $1 \leqslant k \leqslant n$, што значи да су све функције v_k константне, односно да је V константно векторско поље дуж криве. △

Основна теорема о паралелним векторским пољима каже да се било који тангентни вектор у произвољној тачки са криве може јединствено продужити на паралелно векторско поље дуж целокупне криве.

Теорема 5.6. *За дату криву $\gamma\colon I \to M$, $t_0 \in I$ и вектор $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, постоји јединствено паралелно векторско поље V дуж γ такво да је $V(t_0) = V_0$.*

Доказ. Претпоставимо најпре да је $\gamma(I)$ садржано у једној карти. У координатама те карте користимо формулу (5.17), одакле је V паралелно дуж γ ако и само ако за свако $1 \leqslant k \leqslant n$ важи

$$v_k'(t) = -\sum_{i,j=1}^n v_j(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)).$$

Са друге стране, почетни услов $V(t_0) = V_0$ постаје $v_k(t_0) = V_0(x_k)$ за $1 \leqslant k \leqslant n$. Добијен је линеарни систем обичних диференцијалних једначина са почетним условом, одакле следи егзистенција и јединственост решења на целом I. Ако $\gamma(I)$ није садржано у једној карти посматрајмо a као супремум свих $b > t_0$ за које постоји јединствено тражено паралелно векторско поље на $[t_0, b]$. За b довољно близу t_0, слика $\gamma[t_0, b]$ упада у једну карту, тако да је $a > t_0$. Ако је $a \in I$ можемо изабрати координатну околину која садржи $\gamma(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ за неко $\varepsilon > 0$. Тада на $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ постоји паралелно векторско поље W са почетним условом $W(a-\varepsilon/2) = V(a-\varepsilon/2)$. Из јединствености на заједничком домену следи да је W продужење од V које прелази a, што је контрадикција. Сличан поступак примењујемо за вредности b мање од t_0. □

Векторско поље V дуж криве γ из претходне теореме зовемо ***паралелно померање*** од V_0 дуж γ. За $a, b \in I$ дефинишемо ***оператор паралелног померања*** $P_a^b \colon T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$ са $P_a^b V_a = V(b)$, где је V паралелно померање од V_a дуж γ.

За повезаност ∇ на псеудо-Римановој многострукости (M, g) кажемо да је ***компатибилна*** са метриком g ако оператор паралелног померања чува метрику. Другим речима, компатибилност повезаности и метрике за сваку криву γ и паралелна векторска поља $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ доноси једнакост

$$g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = g_{\gamma(t_0)}(V(t_0), W(t_0)) = \text{Const},$$

која је очигледна последица општије једнакости

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g\left(\frac{\nabla V}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{\nabla W}{dt}\right). \tag{5.18}$$

Лема 5.7. *Повезаност ∇ псеудо-Риманове многострукости (M, g) је компатибилна са g ако и само ако за свака два векторска поља V и W дуж криве $\gamma \colon I \to M$ важи* (5.18).

Доказ. Ако изаберемо ортонормирану базу у $T_{\gamma(t_0)}M$, а затим Теоремом 5.6 продужимо базне векторе на одговарајућа паралелна $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(\gamma)$, тада компатибилност ∇ и g за свако $t \in I$ даје ортонормирану базу $(E_1(t), \ldots, E_n(t))$ у $T_{\gamma(t)}M$. За произвољно $V = \sum_i v_i E_i$ и $W = \sum_j w_j E_j$ имамо $g(V, W) = \sum_{i,j} v_i w_j \delta_{ij} \varepsilon_i = \sum_i \varepsilon_i v_i w_i$. Са друге стране из $E_i' \equiv 0$ имамо $V' = \sum_i v_i' E_i$ и $W' = \sum_j w_j' E_j$, одакле је $g(V', W) + g(V, W') = \sum_i \varepsilon_i (v_i' w_i + v_i w_i')$, те добијамо (5.18). □

Теорема 5.8. *Повезаност ∇ псеудо-Риманове многострукости (M, g) је компатибилна са g ако и само ако је метричка.*

Доказ. Нека је ∇ компатибилна са g и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. За произвољну криву γ за коју важи $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X_p$ и векторска поља $V = Y_\gamma$, $W = Z_\gamma$, из Леме 5.7 имамо $(g(Y_\gamma, Z_\gamma))' = g(Y_\gamma', Z_\gamma) + g(Y_\gamma, Z_\gamma')$. Како је

$$\frac{d}{dt} g(Y_\gamma, Z_\gamma) = \frac{d}{dt}(g(Y, Z) \circ \gamma) = \gamma_* \frac{d}{dt}(g(Y, Z)) = \gamma'(t)(g(Y, Z)), \tag{5.19}$$

то за $t = 0$ добијамо

$$X_p(g(Y, Z)) = g_p(\nabla_{X_p} Y, Z_p) + g_p(Y_p, \nabla_{X_p} Z),$$

што доказује формулу (5.8), у свакој тачки p понаособ, те је ∇ метричка.

Обратно, довољно је проверити тврђење за криве γ које у потпуности леже у некој координатној околини. Поставимо базна векторска поља дуж криве са $E_i = (\partial_i)_\gamma$ и изразимо $V = \sum_i v_i E_i$ и $W = \sum_j w_j E_j$. На левој страни је

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(v_i' w_j g(E_i, E_j) + v_i w_j' g(E_i, E_j) + v_i w_j \frac{d}{dt} g(E_i, E_j) \right),$$

док на десној имамо

$$g(V', W) + g(V, W') = \sum_{i,j=1}^{n} \left(v_i' w_j g(E_i, E_j) + v_i w_j g(E_i', E_j) + v_i w_j' g(E_i, E_j) + v_i w_j g(E_i, E_j') \right),$$

одакле се види да је довољно доказати тврђење за базна векторска поља $V = E_i$, $W = E_j$. Због (5.19) преостаје још да се докаже

$$\gamma'(t)(g(\partial_i, \partial_j)) = g_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'(t)}\partial_i, (\partial_j)_{\gamma(t)}) + g_{\gamma(t)}((\partial_i)_{\gamma(t)}, \nabla_{\gamma'(t)}\partial_j).$$

Међутим, како је ∇ метричка тражена компатибилност следи из једнакости (5.8) за векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ такво да је $X_p = \gamma'(0)$ уз $Y = \partial_i$, $Z = \partial_j$. □

Нека су $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ паралелна и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Из $(\alpha V + \beta W)' = \alpha V' + \beta W' = 0$ имамо $P_a^b(\alpha V(a) + \beta W(a)) = \alpha V(b) + \beta W(b)$, што доказује да је P_a^b линеарно. Ако је $P_a^b(V(a)) = 0$ онда из јединствености имамо $V = 0$, што даје $V(a) = 0$, те је P_a^b инјективно и самим тим бијективно. Имајући у виду Теорему 5.8, долазимо до наредне кључне особине паралелног померања.

Теорема 5.9. *Паралелно померање је линеарна изометрија у случају Леви-Чивита повезаности.*

Коваријантни извод дуж криве може се реконструисати из паралелног померања. Пођимо од базних вектора у $T_{\gamma(a)}M$ и продужимо их Теоремом 5.6 на одговарајућа паралелна векторска поља $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(\gamma)$, где је $E_j' \equiv 0$ и $E_j(t) = P_a^t E_j(a)$ за $1 \leqslant j \leqslant n$. Из $V = \sum_j v_j E_j$ имамо

$$V'(a) = \sum_{j=1}^{n} (v_j E_j)'(a) = \sum_{j=1}^{n} v_j'(a) E_j(a) = \lim_{t \to a} \sum_{j=1}^{n} \frac{v_j(t) - v_j(a)}{t - a} E_j(a) = \lim_{t \to a} \frac{(P_a^t)^{-1} V(t) - V(a)}{t - a}.$$

Лема 5.10. *За векторско поље V дуж криве важи*

$$\frac{\nabla V}{dt}(a) = \lim_{t \to a} \frac{(P_a^t)^{-1} V(t) - V(a)}{t - a}.$$

5.4 Геодезијске криве

Нека је ∇ повезаност на многострукости M, а γ крива на M. Појам коваријантног извода дуж криве омогућава нам да дефинишемо ***убрзање*** криве γ са $(\gamma')' \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Кажемо да је крива γ ***геодезијска*** у односу на ∇ уколико нема убрзања, $(\gamma')' \equiv 0$. Другим речима, геодезијске можемо окарактерисати као криве чија је брзина паралелна дуж те криве.

Коваријантни извод дуж криве за $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ рачунамо у некој координатној околини по формули (5.17). Након замене $V = \gamma'$ имамо $v_j = \gamma_j'$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, те добијамо

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_j'(t) \gamma_i'(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) (\partial_k)_{\gamma(t)}.$$

Геодезијски услов $(\gamma')' \equiv 0$ установљава систем обичних диференцијалних једначина другог реда,

$$\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_j'(t) \gamma_i'(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0 \tag{5.20}$$

за свако $1 \leqslant k \leqslant n$, што су ***локалне геодезијске једначине***. За произвољно $t_0 \in I$, постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ садржано у некој координатној околини, те је γ геодезијска ако и само ако одговарајућа рестрикција задовољава локалне геодезијске једначине у свакој карти чији домен сече слику од γ.

Теорема 5.11. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M. За свако $p \in M$ и $V \in T_pM$ постоји отворен интервал $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ и геодезијска $\gamma \colon I \to M$ за коју је $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = V$. Сваке две такве геодезијске се слажу на њиховом заједничком домену.*

Доказ. Уобичајен трик је увођење помоћних функција $\xi_k = \gamma'_k$ које преводе локалне геодезијске једначине (5.20) у еквивалентан систем првог реда,

$$\begin{aligned} \gamma'_k(t) &= \xi_k(t), \\ \xi'_k(t) &= -\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(t)\xi_j(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)), \end{aligned}$$

са дупло већим бројем променљивих и једначина. По Пикар[5]–Линделоф[6] теореми (за систем обичних диференцијалних једначина првог реда са почетним условом) за неко $\varepsilon > 0$ постоји јединствено решење

$$\zeta \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \times \mathbb{R}^n, \quad \zeta(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$$

са почетним условом $\zeta(0) = (p, V)$, где је тражена геодезијска $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$.

Што се јединствености тиче, нека су $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to M$ две геодезијске које задовољавају $\gamma'_1(0) = \gamma'_2(0)$. За $a = \inf\{t \in I : t > 0, \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\} > 0$ је $\gamma'_1(t) = \gamma'_2(t)$ на $(0, a)$, одакле из непрекидности имамо $\gamma'_1(a) = \gamma'_2(a)$. Сада су $t \mapsto \gamma_1(a + t)$ и $t \mapsto \gamma_2(a + t)$ геодезијске са почетном брзином $\gamma'_1(a) = \gamma'_2(a)$, те се γ_1 и γ_2 слажу на неком отвореном интервалу који садржи a, што је контрадикција. Сличне аргументе користимо за вредности $t < 0$, што комплетира доказ. □

Геодезијска $\gamma \colon I \to M$ је ***максимална*** ако не постоји друга геодезијска са отвореним доменом који строго садржи I, таква да се са γ слаже на I. Из Теореме 5.11 директно следи да за свако $V \in TM$ постоји јединствена максимална геодезијска γ_V са $\gamma'_V(0) = V$.

Уколико је домен сваке максималне геодезијске која пролази кроз тачку $p \in M$ целокупно $\mathbb{R}$, кажемо да је M ***геодезијски комплетна у тачки*** p. За псеудо-Риманову многострукост кажемо да је ***геодезијски комплетна*** ако и само ако је геодезијски комплетна у свакој својој тачки. Пример 4.23 показује да постоје многострукости које нису геодезијски комплетне.

Пример 5.7. Посматрајмо псеудо-еуклидски простор $\mathbb{R}^n_\nu$ индекса ν. Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности рачунамо по формули (5.11), али како су коефицијенти метрике константни, то је $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$. За геодезијске γ имамо $\sum_k \gamma''_k(t)(\partial_k)_{\gamma(t)} = 0$, одакле је $\gamma''_k \equiv 0$ за свако $1 \leqslant k \leqslant n$. Дакле, геодезијске су облика $t \mapsto p + tV$ за неке $p, V \in \mathbb{R}^n_\nu$. △

Пример 5.8. Посматрајмо хиперболичку полураван $\mathbf{HU}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ са Римановом метриком $g = (dx_1^2 + dx_2^2)/x_2^2$ из Примера 4.21. Компоненте Риманове метрике виде се из наведених матрица,

$$g = \begin{pmatrix} 1/x_2^2 & 0 \\ 0 & 1/x_2^2 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} x_2^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

[5] Charles Émile Picard (1856–1941), француски математичар
[6] Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946), фински математичар

Прво рачунамо Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности по формули (5.11), одакле због $g^{ab} = x_2^2\delta_{ab}$ имамо

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right) = \frac{1}{2}x_2^2\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right).$$

Како је

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} = \delta_{ab}\delta_{c2}\frac{\partial(1/x_2^2)}{\partial x_2} = -\frac{2}{x_2^3}\delta_{ab}\delta_{c2},$$

то добијамо

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{1}{x_2}(\delta_{jk}\delta_{i2} + \delta_{ki}\delta_{j2} - \delta_{ij}\delta_{k2}),$$

одакле следи

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{x_2}. \tag{5.21}$$

Геодезијске $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ тражимо преко локалних геодезијских једначина (5.20),

$$\gamma_1''(t) + \sum_{i,j}\gamma_j'(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^1(\gamma(t)) = 0, \quad \gamma_2''(t) + \sum_{i,j}\gamma_j'(t)\gamma_i'(t)\Gamma_{ij}^2(\gamma(t)) = 0,$$

које заменом (5.21) постају

$$\gamma_1'' - 2\gamma_1'\gamma_2'\frac{1}{\gamma_2} = 0, \quad \gamma_2'' + ((\gamma_1')^2 - (\gamma_2')^2)\frac{1}{\gamma_2} = 0. \tag{5.22}$$

Једначине (5.22) решавамо тумачећи два случаја, где је једноставнији $\gamma_1' = 0$, односно $\gamma_1 = C = \text{Const}$. То задовољава прву једначину, а друга постаје $\gamma_2'' - (\gamma_2')^2/\gamma_2 = 0$, те након дељења са $\gamma_2 > 0$ добијамо

$$\frac{\gamma_2''\gamma_2 - \gamma_2'\gamma_2'}{(\gamma_2)^2} = \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\right)' = 0.$$

Одавде је $\gamma_2'/\gamma_2 = (\ln\gamma_2)' = D$, те $\ln\gamma_2 = Dt + E$ и коначно $\gamma_2 = e^{Dt+E}$. Дакле, први тип геодезијских су криве облика

$$\gamma(t) = (C, e^{Dt+E}),$$

што представља отворене полуправе нормалне на x_1-осу.

У другом случају имамо $\gamma_1' \neq 0$, где из прве једначине формуле (5.22) следи

$$\frac{\gamma_1''}{\gamma_1'} - 2\frac{\gamma_2'}{\gamma_2} = (\ln|\gamma_1'| - 2\ln\gamma_2)' = \left(\ln\frac{|\gamma_1'|}{\gamma_2^2}\right)' = 0,$$

одакле је $\gamma_1' = C\gamma_2^2$. Када то заменимо у другу једначину, после дељења са $\gamma_2 > 0$ имамо

$$\frac{\gamma_2''\gamma_2 - \gamma_2'\gamma_2'}{(\gamma_2)^2} + C^2\gamma_2^2 = \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\right)' + C^2\gamma_2^2 = 0.$$

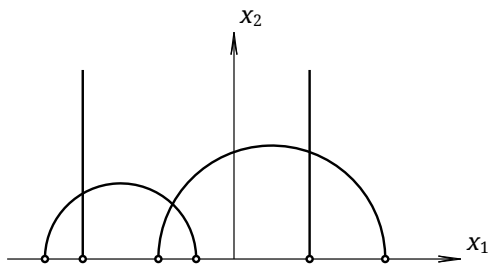
Увођењем смене $f = \gamma_2'/\gamma_2 = (\ln\gamma_2)'$, једначина постаје $f' + C^2\gamma_2^2 = 0$, одакле следи $f' < 0$. Диференцирањем добијамо $f'' + 2C^2\gamma_2\gamma_2' = f'' - 2f'f = (f' - f^2)' = 0$, што даје $f' = f^2 - A^2$ за неку константу $A > 0$. Раздвајањем променљивих и интеграцијом имамо,

$$B + \int dt = \int\frac{df}{f^2 - A^2} = -\frac{1}{A}\int\frac{d(f/A)}{1 - (f/A)^2} = -\frac{1}{A}\operatorname{arth}\left(\frac{f}{A}\right),$$

одакле је $f = -A\,\mathrm{th}(A(t+B)) = (\ln \gamma_2)'$. Даље је $\gamma_2 = r/(\mathrm{ch}(A(t+B)))$, где из $f' + C^2\gamma_2^2 = 0$ добијамо $A^2 = C^2r^2$. Повратком на $\gamma_1' = C\gamma_2^2$ добијамо $\gamma_1 = (Cr^2/A)\,\mathrm{th}(A(t+B)) + l$. Дакле, други тип геодезијских су криве облика

$$\gamma(t) = \left(\pm r\,\mathrm{th}(A(t+B)) + l, \frac{r}{\mathrm{ch}(A(t+B))}\right),$$

за које важи $(\gamma_1 - l)^2 + \gamma_2^2 = r^2$, што су полукругови са центром $(l, 0)$ полупречника r.



△

5.5 Експоненцијално пресликавање

Нека је ∇ произвољна повезаност на многострукости M. По Теореми 5.11 почетни вектор брзине $V \in TM$ одређује јединствену максималну геодезијску γ_V са $\gamma_V'(0) = V$ и $\gamma_V(0) = \pi V$. За дубље разумевање геодезијских неопходно је да одгонетнемо како се оне мењају кад варирамо почетни тангентни вектор. Геодезијске са пропорционалним почетним брзинама су блиско повезане, о чему говори наредна лема о рескалирању.

Лема 5.12. *За свако $V \in TM$ и $c, t \in \mathbb{R}$ важи $\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct)$, кад год је нека од страна те једнакости дефинисана.*

Доказ. Претпоставимо $c \neq 0$ јер за $c = 0$ обе стране једнакости су једнаке πV. Довољно је доказати лему у случају да је дефинисана десна страна једнакости, јер обрат добијамо када параметре V, t, c заменимо редом са $cV, ct, 1/c$. За $\gamma = \gamma_V \colon I \to M$ дефинишемо нову криву $\psi \colon (1/c)I \to M$ са $\psi(t) = \gamma(ct)$, при чему одмах важи $\psi(0) = \gamma(0) = \pi V$. У некој карти (U, φ) са $x_i = \pi_i \circ \varphi$ поставимо компоненте $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ и $\psi_i = x_i \circ \psi$. Тада је $\psi_i'(t) = (d/dt)\gamma_i(ct) = c\gamma_i'(ct)$, те посебно важи $\psi'(0) = c\gamma'(0) = cV$. Како је $(\gamma')'(ct) = 0$, то имамо

$$\psi_k''(t) + \sum_{i,j} \psi_j'(t)\psi_i'(t)\Gamma_{ij}^k(\psi(t)) = c^2\gamma_k''(ct) + c^2 \sum_{i,j} \gamma_j'(ct)\gamma_i'(ct)\Gamma_{ij}^k(\gamma(ct)) = 0,$$

те је ψ геодезијска са почетним условом $\psi'(0) = cV$ и јединственост даје $\psi = \gamma_{cV}$. □

Нека је $\mathcal{E} \subseteq TM$ скуп свих тангентних вектора $V \in TM$ таквих да је геодезијска γ_V дефинисана на интервалу који садржи $[0, 1]$. Пресликавање $\exp \colon \mathcal{E} \to M$ дефинисано са $\exp V = \gamma_V(1)$ зовемо ***експоненцијално пресликавање***, а исто име користимо за његову рестрикцију $\exp_p \colon \mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM \to M$ за тачку $p \in M$.

Лема 5.12 нам омогућава да од постојеће максималне геодезијске добијемо нову геодезијску чији ће домен интервал бити произвољно велики, тако што довољно смањимо почетни вектор. Ако је $tV \in \mathcal{E}$, тада је $\gamma_{tV}(1)$ дефинисано, одакле следи да геодезијска γ_V има облик

$$\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1) = \exp(tV).$$

Дакле, максимална геодезијска која пролази кроз $p \in M$ са почетним вектором $V \in T_pM$ је облика $t \mapsto \exp_p tV$. Одавде следи да се праве линије тангентног простора T_pM које пролазе кроз координатни почетак $0_p \in T_pM$ са $\exp_p$ сликају на геодезијске. За ове геодезијске кажемо да су ***радијалне геодезијске*** кроз p, а аналогно можемо говорити о радијалним геодезијским сегментима и радијалним геодезијским полуправама које извиру из p.

Стандардни резултати за решења обичних диференцијалних једначина гарантују да $\exp_p(V)$ глатко зависи и од V и од p, тако да је $\exp_p$ добро дефинисано и глатко у некој околини координатног почетка $0_p \in T_pM$.

Нека је $\tau\colon I \to T_pM$ крива на тангентном простору дефинисана са $\tau(t) = tV$. Лако је приметити да за $V_{0_p} = \tau'(0) \in T_{0_p}(T_pM)$ имамо

$$(T_{0_p}\exp_p)(V_{0_p}) = (T_{0_p}\exp_p)(\tau'(0)) = (\exp_p \circ \tau)'(0) = \gamma_V'(0) = V,$$

одакле се види да је $T_{0_p}\exp_p\colon T_{0_p}(T_pM) \to T_pM$ канонско пресликавање $V_{0_p} \mapsto V$, што је идентичко пресликавање при идентификацији $T_{0_p}(T_pM) \cong T_pM$.

Лема 5.13. *Нека је p произвољна тачка псеудо-Риманове многострукости M. Тангентно пресликавање експоненцијалног пресликавања $\exp_p$ у координатном почетку $0_p \in T_pM$ је идентичко пресликавање при канонској идентификацији.*

Како је тангентно пресликавање $T_{0_p}\exp_p$ изоморфизам, то теорема о инверзној функцији (Теорема 2.8) повлачи да је $\exp_p$ локални дифеоморфизам у координатном почетку 0_p.

Теорема 5.14. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M и $p \in M$. Тада постоји околина $0_p \in \mathcal{U} \subseteq T_pM$ и околина $p \in U \subseteq M$, тако да је $\exp_p \restriction_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \to U$ дифеоморфизам.*

За подскуп $\mathcal{U} \ni 0$ векторског простора $\mathcal{V}$ кажемо да је ***звездастог облика*** око 0 ако $V \in \mathcal{U}$ повлачи да $tV \in \mathcal{U}$ важи за свако $t \in [0,1]$. Приметимо да је $\mathcal{E}_p$ звездастог облика око $0_p \in T_pM$. Уколико је домен $\mathcal{U}$ дифеоморфизма из Теореме 5.14 звездастог облика око 0_p онда се његова слика $U = \exp_p(\mathcal{U})$ зове ***нормална околина*** од p.

Нека је (M,g) псеудо-Риманова многострукост димензије n и $p \in M$ произвољна тачка. Избор ортонормиране базе $(E_1, \dots E_n)$ квадратног векторског простора (T_pM, g_p) еквивалентан је изометрији $L\colon T_pM \to \mathbb{R}^n_\nu$ датој са $L(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Ако је U нормална околина од $p \in M$, тада је $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ дато са $\varphi = L \circ \exp_p^{-1} \restriction_U$ карта у $p \in M$. За координате $x_i = \pi_i \circ \varphi$ кажемо да су ***нормалне координате*** центриране у $p \in M$. Нормалне координате су веома корисне јер доносе веома једноставну репрезентацију геодезијских.

Теорема 5.15. *Нека је (M,g) псеудо-Риманова n-многострукост, ∇ њена Леви-Чивита повезаност, а (U,φ) карта са нормалним координатама центрираним у $p \in M$. Тада за свако $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$ важи*

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad g_{ij}(p) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij}(p) = 0.$$

Доказ. Сваки вектор $0 \neq V = \sum_{i=1}^n v_i E_i \in T_pM$ одређује радијалну геодезијску γ_V кроз p која је облика $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$ за $t \in I$ где је $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ неки отворен интервал. У нормалним координатама центрираним у p је $\varphi \circ \gamma_V(t) = L(tV) = (tv_1, \dots tv_n)$, одакле добијамо $\gamma_i(t) = x_i \circ \gamma_V(t) = tv_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, што мора задовољити локалне геодезијске једначине (5.20), те важи $\sum_{i,j} v_i v_j \Gamma_{ij}^k(\gamma_V(t)) = 0$ за $1 \leqslant k \leqslant n$. То свакако ради за $t = 0$ где је $\gamma_V(0) = p$, одакле произвољан избор вектора $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ доноси

$$\sum_{i,j=1}^n v_i v_j \Gamma_{ij}^k(p) = 0$$

за све $1 \leqslant k \leqslant n$. Погодан избор је $V = E_i$ одакле добијамо $\Gamma_{ii}^k(p) = 0$, а након тога за $V = E_i + E_j$ имамо $\Gamma_{ii}^k(p) + \Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) + \Gamma_{jj}^k(p) = 0$, одакле следи $\Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) = 0$, те како је ∇ симетрична добијамо $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, што доказује да се сви Кристофелови симболи анулирају у тачки p.

Преостале особине је лако видети. Из $V(x_i) = (\gamma_V'(0))(x_i) = (x_i \circ \gamma_V)'(0) = \gamma_i'(0) = v_i$ имамо $V = \sum_{i=1}^n v_i(\partial_i)_p$, што за $V = E_i = (\partial_i)_p$ доноси $g_p(\partial_i, \partial_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$. Како је повезаност метричка, то важи $\partial_k g_{ij} = g(\nabla_{\partial_k}\partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_k}\partial_j) = \sum_l (\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il})$, те и $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ јер је ∇ симетрична. □

У Теореми 5.14 смо показали да свака тачка псеудо-Риманове многострукости има нормалну околину. За нормалну околину кажемо да је ***потпуно нормална*** ако је она нормална околина сваке своје тачке.

Теорема 5.16. *Свака тачка псеудо-Риманове многострукости има потпуно нормалну околину.*

Доказ. Полазимо од нормалне координатне околине $U \subseteq M$ тачке $p \in M$. Дефинишемо пресликавање $E\colon \mathcal{E}_U \to U \times U$ са $E(q, V) = (q, \exp_q V)$, где је $\mathcal{E}_U = \mathcal{E} \cap TU \subseteq U \times \mathbb{R}^n$. Јакобијева матрица тангентног пресликавања од E у тачки $0_p = (p, 0)$ је блок доња троугаона матрица са идентичким матрицама на дијагонали (друга од њих долази из Леме 5.13) и самим тим је инвертибилна. По теореми о инверзној функцији (Теорема 2.8) постоји околина $W \subseteq TU$ тачке 0_p таква да је $E\restriction_W$ дифеоморфизам на околину од $(p, p) \in U \times U$. Како је E непрекидно, можемо претпоставити да је $E\restriction_W(W) = U_\epsilon \times U_\epsilon$ за неко $\epsilon > 0$, где је $U_\epsilon = \{q \in U : \sum_{i=1}^n (x_i(q))^2 < \epsilon\}$ еуклидска кугла у односу на нормалне координате $(x_1, \ldots, x_n)$. Нека је тензор $b \in \mathfrak{T}_2^0(U_\epsilon)$ дефинисан својим компонентама у односу на нормалне координате са

$$b_{ij} = \delta_{ij} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k x_k.$$

Он је очигледно симетричан и позитивно дефинитан у p, те можемо смањити $\epsilon > 0$ тако да b буде позитивно дефинитно на целом U_ϵ. За произвољну тачку q из таквог U_ϵ и $W_q = W \cap T_qM$ знамо да је $E\restriction_{W_q}$ дифеоморфизам на $\{q\} \times U_\epsilon$, што значи да је $\exp_q \restriction_{W_q}$ дифеоморфизам на U_ϵ, те је U_ϵ нормална околина сваке своје тачке q уколико докажемо да је W_q звездастог облика око 0_q.

Нека је $q \neq s \in U_\epsilon$ и $E(q, V) = (q, s)$, што значи да је $\gamma_V\colon [0, 1] \to M$ геодезијска из q у s. Ако поставимо њене компоненте са $\gamma_i = x_i \circ \gamma_V$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, користећи геодезијске једначине (5.20) можемо израчунати

$$\begin{aligned} 0 < 2b(\gamma_V', \gamma_V') &= 2\sum_{i,j=1}^n b_{ij}\gamma_i'\gamma_j' = 2\sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \sum_{k=1}^n \gamma_k(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma_V)\right)\gamma_i'\gamma_j' \\ &= 2\sum_{i=1}^n (\gamma_i')^2 - 2\sum_{i,j,k=1}^n \gamma_k\gamma_i'\gamma_j'(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma_V) = 2\sum_{k=1}^n (\gamma_k')^2 + 2\sum_{k=1}^n \gamma_k\gamma_k'' = \sum_{k=1}^n (2\gamma_k\gamma_k')' = \sum_{k=1}^n (\gamma_k^2)'', \end{aligned}$$

одакле следи да је функција $\sum_{k=1}^n \gamma_k^2$ конвексна и не може имати максимум на интервалу $(0, 1)$. Због тога је $\gamma_V([0, 1]) \subseteq U_\epsilon$, те је W_q звездастог облика око 0_q и U_ϵ је нормална околина тачке q што комплетира доказ. □

5.6 Геодезијске и минимизујуће криве

Двопараметарско пресликавање је глатко пресликавање $f\colon I \times J \to M$, где су $I, J \subseteq \mathbb{R}$ отворени интервали. Векторско поље дуж криве можемо уопштити на векторска поља дуж двопараметарског пресликавања. Тако, векторско поље $Z \in \mathfrak{X}(f)$

дуж f значи глатко пресликавање $Z\colon I\times J\to TM$ такво да је $\pi\circ Z=f$. Парцијалне брзине $(\partial f/\partial t)$ и $(\partial f/\partial s)$ су векторска поља дуж $f=f(t,s)$ дефинисана са

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)=T_{(t,s)}f\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,s)}=(f_s)'(t),\quad \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)=T_{(t,s)}f\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,s)}=(f^t)'(s),$$

где су $f_s\colon I\to M$ и $f^t\colon J\to M$ дати са $f_s(t)=f(t,s)=f^t(s)$. У некој координатној околини, из (2.2) имамо

$$\frac{\partial f}{\partial t}=f_*\frac{\partial}{\partial t}=\sum_j\frac{\partial f_j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}\circ f,$$

где је $f_j=x_j\circ f$, одакле из формуле (5.17) следи

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}=\sum_k\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial s\partial t}+\sum_{i,j}\frac{\partial f_j}{\partial t}\frac{\partial f_i}{\partial s}(\Gamma_{ij}^k\circ f)\right)\partial_k\circ f.$$

У случају симетричне повезаности важи $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$, одакле добијамо

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}. \tag{5.23}$$

Нека је (M,g) псеудо-Риманова многострукост, а ∇ њена Леви-Чивита повезаност. Приметимо да како је ∇ симетрична, формула (5.23) важи. Фиксирајмо $p\in M$, те нека су $V,W\in T_pM$ тако да је $0\neq V\in\mathcal{E}_p$. Размотримо двопараметарско пресликавање $\tau\colon I\times J\to T_pM$, $\tau(t,s)=tV+tsW$ и његову експоненцијалну слику у M, $f\colon I\times J\to M$, $f(t,s)=\exp_p(tV+tsW)$. Није тешко приметити да можемо пронаћи мало $\varepsilon>0$ тако да за интервале $I=(-\varepsilon,1+\varepsilon)$ и $J=(-\varepsilon,\varepsilon)$ имамо $tV+tsW\in\mathcal{E}_p$. За свако $s\in J$, крива $f_s\colon I\to M, f_s(t)=f(t,s)$ је рестрикција максималне геодезијске γ_{V+sW}, те имамо

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t,s)=g\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right)(0,0)=g_p(V+sW,V+sW),\quad \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\equiv 0.$$

Међутим, употребом $\nabla g=0$ и симетрије (5.23) добијамо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial s}\right)&=g\left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial s}\right)+g\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}\right)\\&=g\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}g\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right)=g_p(V+sW,W),\end{aligned}$$

што даје

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial s}\right)=tg_p(V+sW,W)+g\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial s}\right)(0,0)=tg_p(V+sW,W).$$

Како је

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}(t,s)=(V+sW)_{tV+tsW},\quad \frac{\partial\tau}{\partial s}(t,s)=(tW)_{tV+tsW},$$

то имамо

$$\begin{aligned}T_V\exp_p(V_V)&=T_V\exp_p\circ T_{(1,0)}\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=T_{(1,0)}(\exp_p\circ\tau)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial f}{\partial t}(1,0),\\T_V\exp_p(W_V)&=T_V\exp_p\circ T_{(1,0)}\tau\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)=T_{(1,0)}(\exp_p\circ\tau)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)=\frac{\partial f}{\partial s}(1,0),\end{aligned}$$

те је зато

$$g_{\exp_p V}(T_V\exp_p(V_V),T_V\exp_p(W_V))=g_p(V,W). \tag{5.24}$$

Овај резултат је познат као ***Гаусова лема***.

Лема 5.17. *Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, $p \in M$ и $V, W \in T_pM$ тако да $0 \neq V \in \mathcal{E}_p$, тада важи једнакост* (5.24).

Најважнији случај тиче се повезане Риманове многострукости (M, g), што је метрички простор чија је метричка топологија иста као топологија многострукости (Теорема 4.20). Фиксирајмо тачку $p \in M$. У простору са унутрашњим производом (T_pM, g_p) дефинишемо ***тангентне сфере*** и ***тангентне кугле*** полупречника $r > 0$ са

$$S_r(0_p) = \{X \in T_pM : \|X\| = r\}, \quad B_r(0_p) = \{X \in T_pM : \|X\| < r\}.$$

За довољно мало r, $B_r(p) = \exp_p B_r(0_p)$ је нормална околина од p, и онда кажемо да је $B_r(p)$ ***геодезијска кугла*** (или ***нормална кугла***) у M центрирана у p, док за свако $\varepsilon < r$ кажемо да је $S_\varepsilon(p) = \exp_p S_\varepsilon(0_p)$ ***геодезијска сфера*** (или ***нормална сфера***) у M центрирана у p. Гаусова лема (Лема 5.17) тврди да је геодезијска сфера $S_\varepsilon(p)$ ортогонална на све геодезијске које извиру из p, и омогућава да експоненцијално пресликавање схватимо као радијалну изометрију.

За допуштену криву $\gamma\colon [a, b] \to M$ Риманове многострукости M кажемо да је ***минимизујућа*** ако је $L(\gamma) \leqslant L(\psi)$ за сваку допуштену криву ψ из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$. Наравно, γ је минимизујућа ако и само ако је $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ (под условом да је M повезана, што овде и претпостављамо).

Теорема 5.18. *Нека је $B_\varepsilon(p)$ геодезијска кугла у Римановој многострукости M центрирана у $p \in M$ и $p \neq q \in B_\varepsilon(p)$. Радијална геодезијска из p у q је до на репараметризацију јединствена минимизујућа крива из p у q на M.*

Доказ. За јединствену радијалну геодезијску $\gamma\colon [0, 1] \to M$ из p у q ($\gamma'(0) = \exp_p^{-1}(q)$) имамо да важи $L(\gamma) = \|\exp_p^{-1}(q)\| = r < \varepsilon$. Нека је $\psi\colon [a, b] \to M$ допуштена крива из p у q. Нека је $a_0 \in [a, b]$ највеће t такво да је $\psi(t) = p$, а $b_0 \in [a_0, b]$ најмање t такво да је $\psi(t) \in S_r(p)$. За $t \in [a_0, b_0]$ можемо изразити

$$\psi(t) = \exp_p(\rho(t)V(t)),$$

где је $\rho\colon [a_0, b_0] \to [0, 1]$ и $V\colon [a_0, b_0] \to S_r(0_p)$. Тада је

$$\psi' = T_{\rho V} \exp_p \circ (\rho V)' = T_{\rho V} \exp_p(\rho' V_{\rho V} + \rho V'_{\rho V}) = \rho' T_{\rho V} \exp_p(V_{\rho V}) + \rho T_{\rho V} \exp_p(V'_{\rho V}),$$

где $V' = \nabla V/dt$ има особину $2g(V, V') = (g(V, V))' = (r^2)' = 0$. Гаусова лема повлачи

$$g(\psi', \psi') = (\rho')^2 g(V, V) + 2\rho'\rho g(V, V') + \rho^2 g(V', V') = (\rho' r)^2 + \rho^2 g(V', V') \geqslant (\rho' r)^2,$$

те је зато

$$L(\psi) \geqslant \int_{a_0}^{b_0} \|\psi'(t)\|\, dt \geqslant \int_{a_0}^{b_0} |\rho' r|\, dt \geqslant r \int_{a_0}^{b_0} \rho'\, dt = r\rho(q) - r\rho(p) = r,$$

што доказује $L(\psi) \geqslant L(\gamma) = d(p, q)$.

Да бисмо имали једнакост $L(\psi) = r$, неопходно је да важи $a_0 = a$ и $b_0 = b$, а онда $V' = 0$ и $\rho' > 0$. То значи да је V константно док ρ расте, те је ψ експоненцијална слика дужи која спаја 0_p и $\exp_p^{-1}(q)$. Тако је ψ монотона репараметризација од γ, те имају исту слику, $\gamma([a, b]) = \psi([a, b])$. □

Теорема 5.19. *Свака геодезијска на Римановој многострукости је локално минимизујућа.*

Доказ. Нека је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска на Римановој многострукости M дефинисана за неки отворен интервал I. За $t \in I$ по Теореми 5.16 постоји потпуно нормална околина $U \ni \gamma(t)$. За $a, b \in \gamma^{-1}(U)$, тачка $\gamma(b)$ се налази у нормалној околини U центрираној у $\gamma(a)$, те је по Теореми 5.18 радијална геодезијска из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ минимизујућа између те две тачке. Међутим, рестрикција од γ на $[a, b]$ је такође геодезијски сегмент из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ који се налази у U, те се $\gamma\restriction_{[a,b]}$ поклапа са том минимизујућом геодезијском. □

Из претходних теорема видимо да локално посматрано, геодезијска (односно њена репараметризација) која спаја две тачке јесте најкраћа таква крива. Међутим, глобално посматрано то не мора да важи.

Пример 5.9. Посматрајмо сферу, где знамо да су слике геодезијских велики кругови сфере, а две тачке са великог круга одређују два лука од којих је један дужи (осим ако нису у питању антиподалне тачке).

Занимљивији је случај цилиндра где су слике геодезијских хеликси, тако да за две блиске тачке постоји бесконачно много геодезијских (које имају различите слике) које их спајају, али само је једна (до на репараметризацију) чија се слика налази у нормалној околини једне од тих тачака. △

Теорема 5.20. *Свака минимизујућа крива на Римановој многострукости је до на репараметризацију геодезијска.*

Доказ. Нека је $\psi\colon [a, b] \to M$ минимизујућа допуштена крива параметризована дужином лука. За свако $t \in [a, b]$ постоји потпуно нормална околина $U_t \ni \psi(t)$, те се слика $\psi([a, b])$ може покрити са коначно много потпуно нормалних околина. У свакој околини U_t, јединствена минимизујућа крива је радијална геодезијска, те ψ задовољава геодезијске једначине, а како то важи за сваку тачку ψ је геодезијска. □

5.7 Комплетност

Псеудо-Риманова многострукост (M, g) је геодезијски комплетна у тачки $p \in M$ ако се свака геодезијска кроз p бесконачно продужава. Како је максимална геодезијска за неко $V \in T_pM$ облика $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$, јасно је да је претходни услов еквивалентан са тим да је T_pM домен од $\exp_p$. Тако је M геодезијски комплетна ако и само ако је целокупно TM домен експоненцијалног пресликавања. На пример, отворена подмногострукост $U \subset \mathbb{R}^n_\nu$ псеудо-еуклидског простора није геодезијски комплетна јер постоје геодезијске које достижу границу за коначно време.

Сваке две различите тачке потпуно нормалне околине могу се повезати минимизујућом геодезијском, што је особина која не важи за произвољне две тачке Риманове многострукости. Међутим, ако је многострукост геодезијски комплетна у једној од тих тачака, долазимо до наредне леме.

Лема 5.21. *Ако је $p \in M$ тачка повезане Риманове многострукости M таква да је $\exp_p$ дефинисано на целокупном T_pM, онда за свако $q \in M$ постоји минимизујућа геодезијска из p у q.*

Доказ. Нека је x тачка (компактне) геодезијске сфере $S_\epsilon(p)$ у којој (непрекидна) функција $S_\epsilon(p) \ni s \mapsto d(s, q)$ достиже минимум. Тада је $x = \exp_p(\epsilon V)$, за неко јединично $V \in T_pM$ и можемо посматрати геодезијску γ_V која је за свако $t \in \mathbb{R}$ дефинисана са $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$. Свака допуштена крива из p у q мора да прође кроз $S_\epsilon(p)$, те је

$$r = d(p, q) = \min_{s \in S_\epsilon(p)} (d(p, s) + d(s, q)) = \epsilon + \min_{s \in S_\epsilon(p)} d(s, q) = \epsilon + d(x, q),$$

одакле следи $d(x,q) = r - \epsilon$. Скуп $I = \{t \in [\epsilon, r] : d(\gamma_V(t), q) = r - t\}$ је непразан (због $\epsilon \in I$), затворен и ограничен, те достиже максимум $t_0 \in I$. За $y = \gamma_V(t_0)$ постоји тачка z геодезијске сфере $S_\delta(y)$ за $0 < \delta < r - t_0$ у којој функција $S_\delta(y) \ni s \mapsto d(s,q)$ достиже минимум. Добијамо $d(z,q) = r - t_0 - \delta$, одакле имамо

$$d(p,z) \geqslant d(p,q) - d(z,q) = r - (r - t_0 - \delta) = t_0 + \delta = d(p,y) + d(y,q),$$

те је $d(p,z) = d(p,y) + d(y,q)$, што значи да минимизујућа крива из p у z пролази кроз y. Како је минимизујућа крива по Теореми 5.20 геодезијска, то је $z = \exp_p((t_0 + \delta)V)$ и зато $t_0 + \delta \in I$, што је немогуће, осим ако је $t_0 = r$. Тако добијамо $\gamma_V(r) = q$, те је γ_V минимизујућа геодезијска из p у q. □

Нека је (M,g) повезана Риманова многострукост. По Теореми 4.20, M са Римановим растојањем чини метрички простор чија је метричка топологија једнака топологији од M. Природно се поставља питање да ли је M комплетна као метрички простор.

Претпоставимо да је $K \subseteq M$ затворен и ограничен подскуп метричког простора (M,d). Ако је M геодезијски комплетна у тачки $p \in M$, по Леми 5.21 за свако $q \in M$ постоји минимизујућа геодезијска из p у q, те се ограничен K налази у некој довољно великој геодезијској кугли $B_r(p)$. Дакле, постоји $r > 0$ такво да је $K \subset \exp_p(\overline{B_r(0_p)})$, а затворен подскуп компакта је компактан. Скуп тачака Кошијевог[7] низа је ограничен, те је његово затворење компактно, што значи да Кошијев низ има конвергентан подниз и самим тим је конвергентан.

На овај начин смо доказали да ако је M геодезијски комплетна, онда је M комплетна као метрички простор. Међутим, важи и обрат, што значи да су геодезијска комплетност и метричка комплетност еквивалентни појмови, што је познато као Хопф[8]–Ринов[9] теорема из 1931. године [68].

Теорема 5.22. *Повезана Риманова многострукост је геодезијски комплетна ако и само ако је комплетна као метрички простор.*

Доказ. Нека је $p \in M$ и $V \in T_pM$ јединични вектор, те посматрамо максималну геодезијску $\gamma_V : I \to M$. Захваљујући Теореми 5.11 интервал I је отворен. Нека је $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ такав да је $\lim_{n\to\infty} t_n = b = \sup I < \infty$. Како је $d(\gamma_V(t_i), \gamma_V(t_j)) \leqslant |t_i - t_j|$, то је $\{\gamma_V(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ у M, те уз претпоставку да је M комплетна имамо тачку $q = \lim_{n\to\infty} \gamma_V(t_n) \in M$. Постоји $\epsilon > 0$ такво да је $B_{2\epsilon}(q)$ геодезијска кугла. Изаберимо $a \in \mathbb{R}$ такво да је $0 < b - a < \varepsilon$, те за $W = \gamma_V'(a)$ поставимо геодезијску γ_W. Тада је $\gamma_W(t) = \gamma_V(a + t)$, те је γ_V дефинисано за $a + \epsilon > b$, што је контрадикција. Зато је интервал I затворен, одакле следи $I = \mathbb{R}$, што доказује да је M је геодезијски комплетно у тачки p, а како то важи за сваку тачку, M је геодезијски комплетна. □

5.8 Задаци

Задатак 5.1. Нека је (M,g) Риманова многострукост, а $P, Q \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ паралелна тензорска поља. Ако је $T \in \mathfrak{T}^0_4(M)$ дефинисано са $T(X,Y,Z,W) = P(X,Y)Q(Z,W)$ за свако $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$, доказати да је и T паралелно.

Задатак 5.2. На $\mathbb{R}^3$ са уобичајеном еуклидском метриком уводимо повезаност ∇ која је у стандардним координатама дата са $\Gamma^3_{12} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = 1$ и $\Gamma^3_{21} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{13} = -1$, док су сви остали Кристофелови симболи једнаки нули. Да ли је ∇ компатибилна са

[7] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), француски математичар
[8] Heinz Hopf (1894–1971), немачки математичар
[9] Willi Ludwig August Rinow (1907–1979), немачки математичар

еуклидском метриком? Одредити геодезијске у односу на ∇. Да ли је ∇ Леви-Чивита повезаност?

Задатак 5.3. Направити (Белтрами-Клајнов) модел хиперболичког простора користећи централну пројекцију $c\colon \mathbf{H}_r^n \to \mathbf{K}_r^n$ која тачку $P \in \mathbf{H}_r^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ шаље у продор праве OP кроз хиперраван $x_0 = r$. Показати да је c дифеоморфизам и израчунати индуковану метрику у природним координатама од $\mathbf{K}_r^n$.

Задатак 5.4. Одредити геодезијске у Белтрами-Клајновом диск моделу (M, g), где је $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

Глава 6

КРИВИНА

6.1 Тензор кривине

Важно питање псеудо-Риманове геометрије је да ли постоје локалне инваријанте које се чувају изометријама. Неке корисне структуре у диференцијалној геометрији немају локалне инваријанте. На пример, свако свуда ненула векторско поље може се локално записати као парцијални извод, те су сва она локално еквивалентна. Такође, Риманове 1-многострукости су све међусобно локално изометричне са $\mathbb{R}$. Међутим, сфера $\mathbf{S}^2$ и раван $\mathbb{R}^2$ нису локално изометрични, што видимо у наредном примеру.

Пример 6.1. Ако на сфери $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ без затвореног скупа $\{(x,y,z) : x \leqslant 0, y = 0\}$ уведемо сферне координате са

$$x = \sin\varphi\cos\theta, \quad y = \sin\varphi\sin\theta, \quad z = \cos\varphi,$$

за инклинацију $0 < \varphi < \pi$ и азимут $-\pi < \theta < \pi$, њена метрика наслеђена из $\mathbb{R}^3$ је

$$\mathring{g} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2.$$

Рачун за Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности доноси

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\varphi, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = -\sin\varphi\cos\varphi,$$

одакле се види да су меридијани $\theta = \mathrm{Const}$ геодезијске на сфери, јер је очигледно да криве облика $\gamma(t) = (t,\theta)$ задовољавају геодезијске једначине. Како за коваријантне изводе координатног векторског поља ∂_φ важи

$$\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi = 0, \quad \nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi = \operatorname{ctg}\varphi\,\partial_\theta,$$

то је оно паралелно дуж сваког меридијана, али и дуж екватора ($\varphi = \pi/2$). Посматрајмо тачку p са координатама $(\varphi,\theta) = (\pi/2, 0)$ и вектор $(\partial_\varphi)_p$. Ако постоји паралелно продужење тог вектора на неку околину тачке p то једино може бити ∂_φ (паралелно померање дуж екватора, а затим дуж одговарајућег меридијана), али $\nabla\partial_\varphi \not\equiv 0$. У еуклидском простору, сваки тангентни вектор има паралелно продужење на цео простор, што не важи за сферу, те сфера и раван нису локално изометрични. $\triangle$

За псеудо-Риманову 2-многострукост (M,g) постоји очигледан покушај да задати вектор $Z_p \in T_pM$ продужимо на паралелно векторско поље $Z \in \mathfrak{X}(M)$. У локалним координатама (x_1,x_2) неке карте центриране у p можемо поставити паралелно векторско поље дуж x_1-осе, а онда добијене векторе паралелно померити дуж координатних линија које чувају x_1 координату. Тако конструисано векторско поље Z је

паралелно дуж сваке x_2-координатне линије, као и дуж x_1-осе. Поставља се питање да ли је $\nabla_{\partial_1} Z \equiv 0$, односно да ли је Z паралелно дуж x_1-координатних линија које нису сама x_1-оса. Услов $\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1} Z \equiv 0$ одређује јединствено паралелно померање $\nabla_{\partial_1} Z$ дуж x_2-координатних линија за неки почетни вектор, али како се $\nabla_{\partial_1} Z$ поништава у тачкама $x_2 = 0$, то следи $\nabla_{\partial_1} Z \equiv 0$. Са друге стране је $\nabla_{\partial_2} Z \equiv 0$, те и $\nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2} Z \equiv 0$, што решава проблем уколико ∇_{∂_1} и ∇_{∂_2} комутирају.

Директан рачун даје $D_{\partial_2} D_{\partial_1} Z = D_{\partial_2}(\sum_i \partial_1 Z^i \partial_i) = \sum_i \partial_2\partial_1 Z^i \partial_i$, за стандардну повезаност $\nabla = D$ у $\mathbb{R}^2$, те како парцијални изводи комутирају следи $D_{\partial_2} D_{\partial_1} Z = D_{\partial_1} D_{\partial_2} Z$. Међутим, то не важи у општем случају, јер та некомутативност коваријантних извода омогућава локално разликовање сфере од равни из Примера 6.1. Да бисмо изразили некомутативност на координатно инваријантан начин можемо посматрати $\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z$, где у $\mathbb{R}^n$ имамо $D_X D_Y Z = D_X(\sum_i YZ^i\partial_i) = \sum_i XYZ^i\partial_i$, одакле добијамо да важи $D_X D_Y Z - D_Y D_X Z = \sum_i (XY - YX) Z^i \partial_i = D_{[X,Y]} Z$.

Претходна анализа нас мотивише да на псеудо-Римановој многострукости (M, g) дефинишемо ***оператор кривине*** $\mathcal{R}\colon \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ са

$$\mathcal{R}(X,Y)(Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

за $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, где је ∇ одговарајућа Леви-Чивита повезаност. Другим речима, оператор кривине је пресликавање $\mathcal{R}(X,Y)\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ задато као разлика комутатора набли и набле комутатора, $\mathcal{R}(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$. Напоменимо да неки аутори дефинишу оператор кривине са супротним знаком, што је разлика која суштински није битна, али свакако треба бити пажљив.

Из саме дефиниције очигледна је антисиметрија

$$\mathcal{R}(Y,X) = -\mathcal{R}(X,Y), \tag{6.1}$$

као и њен специјални случај $\mathcal{R}(X,X) = 0$. Повезаност и комутатор су $\mathbb{R}$-билинеарни, те је такав и оператор кривине $\mathcal{R}$, одакле следи адитивност по сва три аргумента. Штавише, $\mathcal{R}$ је $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеарно. За $\mathfrak{F}(M)$-линеарност по првом аргументу имамо,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(fX,Y) &= [\nabla_{fX}, \nabla_Y] - \nabla_{[fX,Y]} = [f\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X}\\ &= f[\nabla_X, \nabla_Y] - (Yf)\nabla_X - f\nabla_{[X,Y]} + (Yf)\nabla_X = f\mathcal{R}(X,Y),\end{aligned}$$

што због (6.1) ради и по другом аргументу. За трећи аргумент користимо особине (5.6) и (5.5), одакле добијамо

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)(fZ) =& \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ)\\ =& \nabla_X(f\nabla_Y Z + (Yf)Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z + (Xf)Z) - (f\nabla_{[X,Y]} Z + ([X,Y]f)Z)\\ =& f\nabla_X\nabla_Y Z + (Xf)\nabla_Y Z + (Yf)\nabla_X Z + (XYf)Z - f\nabla_Y\nabla_X Z\\ &- (Yf)\nabla_X Z - (Xf)\nabla_Y Z - (YXf)Z - f\nabla_{[X,Y]} Z - ([X,Y]f)Z\\ =& f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z = f\mathcal{R}(X,Y)Z.\end{aligned}$$

Дакле, оператор кривине $\mathcal{R}\colon \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ је $\mathfrak{F}(M)$-мултилинеаран, те га уобичајено третирамо као тензорско поље $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}^1_3(M)$. Вишеструком применом симетричности повезаности (5.9) добијамо

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y\\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y\\ &= \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y\\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]],\end{aligned}$$

те из Јакобијевог идентитета (2.7) следи

$$\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y = 0, \tag{6.2}$$

што је формула позната као ***Бјанкијев идентитет***[1].

Теорема 6.1. *За оператор кривине $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ псеудо-Риманове многострукости M, формуле* (6.1) *и* (6.2) *важе за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

У локалним координатама имамо $\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l \mathcal{R}^l_{ijk}\partial_l$ (видети Пример 3.25), те компоненте оператора кривине можемо изразити преко Кристофелових симбола. Из

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i}\sum_m \Gamma^m_{jk}\partial_m - \nabla_{\partial_j}\sum_m \Gamma^m_{ik}\partial_m \\
&= \sum_m (\partial_i\Gamma^m_{jk})\partial_m + \sum_m \Gamma^m_{jk}\nabla_{\partial_i}\partial_m - \sum_m (\partial_j\Gamma^m_{ik})\partial_m - \sum_m \Gamma^m_{ik}\nabla_{\partial_j}\partial_m \\
&= \sum_m (\partial_i\Gamma^m_{jk} - \partial_j\Gamma^m_{ik})\partial_m + \sum_{m,l}(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm})\partial_l,
\end{aligned}$$

добијамо

$$\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l \left(\left(\partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik}\right) + \sum_m (\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}) \right)\partial_l,$$

одакле важи

$$\mathcal{R}^l_{ijk} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \sum_m (\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}). \tag{6.3}$$

Спуштањем индекса добијамо ***тензор кривине*** $R = \mathcal{R}^\flat \in \mathfrak{T}^0_4(M)$, што је коваријантно тензорско поље

$$R = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\, dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes dx_l$$

са компонентама $R_{ijkl} = \sum_m g_{lm}\mathcal{R}^m_{ijk}$, при чему за свако $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ важи

$$R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W).$$

Из (6.1) директно следи идентитет

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W), \tag{6.4}$$

док као последицу од (6.2) имамо ***први Бјанкијев идентитет***,

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0. \tag{6.5}$$

Како је Леви-Чивита повезаност метричка, из (5.8) следи

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X\nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) &= Xg(\nabla_Y Z, Z), \\
g(\nabla_Y\nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) &= Yg(\nabla_X Z, Z), \\
2g(\nabla_W Z, Z) = g(\nabla_W Z, Z) + g(Z, \nabla_W Z) &= Wg(Z, Z),
\end{aligned}$$

где нас у последњој једнакости занимају случајеви $W \in \{Y, X, [X, Y]\}$. Одавде имамо

$$\begin{aligned}
R(X, Y, Z, Z) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, Z) \\
&= Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, Z) \\
&= \frac{1}{2}XYg(Z, Z) - \frac{1}{2}YXg(Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y]g(Z, Z) = 0,
\end{aligned}$$

[1] Luigi Bianchi (1856–1928), италијански математичар

те поларизацијом из

$$R(X,Y,Z+W,Z+W) = R(X,Y,Z,Z) + R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z) + R(X,Y,W,W)$$

добијамо

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z). \tag{6.6}$$

Теорема 6.2. *За тензор кривине $R \in \mathfrak{T}^0_4(M)$ псеудо-Риманове многострукости M, формуле* (6.4)*,* (6.6) *и* (6.5) *важе за свако $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$.*

Сличне особине изводимо за потпун коваријантни извод тензора кривине ∇R. Како је

$$\begin{aligned}\nabla R(X,Y,Z,W,V) =& V(R(X,Y,Z,W)) - R(\nabla_V X,Y,Z,W) - R(X,\nabla_V Y,Z,W)\\ &- R(X,Y,\nabla_V Z,W) - R(X,Y,Z,\nabla_V W),\end{aligned}$$

то особина (6.4) одмах даје

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) = -\nabla R(Y,X,Z,W,V), \tag{6.7}$$

док је

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) = -\nabla R(X,Y,W,Z,V) \tag{6.8}$$

директна последица од (6.6). Из вишеструке примене (6.2) и (6.5) следи

$$\begin{aligned}&\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,Z,X,W,V) + \nabla R(Z,X,Y,W,V)\\ =\ & V(R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W))\\ &- g(\mathcal{R}(\nabla_V X,Y)Z + \mathcal{R}(Z,\nabla_V X)Y + \mathcal{R}(Y,Z)\nabla_V X,W)\\ &- g(\mathcal{R}(\nabla_V Y,Z)X + \mathcal{R}(X,\nabla_V Y)Z + \mathcal{R}(Z,X)\nabla_V Y,W)\\ &- g(\mathcal{R}(\nabla_V Z,X)Y + \mathcal{R}(Y,\nabla_V Z)X + \mathcal{R}(X,Y)\nabla_V Z,W)\\ &- g(\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y,\nabla_V W) = 0,\end{aligned}$$

те добијамо коваријантни извод првог Бјанкијевог идентитета

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,Z,X,W,V) + \nabla R(Z,X,Y,W,V) = 0. \tag{6.9}$$

Ако искористимо (5.8) да бисмо израчунали $\nabla R(X,Y,Z,W,V)$, добијамо

$$\begin{aligned}\nabla R(X,Y,Z,W,V) =& V(g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)) - R(X,Y,Z,\nabla_V W)\\ &- R(X,Y,\nabla_V Z,W) - R(\nabla_V X,Y,Z,W) - R(X,\nabla_V Y,Z,W)\\ =\ & g(\nabla_V\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_V\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_V\nabla_{[X,Y]}Z,W)\\ &- g(\nabla_X\nabla_Y\nabla_V Z - \nabla_Y\nabla_X\nabla_V Z - \nabla_{[X,Y]}\nabla_V Z,W)\\ &- g(\nabla_{\nabla_V X}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{\nabla_V X}Z - \nabla_{[\nabla_V X,Y]}Z,W)\\ &- g(\nabla_X\nabla_{\nabla_V Y}Z - \nabla_{\nabla_V Y}\nabla_X Z - \nabla_{[X,\nabla_V Y]}Z,W),\end{aligned}$$

што се може записати са

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) = g((\mathcal{T}_1(X,Y,V) + \mathcal{T}_2(X,Y,V) + \mathcal{T}_3(X,Y,V))Z,W),$$

где су $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ дефинисани са

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1(X,Y,V) &= \nabla_V\nabla_X\nabla_Y - \nabla_V\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y\nabla_V + \nabla_Y\nabla_X\nabla_V = [\nabla_V,[\nabla_X,\nabla_Y]];\\ \mathcal{T}_2(X,Y,V) &= \nabla_Y\nabla_{\nabla_V X} - \nabla_{\nabla_V X}\nabla_Y + \nabla_{\nabla_V Y}\nabla_X - \nabla_X\nabla_{\nabla_V Y} + \nabla_{[X,Y]}\nabla_V - \nabla_V\nabla_{[X,Y]}\\ &= [\nabla_Y,\nabla_{\nabla_V X}] + [\nabla_{\nabla_V Y},\nabla_X] + [\nabla_{[X,Y]},\nabla_V];\\ \mathcal{T}_3(X,Y,V) &= \nabla_{[X,\nabla_V Y]} + \nabla_{[\nabla_V X,Y]}.\end{aligned}$$

Јакобијев идентитет из Леме A.31 примењен на алгебру свих линеарних ендоморфизама $\mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$ модула $\mathfrak{X}(M)$ над прстеном $\mathfrak{F}(M)$, даје

$$\mathcal{T}_1(X,Y,V)+\mathcal{T}_1(Y,V,X)+\mathcal{T}_1(V,X,Y)=[\nabla_V,[\nabla_X,\nabla_Y]]+[\nabla_X,[\nabla_Y,\nabla_V]]+[\nabla_Y,[\nabla_V,\nabla_X]]=0.$$

Из једнакости (5.9) имамо

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_2(X,Y,V)+\mathcal{T}_2(Y,V,X)+\mathcal{T}_2(V,X,Y)\\&\qquad=[\nabla_{\nabla_V Y-\nabla_Y V-[V,Y]},\nabla_X]+[\nabla_{\nabla_X V-\nabla_V X-[X,V]},\nabla_Y]+[\nabla_{\nabla_Y X-\nabla_X Y-[Y,X]},\nabla_V]=0.\end{aligned}$$

Једнакост (5.9) и Јакобијев идентитет (2.7) доносе

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_3(X,Y,V)+\mathcal{T}_3(Y,V,X)+\mathcal{T}_3(V,X,Y)\\&\quad=\nabla_{[X,\nabla_V Y]}+\nabla_{[\nabla_V X,Y]}+\nabla_{[Y,\nabla_X V]}+\nabla_{[\nabla_X Y,V]}+\nabla_{[V,\nabla_Y X]}+\nabla_{[\nabla_Y V,X]}\\&\quad=\nabla_{[X,\nabla_V Y-\nabla_Y V]}+\nabla_{[Y,\nabla_X V-\nabla_V X]}+\nabla_{[V,\nabla_Y X-\nabla_X Y]}\\&\quad=\nabla_{[X,[V,Y]]+[Y,[X,V]]+[V,[Y,X]]}=0.\end{aligned}$$

Обједињавањем претходних резултата добијамо ***други Бјанкијев идентитет***,

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V)+\nabla R(Y,V,Z,W,X)+\nabla R(V,X,Z,W,Y)=0. \tag{6.10}$$

Теорема 6.3. *За потпун коваријантни извод тензора кривине* $\nabla R\in\mathfrak{T}^0_5(M)$ *псеудо-Риманове многострукости M, формуле* (6.7)*,* (6.8)*,* (6.9) *и* (6.10) *важе за свако* $X,Y,Z,W,V\in\mathfrak{X}(M)$*.*

Дуго и мучно рачунање којим смо доказали идентитете из Теореме 6.3 може се паметније упростити. Наиме, како су у питању тензорске једнакости, по Теореми 3.13 довољно је показати тврђење у произвољној тачки $p\in M$. Приде, због мултилинеарности тензора довољно је формулу показати за базне елементе у односу на неки покретни репер. Ако по Теореми 5.14 уведемо нормалне координате центриране у p, осим стандардног $[\partial_i,\partial_j]\equiv 0$, по Теореми 5.15 додатно имамо и

$$(\nabla_{\partial_i}\partial_j)_p=\sum_k\Gamma^k_{ij}(p)(\partial_k)_p=0.$$

На пример, у нормалним координатама центрираним у p за координатна векторска поља X,Y,Z,W,V у некој околини од p, за (6.9) имамо аутоматски

$$\begin{aligned}&(\nabla R(X,Y,Z,W,V)+\nabla R(Y,Z,X,W,V)+\nabla R(Z,X,Y,W,V))(p)\\&\qquad=V_p(R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W))=0.\end{aligned}$$

Неупоредиво брже и једноставније добија се и други Бјанкијев идентитет (6.10),

$$\begin{aligned}(\nabla R(X,Y,Z,W,V))(p)&=(V(R(X,Y,Z,W)))(p)\\&=g(\nabla_V(\mathcal{R}(X,Y)Z),W)(p)+g(\mathcal{R}(X,Y)Z,\nabla_V W)(p)\\&=g(\nabla_V\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_V\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_V\nabla_{[X,Y]}Z,W)(p)\\&=g(\nabla_V\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_V\nabla_Y\nabla_X Z,W)(p),\end{aligned}$$

одакле следи

$$\begin{aligned}&(\nabla R(X,Y,Z,W,V)+\nabla R(Y,V,Z,W,X)+\nabla R(V,X,Z,W,Y))(p)\\&\quad=g((\nabla_V\nabla_X\nabla_Y-\nabla_V\nabla_Y\nabla_X+\nabla_X\nabla_Y\nabla_V-\nabla_X\nabla_V\nabla_Y+\nabla_Y\nabla_V\nabla_X-\nabla_Y\nabla_X\nabla_V)Z,W)(p)\\&\quad=R(V,X,\nabla_Y Z,W)(p)+R(X,Y,\nabla_V Z,W)(p)+R(Y,V,\nabla_X Z,W)(p)=0.\end{aligned}$$

Нека је $f\colon M \to N$ изометрија између псеудо-Риманових многострукости. Како се Леви-Чивита повезаност чува у смислу формуле (5.12), то се чува и кривина коју она индукује,

$$f_*(\mathcal{R}(X,Y)Z) = \mathcal{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z.$$

Веома је важно разумети понашање изометрија и локалних изометрија. Разни концепти псеудо-Риманове геометрије које смо до сада дефинисали се изометријама чувају у одговарајућем смислу. Како смо конструисали концепте из метричког тензора употребом алата теорије многострукости, док изометрије чувају и алате и тензор, природно је очекивати да су у питању изометријске инваријанте.

Пример 6.2. Нека је $f\colon M \to N$ локална изометрија између псеудо-Риманових многострукости. Коваријантни извод дуж криве γ се чува са

$$T_{\gamma(t)}f\frac{\nabla V}{dt} = \frac{\nabla f_* V}{dt}$$

за $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ где је $(f_*V)(t) = T_{\gamma(t)}f(V(t))$ за свако t. Због тога, паралелно померање дуж криве се чува са

$$T_{\gamma(b)}f \circ P_\gamma = P_{f\circ\gamma} \circ T_{\gamma(a)}f,$$

где $P_\gamma = P_{ab}$ означава паралелно померање из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ дуж γ у M, а $P_{f\circ\gamma}$ означава паралелно померање из $f(\gamma(a))$ у $f(\gamma(b))$ дуж $f\circ\gamma$ у N. Зато, ако је γ геодезијска у M, онда је $f\circ\gamma$ геодезијска у N, или конкретније, геодезијске се чувају са

$$f\circ\gamma_V = \gamma_{T_pf(V)}, \tag{6.11}$$

кад год су обе стране дефинисане (домен за $\gamma_{(T_pf)V}$ може бити већи од домена за γ_V), где је $\gamma_V(0) = p$ и $\gamma_V'(0) = V$. Експоненцијално пресликавање се чува са

$$f\circ\exp_p = \exp_{f(p)}\circ T_pf, \tag{6.12}$$

кад год су обе стране дефинисане. △

6.2 Алгебарски тензор кривине

У теорији псеудо-Риманових многострукости, згодно је радити у чисто алгебарском окружењу. Редукцијом псеудо-Риманове многострукости (M,g) на произвољну тачку $p \in M$ добијамо векторски простор $\mathcal{V} = T_pM$ са скаларним производом g_p, а природни тензори доводе нас до концепта алгебарског тензора кривине. За тензор $R \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ на квадратном векторском простору $(\mathcal{V},g)$ кажемо да је ***алгебарски тензор кривине*** ако за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$ задовољава симетрије

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W), \tag{6.4 поновљено}$$
$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{6.6 поновљено}$$
$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0. \tag{6.5 поновљено}$$

Важно је напоменути да се ова дефиниција лепо слаже са Теоремом 6.2. Тензор кривине псеудо-Риманове многострукости, редукован на произвољну тачку јесте алгебарски тензор кривине. Због тога, сваки резултат који важи за алгебарски тензор кривине може се пренети на тензор кривине псеудо-Риманове многострукости.

Ако применимо (6.6), затим (6.5) и коначно (6.4) и (6.6), имамо

$$\begin{aligned}
&2R(X,Y,Z,W) - 2R(Z,W,X,Y)\\
&\qquad =R(X,Y,Z,W) - R(X,Y,W,Z) - R(Z,W,X,Y) + R(Z,W,Y,X)\\
&\qquad =(-R(Y,Z,X,W) - R(Z,X,Y,W)) - (-R(Y,W,X,Z) - R(W,X,Y,Z))\\
&\qquad\quad - (-R(W,X,Z,Y) - R(X,Z,W,Y)) + (-R(W,Y,Z,X) - R(Y,Z,W,X))\\
&\qquad = - R(Y,Z,X,W) - R(Y,Z,W,X) - R(Z,X,Y,W) + R(X,Z,W,Y)\\
&\qquad\quad + R(Y,W,X,Z) - R(W,Y,Z,X) + R(W,X,Y,Z) + R(W,X,Z,Y) = 0,
\end{aligned}$$

одакле добијемо симетрију по паровима

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y), \tag{6.13}$$

која важи за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$ и која се последично преноси и за тензор кривине на многострукости. Имајући ово у виду, једнакост (6.6) из дефиниције алгебарског тензора кривине можемо заменити са (6.13), јер (6.6) је директна последица (6.4) и (6.13).

Нека је R алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V},g)$ димензије n. Ради једноставнијег изражавања, особине скаларног производа преносимо на сам тензор. Тако можемо рећи да је R Риманов или позитивно дефинитан (ако је $\operatorname{Ind} g = 0$), дефинитан ($\operatorname{Ind} g = 0$ или $\operatorname{Ind} g = n$), недефинитан ($1 \leqslant \operatorname{Ind} g \leqslant n-1$), Лоренцов ($\operatorname{Ind} g = 1$), n-димензион ($\dim \mathcal{V} = n$), и тако даље.

Пример 6.3. Основни пример алгебарског тензора кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V},g)$ је свакако $R^1 \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ дат са

$$R^1(X,Y,Z,W) = g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W) \tag{6.14}$$

за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$. Лако је видети да R^1 задовољава $\mathbb{Z}_2$ симетрије (6.4) и (6.6), као и први Бјанкијев идентитет (6.5). △

Нека је $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ линеарни оператор на квадратном векторском простору $(\mathcal{V},g)$. За J кажемо да је ***самоадјунїован*** или ***симетричан*** ако $g(JX,Y) = g(X,JY)$ важи за свако $X,Y \in \mathcal{V}$. Сасвим слично, J је ***косоадјунїован*** или ***кососиметричан*** ако $g(JX,Y) = -g(X,JY)$ важи за свако $X,Y \in \mathcal{V}$. Самоадјунговани и косоадјунговани ендоморфизми нам омогућавају да добијемо нове примере алгебарских тензора кривине.

Пример 6.4. Самоадјунгован ендоморфизам $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ квадратног векторског простора $(\mathcal{V},g)$ генерише алгебарски тензор кривине $R^J \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ дефинисан са

$$R^J(X,Y,Z,W) = g(JX,W)g(JY,Z) - g(JX,Z)g(JY,W),$$

за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$, што се лако проверава. Приметимо да је R^1 специјални случај за $J = 1 \cdot \mathbb{1}$. △

Пример 6.5. Косоадјунгован ендоморфизам $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ квадратног векторског простора $(\mathcal{V},g)$ генерише алгебарски тензор кривине $R^J \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ дефинисан са

$$R^J(X,Y,Z,W) = g(JX,Z)g(JY,W) - g(JY,Z)g(JX,W) + 2g(JX,Y)g(JZ,W), \tag{6.15}$$

за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$, што се лако проверава. △

Пример 6.6. Нека су $R_1, \dots, R_k \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ алгебарски тензори кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i R_i \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$$

такође алгебарски тензор кривине, јер очигледно задовољава једнакости (6.4), (6.6) и (6.5). На овај начин, нови алгебарски тензор кривине може се направити као линеарна комбинација постојећих тензора. Посебно, kR^1 је алгебарски тензор кривине за свако $k \in \mathbb{R}$. △

Дизањем последњег индекса добијамо ***афини оператор кривине*** $\mathcal{R} = R^\sharp \in \mathfrak{T}_3^1(\mathcal{V})$ за који једнакост

$$R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W),$$

важи за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Намерно смо кроз рестрикцију задржали нотацију са многострукости, R за тензор кривине и $\mathcal{R}$ за оператор кривине, што нам омогућава да преузмемо глобалну терминологију.

Чест начин да се изрази алгебарски тензор кривине R је преко компоненти тензора кривине $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ у односу на неку базу $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ у $\mathcal{V}$. Испоставља се да нам је потребно само $n^2(n^2-1)/12$ компоненти, што се види из наредне теореме (видети Вајнберг[2] [119, стр.142–143]).

Теорема 6.4. *Димензија простора алгебарских тензора кривине на квадратном векторском простору димензије n једнака је $n^2(n^2-1)/12$.*

Доказ. Посматрајмо компоненте R_{ijkl} као парове (i, j) и (k, l). Како важи (6.4) имамо $\binom{n}{2}$ независних парова на првом месту. Како важи (6.6) имамо исто то и на другом месту. Међутим, парови су повезани са (6.13), што даје $\binom{n}{2} + \dots + 2 + 1$ могућности. Први Бјанкијев идентитет (6.5) додаје $\binom{n}{4}$ зависних компоненти, на пример то су R_{ijkl} за $i < j < k < l$. Зато преостају R_{ijkl} чији је број независних компоненти једнак

$$\begin{aligned}\binom{n}{2} + \dots + 2 + 1 - \binom{n}{4} &= \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} + 1\right) - \binom{n}{4} \\ &= \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.\end{aligned}$$

□

Јакобијев оператор и сродни оператори играју значајне улоге у нашој теорији. ***Поларизован Јакобијев оператор*** је линеарно пресликавање $\mathcal{J} \colon \mathcal{V}^3 \to \mathcal{V}$ дефинисано са

$$\mathcal{J}(X, Y)(Z) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{R}(Z, X)Y + \mathcal{R}(Z, Y)X\right), \tag{6.16}$$

за све $X, Y, Z \in \mathcal{V}$. ***Јакобијев оператор*** за $X \in \mathcal{V}$ је линеарно пресликавање $\mathcal{J}_X \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ дефинисано са $\mathcal{J}_X = \mathcal{J}(X, X)$, а често га изражавамо са

$$\mathcal{J}_X(Y) = \mathcal{R}(Y, X)X. \tag{6.17}$$

Како (6.6) повлачи $g(\mathcal{J}_X(Y), X) = R(Y, X, X, X) = 0$ имамо $\mathcal{J}_X(Y) \perp X$, те је $X^\perp$ кодомен Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$. У случају дефинитног X ($\varepsilon_X \neq 0$), ортогонал $X^\perp$ је недегенерисана хиперповрш у $\mathcal{V}$, док (6.4) даје $\mathcal{J}_X(X) = \mathcal{R}(X, X)X = 0$. Зато је Јакобијев оператор за дефинитно $X \in \mathcal{V}$ потпуно одређен својом рестрикцијом

$$\widetilde{\mathcal{J}}_X = \mathcal{J}_X\restriction_{X^\perp} \colon X^\perp \to X^\perp,$$

[2] Steven Weinberg (1933), амерички теоријски физичар

коју зовемо ***редукован Јакобијев оператор***.

Из (6.13), (6.4) и (6.6) следи $R(Y,X,X,Z) = R(Z,X,X,Y)$, те је Јакобијев оператор самоадјунгован,

$$g(\mathcal{J}_X(Y),Z) = g(\mathcal{J}_X(Z),Y).$$

Слично, из (6.4) и (6.6) имамо $R(Y,X,X,Y) = R(X,Y,Y,X)$, одакле добијамо ***компатибилност*** Јакобијевих оператора,

$$g(\mathcal{J}_X(Y),Y) = g(\mathcal{J}_Y(X),X). \tag{6.18}$$

Дакле, Јакобијеви оператори су самоадјунговани ендоморфизми на $\mathcal{V}$ за које важи компатибилност (6.18).

Нека је $(E_1,\dots,E_n)$ нека ортонормирана база квадратног векторског простора $(\mathcal{V},g)$ димензије n. За сваки вектор $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ имамо $\mathcal{J}_X(E_j) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{E_i} g(\mathcal{J}_X(E_j),E_i)E_i$, те можемо израчунати улазе матрице од $\mathcal{J}_X$ у односу на дату базу,

$$(\mathcal{J}_X)_{ij} = \varepsilon_{E_i} g(\mathcal{J}_X(E_j),E_i) = \varepsilon_{E_i} R(E_j,X,X,E_i) = \varepsilon_{E_i} \sum_{p,q=1}^n R_{jpqi} x_p x_q,$$

одакле се јасно види да су они хомогени полиноми степена 2 (квадратне форме) са n променљивих $x_1,\dots,x_n$. Наравно, то такође важи и у односу на базе које нису ортонормиране, јер је $M^{-1}\mathcal{J}_X M$ нова матрица од $\mathcal{J}_X$, где је M матрица преласка.

Лема 6.5. *Улази матрице од $\mathcal{J}_X$ су хомогени полиноми степена 2 у коефицијентима од X.*

Иако смо Јакобијев оператор дефинисали користећи квадратни векторски простор $\mathcal{V}$, важно је напоменути да увек можемо заменити $\mathcal{V} = T_pM$, где је p нека тачка псеудо-Риманове многострукости M. Такође, можемо продужити појам Јакобијевог оператора на целокупно $\mathfrak{X}(M)$ (или барем на тангентно раслојење TM) и задржати терминологију.

6.3 Секциона кривина

Тензор кривине R псеудо-Риманове многострукости (M,g) је прилично компликован, те уводимо често коришћену једноставнију величину коју зовемо секциона кривина. ***Тангентна раван*** σ на M у тачки $p \in M$ је дводимензиони потпростор тангентног простора T_pM. ***Секциона кривина*** κ недегенерисане тангентне равни $\sigma = \mathrm{Span}\{X,Y\}$ у T_pM је дата са

$$\kappa(\sigma) = \kappa(X,Y) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{\varepsilon_X\varepsilon_Y - (g(X,Y))^2}.$$

Приметимо да је именилац $\varepsilon_X\varepsilon_Y - (g(X,Y))^2 = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)g(Y,X)$ заправо детерминанта Грамове матрице за $g\restriction_\sigma$ у односу на базу $X,Y \in T_pM$ у $\sigma = \mathrm{Span}\{X,Y\}$. Како по дефиницији посматрамо само недегенерисане σ, наш именилац по Леми 4.1 није нула. Штавише, за Риманове многострукости он представља квадрат површине паралелограма одређеног паром вектора $X,Y \in T_pM$.

Потребно је проверити да вредност $\kappa(X,Y)$ зависи само од (недегенерисане) равни разапнуте векторима X и Y. Нека $X_1 = \alpha X + \beta Y$ и $Y_1 = \gamma X + \delta Y$ чине другу базу у σ. Промена базе за билинеарну форму g даје

$$\begin{pmatrix} g(X_1,X_1) & g(X_1,Y_1) \\ g(Y_1,X_1) & g(Y_1,Y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(X,X) & g(X,Y) \\ g(Y,X) & g(Y,Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

те је зато $\varepsilon_{X_1}\varepsilon_{Y_1} - (g(X_1, Y_1))^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \left(\varepsilon_X\varepsilon_Y - (g(X, Y))^2\right)$. Са друге стране, користимо симетрије од R, те добијамо

$$\begin{aligned} R(X_1, Y_1, Y_1, X_1) &= R(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y, Y_1, X_1) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma) R(X, Y, \gamma X + \delta Y, \alpha X + \beta Y), \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 R(X, Y, Y, X). \end{aligned}$$

Како детерминанта матрице преласка није нула имамо $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, одакле добијамо $\kappa(X_1, Y_1) = \kappa(X, Y)$, што значи да је секциона кривина добро дефинисана.

Напоменимо да за дводимензиону Риманову многострукост, постоји само једна секциона кривина у свакој тачки, што је добро позната Гаусова кривина. Секциона кривина је реално-вредносна функција дефинисана на 2-Грасманијан раслојењу над M. Међутим, иако секциона кривина делује једноставније од тензора кривине R, она ипак садржи комплетну информацију.

Најпре можемо видети да оператор кривине зависи само од Јакобијевих оператора, јер користећи (6.1) и (6.2) имамо

$$\begin{aligned} 3\mathcal{R}(X, Y)Z &= \mathcal{R}(X, Y)Z + (-\mathcal{R}(Y, X)Z) + (-\mathcal{R}(Y, Z)X - \mathcal{R}(Z, X)Y) \\ &= (\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(X, Z)Y) - (\mathcal{R}(Y, X)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X) \\ &= \mathcal{R}(X, Y + Z)(Y + Z) - \mathcal{R}(X, Y)Y - \mathcal{R}(X, Z)Z \\ &\quad - \mathcal{R}(Y, X + Z)(X + Z) + \mathcal{R}(Y, X)X + \mathcal{R}(Y, Z)Z \\ &= \mathcal{J}_{Y+Z}X - \mathcal{J}_Y X - \mathcal{J}_Z X - \mathcal{J}_{X+Z}Y + \mathcal{J}_X Y + \mathcal{J}_Z Y. \end{aligned}$$

Како је $R(W, Z, Y, X) = R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W)$, имамо

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{3} g((\mathcal{J}_{Y+Z} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z)W - (\mathcal{J}_{Y+W} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_W)Z, X), \tag{6.19}$$

што показује да Јакобијеви оператори у потпуности одређују тензор кривине.

Такође, тензор кривине се да изразити само преко вредности $\mu(X, Y) = R(X, Y, Y, X)$. Како из поларизације

$$2R(Y, X, X, W) = R(Y + W, X, X, Y + W) - R(Y, X, X, Y) - R(W, X, X, W)$$

следи

$$2g(\mathcal{J}_X Y, W) = \mu(Y + W, X) - \mu(Y, X) - \mu(W, X),$$

то се $R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W)$ може расписати помоћу 18 чланова

$$\begin{aligned} 6R(X, Y, Z, W) = \; & \mu(X + W, Y + Z) - \mu(X, Y + Z) - \mu(W, Y + Z) \\ & - \mu(X + W, Y) + \mu(X, Y) + \mu(W, Y) \\ & - \mu(X + W, Z) + \mu(X, Z) + \mu(W, Z) \\ & - \mu(Y + W, X + Z) + \mu(Y, X + Z) + \mu(W, X + Z) \\ & + \mu(Y + W, X) - \mu(Y, X) - \mu(W, X) \\ & + \mu(Y + W, Z) - \mu(Y, Z) - \mu(W, Z), \end{aligned}$$

где се 4 члана поништавају у паровима за коначан резултат,

$$\begin{aligned} 6R(X, Y, Z, W) = \; & \mu(X + W, Y + Z) - \mu(X, Y + Z) - \mu(W, Y + Z) \\ & - \mu(X + W, Y) + \mu(W, Y) - \mu(X + W, Z) + \mu(X, Z) \\ & - \mu(Y + W, X + Z) + \mu(Y, X + Z) + \mu(W, X + Z) \\ & + \mu(Y + W, X) - \mu(W, X) + \mu(Y + W, Z) - \mu(Y, Z). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Алтернативно, можемо израчунати

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} R(X+sW, Y+tZ, Y+tZ, X+sW)\\
&\quad=\lim_{s\to 0}\big(R(X, Y+tZ, Y+tZ, W)+R(W, Y+tZ, Y+tZ, X)+2sR(W, Y+tZ, Y+tZ, W)\big)\\
&\quad=2R(X, Y+tZ, Y+tZ, W),
\end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\bigg|_{t=0,s=0} R(X+sW, Y+tZ, Y+tZ, X+sW)\\
&\qquad= 2\lim_{t\to 0}\big(R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,Y,W)+2tR(X,Z,Z,W)\big)\\
&\qquad= 2\big(R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,Y,W)\big),
\end{aligned}$$

те користећи неке од симетрија изражавамо R преко μ на другачији начин,

$$\begin{aligned}
6R(X,Y,Z,W) &= 2(R(X,Y,Z,W)+(-R(X,Y,W,Z))+(-R(Y,Z,X,W)-R(Z,X,Y,W)))\\
&= 2\big(R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,Y,W)\big)-2\big(R(X,Y,W,Z)+R(X,W,Y,Z)\big)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=0,t=0}\big(R(X+sW,Y+tZ,Y+tZ,X+sW)-R(X+sZ,Y+tW,Y+tW,X+sZ)\big)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=0,t=0}\big(\mu(X+sW,Y+tZ)-\mu(X+sZ,Y+tW)\big),
\end{aligned}$$

одакле је

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=0,t=0}\big(\mu(X+sW,Y+tZ)-\mu(X+sZ,Y+tW)\big), \tag{6.21}$$

што је познато из Ли [76, Пропозиција 13.27].

Овим смо (на два начина) показали да свеукупне вредности за μ у потпуности одређују тензор кривине. У случају недегенерисане равни $\mathrm{Span}\{X,Y\}$, њена секциона кривина одређује $\mu(X,Y)=R(X,Y,Y,X)=(\varepsilon_X\varepsilon_Y-(g(X,Y))^2)\kappa(X,Y)$. Међутим, вредности μ у дегенерисаном случају $\varepsilon_X\varepsilon_Y=(g(X,Y))^2$ следе из непрекидности. Наиме, за изотропно X можемо пронаћи произвољан вектор Z за који је $g(X,Z)\neq 0$, те за $0\neq t\in\mathbb{R}$ посматрати недегенерисану раван $\mathrm{Span}\{X,Y+tZ\}$ (јер је $\varepsilon_X\varepsilon_{Y+tZ}-(g(X,Y+tZ))^2=-t^2(g(X,Z))^2\neq 0$), где је

$$\mu(X,Y)=\lim_{t\to 0}(\mu(X,Y)+2tR(X,Y,Z,X)+t^2\mu(X,Z))=\lim_{t\to 0}\mu(X,Y+tZ).$$

Последњи случај представља дегенерисана раван са дефинитним X, где постављамо $Z=Y-\theta X$ за $\theta=g(Y,X)/\varepsilon_X$ да бисмо добили $Z\perp X$, одакле је $\mu(X,Y)=\mu(X,Z)$, при чему је вредност $\mu(X,Z)$ већ израчуната јер или је Z изотропан или је раван $\mathrm{Span}\{X,Z\}$ недегенерисана. Дакле, два алгебарска тензора кривине који имају једнаке секционе кривине морају и сами бити једнаки.

Теорема 6.6. *Вредности $\mu(X,Y)=R(X,Y,Y,X)$ у потпуности одређују тензор кривине. Секциона кривина у потпуности одређује тензор кривине у тачкама где је скаларни производ познат.*

Иако секциона кривина изгледа једноставније од тензора кривине, њена важност произлази из чињенице да познавање свих секционих кривина у потпуности одређује тензор кривине (у тачкама где је скаларни производ познат). Ово се

односи и на Јакобијеве операторе, који такође садрже исте информације као и тензор кривине. Ови добро познати резултати дају јединственост тензора кривине и чисто су алгебарске природе.

Природно се поставља питање егзистенције тензора кривине за дате Јакобијеве операторе. Овај проблем је посматрао и решио Андрејић[3] 2022. године [11, Теорема 1], а ми следимо аргументе из [13], где су исправљени пропусти из оригиналног рада, а сама теорема је уопштена на псеудо-Риманов случај.

Претпоставимо да знамо самоадјунговане ендоморфизме $\mathcal{K}_X$ на $\mathcal{V}$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$, који су компатибилни у смислу да важи (6.18). Постоји ли алгебарски тензор кривине R на $(\mathcal{V}, g)$, такав да је $\mathcal{J}_X = \mathcal{K}_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$?

Посматрајмо услов $\mathcal{J}_X X = 0$ који важи за све Јакобијеве операторе. Међутим, конструкција $\mathcal{K}_X = \varepsilon_X \mathbb{1}$ даје самоадјунговане ендоморфизме на $\mathcal{V}$ који су компатибилни, $g(\varepsilon_X \mathbb{1}\, Y, Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y = g(\varepsilon_Y \mathbb{1}\, X, X)$, али $\varepsilon_X \mathbb{1}\, X = \varepsilon_X X \neq 0$ важи за дефинитно $X \in \mathcal{V}$. Зато додајемо природан услов да

$$\mathcal{K}_X X = 0, \tag{6.22}$$

важи за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$.

Први корак је продужити фамилију $\mathcal{K}_X$ за свако $X \in \mathcal{V}$. Природно продужење је $\mathcal{K}_0 = 0$, што комплетира фамилију у Римановом окружењу. Међутим, ако је скаларни производ недефинитан, онда је потребно дефинисати $\mathcal{K}_X$ за свако изотропно $X \in \mathcal{V}$.

Нека су $X, Y, X+Y, X-Y \in \mathcal{V}$ дефинитни. Коришћењем (6.18), из

$$\begin{aligned} g(\mathcal{K}_{X\pm Y} Z, Z) = g(\mathcal{K}_Z(X \pm Y), X \pm Y) &= g(\mathcal{K}_Z X, X) \pm 2g(\mathcal{K}_Z X, Y) + g(\mathcal{K}_Z Y, Y) \\ &= g(\mathcal{K}_X Z, Z) \pm 2g(\mathcal{K}_Z X, Y) + g(\mathcal{K}_Y Z, Z), \end{aligned}$$

следи $g(\mathcal{K}_{X+Y} Z, Z) + g(\mathcal{K}_{X-Y} Z, Z) = 2g(\mathcal{K}_X Z, Z) + 2g(\mathcal{K}_Y Z, Z)$ за свако дефинитно $Z \in \mathcal{V}$. Поларизација $Z = V + W$ даје $g((\mathcal{K}_{X+Y} + \mathcal{K}_{X-Y} - 2\mathcal{K}_X - 2\mathcal{K}_Y)V, W) = 0$, кадгод је $\varepsilon_V \varepsilon_W \varepsilon_{V+W} \neq 0$. Ако је $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ ортонормирана база за $(\mathcal{V}, g)$, онда можемо посматрати ортогоналну базу $(E_1, 2E_2, \ldots, nE_n)$, што омогућава $\varepsilon_{iE_i} = i^2 \varepsilon_{E_i} \neq 0$ и $\varepsilon_{iE_i + jE_j} = i^2 \varepsilon_{E_i} + j^2 \varepsilon_{E_j} \neq 0$ за $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Зато

$$\mathcal{K}_{X+Y} + \mathcal{K}_{X-Y} = 2\mathcal{K}_X + 2\mathcal{K}_Y \tag{6.23}$$

важи кадгод је $\varepsilon_X \varepsilon_Y \varepsilon_{X+Y} \varepsilon_{X-Y} \neq 0$.

Једнакост (6.23) нас мотивише да дефинишемо $\mathcal{K}_N$ за свако изотропно $N \in \mathcal{V}$ са

$$2\mathcal{K}_N = \mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X,$$

кадгод је десна страна дефинисана, што одмах показује да је $\mathcal{K}_N$ самоадјунгован ендоморфизам на $\mathcal{V}$. Због (6.23), ако је $\varepsilon_X \varepsilon_Y \varepsilon_{N+X} \varepsilon_{N-X} \varepsilon_{N+Y} \varepsilon_{N-Y} \neq 0$, онда имамо

$$\begin{aligned} 2(\mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X) &= (\mathcal{K}_{N+X+Y} + \mathcal{K}_{N+X-Y} - 2\mathcal{K}_Y) + (\mathcal{K}_{N-X+Y} + \mathcal{K}_{N-X-Y} - 2\mathcal{K}_Y) - 4\mathcal{K}_X \\ &= (\mathcal{K}_{N+X+Y} + \mathcal{K}_{N-X+Y} - 2\mathcal{K}_X) + (\mathcal{K}_{N+X-Y} + \mathcal{K}_{N-X-Y} - 2\mathcal{K}_X) - 4\mathcal{K}_Y \\ &= 2(\mathcal{K}_{N+Y} + \mathcal{K}_{N-Y} - 2\mathcal{K}_Y), \end{aligned}$$

кадгод је $\varepsilon_{N+X+Y} \varepsilon_{N+X-Y} \varepsilon_{N-X+Y} \varepsilon_{N-X-Y} \neq 0$. у супротном, можемо искористити

$$\mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X = \mathcal{K}_{N+tX} + \mathcal{K}_{N-tX} - 2\mathcal{K}_{tX} = \mathcal{K}_{N+Y} + \mathcal{K}_{N-Y} - 2\mathcal{K}_Y,$$

где t није корен од

$$\varepsilon_{tX} \varepsilon_{N+tX} \varepsilon_{N-tX} \varepsilon_{N+X+tX} \varepsilon_{N-X+tX} \varepsilon_{N+X-tX} \varepsilon_{N-X-tX} \varepsilon_{N+Y+tX} \varepsilon_{N-Y+tX} \varepsilon_{N+Y-tX} \varepsilon_{N-Y-tX} = 0,$$

што је полиномијална једначина степена 22. То доказује да $\mathcal{K}_N$ не зависи од избора X, те је зато $\mathcal{K}_N$ добро дефинисано.

[3] Владица Андрејић (1978), српски математичар

Ако употребимо $Z \in \mathcal{V}$ које задовољава $\varepsilon_{N+Z}\varepsilon_{N-Z}\varepsilon_Z \neq 0$, онда једнакост

$$\begin{aligned}2g(\mathcal{K}_N X, X) &= g((\mathcal{K}_{N+Z} + \mathcal{K}_{N-Z} - 2\mathcal{K}_Z)X, X)\\ &= g(\mathcal{K}_X(N+Z), N+Z) + g(\mathcal{K}_X(N-Z), N-Z) - 2g(\mathcal{K}_X Z, Z) = 2g(\mathcal{K}_X N, N)\end{aligned}$$

важи за свако изотропно N и свако дефинитно X, што значи да су ендоморфизми $\mathcal{K}_N$ и $\mathcal{K}_X$ компатибилни. Са тим на уму, видимо да та иста једнакост важи кад су и N и X изотропни. На тај начин, добили смо $\mathcal{K}_X$ за свако $X \in \mathcal{V}$, док је та продужена фамилија остала компатибилна.

Нека је $N \in \mathcal{V}$ изотропно. За свако $X \in \mathcal{V}$ такво да важи $\varepsilon_X\varepsilon_{N+X}\varepsilon_{N-X} \neq 0$, коришћењем особина (6.22) и (6.18) имамо

$$\begin{aligned}2g(\mathcal{K}_N N, X) &= g(\mathcal{K}_{N+X}N + \mathcal{K}_{N-X}N - 2\mathcal{K}_X N, X) = -g(\mathcal{K}_{N+X}X, X) + g(\mathcal{K}_{N-X}X, X) - 2g(\mathcal{K}_X X, N)\\ &= -g(\mathcal{K}_X(N+X), N+X) + g(\mathcal{K}_X(N-X), N-X) = 0.\end{aligned}$$

Ако је $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ ортонормирана база за $(\mathcal{V}, g)$, можемо направити ортогоналну базу $(mE_1, mE_2, \ldots, mE_n)$, где је $m > \max_{1\leqslant i\leqslant n} |2g(N, E_i)|$, да бисмо омогућили $\varepsilon_{mE_i} \neq 0$ и $\varepsilon_{N\pm mE_i} \neq 0$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, што доноси $K_N N = 0$.

Други корак посматра компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизама $\mathcal{K}_X$ за свако $X \in \mathcal{V}$ тако да важи $\mathcal{K}_X X = 0$. За све $X, Y \in \mathcal{V}$ и $t \in \mathbb{R}$ имамо

$$g(\mathcal{K}_{tX}Y, Y) = g(\mathcal{K}_Y tX, tX) = t^2 g(\mathcal{K}_Y X, X) = g(t^2\mathcal{K}_X Y, Y),$$

где поларизација $Y = V + W$ даје $g(\mathcal{K}_{tX}V, W) = g(t^2\mathcal{K}_X V, W)$ for $V, W \in \mathcal{V}$, те како је g недегенерисано, следи $\mathcal{K}_{tX} = t^2\mathcal{K}_X$, што је природно својство Јакобијевих оператора.

За све $X, Y, Z \in \mathcal{V}$ и $t \in \mathbb{R}$, коришћењем компатибилности имамо

$$\begin{aligned}g(\mathcal{K}_{X+tY}Z, Z) &= g(\mathcal{K}_Z(X+tY), X+tY) = g(\mathcal{K}_Z X, X) + 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + t^2 g(\mathcal{K}_Z Y, Y)\\ &= g(\mathcal{K}_X Z, Z) + 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + t^2 g(\mathcal{K}_Y Z, Z),\end{aligned}$$

што повлачи

$$g((\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2\mathcal{K}_Y)Z, Z) = 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y) = tg((\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y)Z, Z).$$

Поларизација $Z = V + W$ даје $g((\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2\mathcal{K}_Y)V, W) = tg((\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y)V, W)$ за све $V, W \in \mathcal{V}$, те како је g недегенерисано, добијамо уопшење од (6.23),

$$\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2\mathcal{K}_Y = t(\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y), \tag{6.24}$$

што доноси $\mathcal{K}_{X+tY} = t\mathcal{K}_{X+Y} + (1-t)\mathcal{K}_X + (t^2 - t)\mathcal{K}_Y$. Употребом особине (6.22), добијамо

$$\begin{aligned}0 = \mathcal{K}_{X+tY}(X+tY) &= t\mathcal{K}_{X+Y}(X+tY) + (1-t)\mathcal{K}_X(X+tY) + (t^2-t)\mathcal{K}_Y(X+tY)\\ &= t\mathcal{K}_{X+Y}((t-1)Y) + (1-t)\mathcal{K}_X(tY) + t(t-1)\mathcal{K}_Y(X)\\ &= t(t-1)(\mathcal{K}_{X+Y}Y - \mathcal{K}_X Y + \mathcal{K}_Y X),\end{aligned}$$

што за $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ повлачи

$$\mathcal{K}_{X+Y}Y - \mathcal{K}_X Y + \mathcal{K}_Y X = 0 \tag{6.25}$$

за све $X, Y \in \mathcal{V}$.

Искористимо компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизама $\mathcal{K}_X$ на $\mathcal{V}$ који задовољавају $\mathcal{K}_X X = 0$ да дефинишемо пресликавање $R\colon \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$, имитирајући формулу (6.19) са

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{3}g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W - (\mathcal{K}_{Y+W} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_W)Z, X), \tag{6.26}$$

за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Из (6.24), ако узмемо лимес кад t тежи нули, онда следи

$$g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W, X) = \frac{g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) - g(\mathcal{K}_Y W, X)}{t} - tg(\mathcal{K}_Z W, X) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X),$$

те је зато једнакост (6.26) еквивалентна са

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W - \mathcal{K}_{Y+tW}Z, X). \tag{6.27}$$

Међутим, из

$$\begin{aligned} 2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) &= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \Big(g(\mathcal{K}_{Y+tZ}X, X) + 2sg(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) + s^2 g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, W)\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \Big(g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, W) + 2sg(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) + s^2 g(\mathcal{K}_{Y+tZ}X, X)\Big), \end{aligned}$$

добијамо

$$2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \mu(X + sW, Y + tZ) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \mu(W + sX, Y + tZ), \tag{6.28}$$

где је $\mu(X, Y) = g(\mathcal{K}_Y X, X) = g(\mathcal{K}_X Y, Y)$ за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Једнакост на левој страни у (6.28) показује да је (6.27) еквивалентно нашој формули (6.21),

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=0,t=0} (\mu(X + sW, Y + tZ) - \mu(X + sZ, Y + tW)). \quad \text{(6.21 поновљено)}$$

Дефиниција (6.26) за R је еквивалентна са (6.21), али је потоња лакша за доказивање да је R алгебарски тензор кривине. Својство (6.6) следи директно из (6.21), док је (6.4) последица комутативности $\partial_s \partial_t = \partial_t \partial_s$. Једнакост на десној страни у (6.28) нам помаже да лако видимо (6.5). Из (6.27), $R(X, Y, Z, W)$ је очигледно линеарно по X, али захваљујући већ доказаним симетријама, где (6.13) аутоматски следи, R је мултилинеарно, што доказује да је R алгебарски тензор кривине.

Преостаје да покажемо да су $\mathcal{K}_X$ за $X \in \mathcal{V}$ Јакобијеви оператори за R. Из (6.26), коришћењем $g(\mathcal{J}_Y W, X) = R(W, Y, Y, X)$ имамо $3g(\mathcal{J}_Y W, X) = g(2\mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_{Y+W}Y + \mathcal{K}_W Y, X)$, што повлачи

$$3\mathcal{J}_Y W = 2\mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_{Y+W}Y + \mathcal{K}_W Y.$$

На основу (6.25) имамо $-\mathcal{K}_{Y+W}Y = \mathcal{K}_{Y+W}W = \mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_W Y$, те је зато $3\mathcal{J}_Y W = 3\mathcal{K}_Y W$ за све $Y, W \in \mathcal{V}$, што даје $\mathcal{J}_Y = \mathcal{K}_Y$. То коначно доказује следећу теорему (видети [13, Теорема 1] и [11, Теорема 1]).

Теорема 6.7. *Нека је $\mathcal{K}_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ компатибилна фамилија самоадјунгованих ендоморфизама на квадратном векторском простору $\mathcal{V}$ која задовољава $\mathcal{K}_X X = 0$. Тада постоји јединствен алгебарски тензор кривине на $\mathcal{V}$ такав да су $\mathcal{K}_X$ његови Јакобијеви оператори.*

6.4 Константна секциона кривина

Најједноставнији случај псеудо-Риманових многострукости представља простор константне секционе кривине. Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост таква да је $\kappa(\sigma) = k(p)$ за сваку недегенерисану тангентну раван $\sigma \leqslant T_p M$ и неко фиксирано $k(p) \in \mathbb{R}$. На основу Теореме 6.6 то једнозначно одређује тензор кривине R. Рестрикција на тачку $p \in M$ даје квадратни векторски простор $\mathcal{V} = T_p M$, као и одговарајући

алгебарски тензор кривине. Нека је $R = kR^1 \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ алгебарски тензор кривине из Примера 6.6, где је R^1 дефинисано у (6.14). Како је $R(X,Y,Y,X) = k(\varepsilon_X\varepsilon_Y - (g(X,Y)^2)$, имамо $\kappa(X,Y) = k$, те тензор кривине на (M,g) има облик

$$R(X,Y,Z,W) = k\big(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\big),$$

где је $k \in \mathfrak{F}(M)$. Штавише, у димензији $n \geqslant 3$, имамо следећу занимљиву теорему коју је поставио Шур[4] [108].

Теорема 6.8. *Нека је (M,g) повезана псеудо-Риманова многострукост димензије $n \geqslant 3$. Ако секциона кривина $\kappa(\sigma)$ не зависи од равни $\sigma \leqslant T_pM$, већ само од тачке $p \in M$, онда је κ константно.*

Доказ. Секциона кривина у свакој тачки $p \in M$ је константа $k(p)$, те тензор кривине мора бити $R = kR^1$. Како је ∇ метричка повезаност, из $\nabla g = 0$ имамо

$$\begin{aligned}(\nabla_V R^1)(X,Y,Z,W) = \;& V(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W))\\ &- (g(Y,Z)g(\nabla_V X,W) - g(\nabla_V X,Z)g(Y,W))\\ &- (g(\nabla_V Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(\nabla_V Y,W))\\ &- (g(Y,\nabla_V Z)g(X,W) - g(X,\nabla_V Z)g(Y,W))\\ &- (g(Y,Z)g(X,\nabla_V W) - g(X,Z)g(Y,\nabla_V W)) = 0,\end{aligned}$$

те је R^1 паралелно тензорско поље, $\nabla_V R^1 = 0$. Одавде следи

$$\nabla_V R = \nabla_V(k \otimes R^1) = \nabla_V k \cdot R^1 + k \cdot \nabla_V R^1 = (Vk)R^1,$$

те важи

$$\begin{aligned}(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) &= (Vk)(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)),\\ (\nabla_X R)(Y,V,Z,W) &= (Xk)(g(V,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(V,W)),\\ (\nabla_Y R)(V,X,Z,W) &= (Yk)(g(X,Z)g(V,W) - g(V,Z)g(X,W)).\end{aligned}$$

Сума претходних једнакости се анулира по другом Бјанкијевом идентитету (6.10), те је

$$\begin{aligned}g(((Vk)g(Y,Z) - (Yk)g(V,Z))X + ((Xk)g(V,Z) - (Vk)g(X,Z))Y\\ + ((Yk)g(X,Z) - (Xk)g(Y,Z))V, W) = 0\end{aligned}$$

за свако W, док из недегенерисаности метрике

$$((Vk)g(Y,Z) - (Yk)g(V,Z))X + ((Xk)g(V,Z) - (Vk)g(X,Z))Y + ((Yk)g(X,Z) - (Xk)g(Y,Z))V = 0$$

важи за свако $X,Y,Z,V \in \mathfrak{X}(M)$. Рестрикцијом претходне једнакости на тачку $p \in M$, захваљујући Примеру 2.24 добијамо да

$$g_p((V_pk)Y_p - (Y_pk)V_p, Z_p)X_p + g_p((X_pk)V_p - (V_pk)X_p, Z_p)Y_p + g_p((Y_pk)X_p - (X_pk)Y_p, Z_p)V_p = 0$$

важи за све $X_p, Y_p, Z_p, V_p \in T_pM$. Фиксирајмо $X_p \in T_pM$, те како је $n \geqslant 3$, можемо пронаћи $Y_p, V_p \in T_pM$ такве да су вектори X_p, Y_p, V_p линеарно независни. Та линеарна независност доноси нула коефицијенте у претходној једнакости, што даје

$$g_p((Y_pk)X_p - (X_pk)Y_p, Z_p) = 0.$$

Ова једнакост важи за свако Z_p, те недегенерисаност од g_p даје $(Y_pk)X_p - (X_pk)Y_p = 0$, док линеарна независност повлачи $X_pk = 0$. Како то важи за свако $p \in M$ имамо $Xk = 0$ за $X \in \mathfrak{X}(M)$, те је по Примеру 5.1 k локално константно. Како је многострукост M повезана, k је константно. □

[4] Friedrich Heinrich Schur (1856–1932), немачки математичар

Простор константне секционе кривине је псеудо-Риманова многострукост (M, g) за коју је секциона кривина $\kappa(\sigma)$ константна, што је еквивалентно томе да је $\mathcal{R} = \kappa\mathcal{R}^1$ за $\kappa \in \mathbb{R}$. Под скалирањем подразумевамо процес у којем метрику g мењамо метриком $\widetilde{g} = \lambda g$ за неку константу $\lambda > 0$ (множење метрике негативним бројем није захвално јер окреће сигнатуру и тако есенцијално мења многострукост). Након скалирања добијамо $\widetilde{\mathcal{R}}^1(X, Y)Z = \lambda\mathcal{R}^1(X, Y)Z$, док су одговарајуће везе

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}, \quad \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y, \quad \widetilde{\mathcal{R}}(X, Y)Z = \mathcal{R}(X, Y)Z, \quad \widetilde{\kappa} = \kappa/\lambda.$$

Дакле, постоје три суштинска случаја за тензор кривине простора константне секционе кривине, $R = R^1$ (са $\kappa = 1$), $R = 0$ (са $\kappa = 0$) и $R = -R^1$ (са $\kappa = -1$). Одговарајући модел простори за Риманове многострукости су, редом, сфера $\mathbf{S}^n$, еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ и хиперболички простор $\mathbf{H}^n$.

Пример 6.7. За хиперболичку полураван $\mathbf{HU}^2$ из Примера 5.8 имали смо израчунато $g_{11} = g_{22} = 1/(x_2)^2$, као и $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0$, $\Gamma^2_{11} = -\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{22} = 1/x_2$. Из формуле (6.3) имамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^1_{121} &= \partial_1\Gamma^1_{21} - \partial_2\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = 0,\\
\mathcal{R}^2_{121} &= \partial_1\Gamma^2_{21} - \partial_2\Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} = (1 - 1 + 1)/(x_2)^2 = 1/(x_2)^2,
\end{aligned}$$

односно $\mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_1 = (1/(x_2)^2)\partial_2$. Важи $R(\partial_1, \partial_2, \partial_1, \partial_2) = 1/(x_2)^4$, те је $\kappa = -1$. △

У Римановој геометрији, секциона кривина κ може се видети као непрекидна реална функција на Грасмановом раслојењу дводимензионих равни Риманове многострукости M. Одатле следи да је κ на компактном подскупу од M ограничено, односно κ достиже своје минималне и максималне вредности [21, Секција 9.3]. Због тога су доње и горње границе секционе кривине интензивно проучаване у Римановој геометрији.

Међутим, у псеудо-Римановој геометрији, нека ограничења за κ уобичајено повлаче да је κ константно. Размотримо секциону кривину у некој фиксираној тачки псеудо-Риманове многострукости. Посматрајмо алгебарски тензор кривине R на недефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије $n \geqslant 3$.

Нека су $A, B, X \in \mathcal{V}$ ортонормирани вектори са $\varepsilon_A = \varepsilon_B = -\varepsilon_X$. Тада имамо

$$\kappa(X + \theta B, A) = \frac{R(X + \theta B, A, A, X + \theta B)}{\varepsilon_{X+\theta B}\varepsilon_A} = \frac{\theta^2\kappa(B, A) - \kappa(X, A) + 2\theta R(X, A, A, B)}{\theta^2 - 1}. \tag{6.29}$$

Ако је $\kappa \geqslant m$ ограничено одоздо, тада је $\theta^2\kappa(B, A) - \kappa(X, A) + 2\theta R(X, A, A, B)$ веће од $m(\theta^2 - 1)$ за $|\theta| > 1$ и мање од $m(\theta^2 - 1)$ за $|\theta| < 1$, те из непрекидности мора бити нула за $\theta = 1$ и $\theta = -1$, што повлачи $\kappa(B, A) = \kappa(X, A)$ и $R(X, A, A, B) = 0$.

Ако променимо ортонормиране векторе у $A \operatorname{ch} t + X \operatorname{sh} t, B, A \operatorname{sh} t + X \operatorname{ch} t$, за произвољно $t \neq 0$ имамо

$$\begin{aligned}
0 &= R(A \operatorname{sh} t + X \operatorname{ch} t, A \operatorname{ch} t + X \operatorname{sh} t, A \operatorname{ch} t + X \operatorname{sh} t, B)\\
&= R(X, A, A, B) \operatorname{ch} t - R(A, X, X, B) \operatorname{sh} t,
\end{aligned}$$

где $R(X, A, A, B) = 0$ повлачи $R(A, X, X, B) = 0$. Овај аргумент је оригинално дао Кулкарни[5] [74], и преостало није тешко завршити.

На пример, можемо узети ортонормирану базу $(E_1, \ldots, E_n)$ у $(\mathcal{V}, g)$, где је $E_1 = X$ и $E_2 = A$ да бисмо добили $\mathcal{J}_X(A) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{E_i} R(A, X, X, E_i)E_i = \varepsilon_A R(A, X, X, A)A$. Зато, ако је X просторно (временско) онда сваки временски (просторни) вектор из $X^\perp$ је сопствени

[5] Ravindra Shripad Kulkarni (1942), индијски математичар

вектор од $\mathcal{J}_X$. Посебно, A и $E_i + 2A$ за $i > 2$ су неортогонални сопствени вектори и зато имају заједничку сопствену вредност, што доноси $\widetilde{\mathcal{J}}_X = \varepsilon_X \mu(X)\, \mathbb{1}_{X^\perp}$ за неку функцију μ. Међутим, (6.18) повлачи $\varepsilon_X \varepsilon_Y \mu(X) = \varepsilon_Y \varepsilon_X \mu(Y)$ за ортогоналне X и Y, те за дефинитне векторе имамо $\mu(X) = \mu(Y) = \mathrm{Const}$. Овај аргумент даје константну секциону кривину што доказује наредну теорему коју је 1979. поставио Кулкарни [74].

Теорема 6.9. *Нека је κ функција секционе кривине недефинитног алгебарског тензора кривине. Ако је κ ограничено одозго или ограничено одоздо, тада је κ константно.*

Последично, помоћу Шурове теореме (Теорема 6.8), ако је функција секционе кривине на повезаној недефинитној многострукости M димензије $n \geqslant 3$ било ограничена одозго или одоздо, тада је M простор константне секционе кривине. Кулкарнијев резултат био је полазна тачка за многа истраживања секционе кривине недефинитне (уобичајено Лоренцове) метрике.

Претпоставимо да је секциона кривина на недефинитним равнима ограничена и одозго и одоздо. Започнимо од ортонормираних вектора $A, B, X \in \mathcal{V}$ таквих да је $\varepsilon_A = \varepsilon_B = -\varepsilon_X$ и употребимо једнакост (6.29). За $|\theta| < 1$ раван $\mathrm{Span}\{X + \theta B, A\}$ је недефинитна и зато важи $-m \leqslant \kappa(X + \theta B, A) \leqslant m$ за неку константу $m > 0$, што даје

$$-m(1-\theta^2) \leqslant \theta^2 \kappa(B,A) - \kappa(X,A) + 2\theta R(X,A,A,B) \leqslant m(1-\theta^2).$$

Из непрекидности у $\theta = 1$ и $\theta = -1$, имамо $\kappa(B,A) - \kappa(X,A) \pm 2R(X,A,A,B) = 0$, те је остатак доказа као у претходној теореми. На овај начин добили смо наредну теорему коју су 1980. поставили Дахцер и Номицу[6] [39].

Теорема 6.10. *Нека је κ функција секционе кривине недефинитног алгебарског тензора кривине. Ако је κ на недефинитним равнима ограничено и одозго и одоздо, тада је κ константно.*

Наравно, као и раније, ако је функција секционе кривине на недефинитним равнима повезане недефинитне многострукости M димензије $n \geqslant 3$ ограничена и одозго и одоздо, тада је M простор константне секционе кривине. Међутим, ограничење само са једне стране на недефинитним равнима не повлачи да је κ константна функција.

6.5 Ричијев тензор

Контракција је важна операција која нам омогућава да од постојећих тензора добијемо нове тензоре. Како често имамо потребу да вредност новог тензора у некој тачки многострукости запишемо што једноставније, користићемо локални ортонормирани покретни репер $(E_1, \ldots, E_n)$ из Теореме 4.13. Њему дуални покретни корепер обележимо са $(E_1^*, \ldots, E_n^*)$, а лако се проверава да важи $E_i^* = \varepsilon_{E_i} E_i^\flat$ за $1 \leqslant i \leqslant n$.

За неко тензорско поље A, контракција новог коваријантног аргумента потпуног коваријантног извода ∇A са неким од оригиналних аргумената зове се ***дивергенција*** и обележава са $\operatorname{div} A$. Углавном се употребљава у два специјална случаја у којима постоји јединствена дивергенција.

У првом случају посматрамо произвољно векторско поље $V \in \mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^1_0(M)$, где постављамо

$$\operatorname{div} V = C(\nabla V) \in \mathfrak{F}(M).$$

[6] Katsumi Nomizu (1924–2008), јапанско-амерички математичар

У ортонормираном покретном реперу за $V = \sum_j V^j E_j$ имамо

$$\begin{aligned}\operatorname{div} V &= \sum_i (\nabla V)^i_i = \sum_i (\nabla_{E_i} V)(E_i^*) = \sum_i E_i^*(\nabla_{E_i} V) = \sum_i \varepsilon_{E_i} g(\nabla_{E_i} V, E_i) \\ &= \sum_i \varepsilon_{E_i} g\left(E_i, \sum_j E_i(V^j) E_j + \sum_j V^j \sum_k \Gamma^k_{ij} E_k\right) = \sum_i E_i(V^i) + \sum_{i,j} V^j \Gamma^i_{ij}.\end{aligned}$$

У природним координатама на $\mathbb{R}^n_\nu$ важи $\operatorname{div} V = \sum_i \partial V^i / \partial \pi_i$, што је уобичајена формула на $\mathbb{R}^3$.

Пример 6.8. Дивергенција градијента глатке функције $f \in \mathfrak{F}(M)$ назива се ***Лапласијан***[7], $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \in \mathfrak{F}(M)$. По Леми 5.4 повисилица комутира са коваријантним изводом, те је

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = C(\nabla(df^\sharp)) = C((\nabla df)^\sharp) = C((\nabla\nabla f)^\sharp) = \operatorname{tr}_g(\nabla^2 f),$$

одакле следи да је Лапласијан заправо траг Хесијана. У ортонормираном покретном реперу имамо

$$\begin{aligned}\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= \sum_i \varepsilon_{E_i} E_i E_i f + \sum_{i,j} \varepsilon_{E_j} (E_j f) \Gamma^i_{ij} \\ = \operatorname{tr}_g(\nabla^2 f) &= \sum_i \varepsilon_{E_i} E_i E_i f - \sum_{i,j} \varepsilon_{E_i} (E_j f) \Gamma^j_{ii},\end{aligned}$$

одакле у природним координатама на $\mathbb{R}^n_\nu$ имамо $\Delta f = \sum_i \varepsilon_{E_i} \partial^2 f / \partial \pi_i^2$, што се редукује на уобичајену формулу за $\mathbb{R}^3$. △

У другом случају посматрамо симетрично коваријантно тензорско поље A реда 2, где дефинишемо

$$\operatorname{div} A = C((\nabla A)^\sharp) \in \mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M),$$

што у ортонормираном покретном реперу рачунамо са

$$(\operatorname{div} A)(X) = \sum_i ((\nabla A)^\sharp)(E_i^*, X, E_i) = \sum_{i,j} g^{ij} (\nabla A)(X, E_j, E_i) = \sum_i \varepsilon_{E_i} (\nabla_{E_i} A)(X, E_i).$$

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, $\operatorname{Sym} A = A \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$. Тада је у ортонормираном покретном реперу

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} fA)(X) &= \sum_i \varepsilon_{E_i} (\nabla_{E_i} fA)(X, E_i) = \sum_i \varepsilon_{E_i} \big((\nabla_{E_i} f) A(X, E_i) + f(\nabla_{E_i} A)(X, E_i)\big) \\ &= A\left(X, \sum_i \varepsilon_{E_i} (E_i f) E_i\right) + f \sum_i \varepsilon_{E_i} (\nabla_{E_i} A)(X, E_i) = A(\operatorname{grad} f, X) + f(\operatorname{div} A)(X).\end{aligned}$$

Посебно, у случају $A = g$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$ добијамо $(\operatorname{div}(fg))(X) = g(\operatorname{grad} f, X) = df(X)$, што даје корисну формулу

$$\operatorname{div}(fg) = df. \tag{6.30}$$

Како су коваријантни тензори вишег реда прилично компликовани, често је корисно конструисати једноставније тензоре који сажимају неке информације. Ако пођемо од коваријантних тензора, попут тензора кривине R, можемо посматрати траг, односно контракцију повисилице. Већ смо имали $R = \mathcal{R}^\flat$, те нам је потребно $\operatorname{tr}_g R = C(R^\sharp) = C\mathcal{R}$. Међутим, неопходно је нагласити који коваријантни индекс ћемо

[7] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), француски математичар, физичар и астроном

упарити са контраваријантним индексом. Ако покушамо са трећим коваријантним индексом имамо

$$\sum_k \mathcal{R}^k_{ijk} = \sum_k \sum_l g^{kl} R_{ijkl} = -\sum_l \sum_k g^{lk} R_{ijlk} = -\sum_l \mathcal{R}^l_{ijl},$$

што је могуће само ако је $\sum_k \mathcal{R}^k_{ijk} = 0$, те трећи индекс није погодан за контракцију. Преостаје избор између првог и другог индекса, али из симетрије $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ важи $\sum_i \mathcal{R}^i_{jik} = -\sum_i \mathcal{R}^i_{ijk}$, те се ове могућности ненула контракције разликују у знаку. Ако се определимо за први индекс, добијамо ***Ричијев тензор***[8], $\mathrm{Ric} = \mathrm{tr}_g R = C\mathcal{R} \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ за који важи

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}(Z \mapsto \mathcal{R}(Z,X)Y) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}(X,Y)).$$

Ричијев тензор је очигледно симетричан, $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$, а ако са

$$R_{ij} = \sum_l \mathcal{R}^l_{lij} = \sum_{l,k} g^{lk} R_{lijk},$$

обележимо његове компоненте, имамо $\mathrm{Ric} = \sum_{i,j} R_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$, што у ортонормираном покретном реперу даје

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_i \varepsilon_{E_i} g(\mathcal{R}(E_i,X)Y, E_i) = \sum_i \varepsilon_{E_i} R(E_i,X,Y,E_i). \tag{6.31}$$

Скаларна кривина је траг Ричијевог тензора, $\mathrm{Sc} = \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric} = C(\mathrm{Ric}^\sharp) \in \mathfrak{F}(M)$, те за њу важи $\mathrm{Sc} = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k,l} g^{ij} g^{lk} R_{lijk}$, што у ортонормираном покретном реперу гласи

$$\mathrm{Sc} = \sum_{i,j} \varepsilon_{E_i} \varepsilon_{E_j} R_{ijji}.$$

Ако посматрамо локални ортонормирани покретни репер у тачки $p \in M$, односно ортонормирану базу $(E_1, \ldots, E_n)$ у T_pM, можемо употребити секциону кривину да опишемо Ричијев тензор и скаларну кривину,

$$\varepsilon_{E_k} \mathrm{Ric}_p(E_k,E_k) = \varepsilon_{E_k} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{E_i} R_p(E_i,E_k,E_k,E_i) = \sum_i^{i\neq k} \kappa(E_i,E_k),$$

$$\mathrm{Sc}(p) = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{E_i} \varepsilon_{E_j} R_p(E_i,E_j,E_j,E_i) = \sum_{i,j}^{i\neq j} \kappa(E_i,E_j).$$

Пример 6.9. Ричијев тензор је одређен секционим кривинама, али у општем случају садржи мање информација. Међутим, у малим димензијама ($n = 2, 3$) Ричијев тензор у потпуности одређује тензор кривине. У димензији $n = 3$ за недегенерисану раван σ поставимо ортонормирану базу (E_1, E_2, E_3) такву да је $\sigma = \mathrm{Span}\{E_1, E_2\}$. Тада је $\varepsilon_k R_{kk} = \sum_{i\neq k} \kappa(E_k, E_i)$, одакле следи $\kappa(\sigma) = \kappa(E_1,E_2) = (\varepsilon_1 R_{11} + \varepsilon_2 R_{22} - \varepsilon_3 R_{33})/2$. △

Пођимо од другог Бјанкијевог идентитета који се може изразити кроз компоненте новог коваријантног тензора $T \in \mathfrak{T}^0_5(M)$ са

$$T_{ijklm} = \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0,$$

где је $\nabla_i R_{jklm} = (\nabla R)_{jklmi}$. Након двоструке контракције, користећи траг по индексима i и m и траг по индексима j и l, важи $\sum_{i,m} g^{im} \sum_{j,l} g^{jl} T_{ijklm} = 0$. Рачун у некој тачки $p \in M$

[8] Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), италијански математичар

изводимо преко нормалних координата центрираних у тој тачки. Како је $\nabla g = 0$, траг комутира са коваријантним изводом,

$$\sum_{i,m} g^{im} \nabla_{E_i} \sum_{j,l} g^{jl} R_{jklm} + \sum_{j,l} g^{jl} \nabla_{E_j} \sum_{i,m} g^{im} R_{kilm} + \nabla_{E_k} \sum_{i,m} g^{im} \sum_{j,l} g^{jl} R_{ijlm} = 0,$$

и зато

$$\nabla_{E_k} \operatorname{Sc} = 2 \sum_{i,m} g^{im} \nabla_{E_i} R_{km}.$$

Међутим, имамо

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric}(E_k) = \sum_{i,m} g^{im} (\nabla_{E_i} \operatorname{Ric})(E_k, E_m) = \sum_{i,m} g^{im} \nabla_{E_i} (\operatorname{Ric}(E_k, E_m)),$$

што нас доводи до једнакости $\nabla_{E_k} \operatorname{Sc} = 2 \operatorname{div} \operatorname{Ric}(E_k)$. Одавде идентитет $2 \operatorname{div} \operatorname{Ric} = \nabla \operatorname{Sc}$ важи у нормалним координатама, али како је у питању тензорска једнакост важиће у било којој бази. У питању је идентитет који лежи у основама опште теорије релативитета, а који зовемо ***контраковане Бјанкијев идентитет***.

Теорема 6.11. *За псеудо-Риманову многострукост важи* $2 \operatorname{div} \operatorname{Ric} = d \operatorname{Sc}$.

За псеудо-Риманову многострукост (M, g) кажемо да је ***Ајнштајнова***[9] уколико је њен Ричијев тензор пропорционалан метрици, односно уколико је $\operatorname{Ric} = \lambda g$ за неку константу $\lambda \in \mathbb{R}$. Уколико извучемо трагове, $\operatorname{Sc} = \operatorname{tr}_g \operatorname{Ric} = \operatorname{tr}_g(\lambda g) = \lambda \operatorname{tr}_g g = \lambda n$, видимо да Ајнштајнова многострукост има константну скаларну кривину.

Пример 6.10. Уколико је (M, g) простор константне секционе кривине κ, тада имамо

$$R_{ij} = \sum_{l,k} g^{lk} R_{lijk} = \sum_{l,k} \kappa g^{lk} (g_{lk} g_{ij} - g_{lj} g_{ik}) = (n-1) \kappa g_{ij},$$

односно $\operatorname{Ric} = (n-1)\kappa g$, те је (M, g) Ајнштајнова и важи $\operatorname{Sc} = n(n-1)\kappa$. △

Релаксираније, можемо рећи да је (M, g) Ајнштајнова у тачки $p \in M$ уколико је одговарајући алгебарски тензор кривине у тој тачки Ајнштајнов, односно уколико је Ричијев тензор скаларни умножак метрике у p. При овим дефиницијама имамо наредно добро познато тврђење за Ајнштајнове многострукости (видети Бесе[10] [19, Теорема 1.97]).

Теорема 6.12. *Ако је повезана псеудо-Риманова многострукост димензије $n \geqslant 3$ Ајнштајнова у свакој тачки онда је она Ајнштајнова.*

Доказ. Како је (M, g) Ајнштајнова у свакој тачки, то важи $\operatorname{Ric} = \lambda g$ за неку функцију $\lambda \in \mathfrak{F}(M)$, те узимајући трагове у односу на g имамо $\operatorname{Sc} = n\lambda$. Из Теореме 6.11 и формуле (6.30) добијамо

$$n \nabla \lambda = \nabla \operatorname{Sc} = 2 \operatorname{div} \operatorname{Ric} = 2 \operatorname{div}(\lambda g) = 2 \nabla \lambda.$$

Дакле, за $n \neq 2$ важи $\nabla \lambda = 0$, одакле је λ локална константа на повезаној многострукости, те је зато и глобална константа, што такође важи за Sc. □

[9] Albert Einstein (1879–1955), немачки теоријски физичар

[10] Arthur Besse, псеудоним групе француских геометричара коју је предводио Марсел Берже

Пример 6.11. У претходном доказу можемо избећи коришћење Теореме 6.11 и директно рачунати у ортонормираном покретном реперу ($g_{ij} = g^{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$),

$$\begin{aligned}\nabla_{E_k} \mathrm{Sc} &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \nabla_k R_{ijji} = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j (-\nabla_i R_{jkji} - \nabla_j R_{kiji}) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \nabla_i R_{jkij} + \sum_{j,i=1}^{n} \varepsilon_j \varepsilon_i \nabla_j R_{ikji} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \nabla_i R_{jkij} = 2 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \nabla_i R_{jkil} = 2 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \nabla_{E_i} R_{ki} = 2 \nabla_{E_k} \lambda,\end{aligned}$$

те је зато $n\nabla\lambda = \nabla \mathrm{Sc} = 2\nabla\lambda$. △

По Теореми 6.4 алгебарски тензор кривине у димензији $n = 3$ има свега шест независних компоненти, док за $n = 2$ постоји само једна. Због тога у малим димензијама можемо добити занимљиве резултате.

Пример 6.12. Сваки дводимензиони алгебарски тензор кривине је Ајнштајнов. Како је $n = 2$, све компоненте тензора кривине $R_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} R_{kijl}$ могу се изразити само преко R_{1221}. Имамо $R_{11} = g^{22} R_{1221}$, $R_{12} = -g^{12} R_{1221}$, $R_{22} = g^{11} R_{1221}$, што заправо даје $\mathrm{Ric} = (R_{1221}/\det g) g$. △

Пример 6.13. Из Примера 6.9, Ричијев тензор за $n = 3$ у потпуности одређује секциону кривину, а самим тим и тензор кривине. Посебно, ако је алгебарски тензор кривине Ајнштајнов, онда има константну секциону кривину. Ако је додатно многострукост повезана, онда имамо простор константне секционе кривине. △

6.6 Ричијеви идентитети

Нека је M псеудо-Риманова многострукост, а ∇ њена произвољна повезаност. Упоређивањем компоненти, за произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ и $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$(\nabla_X A)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \sum_k (\nabla A)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s k} X^k = (C^{r+1}_{s+1}(\nabla A \otimes X))^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

одакле добијамо

$$\nabla_X A = C^{r+1}_{s+1}(\nabla A \otimes X),$$

а сасвим слично имамо

$$(\nabla^2_{X,Y} A)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \sum_{k,l} (\nabla^2 A)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s kl} Y^k X^l = C^{r+1}_{s+1}(C^{r+1}_{s+2}(\nabla^2 A \otimes X) \otimes Y)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

што даје

$$\nabla^2_{X,Y} A = C^{r+1}_{s+1}(C^{r+1}_{s+2}(\nabla^2 A \otimes X) \otimes Y).$$

Како важи

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y A =& \nabla_X C^{r+1}_{s+1}(\nabla A \otimes Y) = C^{r+1}_{s+1} \nabla_X (\nabla A \otimes Y) = C^{r+1}_{s+1}(\nabla_X \nabla A \otimes Y + \nabla A \otimes \nabla_X Y) \\ =& C^{r+1}_{s+1}(C^{r+1}_{s+2}(\nabla^2 A \otimes X) \otimes Y) + C^{r+1}_{s+1}(\nabla A \otimes \nabla_X Y) = \nabla^2_{X,Y} A + \nabla_{\nabla_X Y} A,\end{aligned}$$

то добијамо

$$\nabla^2_{X,Y} A - \nabla^2_{Y,X} A = \nabla_X \nabla_Y A - \nabla_Y \nabla_X A - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} A,$$

или једноставније записано $\nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}$.

Најједноставнији случај тензорског поља $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ је глатка функција $f \in \mathfrak{F}(M)$, а тад изведена формула даје

$$\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) = \nabla^2_{Y,X} f - \nabla^2_{X,Y} f = (-[X, Y] + \nabla_X Y - \nabla_Y X) f = \tau(X, Y) f,$$

где је τ торзија, што смо већ видели у Примеру 5.5, везано за Хесијан функције f.

У контексту кривине, повезаност ∇ је увек Леви-Чивита. Тада симетричност од ∇ даје симетричност Хесијана, $\nabla^2_{X,Y}f = \nabla^2_{Y,X}f$, док у случају произвољног тензорског поља добијамо

$$\nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}. \tag{6.32}$$

Наредни по једноставности случај посматра тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ које је векторско поље $Z \in \mathfrak{X}(M)$, а тад формула (6.32), по дефиницији од $\mathcal{R}$, постаје

$$\nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z = \mathcal{R}(X,Y)Z. \tag{6.33}$$

У случају ковекторског поља $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ имамо

$$\begin{aligned}(\nabla_X\nabla_Y\omega)Z =& X((\nabla_Y\omega)Z) - (\nabla_Y\omega)(\nabla_X Z)\\ =& X(Y(\omega(Z)) - \omega(\nabla_Y Z)) - (Y(\omega(\nabla_X Z)) - \omega(\nabla_Y\nabla_X Z))\\ =& XY(\omega(Z)) - (\nabla_X\omega)(\nabla_Y Z) - \omega(\nabla_X\nabla_Y Z) - (\nabla_Y\omega)(\nabla_X Z),\end{aligned}$$

одакле из формуле (6.32) добијамо

$$\begin{aligned}(\nabla^2_{X,Y}\omega - \nabla^2_{Y,X}\omega)Z =& (\nabla_X\nabla_Y\omega)Z - (\nabla_Y\nabla_X\omega)Z - (\nabla_{[X,Y]}\omega)Z\\ =& (XY - YX)(\omega(Z)) - \omega(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z) - [X,Y](\omega(Z)) + \omega(\nabla_{[X,Y]}Z)\\ =& -\omega(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) = -\omega(\mathcal{R}(X,Y)Z).\end{aligned}$$

Ако је $\mathcal{R}^*(X,Y)\colon \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ пресликавање дефинисано са

$$(\mathcal{R}^*(X,Y)\omega)Z = \omega(\mathcal{R}(X,Y)Z),$$

онда изведена формула доноси

$$\nabla^2_{X,Y}\omega - \nabla^2_{Y,X}\omega = -\mathcal{R}^*(X,Y)\omega. \tag{6.34}$$

Размотримо сада општи случај. Најпре приметимо да за произвољна тензорска поља A и B важи $\nabla_X\nabla_Y(A\otimes B) = \nabla_X\nabla_Y A\otimes B + \nabla_Y A\otimes\nabla_X B + \nabla_X A\otimes\nabla_Y B + A\otimes\nabla_X\nabla_Y B$, одакле из формуле (6.32) добијамо

$$\begin{aligned}(\nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X})(A\otimes B) =& (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(A\otimes B)\\ =& (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})A\otimes B + A\otimes(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})B\\ =& (\nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X})A\otimes B + A\otimes(\nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X})B.\end{aligned}$$

Произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ можемо записати као суму тензорских производа састављених искључиво од векторских и ковекторских поља, те најпре за $V_1,\dots,V_r \in \mathfrak{X}(M)$ и $\lambda_1,\dots,\lambda_s \in \mathfrak{X}^*(M)$, користећи (6.33) и (6.34), рачунамо

$$\begin{aligned}&(\nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X})(V_1\otimes\cdots\otimes V_r\otimes\lambda_1\otimes\cdots\otimes\lambda_s)\\ &\quad=\mathcal{R}(X,Y)V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes\lambda_s + \cdots + V_1\otimes\cdots\otimes V_{r-1}\otimes\mathcal{R}(X,Y)V_r\otimes\lambda_1\otimes\cdots\otimes\lambda_s\\ &\qquad - V_1\otimes\cdots\otimes V_r\otimes\mathcal{R}^*(X,Y)\lambda_1\otimes\lambda_2\otimes\cdots\otimes\lambda_s - \cdots - V_1\otimes\cdots\otimes\lambda_{s-1}\otimes\mathcal{R}^*(X,Y)\lambda_s.\end{aligned}$$

Како је $(\mathcal{R}(X,Y)V_i)\omega_i = V_i(\mathcal{R}^*(X,Y)\omega_i)$ за $1 \leqslant i \leqslant r$, док је $(\mathcal{R}^*(X,Y)\lambda_j)Z_j = \lambda_j(\mathcal{R}(X,Y)Z_j)$ за $1 \leqslant j \leqslant s$, где су $\omega_i \in \mathfrak{X}^*(M)$ и $Z_j \in \mathfrak{X}(M)$, то добијамо

$$\begin{aligned}&((\nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X})(V_1\otimes\cdots\otimes V_r\otimes\lambda_1\otimes\cdots\otimes\lambda_s))(\omega_1,\dots,\omega_r,Z_1,\dots,Z_s)\\ =&V_1(\mathcal{R}^*(X,Y)\omega_1)V_2(\omega_2)\cdots\lambda_s(Z_s) + \cdots + V_1(\omega_1)\cdots V_{r-1}(\omega_{r-1})V_r(\mathcal{R}^*(X,Y)\omega_r)\lambda_1(Z_1)\cdots\lambda_s(Z_s)\\ &- V_1(\omega_1)\cdots V_r(\omega_r)\lambda_1(\mathcal{R}(X,Y)Z_1)\lambda_2(Z_2)\cdots\lambda_s(Z_s) - \cdots - V_1(\omega_1)\cdots\lambda_{s-1}(Z_{s-1})\lambda_s(\mathcal{R}(X,Y)Z_s).\end{aligned}$$

Одавде следи коначна формула за произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$,

$$\begin{aligned}(\nabla^2_{X,Y}A - \nabla^2_{Y,X}A)&(\omega_1, \dots, \omega_r, Z_1, \dots, Z_s)\\ =&A(\mathcal{R}^*(X,Y)\omega_1, \omega_2, \dots, Z_s) + \dots + A(\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \mathcal{R}^*(X,Y)\omega_r, Z_1, \dots, Z_s)\\ &- A(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathcal{R}(X,Y)Z_1, Z_2, \dots Z_s) - \dots - A(\omega_1, \dots, Z_{s-1}, \mathcal{R}(X,Y)Z_s),\end{aligned} \tag{6.35}$$

а зовемо је ***Ричијев идентитет***.

Уобичајено је да посматрамо специјалне случајеве Ричијевог идентитета за једноставнија тензорска поља $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. У једнакостима (6.33) и (6.34) имали смо случајеве кад је A векторско или ковекторско поље. За $J \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ формула (6.35) даје

$$(\nabla^2_{X,Y}J - \nabla^2_{Y,X}J)(\omega, Z) = J(\mathcal{R}^*(X,Y)\omega, Z) - J(\omega, \mathcal{R}(X,Y)Z),$$

те ако J схватимо као $\mathfrak{F}(M)$-линеарни оператор $J\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, добијамо формулу

$$(\nabla_X\nabla_Y J - \nabla_Y\nabla_X J - \nabla_{[X,Y]}J)Z = \mathcal{R}(X,Y)(JZ) - J(\mathcal{R}(X,Y)Z). \tag{6.36}$$

Глава 7

ЈОШ ПСЕУДО-РИМАНОВЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

7.1 Јакобијева поља

За произвољно векторско поље дуж двопараметарског пресликавања имамо наредну везу са кривином.

Лема 7.1. *Нека је (M,g) псеудо-Риманова многострукост, а $f\colon L\times I\to M$ двопараметарско пресликавање. Тада за свако $V\in\mathfrak{X}(f)$ важи*

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}V-\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}V=\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right)V. \tag{7.1}$$

Доказ. У питању је локални резултат, те за свако $(s,t)\in L\times I$ можемо искористити локалне координате $(x_1,\dots,x_n)$ дефинисане на некој околини тачке $f(s,t)$. Ако означимо $V_k(s,t)=(V(s,t))(x_k)$ и $f_k=x_k\circ f$ за $1\leqslant k\leqslant n$, можемо израчунати

$$\frac{\nabla}{dt}V=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}V_k\frac{\partial}{\partial x_k}+V_k\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\circ f,$$

одакле је

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}V=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}V_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial t}V_k\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial s}V_k\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k}+V_k\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\circ f,$$

што даје

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}V-\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}V=\sum_{k=1}^{n}V_k\left(\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k}-\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\circ f.$$

Са друге стране, имамо

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k}&=\frac{\nabla}{ds}\left(\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)=\frac{\nabla}{ds}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f_j}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial t}\frac{\nabla}{ds}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_j}{\partial s\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial t}\frac{\partial f_i}{\partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k},\end{aligned}$$

што повлачи

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k}-\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial}{\partial x_k}&=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial t}\frac{\partial f_i}{\partial s}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial t}\frac{\partial f_i}{\partial s}\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}=\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x_k},\end{aligned}$$

те коначно добијамо

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}V - \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}V = \sum_{k=1}^{n} V_k \left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \circ f = \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) V.$$

□

Посматрајмо двопараметарско пресликавање $f\colon L \times I \to M$ за псеудо-Риманову многострукост (M, g), где је $L = (-\epsilon, \epsilon)$ за неко $\epsilon > 0$, а $I \subseteq \mathbb{R}$ је интервал. Оно одређује уздужне криве $f_s\colon t \mapsto f(s,t)$, док глатка крива $\gamma = f_0$ има посебну важност као централна уздужна крива. ***Варијационо векторско поље*** дуж γ је $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ дато са

$$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t).$$

Ми смо заинтересовани за специјални случај кад су делимична пресликавања f_s геодезијске за свако $s \in L$ и кажемо да је f ***варијација кроз геодезијске*** од γ. У том случају, за варијационо векторско поље $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ користимо једнакост (5.23) и Лему 7.1 да израчунамо

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}V = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} - \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Зато, ако је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M, онда њено варијационо векторско поље $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ задовољава

$$J'' + \mathcal{R}\left(J, \gamma'\right)\gamma' = 0. \tag{7.2}$$

Једначина (7.2) се зове ***Јакобијева једначина***, док векторско поље $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ дуж геодезијске γ које је задовољава зовемо ***Јакобијево поље***.

Испоставља се да је Јакобијево поље J одређено својим почетним условима $J(a)$ и $J'(a)$ за неко $a \in I$. Изаберимо произвољан паралелни ортонормирани покретни репер $(E_1, \ldots, E_n)$ дуж γ. Произвољно $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ се може записати са $J(t) = \sum_i J_i(t)E_i(t)$ за $J_i \in \mathfrak{F}(I)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, те Јакобијеву једначину (7.2) можемо изразити са

$$\sum_{i=1}^{n} J_i''(t)E_i(t) + \sum_{i=1}^{n} g_{\gamma(t)}(\mathcal{R}(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t), E_i(t))E_i(t) = 0,$$

што даје

$$J_i'' + \sum_{j=1}^{n} J_j R(E_j, \gamma', \gamma', E_i) \circ \gamma = 0,$$

за све $1 \leqslant i \leqslant n$. У питању је систем n обичних диференцијалних једначина другог реда за n функција $J_i \in \mathfrak{F}(I)$. Увођењем уобичајених смена $V_i = J_i'$ претварамо га у еквивалентан линеарни систем првог реда за $2n$ непознатих функција,

$$J_i' = V_i, \quad V_i' = -\sum_{j=1}^{n} (R(E_j, \gamma', \gamma', E_i) \circ \gamma)J_j.$$

То гарантује егзистенцију и јединственост решења на читавом интервалу I са почетним условима $J_i(a) = (E_i(a))^*(J(a))$ и $V_i(a) = (E_i(a))^*(J'(a))$.

Теорема 7.2. *Нека је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M. За $a \in I$ и сваки пар вектора $X, Y \in T_{\gamma(a)}M$ постоји јединствено Јакобијево поље $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ које задовољава почетне услове $J(a) = X$ и $J'(a) = Y$.*

Теорема 7.2 је теорема о егзистенцији и јединствености Јакобијевих поља, те уводимо ознаку $J_X^Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ за Јакобијево поље такво да важи $J_X^Y(a) = X$ и $(J_X^Y)'(a) = Y$. Скуп свих Јакобијевих поља дуж геодезијске $\gamma\colon I \to M$,

$$\mathcal{J}(\gamma) = \{J_X^Y : X, Y \in T_{\gamma(a)}M\} \subseteq \mathfrak{X}(\gamma),$$

можемо идентификовати са $T_{\gamma(a)}M \times T_{\gamma(a)}M$. Штавише, за $X, Y, Z, V \in T_{\gamma(a)}M$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имамо

$$(\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V)'' = \alpha(J_X^Y)'' + \beta(J_Z^V)'' = -\alpha\mathcal{R}(J_X^Y, \gamma')\gamma' - \beta\mathcal{R}(J_Z^V, \gamma')\gamma' = -\mathcal{R}(\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V, \gamma')\gamma',$$

што доказује да је $\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V$ Јакобијево поље, док

$$(\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V)(a) = \alpha X + \beta Z = J_{\alpha X+\beta Z}^{\alpha Y+\beta V}(a), \quad (\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V)'(a) = \alpha Y + \beta V = (J_{\alpha X+\beta Z}^{\alpha Y+\beta V})'(a),$$

доноси

$$\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V = J_{\alpha X+\beta Z}^{\alpha Y+\beta V}.$$

Тако, $\mathcal{J}(\gamma)$ постаје векторски простор димензије $2n$ изоморфан са $T_{\gamma(a)}M \times T_{\gamma(a)}M$.

Напоменимо да претходна теорема ради за произвољно $a \in I$, али да бисмо избегли двосмисленост, осим ако није наглашено другачије, претпостављамо $a = 0 \in I$. Наравно, транслација $t \mapsto t - a$ не нарушава чињеницу да је γ геодезијска нити да је J Јакобијево поље.

Већ смо видели да варијационо векторско поље дуж γ јесте Јакобијево поље. Међутим важи и обрат, јер је свако Јакобијево поље дуж γ неко варијационо векторско поље дуж γ.

Теорема 7.3. *Нека је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M, где је I компактан интервал. Свако Јакобијево поље дуж γ јесте варијационо векторско поље неке варијације кроз геодезијске од γ.*

Доказ. Без умањења општости можемо претпоставити $0 \in I$. Нека је $J_X^Y \in \mathcal{J}(\gamma)$. Изаберимо глатку криву $\psi\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ тако да важи $\psi(0) = \gamma(0)$ и $\psi'(0) = X$. Изаберимо $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ тако да важи $V(0) = \gamma'(0)$ и $(\nabla V/ds)(0) = Y$. Дефинишимо варијацију од γ са $f(s,t) = \exp_{\psi(s)}(tV(s))$. Како је I компактно, домен од exp је отворен подскуп од TM који садржи компактан скуп $\{(\psi(0), t\gamma'(0)) : t \in I\}$, те постоји неко $0 < \delta \leqslant \epsilon$ такво да је f дефинисано за $(s,t) \in (-\delta, \delta) \times I$.

Како је $f(0,t) = \exp_{\psi(0)}(tV(0)) = \exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0)) = \gamma(t)$, видимо да је f варијација од γ, док је $f(s,0) = \exp_{\psi(s)}(0) = \psi(s)$. Нека је $W(t) = (\partial f/\partial s)(0,t)$ варијационо векторско поље. Тада је $W(0) = \psi'(0) = X$, а свака уздужна крива f_s је геодезијска са $(f_s)'(0) = V(s)$, док имамо

$$\frac{\nabla W}{dt}(0) = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{ds}(0,0) = \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{dt}(0,0) = \frac{\nabla V}{ds}(0) = Y,$$

што доказује $J_X^Y = W$. □

Најочигледнији пример Јакобијевог поља је $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$, јер задовољава (7.2) због $(\gamma')' = 0$ и $\mathcal{R}(\gamma', \gamma')\gamma' = 0$, што је варијационо поље од варијације $f(s,t) = \gamma(s+t)$. Још један једноставан пример је $J(t) = t\gamma'(t)$, што је варијационо поље од $f(s,t) = \gamma((1+s)t)$. Међутим, ови примери Јакобијевих поља су репараметризације од γ и не говоре нам ништа ново о понашању геодезијске γ.

Да бисмо искључили овакве неважне примере, кадгод $\gamma'(t)$ није изотропно можемо искористити растављање $T_{\gamma(t)}M = \operatorname{Span}\{\gamma'(t)\} \oplus \operatorname{Span}\{\gamma'(t)\}^\perp$. Ако γ' нигде није изотропно, свако $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ се раставља на ортогоналну суму $V^\top + V^\perp$, где је $V^\top$ умножак од γ', а $V^\perp$ нормално на γ'. Кажемо да је $V^\top$ ***тангентно векторско поље*** дуж

γ, док је $V^\perp$ ***нормално векторско поље*** дуж γ. Ако искористимо компатибилност са метриком,

$$0 = \frac{d}{dt} g(V^\perp, \gamma') = g((V^\perp)', \gamma') + g(V^\perp, (\gamma')') = g((V^\perp)', \gamma'),$$

видимо да је $(V^\perp)'$ такође нормално на γ', а слично је $(V^\top)'$ паралелно са γ'.

Јакобијево поље J које задовољава $J(t) \perp \gamma'(t)$ за свако $t \in I$ зове се ***нормално Јакобијево поље***, а на располагању имамо наредну теорему.

Теорема 7.4. *Нека је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M. Ако је $J \in \mathcal{J}(\gamma)$, тада је еквивалентно: J је нормално Јакобијево поље; J је ортогонално на γ' у две различите тачке; и J и J' су ортогонални на γ' у једној тачки; и J и J' су ортогонални на γ' свуда дуж γ.*

Доказ. Посматрајмо $f\colon I \to \mathbb{R}$ дато са $f(t) = g(J(t), \gamma'(t))$. Јакобијево поље је нормално ако и само ако је $f \equiv 0$. За $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ имамо $f' = (g(J', \gamma'))' = g(J'', \gamma') = -g(\mathcal{R}(J, \gamma')\gamma', \gamma') = 0$, што значи да је $f(t) = ct + d$ за неке $c, d \in \mathbb{R}$. Како је $g(J', \gamma') = c$, имамо $J' \perp \gamma'$ ако и само ако је $c = 0$, док $J \perp \gamma'$ у $t \in I$ важи ако и само ако је $ct + d = 0$, што је довољно да лако комплетира доказ. □

Заинтересовани смо за Јакобијева поља која ишчезавају у конкретној тачки. Нека је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M, где је I компактан интервал који садржи 0. На основу Теореме 7.2, произвољно Јакобијево поље $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ такво да је $J(0) = 0$ је $J = J_0^X$ за неко $X \in T_{\gamma(0)}M$. По Теореми 7.3, J је варијационо поље од варијације кроз геодезијске од γ, где у доказу подешавамо $\psi(s) = \gamma(0)$ и $V(s) = \gamma'(0) + sX$, да бисмо добили варијацију

$$f(s, t) = \exp_{\gamma(0)}(t(\gamma'(0) + sX)).$$

То нам омогућава да израчунамо

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = \left(T_{t(\gamma'(0)+sX)} \exp_{\gamma(0)}\right)(tX)_{t(\gamma'(0)+sX)}\Big|_{s=0} = \left(T_{t\gamma'(0)} \exp_{\gamma(0)}\right)(tX)_{t\gamma'(0)},$$

што даје експлицитну формулу

$$J_0^X(t) = \left(T_{t\gamma'(0)} \exp_{\gamma(0)}\right)(tX)_{t\gamma'(0)}, \tag{7.3}$$

где $(tX)_{t\gamma'(0)} \in T_{t\gamma'(0)}(T_{\gamma(0)}M)$ канонски одговара вектору $tX \in T_{\gamma(0)}M$.

У нормалним координатама, координатна репрезентација експоненцијалног пресликавања је идентичка, те у нормалној околини од $\gamma(0)$ која садржи слику од γ, f можемо експлицитно записати са $f(s, t) = (t(\gamma_1'(0) + sJ_1'(0)), \ldots, t(\gamma_n'(0) + sJ_n'(0)))$, те добијамо

$$J_0^X(t) = t \sum_{i=1}^n X_i(\partial_i)_{\gamma(t)},$$

где је $\sum_{i=1}^n X_i(\partial_i)_{\gamma(0)}$ координатна репрезентација од X.

Пример 7.1. Нека је (M, g) простор константне секционе кривине κ, одакле имамо $\mathcal{R} = \kappa\mathcal{R}^1$. У том случају Јакобијева једначина (7.2) постаје $J'' + \kappa(g(\gamma', \gamma')J - g(J, \gamma')\gamma') = 0$, те за геодезијску јединичне брзине γ у M, нормално Јакобијево поље J задовољава

$$J'' + \kappa J = 0.$$

Нека је E произвољно паралелно јединично нормално векторско поље дуж γ. Разумно је пробати $J(t) = \alpha(t)E(t)$ за неко $\alpha \in \mathfrak{F}(I)$. Након замене добијамо да је α решење

диференцијалне једначине $\alpha'' + \kappa\alpha = 0$. Претпоставимо $J(0) = 0$, што даје почетни услов $\alpha(0) = 0$, те су решења $\alpha(t) = c \cdot h_\kappa(t)$, где је

$$h_\kappa(t) = \begin{cases} t & \text{if } \kappa = 0, \\ \frac{\sin(t\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa}} & \text{if } \kappa > 0, \\ \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{-\kappa})}{\sqrt{-\kappa}} & \text{if } \kappa < 0, \end{cases}$$

а c произвољна константа. Тако смо добили $J = ch_\kappa E$. Једноставан рачун показује $J'(0) = ch'_\kappa(0)E(0) = cE(0)$, јер $h'_\kappa(0) = 1$ увек важи, док је $\|J'(0)\| = |\kappa|$, јер је E јединично векторско поље. △

Размотримо $J = J_0^X \in \mathcal{J}(\gamma)$, где имамо $J(0) = 0$ и $J'(0) = X$. Како је $J'' = -\mathcal{R}(J, \gamma')\gamma'$, такође имамо $J''(0) = 0$. Израчунајмо Тејлоров развој од $\|J(t)\|^2$ око $t = 0$. За почетне коефицијенте добијамо

$$\begin{aligned} g(J,J)(0) &= g(J(0),J(0)) = 0, \\ (g(J,J))'(0) &= (g(J',J) + g(J,J'))(0) = 2g(J',J)(0) = 0, \\ (g(J,J))''(0) &= 2g(J'',J)(0) + 2g(J',J')(0) = 2g(X,X) = 2, \\ (g(J,J))'''(0) &= 2g(J''',J)(0) + 6g(J'',J')(0) = 0. \end{aligned}$$

За произвољно $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ рачунамо

$$\begin{aligned} g(J''', Y)(0) &= (g(J'', Y))'(0) - g(J''(0), Y'(0)) = (g(-\mathcal{R}(J, \gamma')\gamma', Y))'(0) = -(g(\mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma', J))'(0) \\ &= -g((\mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma')'(0), J(0)) - g(\mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma', J')(0) = -g(\mathcal{R}(J', \gamma')\gamma', Y)(0), \end{aligned}$$

што повлачи $J'''(0) = -(\mathcal{R}(J', \gamma')\gamma')(0)$. Ово нам помаже да израчунамо наредни Тејлоров коефицијент.

$$\begin{aligned} (g(J,J))''''(0) &= 2g(J'''',J)(0) + 8g(J''',J')(0) + 6g(J'',J'')(0) = 8g(J''',J')(0) \\ &= -8g(\mathcal{R}(J', \gamma')\gamma', X)(0) = -8g_{\gamma(0)}(\mathcal{R}(X, \gamma'(0)), \gamma'(0), X) = -8\kappa(\gamma'(0), X), \end{aligned}$$

где је $\kappa(\gamma'(0), X)$ секциона кривина равни $\sigma = \operatorname{Span}\{\gamma'(0), J'(0)\} \leqslant T_{\gamma(0)}M$. Тејлоров развој даје

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}\kappa(\sigma)t^4 + \underset{t\to 0}{O}(t^5),$$

што повлачи

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}\kappa(\sigma)t^3 + \underset{t\to 0}{O}(t^4). \tag{7.4}$$

Сада смо у могућности да дамо везу између геодезијских и кривине. Јакобијево поље $J_0^X \in \mathcal{J}(\gamma)$ је варијационо поље од варијације $f(s,t) = \exp_{\gamma(0)}(t(\gamma'(0) + sX))$, и дато је формулом (7.3). Интуитивно, формула (7.4) показује колико брзо се шире геодезијске које почињу из $\gamma(0)$ и тангентне су на раван $\sigma = \operatorname{Span}\{\gamma'(0), X\}$. Локално, за $\kappa(\sigma) > 0$ радијалне геодезијске се шире спорије неголи полуправе у T_pM, док се за $\kappa(\sigma) < 0$ оне шире брже неголи полуправе у T_pM (видети детаље у До Кармо [31, Примедба 5.2.11]).

Лако је проверити да је простор $\mathcal{J}_a(\gamma)$ свих Јакобијевих поља $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ таквих да важи $J(a) = 0$, један n-димензиони потпростор од $\mathcal{J}(\gamma)$, што се базира на избору линеарно независних вектора $J'(a) \in T_{\gamma(a)}M$. Како је тангентно пресликавање експоненцијалног пресликавања линеарно лако је видети да су вектори $J'(a) \in T_{\gamma(a)}M$ линеарно независни ако и само ако су Јакобијева поља $J \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ линеарно независна.

Лема 7.5. *Нека је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M и $a \in I$. Ако $J_i \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ за $1 \leqslant i \leqslant k \in \mathbb{N}$, онда су $J_1'(a), \ldots, J_k'(a) \in T_{\gamma(a)}M$ линеарно независни ако и само ако су $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ линеарно независни.*

Доказ. Претпоставимо да су J_i линеарно независни и да важи $\sum_i \alpha_i J_i'(a) = 0$ за неке $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Конструишемо $J = \sum_i \alpha_i J_i \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ које задовољава $J'(a) = 0$, те Теорема 7.2 повлачи $J = 0$, одакле $0 = J(a) = \sum_i \alpha_i J_i(a)$ даје $\alpha_i = 0$. Обратно, претпоставимо да су $J_i'(a)$ линеарно независни и да важи $\sum_i \alpha_i J_i = 0$ за неке $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Диференцирањем добијамо $\sum_i \alpha_i J_i' = 0$, што повлачи $\sum_i \alpha_i J_i'(a) = 0$, те добијамо $\alpha_i = 0$. □

Примена Јакобијевих поља може нам омогућити да испитамо кад је експоненцијално пресликавање локални дифеоморфизам, односно да нађемо везе између сингуларитета експоненцијалног пресликавања и Јакобијевих поља.

Нека је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M димензије n. Кажемо да су две различите вредности параметра $a, b \in I$ ***конјуговани параметри*** дуж γ ако постоји Јакобијево поље $0 \not\equiv J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ такво да је $J(a) = 0 = J(b)$. ***Вишеструкост*** конјугације је максималан број таквих линеарно независних Јакобијевих поља, што је заправо димензија потпростора $\mathcal{J}_{ab}(\gamma) = \mathcal{J}_a(\gamma) \cap \mathcal{J}_b(\gamma)$.

Често се каже да су тачке $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ ***конјуговане*** дуж γ ако су a и b конјуговани параметри дуж γ. Међутим, ако γ има самопресеке, ова дефиниција постаје двосмислена јер не знамо који простор $J_a(\gamma)$ треба узети за тачку $\gamma(a)$ у случају да важи $\gamma^{-1}(\gamma(a)) \neq \{a\}$.

Пример 7.2. Посматрајмо псеудо-еуклидски простор $\mathbb{R}^n_\nu$, где $\mathcal{R} = 0$ доноси Јакобијеву једначину $J'' = 0$. Случај $J(a) = 0 = J(b)$ повлачи $J \equiv 0$, те конјуговане тачке не постоје. △

Размотримо тангентно Јакобијево поље J дато са $J(t) = (t - a)\gamma'(t)$. Како је γ' свуда ненула, важи $J \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ и $J \notin \mathcal{J}_b(\gamma)$ за $b \neq a$. Одавде је $\dim \mathcal{J}_{ab}(\gamma) < \dim \mathcal{J}_a(\gamma) = n$, што повлачи да вишеструкост конјугације не прелази $n - 1$. Горња граница се може достићи, што видимо у наредном примеру.

Пример 7.3. Размотримо јединичну сферу $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, што је простор константне секционе кривине 1. На основу Примера 7.1 знамо да $J(t) = (\sin t)E(t)$ задовољава $J \in \mathcal{J}_0(\gamma)$ за произвољно паралелно јединично нормално векторско поље $E \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Штавише, такво J задовољава $J(\pi) = 0$, те је зато $J \in \mathcal{J}_{0\pi}(\gamma)$, што значи да су $\gamma(0)$ и њена антиподална тачка $\gamma(\pi)$ конјуговане дуж γ са вишеструкошћу $n - 1$. △

Теорема 7.6. *Нека је $\gamma\colon [0,1] \to M$ геодезијски сегмент у псеудо-Римановој многострукости M тако да је $p = \gamma(0)$ и $V = \gamma'(0) \in \mathcal{E}_p \subseteq T_pM$. Тачка $\gamma(1)$ је конјугована са p дуж γ ако и само ако је V критична тачка од $\exp_p$. Штавише, вишеструкост конјугације једнака је $\dim \operatorname{Ker}(T_V \exp_p)$.*

Доказ. Размотримо произвољно $J \in \mathcal{J}_{01}(\gamma)$. Како је $\mathcal{J}_{01}(\gamma) \subseteq \mathcal{J}_0(\gamma)$ имамо $J = J_0^X$ за неко $X = J'(0) \in T_pM$, где једначина (7.3) повлачи $(T_V \exp_p)(X_V) = J(1) = 0$. Зато је $J_0^X \in \mathcal{J}_{01}(\gamma)$ ако и само ако је $X_V \in \operatorname{Ker}(T_V \exp_p)$, те Лема 7.5 комплетира доказ. □

Напоменимо да репараметризацијом $\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1)$ из Леме 5.12 имамо да су $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$ конјуговане дуж γ ако и само ако је $t\gamma'(0)$ критична тачка од $\exp_p$.

На основу Теореме 7.2, јединствено Јакобијево поље је природно одређено својом почетном вредношћу и почетним изводом. Међутим, ако тачке $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ нису конјуговане, онда можемо одредити јединствено Јакобијево поље тако што задамо $J(a)$ и $J(b)$.

Теорема 7.7. *Нека је $\gamma\colon I \to M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M. Ако $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ за различите $a, b \in I$ нису конјуговане дуж γ, онда за свако $X \in T_{\gamma(a)}M$ и $Y \in T_{\gamma(b)}M$ постоји јединствено $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ такво да важи $J(a) = X$ и $J(b) = Y$.*

Доказ. Дефинишимо линеарно пресликавање $f\colon \mathcal{J}_a(\gamma) \to T_{\gamma(b)}$ са $f(J) = J(b)$. Како a и b нису конјуговани параметри, $J(b) = 0$ повлачи $J \equiv 0$, што значи да је f инјективно. Како су и домен и кодомен од f исте димензије n, то је f изоморфизам. Зато постоји $J_1 \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ такво да је $J_1(b) = Y$. Сасвим слично, постоји $J_2 \in \mathcal{J}_b(\gamma)$ такво да је $J_2(a) = X$, те $J = J_1 + J_2 \in \mathcal{J}(\gamma)$ задовољава $J(a) = X$ и $J(b) = Y$, као што је тражено. Ако је $K \in \mathcal{J}(\gamma)$ друго такво Јакобијево поље, онда $J - K \in \mathcal{J}(\gamma)$ ишчезава и у a и у b, те добијемо $J \equiv K$, што доказује јединственост. □

7.2 Псеудо-Риманове подмногострукости

Нека је $(\overline{M}, \overline{g})$ псеудо-Риманова многострукост, а (M, g) њена псеудо-Риманова подмногострукост. Ако је $\imath\colon M \hookrightarrow \overline{M}$ одговарајућа инклузија, онда је она псеудо-Риманова имерзија и M је опремљена индукованом метриком $g = \imath^*\overline{g}$. Желимо да истражимо релације између псеудо-Риманове геометрије од подмногострукости и оне од амбијентне многострукости.

За свако $p \in M$, тангентни простор T_pM је недегенерисани потпростор квадратног векторског простора $(T_p\overline{M}, \overline{g}_p)$, као што је то и његов ортогонал $N_pM = (T_pM)^\perp$ који зовемо ***нормални простор*** у p. Зато се амбијентни тангентни простор раставља као ортогонална директна сума

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus N_pM$$

са одговарајућим пројекцијама $\pi^\top\colon T_p\overline{M} \to T_pM$ и $\pi^\perp\colon T_p\overline{M} \to N_pM$, те свако $X \in T_p\overline{M}$ има јединствено изражавање $X = X^\top + X^\perp$, где су $X^\top = \pi^\top X \in T_pM$, $X^\perp = \pi^\perp X \in N_pM$.

Размотримо ***амбијентно тангентно раслојење***

$$T\overline{M}\restriction_M = \bigsqcup_{p\in M} T_p\overline{M},$$

што је векторско раслојење као рестрикција од $T\overline{M}$ (Пример 3.3). За дату тачку $p \in M$, постоји околина U од p у M која је смештена у $\overline{M}$, те можемо искористити кришка координате из Теореме 2.13 да направимо ортонормирани покретни репер $(\sigma_1, \dots, \sigma_{\dim \overline{M}})$ који је прилагођен U у смислу да рестрикције од σ_i на U за $1 \leqslant i \leqslant \dim M$ формирају локални ортонормирани покретни репер за M. Рестрикција последњих $\dim \overline{M} - \dim M$ векторских поља σ_i на M за $\dim M < i \leqslant \dim \overline{M}$ формира локални покретни репер за $NM = \bigsqcup_{p\in M} N_p\overline{M}$, што по Теореми 3.2 постаје подраслојење које зовемо ***нормално раслојење*** од M.

Применом $\pi^\top$ и $\pi^\perp$ у свакој тачки од M, добијамо два хомоморфизма раслојења, ***тангентну пројекцију*** $\pi^\top\colon T\overline{M}\restriction_M \to TM$ и ***нормалну пројекцију*** $\pi^\perp\colon T\overline{M}\restriction_M \to NM$. Са друге стране, глатка сечења $\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(\overline{M})\restriction_M = \Gamma(T\overline{M}\restriction_M)$ амбијентног тангентног раслојења могу се раставити са

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^\perp, \tag{7.5}$$

где је $\mathfrak{X}(M)^\perp = \Gamma(NM)$ скуп глатких сечења нормалног раслојења. Одавде, $\mathfrak{X}(M)$ и $\mathfrak{X}(M)^\perp$ можемо видети као подмодуле од $\overline{\mathfrak{X}}(M)$, док тангентне и нормалне пројекције доносе одговарајуће пројекције модула које растављају $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ као $X = X^\top + X^\perp$ са $X^\top \in \mathfrak{X}(M)$ и $X^\perp \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Нека је $\overline{\nabla}$ Леви-Чивита повезаност на $(\overline{M}, g)$, а ∇ Леви-Чивита повезаност на (M, g). За свако $p \in M$ и $X \in \mathfrak{X}(M)$ постоји околина $p \in U \subseteq M$ и продужење $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ од $X\restriction_U$. Због локалних особина повезаности (Теорема 5.1), одговарајућа рестрикција дуж M од $\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})\restriction_M \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ не зависи од продужења $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Природно се поставља питање како се $\overline{\nabla}_X Y$ раставља са (7.5) на тангентну и нормалну компоненту.

Пођимо од $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ и њихових продужења $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Применом Косилове формуле (5.10) за $\overline{\nabla}$, дуж M за свако $Z \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$2g((\overline{\nabla}_X Y)^\top, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]).$$

Дакле, тангентни део је Леви-Чивита повезаност, те како је она јединствена добијамо

$$(\overline{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y.$$

Са друге стране, симетричност повезаности $\overline{\nabla}$ повлачи да је $(\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ симетрично јер важи $(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X)^\perp = [X,Y]^\perp = 0$. Како је $(\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ $\mathfrak{F}(M)$-линеарно по X, оно мора бити $\mathfrak{F}(M)$-линеарно по Y. ***Друга основна форма*** (или ***тензор облика***) је пресликавање $\mathrm{II}\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ које дефинишемо са $\mathrm{II}(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$. У питању је симетрично $\mathfrak{F}(M)$-билинеарно пресликавање, такво да за свако $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имамо растављање

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X,Y), \tag{7.6}$$

које зовемо ***Гаусова формула***.

За свако $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, другу основну форму II чије су вредности вектори можемо заменити једноставнијом формом $h_N \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ која је дата са

$$h_N(X,Y) = g(\mathrm{II}(X,Y), N),$$

и зовемо је ***скаларна друга основна форма*** од M у односу на N.

Дизањем индекса добијамо тензорско поље $A_N = (h_N)^\sharp \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ које се може посматрати као $\mathfrak{F}(M)$-линеарно пресликавање $A_N\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ задато формулом $A_N(X)f = (h_N)^\sharp(df, X)$, што значи да природно важи $(h_N)^\sharp(\omega, X) = \omega(s(X))$. Пресликавање A_N зовемо ***оператор облика*** у односу на $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, а како је

$$h_N(X,Y) = (h_N)^\sharp(X^\flat, Y) = \sum_i X_i (h_N)^\sharp(dx_i, Y) = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_j(X)\, dx_i(A_N Y) = g(X, A_N Y),$$

то за све $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ важи

$$g(X, A_N Y) = h_N(X,Y) = g(\mathrm{II}(X,Y), N).$$

Како је h_N симетричан, A_N је самоадјунгован, те је зато $g(A_N X, Y) = g(X, A_N Y)$.

У општијем случају посматрамо повезаност $\overline{\nabla}$ коју рестрикујемо на M као пресликавање $\overline{\nabla}\restriction_M\colon \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$. За $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, дуж M имамо $\overline{g}(Y,N) = 0$, те је

$$0 = X\overline{g}(Y,N) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, N) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X N) = \overline{g}(\mathrm{II}(X,Y), N) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X N, Y),$$

одакле следи једнакост

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_X N, Y) = -\overline{g}(\mathrm{II}(X,Y), N) = -h_N(X,Y) = -g(A_N X, Y). \tag{7.7}$$

која је позната под именом ***Вајнгартенова формула***[1]. Зато је тангентна компонента од $\overline{\nabla}_X N$ једнака $-A_N X$. Са друге стране, нормална компонента $\nabla^\perp_X N = (\overline{\nabla}_X N)^\perp$ дефинише компатибилну повезаност на нормалном раслојењу NM, коју зовемо ***нормална повезаност***. Одавде се Вајнгартенова формула може записати са

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^\perp_X N. \tag{7.8}$$

[1]Julius Weingarten (1836–1910), немачки математичар

Занимљиво је посматрати везу између одговарајућих оператора кривине $\overline{\mathcal{R}}$ и $\mathcal{R}$, или између тензора кривине $\overline{R}$ и R. Користимо Гаусову формулу (7.6) и Вајнгартенову формулу (7.8) да запишемо

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \operatorname{II}(Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z + \operatorname{II}(X,\nabla_Y Z) + \nabla^\perp_X \operatorname{II}(Y,Z) - A_{\operatorname{II}(Y,Z)}X$$

за све $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, те одатле имамо

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z =& \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z\\ =& \nabla_X\nabla_Y Z + \operatorname{II}(X,\nabla_Y Z) + \nabla^\perp_X(\operatorname{II}(Y,Z)) - A_{\operatorname{II}(Y,Z)}X\\ &- \nabla_Y\nabla_X Z - \operatorname{II}(Y,\nabla_X Z) - \nabla^\perp_Y(\operatorname{II}(X,Z)) + A_{\operatorname{II}(X,Z)}Y\\ &- \nabla_{[X,Y]}Z - \operatorname{II}(\nabla_X Y,Z) - \operatorname{II}(\nabla_Y X,Z)\\ =& \mathcal{R}(X,Y)Z + A_{\operatorname{II}(X,Z)}Y - A_{\operatorname{II}(Y,Z)}X + (\nabla^\perp_X \operatorname{II})(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y)\operatorname{II}(X,Z),\end{aligned}$$

где је

$$(\nabla^\perp_X \operatorname{II})(Y,Z) = \nabla^\perp_X(\operatorname{II}(Y,Z)) - \operatorname{II}(\nabla_X Y,Z) - \operatorname{II}(Y,\nabla_X Z).$$

Тангентна компонента је

$$(\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z)^\top = \mathcal{R}(X,Y)Z + A_{\operatorname{II}(X,Z)}Y - A_{\operatorname{II}(Y,Z)}X,$$

што након узимања скаларног производа са $W \in \mathfrak{X}(M)$ доноси ***Гаусову једначину***,

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + \overline{g}(\operatorname{II}(X,Z),\operatorname{II}(Y,W)) - \overline{g}(\operatorname{II}(X,W),\operatorname{II}(Y,Z)). \tag{7.9}$$

Нормална компонента је ***Кодацијева једначина***[2] (или ***Кодаци–Мајнардијева једначина***[3]),

$$(\overline{\mathcal{R}}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X \operatorname{II})(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y \operatorname{II})(X,Z).$$

Са друге стране, за $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ имамо

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y N = \overline{\nabla}_X\nabla^\perp_Y N - \overline{\nabla}_X A_N Y = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y N - A_{\nabla^\perp_Y N}X - \nabla_X A_N Y - \operatorname{II}(X,A_N Y),$$

одакле је

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}(X,Y)N =& \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y N - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X N - \overline{\nabla}_{[X,Y]}N\\ =& \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y N - A_{\nabla^\perp_Y N}X - \nabla_X A_N Y - \operatorname{II}(X,A_N Y)\\ &- \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X N + A_{\nabla^\perp_X N}Y + \nabla_Y A_N X + \operatorname{II}(Y,A_N X)\\ &- \nabla^\perp_{[X,Y]}N + A_N\nabla_X Y - A_N\nabla_Y X\\ =& \mathcal{R}^\perp(X,Y)N + \operatorname{II}(Y,A_N X) - \operatorname{II}(X,A_N Y) + (\nabla_Y A)(X,N) - (\nabla_X A)(Y,N),\end{aligned}$$

где је

$$(\nabla_Y A)(X,N) = \nabla_Y A_N X - A_N\nabla_Y X - A_{\nabla^\perp_Y N}X.$$

Тангентна компонента доноси

$$(\overline{\mathcal{R}}(X,Y)N)^\top = (\nabla_Y A)(X,N) - (\nabla_X A)(Y,N),$$

што је еквивалентно Кодацијевој једначини. Нормална компонента се зове ***Ричијева једначина***,

$$(\overline{\mathcal{R}}(X,Y)N)^\perp = \mathcal{R}^\perp(X,Y)N - \operatorname{II}(X,A_N Y) + \operatorname{II}(Y,A_N X).$$

[2] Delfino Codazzi (1824–1873), италијански математичар
[3] Gaspare Mainardi (1800–1879), италијански математичар

Узимајући скаларни производ са $P \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, имамо

$$\overline{R}(X,Y,N,P) = R^{\perp}(X,Y,N,P) - g([A_N, A_P]X, Y), \tag{7.10}$$

што је такође Ричијева једначина.

Гаусова једначина је тензорска једначина, тако да остаје валидна кад заменимо векторска поља индивидуалним тангентним векторима. Употреба Гаусове једначине у дефиницији секционе кривине даје наредне везе између секционих кривина $\overline{\kappa}$ од $\overline{M}$ и κ од M, што такође зовемо ***Гаусова једначина***,

$$\kappa(X,Y) = \overline{\kappa}(X,Y) + \frac{\overline{g}(\mathrm{II}(X,X), \mathrm{II}(Y,Y)) - \overline{g}(\mathrm{II}(X,Y), \mathrm{II}(X,Y))}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)g(X,Y)}. \tag{7.11}$$

Пример 7.4. Позиционо векторско поље $N = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i$ на сфери $\mathbf{S}_r^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ је нормално у свакој тачки $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{S}_r^{n-1}$ као последица Леме 2.16. Са друге стране, за Леви-Чивита повезаност $\overline{\nabla}$ у $\mathbb{R}^n$, за свако $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}_r^{n-1})$ имамо $\overline{\nabla}_X N = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\partial_i = X$. Формула (7.7) повлачи $g(\mathrm{II}(X,Y), N) = -g(\overline{\nabla}_X N, Y) = -g(X,Y)$, те због $\varepsilon_N = r^2$ добијамо да важи $\mathrm{II}(X,Y) = -g(X,Y)N/r^2$. Коначно, једначина (7.11) за $\overline{\kappa} = 0$, доноси $\kappa = 1/r^2$. $\triangle$

Гаусова формула (7.6), може се прилагодити да би се упоредили унутрашњи и спољашњи коваријантни изводи дуж криве. За криву $\gamma \colon I \to M$ и $Y \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$\overline{\nabla}_{\gamma'(t)} Y = \nabla_{\gamma'(t)} Y + \mathrm{II}(\gamma'(t), Y \circ \gamma(t)),$$

одакле следи

$$\frac{\overline{\nabla} Y_\gamma}{dt}(t) = \frac{\nabla Y_\gamma}{dt}(t) + \mathrm{II}(\gamma'(t), Y_\gamma(t)).$$

У специјалном случају $Y_\gamma = \gamma'$, добијамо формулу за убрзање од γ,

$$\frac{\overline{\nabla}\gamma'}{dt} = \frac{\nabla \gamma'}{dt} + \mathrm{II}(\gamma', \gamma'). \tag{7.12}$$

Као последица претходне једначине, крива γ у $M \subset \overline{M}$ је геодезијска од M ако и само ако је њено убрзање у $\overline{M}$ свуда нормално на M.

Пример 7.5. ***Велики круг*** на сфери $\mathbf{S}_r^n$ је круг $\Pi \cap \mathbf{S}_r^n$ који се добија у пресеку са дводимензионом равни Π која пролази кроз координатни почетак у $\mathbb{R}^{n+1}$. Ако је γ параметризација константне брзине од $\Pi \cap \mathbf{S}_r^n$, тада су γ' и γ'' међусобно ортогонални и тангентни на Π. Међутим, позиционо векторско поље је такође тангентно на Π и ортогонално на $\gamma' \neq 0$, те су позиционо векторско поље и γ'' колинеарни у свакој тачки криве, односно γ'' је нормално на $\mathbf{S}_r^n$ и самим тим γ је геодезијска на сфери. Обратно, свака неконстантна геодезијска γ се може добити на овакав начин. Ако је Π раван кроз координатни почетак и $\gamma(0)$ на коју је $\gamma'(0)$ тангентно, онда постоји одговарајућа параметризација константне брзине од $\Pi \cap \mathbf{S}_r^n$ и остатак следи из јединствености геодезијске. $\triangle$

За псеудо-Риманову подмногострукост M псеудо-Риманове многострукости $(\overline{M}, \overline{g})$ кажемо да је ***потпуно геодезијска*** ако је свака геодезијска у M такође геодезијска у $\overline{M}$. Из формуле (7.12) закључујемо да је M потпуно геодезијска ако и само ако се друга основна форма II анулира.

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост. Посматрајмо скуп свих фиксних тачака $\Phi = \{p \in M : f(p) = p\}$ при изометрији $f \in \mathcal{I}(M)$. Како је Φ инверзна слика дијагонале у $M \times M$ глатког пресликавања $p \mapsto (p, f(p))$, то је $\Phi \subseteq M$ затворен. Ако $p \in \Phi$ није изолована, то постоји нормална околина $U = \exp_p(\mathcal{U})$ од p која садржи неко $p \neq q \in \Phi$. Ако је γ_V јединствена радијална геодезијска из p у q, онда је то и

$\gamma_{T_pf(V)} = f \circ \gamma_V$ из (6.11), одакле следи $\gamma_{T_pf(V)} = \gamma_V$. Зато је $\Psi = \{V \in T_pM : T_pf(V) = V\}$ затворен нетривијалан потпростор од T_pM.

За $q \in \Phi \cap \mathcal{U}$, радијална геодезијска из p у q је γ_V где је $V = \exp_p^{-1} q$ и зато $V \in \Psi$. Обратно, за $V \in \Psi \cap U$ имамо $f \circ \gamma_V = \gamma_{T_pf(V)} = \gamma_V$ одакле је $f \circ \gamma_V(1) = \gamma_V(1) = \exp_p(V) \in \Phi$. То доказује $\exp_p(\Psi \cap \mathcal{U}) = \Phi \cap U$, што значи да је Φ подмногострукост од M, а како свака радијална геодезијска γ кроз $p \in \Phi$ задовољава $f \circ \gamma = \gamma$, то је Φ потпуно геодезијска.

Теорема 7.8. *Свака повезана компонента скупа фиксних тачака при изометрији псеудо-Риманове многострукости M је потпуно геодезијска подмногострукост од M.*

Псеудо-Риманова хиперповрш је псеудо-Риманова подмногострукост кодимензије један. Нека је (M, g) псеудо-Риманова хиперповрш у $(\overline{M}, \overline{g})$. По дефиницији, сваки тангентни простор T_pM је недегенерисан потпростор од $T_p\overline{M}$ који има константан индекс, те је његов комплементаран простор N_pM такође недегенерисан, и за његов константни индекс $\operatorname{Ind} N_pM$ кажемо да је ***коиндекс*** од M. Коиндекс псеудо-Риманове хиперповрши је или 0 или 1 и он одређује ***знак*** од M, што је знак сваког ненула нормалног вектора. Због тога коиндекс 0 ($\operatorname{Ind} M = \operatorname{Ind} \overline{M}$) даје $\operatorname{sgn} M = 1$, док коиндекс 1 ($\operatorname{Ind} M = \operatorname{Ind} \overline{M} - 1$) даје $\operatorname{sgn} M = -1$. Наравно, свака хиперповрш у Римановој многострукости је Риманова са знаком 1.

Пример 7.6. Посматрајмо случај $\emptyset \neq M = f^{-1}(c)$ за неко $f \in \mathfrak{F}(\overline{M})$ и $c \in \mathbb{R}$ тако да је $\operatorname{grad} f$ свуда ненула на M. Како $\operatorname{grad} f \neq 0$ на M повлачи $df \neq 0$ на M, видимо да је M регуларни скуп нивоа и по Теореми 2.15, M је хиперповрш од $\overline{M}$. Како је $g(\operatorname{grad} f, X) = df(X) = Xf$, а $f = c$ на M, то је $\operatorname{grad} f$ нормалан на M. Зато је M псеудо-Риманова хиперповрш од $\overline{M}$ ако и само ако $g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$ има константан знак на M. У том случају знак од M је константни знак од $g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$ а $\operatorname{grad} f / \|\operatorname{grad} f\|$ је јединично нормално векторско поље на M. △

Пример 7.7. Основни примери псеудо-Риманових хиперповрши у $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ су псеудосфере и псеудо-хиперболички простори из Секције 4.6 који су за неко $c \neq 0$ задати са $M = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu : g(X, X) = c\} = f^{-1}(\{c\})$, где је $f(X) = g(X, X)$. Од раније знамо $df_X = 2X^\flat$ што даје $\operatorname{grad} f = 2P$, где је $P = \sum_i x_i \partial_i$ позиционо векторско поље. Последично, $g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = 4g(P, P) = 4f$, што даје $g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = 4c$ на M, те је M псеудо-Риманова хиперповрш. △

За хиперповрш $M \subset \overline{M}$, користимо јединично нормално векторско поље $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, што је локално јединствено до на знак. Кад њега фиксирамо, користимо нотацију $A = A_N$ за оператор облика у односу на N. Имамо $\mathrm{II}(X, Y) = \varepsilon_N h_N(X, Y) N$, док Гаусова формула (7.6) постаје

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)N.$$

Са друге стране, како је $2g(\overline{\nabla}_X N, N) = \overline{\nabla}_X g(N, N) = 0$, следи да је $\overline{\nabla}_X N$ тангентно на M, те се Вајнгартенова формула (7.7) редукује на

$$\overline{\nabla}_X N = -AX.$$

Нека је M хиперповрш еуклидског простора. У свакој тачки $p \in M$, оператор облика s је самоадјунгован ендоморфизам тангентног простора T_pM. Такав оператор (важна је дефинитност метрике) има реалне сопствене вредности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и постоји ортонормирана база $(E_1, \ldots E_n)$ за T_pM која се састоји од сопствених вектора за s, односно $sE_i = \lambda_i E_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. У овој бази су и h и s дијагонални и имамо $h(X, Y) = \sum_i \lambda_i X^i Y^i$.

Сопствене вредности од s зовемо ***главне кривине*** од M у p, док су одговарајући сопствени потпростори ***главни правци***. Они су независни од избора базе, али главне кривине мењају знак уколико окренемо нормалан вектор. Главне кривине дају опис локалног облика смештене површи.

На располагању имамо две комбинације главних кривина које имају важну улогу за еуклидске хиперповрши. Гаусова кривина је дефинисана са $K = \det s$, док је средња кривина $H = \operatorname{tr} s/n = \operatorname{tr}_g h/n$. Детерминанта и траг су инваријанте, те у терминима главних кривина имамо $K = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ и $H = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)/n$.

7.3 Симетрични простори

Главна одлика најлепших и најважнијих псеудо-Риманових многострукости је висока симетричност (имају велику групу изометрија). Повезана псеудо-Риманова многострукост (M, g) је ***локално симетричан простор*** ако је свако $p \in M$ изолована фиксна тачка неке инволутивне локалне изометрије од M. У питању је (глобално) ***симетричан простор*** ако је свако $p \in M$ изолована фиксна тачка инволутивне изометрије од M.

Претпоставимо да постоји инволутивна изометрија $s \in \mathcal{I}_p(U)$ са $p \in U \subseteq M$ којој је p изолована фиксна тачка. Тада из $s^2 = \mathbb{1}_U$ следи $(T_p s)^2 = \mathbb{1}_{T_pM}$, што након одузимања $\lambda^2\,\mathbb{1}$ постаје

$$(T_p s - \lambda\,\mathbb{1})(T_p s + \lambda\,\mathbb{1}) = (1 - \lambda^2)\,\mathbb{1},$$

те узимањем детерминанте видимо да карактеристични полином од $T_p s$ по λ дели полином $(1-\lambda)^n(1+\lambda)^n$. Међутим, случај $\det(T_p s - \mathbb{1}) = 0$ није могућ јер тада постоји ненула $V \in T_pM$ такво да је $T_p s(V) = V$, одакле (6.12) повлачи да је $\gamma_V(t) = \exp_p tV$ фиксна тачка од s за свако довољно мало t, што је у супротности са тим да је p изолована фиксна тачка. Због тога је -1 једина сопствена вредност од $T_p s$, односно $\det(T_p s - \lambda\,\mathbb{1}) = (1+\lambda)^n$, што даје $(T_p s + \mathbb{1})^n = 0$. Штавише,

$$0 = (T_p s + \mathbb{1})^n = (T_p s + \mathbb{1})^{n-2}((T_p s)^2 + 2T_p s + \mathbb{1}) = 2(T_p s + \mathbb{1})^{n-1} = 2^{n-1}(T_p s + \mathbb{1}),$$

одакле добијамо $T_p s = -\mathbb{1}$.

Услов $T_p s = -\mathbb{1}$ по формули (6.12) даје $s(\exp_p(V)) = \exp_{s(p)}(T_p s(V)) = \exp_p(-V)$ за $V \in T_pM$, што једнозначно одређује s. Видимо да s окреће геодезијске које извиру из p јер важи $s(\gamma_V(t)) = \gamma_V(-t)$, што нас мотивише да уведемо наредну дефиницију. ***Геодезијска симетрија*** у $p \in M$ је дифеоморфизам f неке околине од p који фиксира ту тачку ($f(p) = p$) и окреће геодезијске кроз њу, односно $f(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ важи за геодезијску γ са $\gamma(0) = p$. За сада смо показали да наша инволутивна изометрија s јесте геодезијска симетрија.

Обратно, претпоставимо да је f геодезијска симетрија у $p \in M$. Одмах је $T_p f = -\mathbb{1}$ јер имамо $T_p f(V) = (f \circ \gamma_V)'(0) = (\gamma_{-V})'(0) = -V$. Ако је f изометрија на некој околини $U \subseteq M$ тачке p, онда је по Теореми 7.8 скуп свих фиксних тачака од f потпуно геодезијска подмногострукост P од M чији је тангентни простор у p скуп свих фиксних тачака од $T_p f$ из T_pM. Из $T_p f = -\mathbb{1}$ следи $T_p P = \{0\}$, те је P дискретно. Штавише, f^2 је изометрија са $f^2(p) = p$ и $T_p f^2 = \mathbb{1}$, те мора бити $f^2 = \mathbb{1}$. Зато је f инволутивна изометрија којој је p изолована фиксна тачка, одакле добијамо наредно тврђење.

Теорема 7.9. *Псеудо-Риманова многострукост је локално симетричан простор ако и само ако је геодезијска симетрија у свакој тачки локална изометрија.*

Симетричан простор има особину да се геодезијска симетрија у свакој тачки продужава на изометрију целокупног простора на себе. Симетрични простори се могу посматрати на много различитих начина. Алгебарски опис омогућио је Картану[4] да развије теорију Риманових симетричних простора уједињену са теоријом полупростих Лијевих група што је водило до потпуне класификације из 1926. године [29, 30].

[4] Élie Cartan (1869–1951), француски математичар

Једна софистицирана инваријанта симетричног простора је ***ранг***, што је максимална димензија потпуно геодезијске равне подмногострукости. Ранг је увек барем један, док једнакост важи кад су максималне равне подмногострукости геодезијске, те је у том случају секциона кривина или позитивна (компактан тип простора) или негативна (некомпактан тип простора). Међу псеудо-Римановим симетричним просторима, они са рангом један су посебно занимљиви.

Са друге стране, можемо посматрати космологијски принцип који каже да је просторна дистрибуција материје у универзуму хомогена и изотропна на довољно великој скали. Хомогена псеудо-Риманова многострукост изгледа геометријски исто кад је посматрамо из сваке тачке, док изотропна има геометрију која не зависи од праваца посматрања.

Теорема 7.10. *Хомогена Риманова многострукост је комплетна.*

Доказ. Нека је $\gamma_V\colon I \to M$ максимална геодезијска јединичне брзине која не може да се продужи, што значи: $0 \in I$, $\gamma_V'(0) = V$, $\|V\| = 1$ и $a = \sup I < \infty$. За произвољну тачку $p \in M$, постоји довољно мало $0 < r < a$ такво да је $B_{2r}(p)$ геодезијска кугла. Посматрајмо изометрију $f\colon M \to M$ која слика $\gamma_V(a-r)$ у p, те нека је $W = (T_{\gamma_V(a-r)}f)(\gamma_V'(a-r))$. Изометрија чува геодезијске, те по формули (6.11) важи $f \circ \gamma_{\gamma_V'(a-r)} = \gamma_W$, што је дефинисано барем на $(-2r, 2r)$. Зато $(-2r, 2r)$ припада домену од $\gamma_{\gamma_V'(a-r)} = f^{-1} \circ \gamma_W$, али како је $\gamma_V(t) = \gamma_{\gamma_V'(a-r)}(t + r - a)$ за $t \in [0, a)$, то се γ_V продужава на $I \cup [a, a + r)$, што је контрадикција. Овим смо показали да је хомогена Риманова многострукост геодезијски комплетна, те је по Хопф-Ринов теореми комплетна. □

Међутим, хомогена псеудо-Риманова многострукост не мора бити комплетна, што видимо у наредном примеру.

Пример 7.8. Нека је M десна полураван $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ са Лоренцовом метриком $g = 2du\,dv$. Произвољно $(a, b) \in M$ се изометријом $(u, v) \mapsto (u/a, av)$ пресликава у $(1, ab)$, што се даље изометријом $(u, v) \mapsto (u, v - ab)$ пресликава у $(1, 0)$, што доказује да је (M, g) хомогена. Међутим, изотропна геодезијска $\gamma(t) = (t, 0)$ има максималан домен $(0, \infty)$, те (M, g) није комплетна. △

Риманова многострукост M је ***две-тачке хомогена*** ако се сваки пар тачака може трансформисати у смислу одговарајуће изометрије у било који пар тачака са истим растојањем између њих. То значи да група изометрија $\mathcal{I}(M)$ дејствује транзитивно на еквидистантним паровима тачака. Специјалан случај, кад је прва тачка у пару фиксирана доказује да је две-тачке хомоген M хомоген и посебно комплетан. Међутим, важи наредна теорема коју је дао Волф[5] [120, Лема 8.12.1].

Теорема 7.11. *Повезана Риманова многострукост је изотропна ако и само ако је две-тачке хомогена.*

Доказ. Нека је M две-тачке хомогена, $B_r(p)$ геодезијска кугла центрирана у $p \in M$ и $0 < \varepsilon < r$. За произвољно $X, Y \in S_1(0_p)$ је $d(p, \exp_p \varepsilon X) = d(p, \exp_p \varepsilon Y)$, те постоји $f \in \mathcal{I}(M)$ такво да важи $f(p) = p$ и $f(\exp_p \varepsilon X) = \exp_p \varepsilon Y$, али из (6.12) је $f(\exp_p \varepsilon X) = \exp_p(f_*(\varepsilon X))$, одакле следи $f_*(\varepsilon X) = \varepsilon Y$, те и $f_* X = Y$, што значи да је M изотропна.

Нека је M изотропно. За произвољну геодезијску γ_V са $p \in M, V \in T_pM$ постоји изометрија $f \in \mathcal{I}_p$ која је окреће, $f_* V = -V$, те је M комплетно и хомогено. Посматрајмо $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ са $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$. Из хомогености постоји $f_1 \in \mathcal{I}(M)$ са $f_1(x_2) = x_1$. Из комплетности, имамо минимизујуће геодезијске $\gamma_{X_1}, \gamma_{X_2}\colon [0, 1] \to M$ такве да важи $y_1 = exp_{x_1}(X_1)$ и $f_1(y_2) = \exp_{x_1}(X_2)$. Због $\|X_1\| = d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2) = d(x_1, f_1 y_2) = \|X_2\|$, изотропност доноси $f_2 \in \mathcal{I}_{x_1}(M)$ са $f_{2*} X_2 = X_1$. Добијамо $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{I}(M)$ за које важи

[5] Joseph Albert Wolf (1936), амерички математичар

$f_2 f_1(x_2) = f_2(x_1) = x_1$ и $f_2 f_1(y_2) = f_2 \exp_{x_1}(X_2) = \exp_{f_2 x_1}(f_{2*} X_2) = \exp_{x_1}(X_1) = y_1$, што доказује да је M две-тачке хомоген. □

Две-тачке хомогени простори су најпре изучавали Бусеман[6] 1942. [28] и Биркхоф[7] 1944. године [20]. Позната је потпуна класификација ових простора, компактне је класификовао Ванг[8] 1952. [118], док је некомпактне решио Титс[9] 1955. године [113]. Као последица класификације, познато је да је локално две-тачке хомогена Риманова многострукост или равна или локално изометрична симетричном простору ранга један (видети Хелгасон[10] [67, p.535]). За детаље о две-тачке хомогеним просторима препоручујемо Волфа [120, стр.293–300] и Хелгасона [67, стр.535].

Теорема 7.12. *Две-тачке хомогене повезане Риманове многострукости су изометричне (до на хомотетију) неком од следећих : еуклидски простор; сфера; реални, комплексни или кватернионски, пројективни или хиперболички простор; или Кејлијева*[11] *пројективна или хиперболичка раван.*

Прецизније речено, класификација две-тачке хомогених простора је следећа:

- $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}(n)/\mathbf{O}(n)$ за $n \geqslant 1$, еуклидски простор;
- $\mathbf{S}^n = \mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{SO}(n)$ за $n \geqslant 1$, сфера;
- $\mathbb{R}\mathbf{P}^n = \mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{O}(n)$ за $n \geqslant 2$, реални пројективни простор;
- $\mathbb{C}\mathbf{P}^n = \mathbf{SU}(n+1)/\mathbf{U}(n)$ за $n \geqslant 2$, комплексни пројективни простор;
- $\mathbb{H}\mathbf{P}^n = \mathbf{Sp}(n+1)/\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)$ за $n \geqslant 2$, кватернионски пројективни простор;
- $\mathbb{O}\mathbf{P}^2 = \mathbf{F}_4/\mathbf{Spin}(9)$, Кејлијева пројективна раван;
- $\mathbb{R}\mathbf{H}^n = \mathbf{SO}^1(n+1)/\mathbf{SO}(n)$ за $n \geqslant 2$, реални хиперболички простор;
- $\mathbb{C}\mathbf{H}^n = \mathbf{SU}^1(n+1)/\mathbf{U}(n)$ за $n \geqslant 2$, комплексни хиперболички простор;
- $\mathbb{H}\mathbf{H}^n = \mathbf{Sp}^1(n+1)/\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)$ за $n \geqslant 2$, кватернионски хиперболички простор;
- $\mathbb{O}\mathbf{H}^2 = \mathbf{F}_4^*/\mathbf{Spin}(9)$, Кејлијева хиперболичка раван.

Међутим, згодно је приметити да постоје следећи изоморфизми (изометрије до на хомотетију) у малим димензијама: $\mathbb{R}\mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^1$, $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^2$, $\mathbb{H}\mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^4$, $\mathbb{O}\mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^8$, $\mathbb{C}\mathbf{H}^1 \cong \mathbb{R}\mathbf{H}^2$, $\mathbb{H}\mathbf{H}^1 \cong \mathbb{R}\mathbf{H}^4$, $\mathbb{O}\mathbf{H}^1 \cong \mathbb{R}\mathbf{H}^8$.

[6] Herbert Busemann (1905–1994), немачко-амерички математичар
[7] Garrett Birkhoff (1911–1996), амерички математичар
[8] Hsien Chung Wang (1918–1978), кинеско-амерички математичар
[9] Jacques Tits (1930), белгијско-француски математичар
[10] Sigurdur Helgason (1927), исландски математичар
[11] Arthur Cayley (1821–1895), британски математичар

Глава 8

ОСЕРМАНОВИ УСЛОВИ

8.1 Осерманови услови

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, а $p \in M$ произвољна тачка. Скуп свих јединичних вектора из T_pM,

$$S_pM = \{X \in T_pM : |g_p(X, X)| = 1\},$$

у Римановом окружењу одговара тангентној сфери $S_1(0_p)$. Међутим, уколико је g недефинитно, S_pM није ни компактно (хипербола у димензији 2, хиперболоид у димензији 3), те је захвално посматрати просторне и временске векторе засебно (геометријска разлика између једноделног и дводелног хиперболоида). Због тога уводимо псеудо-сфере

$$S_p^-M = \{X \in T_pM : g_p(X, X) = -1\},$$
$$S_p^+M = \{X \in T_pM : g_p(X, X) = 1\},$$

при чему је $S_pM = S_p^-M \cup S_p^+M$. Штавише, често на многострукости посматрамо псеудо-сферна раслојења $\{X \in TM : g_{\pi X}(X, X) = \text{Const}\}$, што су хиперповрши тангентног раслојења TM. Тако уводимо ***временско јединично тангентно раслојење*** $S^-M = \bigsqcup_{p\in M} S_p^-M$ и ***просторно јединично тангентно раслојење*** $S^+M = \bigsqcup_{p\in M} S_p^+M$, као и њихову унију $SM = S^-M \cup S^+M$.

По Теореми 7.12, класификација две-тачке хомогених повезаних Риманових многострукости укључује: $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{S}^n$, $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, $\mathbb{H}\mathbf{P}^n$, $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$, $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$, $\mathbb{C}\mathbf{H}^n$, $\mathbb{H}\mathbf{H}^n$ и $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$. Локалне изометрије локалних две-тачке хомогених простора M дејствују транзитивно на сферном раслојењу SM, те зато тамо фиксирају карактеристични полином Јакобијевог оператора. Тако добијамо уопштење локалних две-тачке хомогених Риманових многострукости које зовемо ***Риманове Осерманове многострукости***, у којима карактеристични полином (или еквивалентно, сопствене вредности и њихове вишеструкости) Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ не зависи од X из јединичног тангентног раслојења.

Недостатак других примера усмерило је Осермана [97] да размишља о обратном тврђењу. Питање да ли обрат важи (свака Осерманова Риманова многострукост је локално две-тачке хомогена) познато је под именом ***Осерманова хипотеза***. Прве резултате о Осермановој хипотези изложио је Чи[1] [34], који је установио позитиван одговор за многострукости димензије која није дељива са четири. Највећи прогрес у решавању хипотезе начинио је Николајевски[2] [88, 89, 90, 91], који је доказао хипотезу у свим случајевима, изузев многострукости димензије 16 чији редукован Јакобијев оператор има сопствену вредност вишеструкости 7 или 8.

[1] Quo-Shin Chi (1955), тајванско-амерички математичар
[2] Yuri Nikolayevsky, аустралијски математичар

Овај концепт се може проширити на псеудо-Риманове многострукости. Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост (M, g) ***Осерманова*** или ***глобално Осерманова***, уколико карактеристични полином

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X)$$

Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ не зависи од избора $X \in TM$, како на S^-M, тако и на S^+M.

Често је погодно изучавати неке геометријске проблеме у чистом алгебарском окружењу. Редуковањем псеудо-Риманове многострукости (M, g) на тачку $p \in M$ допушта нам да радимо са алгебарским тензором кривине R_p на квадратном векторском простору (T_pM, g_p). У том контексту уводимо неке појмове везане за алгебарски тензор кривине R на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$.

Кажемо да је R ***временски Осерманов*** ако ω_X не зависи од јединичног временског $X \in \mathcal{V}$. Кажемо да је R ***просторно Осерманов*** ако ω_X не зависи од јединичног просторног $X \in \mathcal{V}$. Природно, R је ***Осерманов*** ако је и временски и просторно Осерманов. Међутим, испоставља се да су временско Осерманов и просторно Осерманов еквивалентне особине (видети Теорему 8.1).

Алгебарски приступ доноси мање рестриктиван концепт многострукости у којем је карактеристични полином Јакобијевог оператора константан како на S_p^-M, тако и на S_p^+M, за свако $p \in M$, али може варирати од тачке до тачке. Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост M ***тачка по тачка Осерманова*** ако је одговарајући алгебарски тензор кривине R_p Осерманов у свакој тачки $p \in M$. Наравно, глобално Осерманова многострукост је свакако тачка по тачка Осерманова, док обрат не важи (видети [23]).

Осерманов услов је еквивалентан константности (могуће комплексних) сопствених вредности Јакобијевих оператора рачунајући вишеструкости. Првобитно је био успостављен у позитивно дефинитном случају, што омогућава дијагонализацију Јакобијевог оператора као самоадјунгованог оператора. Међутим, за недефинитан скаларни производ, сопствена структура самоадјунгованог оператора није одређена његовим карактеристичним полиномом (у општем случају, Јакобијеви оператори нису дијагонализабилни), те Жорданова нормална форма преузима кључну улогу (видети Секцију А.3).

Даља уопштења Осерманових услова у тачки тичу се сопствене структуре Јакобијевих оператора. Кажемо да је R ***временски Жордан-Осерманов*** ако Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ не зависи од јединичног временског $X \in \mathcal{V}$. Кажемо да је R ***просторно Жордан-Осерманов*** ако Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ не зависи од јединичног просторног $X \in \mathcal{V}$. Као и раније, R је ***Жордан-Осерманов*** ако је и временски и просторно Жордан-Осерманов. Временски и просторни Жордан-Осерманови услови, за разлику од оригиналних Осерманових услова, нису еквивалентни (видети Теорему 9.7).

Најједноставнији случај Жордан-Осермановог R за недефинитно g тиче се дијагонализабилних Јакобијевих оператора, што значи да се одговарајућа Жорданова нормална форма састоји од $\dim \mathcal{V}$ блокова величине један. Кажемо да је R ***Јакоби-дијагонализабилан*** ако за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ постоји ортонормирана сопствена база за $\mathcal{V}$ у односу на $\mathcal{J}_X$. Јакоби-дијагонализабилни алгебарски тензори кривине су најприближнији дефинитном случају. Међутим, овај услов је на неки начин природан, јер Жордан-Осерманов R који није Клајнов ($\dim \mathcal{V} \neq 2 \operatorname{Ind} g$) мора бити Јакоби-дијагонализабилан (видети Гилки и Иванова[3] [57]).

Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост M ***тачка по тачка Жордан-Осерманова*** ако је њен одговарајући алгебарски тензор кривине R_p Жордан-Осерманов за сваку тачку $p \in M$, док је ***глобално Жордан-Осерманова*** ако је Жордано-

[3] Raina B. Ivanova

ва нормална форма од $\mathcal{J}_X$ константна како на S^-M, тако и на S^+M. Кажемо да је M ***Јакоби-дијагонализабилна*** ако је R_p Јакоби-дијагонализабилно за свако $p \in M$.

Пример 8.1. Као што смо раније нагласили, две-тачке хомогене повезане Риманове многострукости ($\mathbb{R}^n$, $\mathbf{S}^n$, $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, $\mathbb{H}\mathbf{P}^n$, $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$, $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$, $\mathbb{C}\mathbf{H}^n$, $\mathbb{H}\mathbf{H}^n$, $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$) су глобално Осерманове. △

Пример 8.2. Простори константне секционе кривине димензије $n \geqslant 3$ (из Секције 6.4) имају одговарајући алгебарски тензор кривине облика $R = \kappa R^1$ за неку глобалну константу $\kappa \in \mathbb{R}$. Одавде је $\mathcal{R}(X,Y)Z = \kappa(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$, те за дефинитан X и $Y \in X^\perp$ имамо

$$\mathcal{J}_X Y = \mathcal{R}(Y,X)X = \kappa(g(X,X)Y - g(Y,X)X) = \varepsilon_X \kappa Y.$$

Због тога $\widetilde{\mathcal{J}}_X = \varepsilon_X \kappa \mathbb{1}_{X^\perp}$ важи за свако дефинитно X, што показује да редуковани Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ има само једну сопствену вредност $\varepsilon_X \kappa$ на псеудо-сферама $\varepsilon_X = \mathrm{Const} \neq 0$. Одавде је $\omega_X(\lambda) = \lambda(\lambda - \varepsilon_X \kappa)^{n-1}$ карактеристични полином од $\mathcal{J}_X$, што је константно на оба јединична тангентна раслојења. Као последица, простори константне секционе кривине су глобално Осерманови. Посебно, поред већ виђених Риманових простора ($\mathbb{R}^n$, $\mathbf{S}^n$, $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$), имамо псеудо-Риманове модел просторе из Секције 4.6 као што су $\mathbb{R}^n_\nu$, $\mathbf{dS}^n$ и $\mathbf{AdS}^n$. △

Пример 8.3. Нека је $J\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ косоадјунгован ендоморфизам на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. На основу Примера 6.5, такво J генерише алгебарски тензор кривине $R^J \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ са (6.15). За одговарајући оператор кривине важи

$$\mathcal{R}^J(X,Y)Z = g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ,$$

одакле последично Јакобијев оператор задовољава

$$\mathcal{J}^J_X Y = \mathcal{R}^J(Y,X)X = 3g(JY,X)JX - g(JX,X)JY = -3g(Y,JX)JX,$$

односно

$$\mathcal{J}^J_X = \begin{cases} -3\varepsilon_{JX}\mathbb{1} & \text{на } \mathrm{Span}\{JX\} \\ 0 & \text{на } \mathrm{Span}\{JX\}^\perp \end{cases}.$$

Ако додатно претпоставимо да $J^2 = c\mathbb{1}$ важи за неку константу $c \in \mathbb{R}$, онда добијамо $\varepsilon_{JX} = g(JX,JX) = -g(X,J^2X) = -c\varepsilon_X$. Јасно је да случај $c \neq 0$ повлачи

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{1} - \mathcal{J}^J_X) = \lambda^{\dim\mathcal{V}-1}(\lambda - 3c\varepsilon_X). \tag{8.1}$$

Случај $c = 0$ даје $\varepsilon_{JX} = 0$, те $\mathcal{J}^J_X$ ишчезава на $\mathrm{Span}\{JX\} + \mathrm{Span}\{JX\}^\perp = \mathrm{Span}\{JX\}^\perp$. Ако је $JX = 0$ имамо $\mathcal{J}^J_X = 0$. У супротном је JX изотропан, $\mathrm{Span}\{JX\}^\perp \leqslant \mathrm{Ker}((\mathcal{J}^J_X)^n)$ је дегенерисан потпростор димензије $n-1$, те Лема A.22 повлачи $\dim\mathrm{Ker}((\mathcal{J}^J_X)^n) > n-1$, што доноси $\mathrm{Ker}((\mathcal{J}^J_X)^n) = \mathcal{V}$. То доказује да су све сопствене вредности нула у случају $c = 0$, те (8.1) важи у сваком случају. Формула (8.1) показује да је $\omega_X(\lambda)$ константно на псеудо-сферама, те је R^J Осерманов алгебарски тензор кривине.

Зато, сваки косоадјунговани ендоморфизам J за који је $J^2 = c\mathbb{1}$, генерише Осерманов алгебарски тензор кривине R^J. Посебно, сваки ортогонални косоадјунговани ендоморфизам ($c = -1$, комплексна структура која чува g) и сваки анти-ортогонални косоадјунговани ендоморфизам ($c = 1$, производ структура) доносе Осерманов алгебарски тензор кривине. △

8.2 Примери Осерманових многострукости

Наредни конкретни примери дозвољавају нам да на леп начин илуструјемо наше дефиниције. Гарсија-Рио, Купели и Васкез-Лорензо [62] су конструисали фамилију псеудо-Риманових многострукости (M, g), где је $M = \mathbb{R}^4$, а (x_1, x_2, x_3, x_4) уобичајене координате, помоћу наредне Грамове матрице

$$g = \begin{pmatrix} x_3 f_1 & a & 1 & 0 \\ a & x_4 f_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

која је дата у односу на стандардни глобални покретни репер $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ за M, где су $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $f_2 = f_2(x_1, x_2)$ глатке реалне функције које зависе само од x_1 и x_2, док је $a \in \mathbb{R}$. У питању је специјални случај Вокерове метрике из Примера 4.8, те је зато (M, g) псеудо-Риманова многострукост индекса два, односно Клајнова многострукост димензије 4. Кристофелови симболи су дати формулом

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right), \tag{5.11 поновљено}$$

где су g_{ij} улази матрице g из (8.2), док су g^{ij} улази њој инверзне матрице,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x_3 f_1 & -a \\ 0 & 1 & -a & -x_4 f_2 \end{pmatrix}.$$

Конкретан рачун даје све ненула Кристофелове симболе:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2} f_1, & \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2} x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} x_3 f_1^2, \\
\Gamma_{11}^4 &= -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} a f_1, & \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2} x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\
\Gamma_{12}^4 &= \Gamma_{21}^4 = \frac{1}{2} x_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{2} f_2, \\
\Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2} x_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} a f_2, & \Gamma_{22}^4 &= \frac{1}{2} x_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} x_4 f_2^2, \\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} f_1, & \Gamma_{24}^4 &= \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2} f_2.
\end{aligned}$$

Уз помоћ формуле

$$\mathcal{R}_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l), \tag{6.3 поновљено}$$

налазимо све ненула компоненте оператора кривине:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_1 = {} & \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial_1 - \frac{1}{2} x_3 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial_3 + \\
& + \frac{1}{4} \left(2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} + (x_3 f_2 - 2a) \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + x_4 f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - a f_1 f_2 \right) \partial_4, \\
\mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_2 = {} & -\frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial_2 + \frac{1}{2} x_4 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial_4 - \\
& - \frac{1}{4} \left(2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} + x_3 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + (x_4 f_1 - 2a) \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - a f_1 f_2 \right) \partial_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_3 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\partial_3, & \mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_4 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\partial_4,\\
\mathcal{R}(\partial_1,\partial_3)\partial_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\partial_4, & \mathcal{R}(\partial_1,\partial_3)\partial_2 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\partial_3,\\
\mathcal{R}(\partial_2,\partial_4)\partial_1 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\partial_4, & \mathcal{R}(\partial_2,\partial_4)\partial_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\partial_3.
\end{aligned}$$

Претходни рачуни дају матрицу Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ за $X = \sum_{i=1}^4 a_i\partial_i$ као блок матрицу

$$\mathcal{J}_X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A^\intercal \end{pmatrix},$$

где је

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & -\frac{1}{2}a_1^2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ -\frac{1}{2}a_2^2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{1}{2}a_1a_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Како је детерминанта блок троугаоне матрице производ детерминанти њених дијагоналних блокова, карактеристични полином од $\mathcal{J}_X$ не зависи од матрице B,

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda\,\mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \det(\lambda\,\mathbb{1} - A)\det(\lambda\,\mathbb{1} - A^\intercal) = (\det(\lambda\,\mathbb{1} - A))^2.$$

Како је

$$\det(\lambda\,\mathbb{1} - A) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda a_1a_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right),$$

није тешко закључити да је карактеристични полином $\omega_X(\lambda)$ константан на псеудо-сферама само ако

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \tag{8.3}$$

важи у свакој тачки из M. Ако претпоставимо (8.3), имамо $\omega_X(\lambda) = \lambda^4$, те је (M, g) глобално Осерманова псеудо-Риманова многострукост.

Посматрајмо Жордан-Осерманове услове за ове многострукости. Захваљујући малој димензији од M, Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ може се описати у терминима његовог минималног полинома μ_X. Уколико рестриктивнији услов

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \tag{8.4}$$

важи у некој тачки из M, тада су формуле оператора кривине много једноставније и компоненте оператора кривине у тој тачки су ненула само за

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_1 &= \frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} - af_1f_2\right)\partial_4,\\
\mathcal{R}(\partial_1,\partial_2)\partial_2 &= -\frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} - af_1f_2\right)\partial_3.
\end{aligned}$$

Одавде је

$$\mathcal{J}_X = \frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} - af_1f_2\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2^2 & a_1a_2 & 0 & 0 \\ a_1a_2 & -a_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и ${\mathcal{J}_X}^2 = 0$. У тачкама које задовољавају (8.4), услов

$$2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} - af_1f_2 = 0$$

даје $\mu_X(\lambda) = \lambda$. У супротном, $\mathcal{J}_X = 0$ важи само за $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, али свако $X = \alpha_3\partial_3 + \alpha_4\partial_4$ је изотропно, одакле $\mu_X(\lambda) = \lambda^2$ важи за свако дефинитно X. Конкретне Осерманове многострукости могу се задати погодним избором за f_1, f_2 и a.

Пример 8.4. За $f_1(x_1, x_2) = 1, f_2(x_1, x_2) = 1$ и $a = 1$ важи

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad 2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} - af_1f_2 = -1 \neq 0.$$

За дефинитно X, добијамо $\mu_X(\lambda) = \lambda^2$ у свакој тачки из M. Ова многострукост је глобално Жордан-Осерманова, али није Јакоби-дијагонализабилна. △

Пример 8.5. За $f_1(x_1, x_2) = x_1, f_2(x_1, x_2) = 1$ и $a = 1$ важи

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad 2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} - af_1f_2 = -x_1.$$

У овом случају, за дефинитно X, имамо $\mu_X(\lambda) = \lambda$ у тачкама са $x_1 = 0$ и $\mu_X(\lambda) = \lambda^2$ у тачкама са $x_1 \neq 0$. Ова многострукост је глобално Осерманова и тачка по тачка Жордан-Осерманова, али није глобално Жордан-Осерманова. △

Ради комплетности и неких додатних примера можемо израчунати раније уведену матрицу B. Под условом (8.3) имамо

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где су

$$\begin{aligned}
b_{11} =& -\frac{1}{2}\alpha_2^2 x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}\alpha_2^2 x_4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{1}{4}a\alpha_2^2 f_1 f_2 \\
&- \frac{1}{4}\left(2\alpha_1\alpha_2 x_3 f_1 + \alpha_2^2 x_3 f_2 - \alpha_2^2 x_4 f_1 + 4\alpha_2\alpha_3 + 2a\alpha_2^2\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\
b_{12} =& \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{1}{4}a\alpha_1\alpha_2 f_1 f_2 \\
&+ \frac{1}{4}\left(2\alpha_1^2 x_3 f_1 + \alpha_1\alpha_2 x_3 f_2 - \alpha_1\alpha_2 x_4 f_1 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2a\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_4\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\
b_{21} =& \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{1}{4}a\alpha_1\alpha_2 f_1 f_2 \\
&- \frac{1}{4}\left(\alpha_1\alpha_2 x_4 f_1 + 2\alpha_2^2 x_4 f_2 - \alpha_1\alpha_2 x_3 f_2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2a\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_4\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\
b_{22} =& -\frac{1}{2}\alpha_1^2 x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}\alpha_1^2 x_4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{1}{4}a\alpha_1^2 f_1 f_2 \\
&+ \frac{1}{4}\left(2\alpha_1\alpha_2 x_4 f_2 + \alpha_1^2 x_4 f_1 - \alpha_1^2 x_3 f_2 + 4\alpha_1\alpha_4 + 2a\alpha_1^2\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}.
\end{aligned}$$

Праволинијски рачун даје

$${\mathcal{J}_X}^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ BA + A^\intercal B & (A^\intercal)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BA + A^\intercal B & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\varepsilon_X\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

као и

$$\mathcal{J}_X{}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (BA + A^\intercal B)A & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

за свако $X \in TM$. Зато за свако дефинитно X услов

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \neq 0$$

повлачи $\mu_X(\lambda) = \lambda^3$, што дозвољава нове конкретне примере.

Пример 8.6. За $f_1(x_1, x_2) = x_2, f_2(x_1, x_2) = -x_1$ и $a = 1$ важи

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 \neq 0.$$

За дефинитно X имамо $\mu_X(\lambda) = \lambda^3$ у свакој тачки из M, што даје другачији пример глобално Жордан-Осерманове многострукости. △

Пример 8.7. За $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2, f_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2$ и $a = 1$ важи

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_1, \quad 2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} - a f_1 f_2 = -2x_4 + \frac{1}{2}x_1^3 x_2.$$

У овом случају $\mu_X(\lambda)$ за дефинитно X варира од тачке до тачке. То може бити λ^3 (за тачке са $x_1 \neq 0$), или λ^2 (за $x_1 = 0, x_4 \neq 0$) или λ (за $x_1 = x_4 = 0$). Конструисана многострукост је глобално Осерманова и тачка по тачка Жордан-Осерманова. △

8.3 Осерманов алгебарски тензор кривине

Нека је R просторно Осерманов алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. Карактеристични полином Јакобијевог оператора $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X)$ не зависи од јединичног просторног X, те су коефицијенти од ω_X константни, одакле по (A.5) из Леме A.17 постоје константе $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такве да $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X{}^j) = C_j$ важи за свако $1 \leqslant j \leqslant n$ и сваки јединичан просторни X. Евидентно важи и обрат, те је R просторно Осерманов ако и само ако такве константе постоје. Како је

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{|\varepsilon_X|}^{2j}\left(\mathcal{J}_{X/\sqrt{|\varepsilon_X|}}\right)^j\right) = |\varepsilon_X|^j \,\mathrm{Tr}\left(\left(\mathcal{J}_{X/\sqrt{|\varepsilon_X|}}\right)^j\right),$$

наше једначине се могу продужити за просторно X са

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j C_j, \tag{8.5}$$

за свако $1 \leqslant j \leqslant n$.

Једначина $\mathcal{R}(Z, X + tY)(X + tY) = \mathcal{R}(Z, X)X + t(\mathcal{R}(Z, X)Y + \mathcal{R}(Z, Y)X) + t^2\mathcal{R}(Z, Y)Y$ се може записати преко поларизованог Јакобијевог оператора са

$$\mathcal{J}_{X+tY} = \mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, Y) + t^2\mathcal{J}_Y$$

за свако $X, Y \in \mathcal{V}$ и $t \in \mathbb{R}$.

Ако је X временски, $Y \in X^\perp$ просторан и $|t| > \sqrt{-\varepsilon_X/\varepsilon_Y}$, тада је $\varepsilon_{X+tY} = \varepsilon_X + t^2\varepsilon_Y > 0$ што повлачи да је $X + tY$ просторан. У овом случају за просторно Осерманов R имамо

$$\mathrm{Tr}((\mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, Y) + t^2\mathcal{J}_Y)^j) = \mathrm{Tr}((\mathcal{J}_{X+tY})^j) = (\varepsilon_{X+tY})^j C_j = (\varepsilon_X + t^2\varepsilon_Y)^j C_j,$$

што доноси

$$\sum_{i=0}^{2j}(\mathrm{Tr}(L_i))t^i = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(\varepsilon_X)^{j-i}(\varepsilon_Y)^i C_j t^{2i}, \tag{8.6}$$

за неке конкретне линеарне операторе $L_0, L_1, \ldots, L_{2j}$. Како полином степена d има највише d нула, док имамо бесконачно много таквих t да (8.6) важи, полиноми у (8.6) су једнаки, те су једнаки и њихови коефицијенти. Евидентно важи $L_0 = (\mathcal{J}_X)^j$, те је зато $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j C_j$ за сваки временски X.

На сличан начин, лако је видети да је R временски Осерманов ако и само ако постоје константе C_j такве да (8.5) важи за свако $1 \leqslant j \leqslant n$ и свако временско X. Тако смо доказали да просторно Осерманов R јесте временски Осерманов, док се обрат добија на сличан начин. Зато су просторно Осерманов и временски Осерманов еквивалентни услови у случају недефинитног g, што су првобитно доказали Гарсија-Рио, Купели, Васкез-Абал[4] и Васкез-Лоренцо 1999. године [61].

Теорема 8.1. *Недефинитни алгебарски тензор кривине је просторно Осерманов ако и само ако је временски Осерманов.*

Последично, алгебарски тензор кривине је Осерманов ако и само ако постоје константе $C_1, \ldots, C_n$ такве да је $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j C_j$ кадгод је X дефинитан. Ако размотримо коефицијенте карактеристичног полинома,

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda\,\mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \lambda^n + \sigma_1\lambda^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1}\lambda + \sigma_n,$$

видимо да једначина (A.5) из Леме A.17 даје

$$m\sigma_m + \sigma_{m-1}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X) + \sigma_{m-2}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^2 + \cdots + \sigma_1\,\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^{m-1} + \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^m = 0,$$

за свако $1 \leqslant m \leqslant n$. Након замене имамо

$$\frac{\sigma_m}{(\varepsilon_X)^m} = -\frac{1}{m}\left(\frac{\sigma_{m-1}}{(\varepsilon_X)^{m-1}}C_1 + \frac{\sigma_{m-2}}{(\varepsilon_X)^{m-2}}C_2 + \cdots + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_X}C_1 + C_m\right),$$

те је индукцијом $\sigma_m/(\varepsilon_X)^m$ константно за $1 \leqslant m \leqslant n$. Одавде је

$$\det\left(\lambda\,\mathbb{1} - \frac{1}{\varepsilon_X}\mathcal{J}_X\right) = \frac{\det(\varepsilon_X\lambda\,\mathbb{1} - \mathcal{J}_X)}{(\varepsilon_X)^n} = \frac{\omega_X(\varepsilon_X\lambda)}{(\varepsilon_X)^n} = \lambda^n + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_X}\lambda^{n-1} + \cdots + \frac{\sigma_{n-1}}{(\varepsilon_X)^{n-1}}\lambda + \frac{\sigma_n}{(\varepsilon_X)^n}$$

полином са константним коефицијентима што доказује наредну теорему.

Теорема 8.2. *Алгебарски тензор кривине је Осерманов ако и само ако је полином* $\det(\lambda\,\mathbb{1} - \mathcal{J}_X/\varepsilon_X)$ *независан од дефинитног вектора X.*

Захваљујући Теореми 8.2 Осерманов услов не морамо више гледати кроз две независне константности различитих полинома, једне за просторне јединичне, а друге за временске јединичне векторе, већ смо све то објединили кроз јединствени полином који је константан за сваки дефинитан вектор.

За сада једначина (8.5) важи за дефинитне X, а очигледно и за $X = 0$. Изотропно X се по Леми 4.10 раставља са $X = S + T$, где је $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. За $n > 2$ постоји дефинитан $Y \in \mathrm{Span}\{S, T\}^\perp$. Како је $Y \perp X$ имамо $\varepsilon_{X+tY} = g(X+tY, X+tY) = t^2\varepsilon_Y \neq 0$ за $t \neq 0$. По Леми 6.5 улази матрице од $\mathcal{J}_X$ су хомогени полиноми степена 2 у коефицијентима од X, те је $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^j$ полином степена $2j$, а самим тим непрекидно по t. Кад t опада ка нули, $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^j = (\varepsilon_{X+tY})^j C_j = t^{2j}(\varepsilon_Y)^j C_j$ доноси

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = \lim_{t\searrow 0}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^j = \lim_{t\searrow 0} t^{2j}(\varepsilon_Y)^j C_j = 0.$$

[4] María Elena Vázquez-Abal, шпанска матемаричарка

Одавде је $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = 0 = (\varepsilon_X)^j C_j$, што продужава једначину (8.5) за свако $X \in \mathcal{V}$ и мотивише нас да уведемо наредну дефиницију.

За алгебарски тензор кривине R на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ кажемо да је ***k*-штајн** ако постоје константе $C_1, \ldots, C_k$ такве да

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j C_j \tag{8.5 поновљено}$$

важи за свако $1 \leqslant j \leqslant k$ и свако $X \in \mathcal{V}$. Претходни рачун доказује следећу теорему (видети Гилки [54, Лема 1.7.3]).

Теорема 8.3. *Алгебарски тензор кривине димензије n је Осерманов ако и само ако је n-штајн.*

Последично, Осерманов алгебарски тензор кривине задовољава $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = 0$ за изотропно X и $1 \leqslant j \leqslant n$, што за коефицијенте од ω_X даје $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = 0$. Имајући то у виду, за сваки изотропан X важи $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda\,\mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \lambda^n$, одакле следи наредна последица (видети Гилки [54, Лема 1.7.4]).

Теорема 8.4. *Ако је R Осерманов алгебарски тензор кривине, тада су све сопствене вредности од $\mathcal{J}_X$ за изотропан X једнаке нули.*

8.4 Ајнштајн, цвајштајн, ...

Осерманов алгебарски тензор кривине R на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије $n \geqslant 3$ је n-штајн. Подсетимо се претходне идеје која почиње од $\mathcal{J}_{X+tY}$, где k-штајн услов повлачи да

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X,Y) + t^2\mathcal{J}_Y)^j = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^j = (\varepsilon_{X+tY})^j C_j = (\varepsilon_X + 2tg(X,Y) + t^2\varepsilon_Y)^j C_j \tag{8.7}$$

важи за свако $1 \leqslant j \leqslant k$ и све $X, Y \in \mathcal{V}$, $t \in \mathbb{R}$. Најједноставнији случај је $k = 1$ који доноси једнаке полиноме,

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X) + 2t\,\mathrm{Tr}(\mathcal{J}(X,Y)) + t^2\,\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_Y) = \varepsilon_X C_1 + 2tC_1 g(X,Y) + t^2\varepsilon_Y C_1,$$

те је $C_1 g(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}(X,Y)) = \mathrm{Ric}(X,Y)$, што даје $\mathrm{Ric} = C_1 g$. Зато је алгебарски тензор кривине Ајнштајнов ако и само ако је 1-штајн, што је разлог зашто су Карпентер[5], Грej[6] и Вилмор[7] [33] духовито одабрали име k-штајн за уопштење. Наиме, како име славног физичара Ајнштајна на немачком значи један камен, уопштењем добијамо цвајштајн (два камена), драјштајн (три камена), и тако даље.

Размотримо ортонормирану базу $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ за $(\mathcal{V}, g)$, где уводимо скраћенице $\varepsilon_i = \varepsilon_{E_i} \in \{-1, 1\}$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Користећи једнакост (6.31), Ајнштајнов услов даје $C_1 g(X,Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R(E_i, X, Y, E_i)$, те зато $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{ixyi} = C_1 \varepsilon_x \delta_{xy}$ важи за све $1 \leqslant x, y \leqslant n$, где су $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ за $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$ компоненте од R. Одавде, за Ајнштајнов алгебарски тензор кривине R важе формуле

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i \varepsilon_x R_{ixxi} = \mathrm{Const} = C_1, \tag{8.8}$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i R_{ixyi} = 0. \tag{8.9}$$

[5] Paul Carpenter, британски математичар
[6] Alfred Gray (1939–1998), амерички математичар
[7] Thomas James Willmore (1919–2005), енглески математичар

Теорема 8.5. *Ако је R Ајнштајнов алгебарски тензор кривине димензије n, тада у ортонормираној бази једнакости* (8.8) *и* (8.9) *важе за све* $1 \leqslant x \neq y \leqslant n$.

Вратимо се на једначину (8.7) и размотримо по једноставности наредни случај $k = 2$. Не умањујући општост претпостављамо $X \perp Y$, те једначина постаје

$$\operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X,Y) + t^2\mathcal{J}_Y)^2 = \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^2 = (\varepsilon_{X+tY})^2 C_2 = (\varepsilon_X + t^2\varepsilon_Y)^2 C_2.$$

Једнаки полиноми имају исте коефицијенте, те поредећи коефицијенте уз 1, t и t^2 добијамо

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X)^2 &= (\varepsilon_X)^2 C_2, \\ \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X\mathcal{J}(X,Y)) + \operatorname{Tr}(\mathcal{J}(X,Y)\mathcal{J}_X) &= 0, \\ \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X\mathcal{J}_Y) + 4\operatorname{Tr}(\mathcal{J}(X,Y))^2 + \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_Y\mathcal{J}_X) &= 2\varepsilon_X\varepsilon_Y C_2, \end{aligned}$$

док су због симетрије по X и Y, једначине добијене поређењем коефицијената уз t^3 и t^4 сувишне.

За произвољни ендоморфизам $\mathcal{J}$ на $\mathcal{V}$, из (4.3) следи $\mathcal{J}(E_q) = \sum_i \varepsilon_i g(\mathcal{J}(E_q), E_i)E_i$, те матрица од $\mathcal{J}$ у односу на изабрану базу има елементе $(\mathcal{J})_{pq} = \varepsilon_p g(\mathcal{J}(E_q), E_p)$ за свако $1 \leqslant p, q \leqslant n$. Додатно, за ендоморфизме $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ важи $\operatorname{Tr}(\mathcal{J}\mathcal{K}) = \operatorname{Tr}(\mathcal{K}\mathcal{J})$, што нам омогућава да израчунамо трагове конкретних ендоморфизама,

$$\begin{aligned} C_2 = (\varepsilon_x)^2 C_2 = \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_{E_x})^2 &= \sum_{i,j} (\mathcal{J}_{E_x})_{ij}(\mathcal{J}_{E_x})_{ji} = \sum_{i,j} \varepsilon_i g(\mathcal{J}_{E_x}(E_j), E_i)\varepsilon_j g(\mathcal{J}_{E_x}(E_i), E_j) \\ &= \sum_{i,j} \varepsilon_i R_{jxxi}\varepsilon_j R_{ixxj} = \sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j (R_{ixxj})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_{E_x}\mathcal{J}(E_x,E_y)) + \operatorname{Tr}(\mathcal{J}(E_x,E_y)\mathcal{J}_{E_x}) = 2\operatorname{Tr}(\mathcal{J}_{E_x}\mathcal{J}(E_x,E_y)) \\ &= 2\sum_{i,j} \varepsilon_i R_{jxxi}\varepsilon_j \frac{1}{2}(R_{ixyj} + R_{iyxj}) = 2\sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixxj}R_{ixyj}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_x\varepsilon_y C_2 &= \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_{E_x}\mathcal{J}_{E_y}) + 4\operatorname{Tr}(\mathcal{J}(E_x,E_y))^2 + \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_{E_y}\mathcal{J}_{E_x}) = 2\operatorname{Tr}(\mathcal{J}_{E_x}\mathcal{J}_{E_y}) + 4\operatorname{Tr}(\mathcal{J}(E_x,E_y))^2 \\ &= 2\sum_{i,j} \varepsilon_i R_{jxxi}\varepsilon_j R_{iyyj} + 4\sum_{i,j} \varepsilon_i \frac{1}{2}(R_{jxyi} + R_{jyxi})\varepsilon_j \frac{1}{2}(R_{ixyj} + R_{iyxj}) \\ &= 2\sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixxj}R_{iyyj} + \sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2. \end{aligned}$$

Одавде добијамо једнакости које су карактеристичне за цвајштајн R,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_j (R_{ixxj})^2 = \text{Const} = C_2, \tag{8.10}$$

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixxj}R_{ixyj} = 0, \tag{8.11}$$

$$2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixxj}R_{iyyj} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 2\varepsilon_x\varepsilon_y C_2. \tag{8.12}$$

Теорема 8.6. *Ако је R цвајштајн алгебарски тензор кривине димензије n, тада у ортонормираној бази* (8.8), (8.9), (8.10), (8.11) *и* (8.12) *важе за све* $1 \leqslant x \neq y \leqslant n$.

Нека је R Осерманов алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. По Теореми 8.3, R је n-штајн. У светлу тога, константне

сопствене вредности (са вишеструкостима) од $\mathcal{J}_X$ додатно дају константе $\operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X)^k$ за $k > n$, што продужава R на k-штајн за свако $k \in \mathbb{N}$. Одатле,

$$\operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X,Y) + t^2\mathcal{J}_Y)^k = \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^k = (\varepsilon_{X+tY})^k C_k = (\varepsilon_X + t^2\varepsilon_Y)^k C_k$$

важи за све $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, и међусобно ортогоналне $X, Y \in \mathcal{V}$. Ово нас враћа на једначину (8.6),

$$\sum_{i=0}^{2k} t^i \operatorname{Tr}(L_i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\varepsilon_X)^{k-i} (\varepsilon_Y)^i C_k t^{2i},$$

која важи за конкретне линеарне операторе $L_0, L_1, \ldots, L_{2k}$. Посебно важи $\operatorname{Tr}(L_i) = 0$ за непарне i, као и

$$\operatorname{Tr}(L_{2p}) = \binom{k}{p} (\varepsilon_X)^{k-p} (\varepsilon_Y)^p C_k, \tag{8.13}$$

за све $0 \leqslant p \leqslant k$. Већ смо видели $L_0 = (\mathcal{J}_X)^k$, што повлачи $\operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X)^k = (\varepsilon_X)^k C_k$. Следеће по једноставности је

$$L_1 = 2((\mathcal{J}_X)^{k-1}\mathcal{J}(X,Y) + (\mathcal{J}_X)^{k-2}\mathcal{J}(X,Y)\mathcal{J}_X + \cdots + \mathcal{J}(X,Y)(\mathcal{J}_X)^{k-1}).$$

Како је

$$\sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{Tr}((\mathcal{J}_X)^{k-1-i}\mathcal{J}(X,Y)(\mathcal{J}_X)^i) = \sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{Tr}((\mathcal{J}_X)^i(\mathcal{J}_X)^{k-1-i}\mathcal{J}(X,Y)) = k\operatorname{Tr}((\mathcal{J}_X)^{k-1}\mathcal{J}(X,Y)),$$

то добијамо

$$\operatorname{Tr}((\mathcal{J}_X)^{k-1}\mathcal{J}(X,Y)) = \frac{1}{2k}\operatorname{Tr}(L_1) = 0.$$

Општи случај, за $X = E_x$, $Y = E_y$ са $x \neq y$, је прилично компликован,

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k} \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k} R_{i_2 x x i_1} R_{i_3 x x i_2} \cdots R_{i_k x x i_{k-1}} \frac{1}{2}(R_{i_1 x y i_k} + R_{i_1 y x i_k}) = 0. \tag{8.14}$$

Уколико претпоставимо да је R Јакоби-дијагонализабилан, или барем да је $\mathcal{J}_{E_x}$ дијагонализабилан, то постоји ортонормирана сопствена база $(E_1, \ldots, E_n)$ у односу на $\mathcal{J}_{E_x}$. У тој бази је $R_{pxxq} = 0$ за све $p \neq q$, те општа једнакост (8.14) има смисла само за $i_1 = i_2 = \cdots = i_k$, одакле је

$$0 = \frac{1}{2}\sum_i (\varepsilon_i)^k (R_{ixxi})^{k-1}(R_{ixyi} + R_{iyxi}) = \sum_i \varepsilon_i (\varepsilon_i R_{ixxi})^{k-1} R_{ixyi}. \tag{8.15}$$

Уколико означимо секционе кривине са $\kappa_{ij} = \varepsilon_i\varepsilon_j R_{ijji} = \kappa(E_i, E_j)$, тада имамо

$$\mathcal{J}_{E_x} E_i = \sum_p \varepsilon_p g(\mathcal{J}_{E_x}(E_i), E_p) E_p = \sum_p \varepsilon_p R_{ixxp} E_p = \varepsilon_i R_{ixxi} E_i = \varepsilon_x \kappa_{xi} E_i.$$

Нека је $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} = \{\lambda : \det(\varepsilon_x \lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_{E_x}) = 0\}$ спектар оператора $\varepsilon_x \mathcal{J}_{E_x}$, тада за свако $1 \leqslant a \leqslant m$ можемо груписати заједно такве $1 \leqslant i \leqslant n$ да важи $\kappa_{xi} = \lambda_a$. Множењем (8.15) са $(\varepsilon_x)^{k-1}$ имамо

$$0 = \sum_i \varepsilon_i (\varepsilon_i \varepsilon_x R_{ixxi})^{k-1} R_{ixyi} = \sum_{1 \leqslant a \leqslant m} \sum_{\kappa_{xi} = \lambda_a} \varepsilon_i (\lambda_a)^{k-1} R_{ixyi} = \sum_{1 \leqslant a \leqslant m} (\lambda_a)^{k-1} W_a,$$

где је $W_a = \sum_{\kappa_{xi}=\lambda_a} \varepsilon_i R_{ixyi}$. Једнакости $\sum_{a=1}^{m} (\lambda_a)^{k-1} W_a = 0$ за $1 \leqslant k \leqslant m$ могу се записати са

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} = 0.$$

Овај систем једначина има добро познату Вандермондову[8] матрицу, која је генерисана различитим бројевима из спектра, те је зато њена детерминанта

$$\Delta = V(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant m} (\lambda_b - \lambda_a) \neq 0.$$

Због тога је наш хомогени систем инвертибилан и има јединствено тривијално решење, што даје $W_a = 0$ за свако $1 \leqslant a \leqslant m$, те важи следећа теорема.

Теорема 8.7. *Нека је R Осерманов алгебарски тензор кривине и нека је $(E_1, \ldots, E_n)$ ортонормирана сопствена база у односу на $\mathcal{J}_{E_x}$. Тада за све $\lambda \in \mathbb{R}$ и $y \neq x$ важи*

$$\sum_{\kappa_{xi}=\lambda} \varepsilon_i R_{ixyi} = 0.$$

Задржимо претходну нотацију ($X = E_x$, $Y = E_y$ са $x \neq y$, $R_{pxxq} = 0$ за $p \neq q$) и посматрајмо наредни по једноставности случај L_2. Није тешко видети да важи

$$L_2 = \sum_{p+q=k-1} (\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}_Y (\mathcal{J}_X)^q + 4 \sum_{p+q+r=k-2} (\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}(X,Y) (\mathcal{J}_X)^q \mathcal{J}(X,Y) (\mathcal{J}_X)^r = P + S.$$

Рачунамо траг од $L_2 = P + S$. Траг првог члана је једноставан,

$$\operatorname{Tr} P = \sum_{p+q=k-1} \operatorname{Tr}\left((\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}_Y (\mathcal{J}_X)^q\right) = k \operatorname{Tr}((\mathcal{J}_X)^{k-1} \mathcal{J}_Y) = k(\varepsilon_x)^{k-1} \varepsilon_y \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \kappa_{yi} (\kappa_{xi})^{k-1}.$$

Међутим, траг другог члана је прилично компликован,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} S =& 4 \sum_{p+q+r=k-2} \operatorname{Tr}\left((\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}(X,Y) (\mathcal{J}_X)^q \mathcal{J}(X,Y) (\mathcal{J}_X)^r\right) \\
=& 4 \sum_{s+q=k-2} (s+1) \operatorname{Tr}((\mathcal{J}_X)^s \mathcal{J}(X,Y) (\mathcal{J}_X)^q \mathcal{J}(X,Y)) \\
=& 2k \sum_{p+q=k-2} \operatorname{Tr}((\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}(X,Y) (\mathcal{J}_X)^q \mathcal{J}(X,Y)) \\
=& \frac{1}{2} k \sum_{p+q=k-2} \sum_{i,j} (\varepsilon_i)^{p+1} (\varepsilon_j)^{q+1} (R_{ixxi})^p (R_{jxyi} + R_{jyxi}) (R_{jxxj})^q (R_{ixyj} + R_{iyxj}) \\
=& \frac{1}{2} k (\varepsilon_x)^{k-2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 \sum_{p+q=k-2} (\kappa_{xi})^p (\kappa_{xj})^q.
\end{aligned}$$

Неопходно је дискутовати случајеве, у зависности од тога да ли су κ_{xi} и κ_{xj} једнаки,

$$\sum_{p+q=k-2} (\kappa_{xi})^p (\kappa_{xj})^q = \begin{cases} (k-1)(\kappa_{xi})^{k-2} & \text{if } \kappa_{xi} = \kappa_{xj} \\ \frac{(\kappa_{xi})^{k-1}}{\kappa_{xi} - \kappa_{xj}} + \frac{(\kappa_{xj})^{k-1}}{\kappa_{xj} - \kappa_{xi}} & \text{if } \kappa_{xi} \neq \kappa_{xj} \end{cases}.$$

[8] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), француски математичар, музичар и хемичар

Користећи симетрију имамо

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2\frac{(\kappa_{xi})^{k-1}}{\kappa_{xi}-\kappa_{xj}} = \sum_{1\leqslant j,i\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2\frac{(\kappa_{xj})^{k-1}}{\kappa_{xj}-\kappa_{xi}},$$

те је зато

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} S =& k(\varepsilon_x)^{k-2}\sum_{\kappa_{xi}\neq\kappa_{xj}} \varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2\frac{(\kappa_{xi})^{k-1}}{\kappa_{xi}-\kappa_{xj}}\\ &+\frac{1}{2}k(\varepsilon_x)^{k-2}\sum_{\kappa_{xi}=\kappa_{xj}} \varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2(k-1)(\kappa_{xi})^{k-2}.\end{aligned}$$

Са друге стране, једнакост (8.13) за $p=1$ доноси

$$\operatorname{Tr}(L_2) = k(\varepsilon_X)^{k-1}\varepsilon_Y C_k = k\frac{\varepsilon_Y}{\varepsilon_X}\operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X)^k = k(\varepsilon_x)^{k-1}\varepsilon_y\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(\kappa_{xi})^k.$$

Ова једнакост, заједно са претходним рачунима, након дељења са $k(\varepsilon_x)^{k-2}$ даје

$$\begin{aligned}\varepsilon_x\varepsilon_y\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(\kappa_{xi})^k = \varepsilon_x\varepsilon_y\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\kappa_{yi}(\kappa_{xi})^{k-1} &+ \sum_{\kappa_{xi}\neq\kappa_{xj}} \varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2\frac{(\kappa_{xi})^{k-1}}{\kappa_{xi}-\kappa_{xj}}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{\kappa_{xi}=\kappa_{xj}} \varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2(k-1)(\kappa_{xi})^{k-2}.\end{aligned}$$

Можемо објединити чланове у односу на спектар $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ од $\varepsilon_x\mathcal{J}_{E_x}$ да бисмо добили

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant a\leqslant m}\lambda_a^{k-1}\left(\varepsilon_x\varepsilon_y\sum_{\kappa_{xi}=\lambda_a}(\kappa_{yi}-\lambda_a)+\sum_{b\neq a}\frac{1}{\lambda_a-\lambda_b}\sum_{\kappa_{xi}=\lambda_a}\sum_{\kappa_{xj}=\lambda_b}\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2\right)\\ &+\sum_{1\leqslant a\leqslant m}(k-1)\lambda_a^{k-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{\kappa_{xi}=\lambda_a}\sum_{\kappa_{xj}=\lambda_a}\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2\right)=0.\end{aligned}$$

Уколико поставимо

$$\begin{aligned}U_a &= \varepsilon_x\varepsilon_y\sum_{\kappa_{xi}=\lambda_a}(\kappa_{yi}-\lambda_a)+\sum_{b\neq a}\frac{1}{\lambda_a-\lambda_b}\sum_{\kappa_{xi}=\lambda_a}\sum_{\kappa_{xj}=\lambda_b}\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2,\\ W_a &= \frac{1}{2}\sum_{\kappa_{xi}=\lambda_a}\sum_{\kappa_{xj}=\lambda_a}\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2,\end{aligned}$$

тада наша једнакост постаје

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant m}\lambda_a^{k-1}U_a+\sum_{1\leqslant a\leqslant m}(k-1)\lambda_a^{k-2}W_a=0,$$

што за $1\leqslant k\leqslant 2m$ доводи до матричне једначине у следећем облику,

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_m & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_m^2 & 2\lambda_1 & \cdots & 2\lambda_m\\ \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_m^3 & 3\lambda_1^2 & \cdots & 3\lambda_m^2\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{2m-1} & \cdots & \lambda_m^{2m-1} & (2m-1)\lambda_1^{2m-2} & \cdots & (2m-1)\lambda_m^{2m-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1\\ \vdots\\ U_m\\ W_1\\ \vdots\\ W_m\end{pmatrix}=0.$$

Како је $(m+a)$-та колона извод a-те колоне, наш систем има детерминанту Δ изведену из Вандермондове детерминанте као

$$\Delta = \frac{\partial^m V(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \cdots \partial \xi_m}\bigg|_{\xi_1=\lambda_1,\dots,\xi_m=\lambda_m}.$$

Са друге стране имамо

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \xi_1, \dots, \xi_m) = \prod_a (\xi_a - \lambda_a) \prod_{a<b} (\lambda_b - \lambda_a) \prod_{a<b} (\xi_b - \xi_a) \prod_{a<b} (\xi_b - \lambda_a) \prod_{a<b} (\xi_a - \lambda_b),$$

где након $\frac{\partial}{\partial \xi_a}\big|_{\xi_a=\lambda_a}$ преживи само члан са изводом од $(\xi_a - \lambda_a)$. Зато је

$$\Delta = \prod_{a<b} (\lambda_b - \lambda_a) \prod_{a<b} (\lambda_b - \lambda_a) \prod_{a<b} (\lambda_b - \lambda_a) \prod_{a<b} (\lambda_a - \lambda_b) \neq 0,$$

и систем има јединствено тривијално решење $U_a = W_a = 0$ за свако $1 \leqslant a \leqslant m$. То нас доводи до наредне теореме коју је дао Андрејић 2006. године [3] (видети такође [15]), што је уопштење резултата који је оригинално изложио Ракић[9] 1998. године [102] (видети такође [103]), а покрива дефинитан случај.

Теорема 8.8. *Нека је R Осерманов алгебарски тензор кривине и нека је $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирана сопствена база у односу на $\mathcal{J}_{E_x}$. Тада за све $\lambda \in \mathbb{R}$ и $y \neq x$ важи*

$$\sum_{\kappa_{xi}=\lambda} \sum_{\kappa_{xj}=\lambda} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 0.$$

8.5 Лоренцов цвајштајн

Нека је R Лоренцов временски Осерманов алгебарски тензор кривине димензије $n \geqslant 3$. Посматрајмо јединични временски $T \in \mathcal{V}$. Како је $T^\perp \leqslant \mathcal{V}$ позитивно дефинитан потпростор, по Леми A.21 он има ортонормирану сопствену базу $(V_1, \dots, V_{n-1})$ у односу на $\widetilde{\mathcal{J}}_T$. Тада $\mathcal{J}_T V_i = \lambda_i V_i$ важи за $1 \leqslant i \leqslant n-1$, где су $0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ корени карактеристичног полинома $\det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_T)$ и зато не зависе од T. За произвољно $X = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i V_i \in T^\perp$ добијамо

$$\kappa(T, X) = \frac{g(\mathcal{J}_T(X), X)}{\varepsilon_T \varepsilon_X} = -\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2},$$

што повлачи ограничења

$$-\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \lambda_i \leqslant \kappa(T, X) \leqslant -\min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \lambda_i.$$

Секциона кривина недефинитних равни је ограничена, те из Теореме 6.10 следи да је κ константно. Гарсија-Рио, Купели и Васкез-Абал су искористили овај аргумент 1997. године [60] да би добили следећу теорему.

Теорема 8.9. *Лоренцов временски Осерманов алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.*

[9] Зоран Ракић (1964), српски математичар

Међутим, да би важила Теорема 8.9, довољно је претпоставити да је R цвајштајн уместо Осерманов. Нека је R цвајштајн алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. За произвољну ортонормирану базу и $1 \leqslant x \neq y \leqslant n$, користећи (8.12) и (8.10) из Теореме 8.6 имамо

$$2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{iyyj} + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = \varepsilon_x \varepsilon_y \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varepsilon_i \varepsilon_j ((R_{ixxj})^2 + (R_{iyyj})^2).$$

Одавде је

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varepsilon_i \varepsilon_j \left((R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y (\varepsilon_x R_{ixxj} - \varepsilon_y R_{iyyj})^2 \right) = 0,$$

што за $\varepsilon_x \varepsilon_y < 0$ постаје

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varepsilon_i \varepsilon_j \left((R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 + (R_{ixxj} + R_{iyyj})^2 \right) = 0.$$

Претпоставимо додатно да је $(\mathcal{V}, g)$ Лоренцов ($\operatorname{Ind} g = 1$), где $\varepsilon_x \varepsilon_y < 0$ повлачи да $\varepsilon_i = 1$ важи за свако $i \notin \{x, y\}$. Претходну суму растављамо на четири члана,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j \notin \{x,y\}} \varepsilon_i \varepsilon_j \left((R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 + (R_{ixxj} + R_{iyyj})^2 \right) \\
&+ \sum_{j \notin \{x,y\}} \left(\varepsilon_x \varepsilon_j ((R_{xyxj})^2 + (R_{xyyj})^2) + \varepsilon_y \varepsilon_j ((R_{yxyj})^2 + (R_{yxxj})^2) \right) \\
&+ \sum_{i \notin \{x,y\}} \left(\varepsilon_i \varepsilon_x ((R_{ixyx})^2 + (R_{iyyx})^2) + \varepsilon_i \varepsilon_y ((R_{iyxy})^2 + (R_{ixxy})^2) \right) \\
&+ \left(\varepsilon_x \varepsilon_x (R_{xyyx})^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y (R_{xyxy})^2 + \varepsilon_y \varepsilon_x (R_{yxyx})^2 + \varepsilon_y \varepsilon_y (R_{yxxy})^2 \right) = 0,
\end{aligned}$$

где сви чланови осим првог ишчезавају. Зато је

$$\sum_{i,j \notin \{x,y\}} \left((R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 + (R_{ixxj} + R_{iyyj})^2 \right) = 0,$$

те $R_{ixyj} + R_{iyxj} = 0$ и $R_{ixxj} + R_{iyyj} = 0$ важи за све $i, j \notin \{x, y\}$. Посебно, за $i = j$ имамо исте секционе кривине

$$\kappa(E_i, E_x) = \kappa_{ix} = \varepsilon_i \varepsilon_x R_{ixxi} = \varepsilon_i \varepsilon_y R_{iyyi} = \kappa_{iy} = \kappa(E_i, E_y),$$

кад год су i, x, y различити са $\varepsilon_x \varepsilon_y = -1$, на пример $\varepsilon_x = -1$.

Да комплетирамо доказ користимо наредни аргумент који је дао Андрејић 2018. године [9], а који значајно скраћује доказ, што претходни аутори нису уочили. Како је цвајштајн по дефиницији Ајнштајнов, за фиксирано x и $i \neq x$, једнакост (8.8) даје

$$C_1 = \kappa_{ix} + \sum_{y \neq i,x} \kappa_{iy} = \kappa_{ix} + \sum_{y \neq i,x} \kappa_{ix} = (n-1)\kappa_{ix},$$

одакле је $\kappa_{ix} = \kappa_{iy} = C_1/(n-1)$ за сваку ортонормирану базу, те R има константну секциону кривину. На овај начин добили смо следећу теорему коју су оригинално поставили Блажић[10], Бокан[11] и Гилки 1997. године [22].

Теорема 8.10. *Сваки Лоренцов цвајштајн алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.*

[10] Новица Блажић (1959–2005), српски математичар
[11] Неда Бокан (1947), српска математичарка

8.6 Цвајштајн подмногострукости

Постоји обимна литература посвећена изометријским имерзијама Ајнштајнових многострукости у просторним формама. Ако имерзија има велику кодимензију, онда велика флексибилност не даје блиску везу између унутрашње и спољашње геометрије многострукости. Међутим, са довољно малом кодимензијом смештања, веза између спољашње геометрије многострукости и њене кривине постаје јача.

Случај кодимензије један је добро познат од кад је Фијалкоу[12] [46, Теорема 7.1], дао класификацију Ајнштајнових хиперповрши у просторним формама (видети [41, Вежбање 8.4]). Занимљиво је истраживати подмногострукости веће кодимензије у просторним формама, где се сматра да чисто Ајнштајнов услов није довољно јак за неку смислену класификацију.

Многи аутори су наметали јаке додатне услове да би постигли неке резултате. На пример, минималне изометријске имерзије са кодимензијом два Ајнштајнових многострукости у просторним формама је класификовао Мацујама[13] [82] (видети [41]). Познато је да минимална изометријска имерзија Ајнштајнове многострукости у еуклидском простору има хомотетично Гаусово пресликавање (његова трећа основна форма је константни умножак метрике) [50, Пропозиција 1], док у случају кодимензије два мора бити потпуно геодезијска [50, Теорема 4].

Један природни услов који се разматра је равно нормално раслојење. Напоменимо да свака права изометријска имерзија са равним нормалним раслојењем Ајнштајнове многострукости у просторној форми јесте локално холономична [40, Теорема 1]. Из [36, Пропозиција 2], познато је да Ајнштајнова подмногострукост кодимензије два и димензије n у простору константне секционе кривине c има равно нормално раслојење у неким специјалним случајевима, конкретно за $\mathrm{Sc} \geqslant n(n-1)c$ осим ако је $\mathrm{Sc} = n(n-1)c$ док су све секционе кривине једнаке c [41, Вежбање 3.18].

Наша главна мотивација долази из рада који су 2022. године дали Ух[14], Ким[15], Николајевски и Пак[16] [45]. Они су доказали да повезана цвајштајн подмногострукост са равним нормалним раслојењем у просторној форми има константну секциону кривину (Теорема 8.11). Додатно, они су успели да докажу да је повезана цвајштајн подмногострукост кодимензије два у просторној форми има равно нормално раслојење, те зато има константну секциону кривину (Теорема 8.12).

Нека је M Ајнштајнова подмногострукост у простору константне кривине c. Нека су A^σ оператори облика у односу на ортонормирану базу ξ^σ нормалног простора N_pM у тачки $p \in M$. Како је $\mathrm{II}(X,Y) = \sum_\sigma g(\mathrm{II}(X,Y),\xi^\sigma)\xi^\sigma = \sum_\sigma g(A^\sigma X, Y)\xi^\sigma$, то из Гаусове једначине (7.9) имамо

$$\mathcal{J}_X Y = c\varepsilon_X Y - cg(X,Y)X + \sum_\sigma g(A^\sigma X, X)A^\sigma Y - \sum_\sigma g(A^\sigma X, Y)A^\sigma X,$$

одакле је

$$\mathcal{J}_X = c(\varepsilon_X \mathbb{1} - X \otimes X^\flat) + \sum_\sigma (g(A^\sigma X, X)A^\sigma - (A^\sigma X) \otimes (A^\sigma X)^\flat).$$

Посматрајмо нови тензор кривине $R' = R - cR^1$, где је R^1 тензор константне кривине 1. Овај трик само транслира сопствене вредности одговарајућег редукованог Јакобијевог оператора, те ако је R био k-штајн за неко природно k, онда је R' такође k-штајн, где важи

$$\mathcal{J}'_X = \sum_\sigma (g(A^\sigma X, X)A^\sigma - (A^\sigma X) \otimes (A^\sigma X)^\flat).$$

[12] Aaron Fialkow (1911-1999), амерички математичар
[13] Yoshio Matsuyama, јапански математичар
[14] Yunhee Euh, јужнокорејска математичарка
[15] Jihun Kim, јужнокорејски математичар
[16] JeongHyeong Park, јужнокорејска математичарка

Ако узмемо траг добијамо

$$\operatorname{Tr}\mathcal{J}'_X = \sum_\sigma (g(A^\sigma X, X)\operatorname{Tr}A^\sigma - (A^\sigma X)^\flat(A^\sigma X)) = \sum_\sigma (g(A^\sigma X, X)H^\sigma - g(A^\sigma X, A^\sigma X)),$$

где је $H^\sigma = \operatorname{Tr}A^\sigma$, а како је M Ајнштајнова, то постоји константа C_1 таква да је

$$\operatorname{Tr}\mathcal{J}'_X = C_1\varepsilon_X = g\left(\sum_\sigma (H^\sigma A^\sigma - (A^\sigma)^2)X, X\right).$$

Како је $\sum_\sigma (H^\sigma A^\sigma - (A^\sigma)^2) - C_1\,\mathbb{1}$ самоадјунгован, након поларизације, недегенерисаност скаларног производа повлачи

$$C_1\,\mathbb{1} = \sum_\sigma (H^\sigma A^\sigma - (A^\sigma)^2). \tag{8.16}$$

Са друге стране, ако означимо $T^{\sigma\tau} = \operatorname{Tr}(A^\sigma A^\tau)$, онда

$$\operatorname{Tr}(\mathcal{J}'_X)^2 = \operatorname{Tr}\sum_\sigma (g(A^\sigma X, X)A^\sigma - (A^\sigma X)\otimes(A^\sigma X)^\flat)\sum_\tau (g(A^\tau X, X)A^\tau - (A^\tau X)\otimes(A^\tau X)^\flat)$$

повлачи

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\mathcal{J}'_X)^2 = \sum_{\sigma,\tau}\Big(&g(A^\sigma X, X)g(A^\tau X, X)T^{\sigma\tau} + g(A^\sigma X, A^\tau X)^2\\ &- g(A^\sigma X, X)g(A^\tau A^\sigma A^\tau X, X) - g(A^\tau X, X)g(A^\sigma A^\tau A^\sigma X, X)\Big).\end{aligned} \tag{8.17}$$

Теорема 8.11. *Повезана Риманова цвајштајн подмногострукост са равним нормалним раслојењем у просторној форми има константну кривину.*

Доказ. На основу Ричијеве једначине (7.10) имамо $R^\perp(X, Y, \xi^\sigma, \xi^\tau) = g([A^\sigma, A^\tau]X, Y)$, што значи да се оператор нормалне кривине $\mathcal{R}^\perp$ анулира ако сви оператори облика комутирају. Зато, уколико подмногострукост има равно нормално раслојење онда су сви оператори облика у произвољној тачки симултано дијагонализабилни у односу на неку ортонормирану базу $(e_1, \dots e_n)$, што даје $A^\sigma e_i = \lambda_i^\sigma e_i$ за неко $\lambda_i^\sigma \in \mathbb{R}$. Како је M цвајштајн, то постоји константа C_2 таква да је $\operatorname{Tr}(\mathcal{J}'_X)^2 = C_2(\varepsilon_X)^2$.

Ако применимо једнакост (8.16) на e_i, добијамо

$$C_1 = \sum_\sigma (H^\sigma\lambda_i^\sigma - (\lambda_i^\sigma)^2), \tag{8.18}$$

док иста замена у једнакост (8.17) даје

$$C_2 = \sum_{\sigma,\tau}(T^{\sigma\tau}\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau - (\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau)^2). \tag{8.19}$$

Са друге стране, ако заменимо $X = e_i + e_j$ у (8.17), имамо

$$\begin{aligned}4C_2 = \sum_{\sigma,\tau}\Big(&T^{\sigma\tau}(\lambda_i^\sigma + \lambda_j^\sigma)(\lambda_i^\tau + \lambda_j^\tau) + (\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau + \lambda_j^\sigma\lambda_j^\tau)^2\\ &- (\lambda_i^\sigma + \lambda_j^\sigma)(\lambda_i^\tau\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau + \lambda_j^\tau\lambda_j^\sigma\lambda_j^\tau) - (\lambda_i^\tau + \lambda_j^\tau)(\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau\lambda_i^\sigma + \lambda_j^\sigma\lambda_j^\tau\lambda_j^\sigma)\Big),\end{aligned}$$

те ако одузмемо једнакост (8.19) као и одговарајућу једнакост за $i = j$, добијамо

$$2C_2 = \sum_{\sigma,\tau}\Big(T^{\sigma\tau}(\lambda_i^\sigma\lambda_j^\tau + \lambda_j^\sigma\lambda_i^\tau) + 2\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau\lambda_j^\sigma\lambda_j^\tau - (\lambda_i^\sigma\lambda_j^\tau\lambda_j^\sigma\lambda_j^\tau + \lambda_j^\sigma\lambda_i^\tau\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau) - (\lambda_i^\tau\lambda_j^\sigma\lambda_j^\tau\lambda_j^\sigma + \lambda_j^\tau\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau\lambda_i^\sigma)\Big),$$

док симетрија по σ и τ (због $T^{\sigma\tau} = T^{\tau\sigma}$) даје

$$C_2 = \sum_{\sigma,\tau} \Big(T^{\sigma\tau}\lambda_i^\sigma\lambda_j^\tau + \lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma\lambda_i^\tau\lambda_j^\tau - \lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma(\lambda_j^\tau)^2 - \lambda_j^\sigma\lambda_i^\sigma(\lambda_i^\tau)^2 \Big).$$

Одатле, како важи $\sum_j \lambda_j^\sigma = \operatorname{Tr} A^\sigma = H^\sigma$ и $\sum_j \lambda_j^\sigma\lambda_j^\tau = \operatorname{Tr} A^\sigma A^\tau = T^{\sigma\tau}$, уз помоћ (8.18) имамо

$$\sum_{\sigma,\tau,j} \lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma(\lambda_j^\tau)^2 = \sum_{\sigma,j} \lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma \sum_\tau (\lambda_j^\tau)^2 = \sum_{\sigma,j,\tau} H^\tau\lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma\lambda_j^\tau - C_1 \sum_{\sigma,j} \lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma = \sum_{\sigma,\tau} H^\tau T^{\sigma\tau}\lambda_i^\sigma - C_1 \sum_\sigma H^\sigma\lambda_i^\sigma,$$

$$\sum_{\sigma,\tau,j} \lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma(\lambda_i^\tau)^2 = \sum_{\sigma,j} \lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma \sum_\tau (\lambda_i^\tau)^2 = \sum_{\sigma,j,\tau} H^\tau\lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma\lambda_i^\tau - C_1 \sum_{\sigma,j} \lambda_i^\sigma\lambda_j^\sigma = \sum_{\sigma,\tau} H^\sigma H^\tau\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau - C_1 \sum_\sigma H^\sigma\lambda_i^\sigma,$$

те је зато

$$\sum_j C_2 = \sum_{\sigma,\tau} \Big(H^\tau T^{\sigma\tau}\lambda_i^\sigma + T^{\sigma\tau}\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau - H^\tau T^{\sigma\tau}\lambda_i^\sigma - H^\sigma H^\tau\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau \Big) + 2C_1 \sum_\sigma H^\sigma\lambda_i^\sigma,$$

што доноси

$$nC_2 = \sum_{\sigma,\tau} (T^{\sigma\tau} - H^\sigma H^\tau)\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau + 2C_1 \sum_\sigma H^\sigma\lambda_i^\sigma.$$

Одузимањем једнакости (8.19) и коришћењем (8.18) добијамо

$$\begin{aligned}(n-1)C_2 &= 2C_1 \sum_\sigma H^\sigma\lambda_i^\sigma - \sum_{\sigma,\tau} (H^\sigma H^\tau\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau - (\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau)^2) \\ &= 2C_1(C_1 + \sum_\sigma (\lambda_i^\sigma)^2) - (C_1 + \sum_\sigma (\lambda_i^\sigma)^2)(C_1 + \sum_\tau (\lambda_i^\tau)^2) + \sum_{\sigma,\tau} (\lambda_i^\sigma\lambda_i^\tau)^2 = (C_1)^2.\end{aligned}$$

Међутим, ако су $0, \lambda_1^X, \dots, \lambda_{n-1}^X$ (реалне) сопствене вредности од $\mathcal{J}_X'$, тада неједнакост између аритметичке и квадратне средине даје

$$(C_1\varepsilon_X)^2 = (\operatorname{Tr} \mathcal{J}_X')^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^X \Big)^2 \leqslant (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^X)^2 = (n-1) \operatorname{Tr}(\mathcal{J}_X')^2 = (n-1)C_2(\varepsilon_X)^2,$$

и последично $\lambda_1^X = \cdots = \lambda_{n-1}^X$, што значи да R' има константну кривину $C_1/(n-1)$. Одавде је

$$\mathcal{J}_X = \left(c + \frac{C_1}{n-1} \right) (\varepsilon_X \mathbb{1} - X \otimes X^\flat),$$

те R има константну кривину. □

Претпоставимо да M има димензију n и кодимензију 2. Нека су $(e_1^1, \dots, e_n^1)$ и $(e_1^2, \dots, e_n^2)$ ортонормиране базе које дијагонализују самоадјунговане операторе A^1 и A^2. Другим речима, постоје $\lambda_i^1, \lambda_i^2 \in \mathbb{R}$ тако да $A^1 e_i^1 = \lambda_i^1 e_i^1$ и $A^2 e_i^2 = \lambda_i^2 e_i^2$ важе за свако $1 \leqslant i \leqslant n$. За произвољан јединични вектор $X = \sum_i a_i^1 e_i^1 = \sum_i a_i^2 e_i^2$, Ајнштајнов услов (8.16) даје

$$C_1 = \sum_i (a_i^1)^2 \lambda_i^1 (H^1 - \lambda_i^1) + \sum_i (a_i^2)^2 \lambda_i^2 (H^2 - \lambda_i^2),$$

где је $1 = \sum_i (a_i^1)^2 = \sum_i (a_i^2)^2$.

Почевши са $m^1 = \min_i \lambda_i^1 (H^1 - \lambda_i^1)$ и $m^2 = \max_i \lambda_i^2 (H^2 - \lambda_i^2)$ можемо лако закључити $C_1 = m^1 + m^2$. Међутим, $\lambda_i^\sigma (H^\sigma - \lambda_i^\sigma) = \lambda_j^\sigma (H^\sigma - \lambda_j^\sigma)$ важи за $\lambda_i^\sigma \neq \lambda_j^\sigma$ ако и само ако $\lambda_i^\sigma + \lambda_j^\sigma = H^\sigma$. Ако означимо

$$\mathcal{M}_\lambda^\sigma = \operatorname{Ker}(A^\sigma - \lambda \mathbb{1}),$$

онда је лако видети да за $\lambda_x^1(H^1-\lambda_x^1)=m^1$ и $\lambda_y^2(H^2-\lambda_y^2)=m^2$ имамо

$$\mathcal{M}^1_{\lambda_x^1}+\mathcal{M}^1_{H^1-\lambda_x^1}=\operatorname{Ker}((A^\sigma)^2-H^\sigma A^\sigma+m^\sigma\,\mathbb{1})=\mathcal{M}^2_{\lambda_y^2}+\mathcal{M}^2_{H^2-\lambda_y^2},$$

те понављамо поступак за спектралну декомпозицију $T_pM=\bigoplus_\lambda\mathcal{M}^1_\lambda=\bigoplus_\lambda\mathcal{M}^2_\lambda$.

Зато су A^1 и A^2 симултано блок-дијагонални. Штавише, можемо уредити базу тако да су сви блокови са дијагонале величине или 1×1 или 2×2. На пример, у неком великом блоку можемо наћи јединичан $v\in\mathcal{M}^1_{\lambda_x^1}$ такав да важи

$$w=A^2v-g(A^2v,v)v\in\mathcal{M}^1_{H^1-\lambda_x^1},$$

где $A^2A^2v=H^2A^2v-m^2v$ повлачи да је A^2 инваријантно на $\operatorname{Span}\{v,w\}$, те можемо извући било 1×1 (ако је $w=0$), било 2×2 (ако је $w\neq0$) блок, и затим поновити поступак.

Ако оператори облика A^1 и A^2 нису симултано дијагонализабилни, тада постоји 2×2 блок, те не умањујући општост имамо $A^\sigma e^\sigma_\tau=\lambda^\sigma_\tau e^\sigma_\tau$ за $1\leqslant\sigma,\tau\leqslant2$, где важи $\operatorname{Span}\{e^1_1,e^1_2\}=\operatorname{Span}\{e^2_1,e^2_2\}$ и $\lambda^\sigma_1+\lambda^\sigma_2=H^\sigma$. Ако укључимо пресликавање преласка између база добијамо рестрикције оператора облика у односу на базу (e^1_1,e^1_2) као блокове

$$\begin{pmatrix}\lambda^1_1&0\\0&\lambda^1_2\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\begin{pmatrix}c^2\lambda^2_1+s^2\lambda^2_2&sc(\lambda^2_2-\lambda^2_1)\\sc(\lambda^2_2-\lambda^2_1)&s^2\lambda^2_1+c^2\lambda^2_2\end{pmatrix},$$

где је $s=\sin t, c=\cos t$ за неко $t\in\mathbb{R}$. Ако означимо

$$\alpha=\frac{\lambda^1_1-\lambda^1_2}{2},\quad\beta=(c^2-s^2)\frac{\lambda^2_1-\lambda^2_2}{2},\quad\gamma=sc(\lambda^2_2-\lambda^2_1),$$

онда су наши блокови еквивалентни са

$$\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&-\alpha\end{pmatrix}+\frac12H^1\,\mathbb{1}\quad\text{и}\quad\begin{pmatrix}\beta&\gamma\\\gamma&-\beta\end{pmatrix}+\frac12H^2\,\mathbb{1}\,.$$

Не умањујући општост, можемо претпоставити $H^2=0$ ротирањем ортонормиране базе (ξ^1,ξ^2) у нормалном простору. Зато, ако означимо $2h=H^1$ тада наши блокови постају

$$\begin{pmatrix}h+\alpha&0\\0&h-\alpha\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\begin{pmatrix}\beta&\gamma\\\gamma&-\beta\end{pmatrix},$$

где важи $\alpha\gamma\neq0$ и $C_1=h^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$. Претходни резултат је заправо еквивалентан Леми из [45].

Није тешко израчунати $T^{11}+T^{22}$, где сваки 2×2 блок доноси $2(h^2+\alpha^2)+2(\beta^2+\gamma^2)=4h^2-2C_1$, док сваки 1×1 блок, са $A^1e_i=\mu e_i$ и $A^2e_i=\nu e_i$, доноси $\mu^2+\nu^2=2h\mu-C_1$, те је укупна сума једнака $2h\operatorname{Tr}A^1-nC_1$. Одавде долазимо до једнакости

$$T^{11}+T^{22}=4h^2-nC_1. \tag{8.20}$$

Почнимо са једнакости (8.17). Ако поставимо $X = xe_1^1 + ye_2^1$, онда

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X')^2 =&((h+\alpha)x^2+(h-\alpha)y^2)^2T^{11}+((h+\alpha)^2x^2+(h-\alpha)^2y^2)^2\\&-2((h+\alpha)x^2+(h-\alpha)y^2)((h+\alpha)^3x^2+(h-\alpha)^3y^2)\\&+2((h+\alpha)x^2+(h-\alpha)y^2)(\beta x^2+2\gamma xy-\beta y^2)T^{12}\\&+2((h+\alpha)\beta x^2+2h\gamma xy-(h-\alpha)\beta y^2)^2\\&-2((h+\alpha)x^2+(h-\alpha)y^2)(((h+\alpha)\beta^2+(h-\alpha)\gamma^2)x^2\\&+4\alpha\beta\gamma xy+((h+\alpha)\gamma^2+(h-\alpha)\beta^2)y^2)\\&-2(\beta x^2+2\gamma xy-\beta y^2)((h+\alpha)^2\beta x^2+2(h^2-\alpha^2)\gamma xy-(h-\alpha)^2\beta y^2)\\&+(\beta x^2+2\gamma xy-\beta y^2)^2T^{22}+(\beta^2+\gamma^2)^2(x^2+y^2)^2\\&-2(\beta x^2+2\gamma xy-\beta y^2)(\beta^2+\gamma^2)(\beta x^2+2\gamma xy-\beta y^2)\end{aligned}$$

важи за све $x, y \in \mathbb{R}$. Траг квадрата је облика $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X')^2 = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4$, те можемо израчунати коефицијенте $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$.

Коефицијенти од x^3y и xy^3 су

$$\begin{aligned}B =&4(h+\alpha)\gamma T^{12}+8(h+\alpha)h\beta\gamma-8(h+\alpha)\alpha\beta\gamma\\&-4(h^2-\alpha^2)\beta\gamma-4(h+\alpha)^2\beta\gamma+4\beta\gamma T^{22}-8(\beta^2+\gamma^2)\beta\gamma,\\D =&4(h-\alpha)\gamma T^{12}-8(h-\alpha)h\beta\gamma-8(h-\alpha)\alpha\beta\gamma\\&+4(h^2-\alpha^2)\beta\gamma+4(h-\alpha)^2\beta\gamma-4\beta\gamma T^{22}+8(\beta^2+\gamma^2)\beta\gamma,\end{aligned}$$

те зато имамо

$$\begin{aligned}B/4 &= (h+\alpha)\gamma T^{12}+\beta\gamma T^{22}-2h\alpha\beta\gamma-2(\beta^2+\gamma^2+\alpha^2)\beta\gamma,\\D/4 &= (h-\alpha)\gamma T^{12}-\beta\gamma T^{22}-2h\alpha\beta\gamma+2(\beta^2+\gamma^2+\alpha^2)\beta\gamma,\end{aligned}$$

што доноси

$$\frac{B+D}{8\gamma} = h(T^{12}-2\alpha\beta), \tag{8.21}$$

$$\frac{B-D}{8\gamma} = \alpha(T^{12}-2\alpha\beta)+\beta(T^{22}-2(\beta^2+\gamma^2)). \tag{8.22}$$

Коефицијенти од x^4 и y^4 су

$$\begin{aligned}A =&(h+\alpha)^2T^{11}+(h+\alpha)^4-2(h+\alpha)^4\\&+2(h+\alpha)\beta T^{12}+2(h+\alpha)^2\beta^2-2(h+\alpha)((h+\alpha)\beta^2+(h-\alpha)\gamma^2)-2(h+\alpha)^2\beta^2\\&+\beta^2T^{22}+(\beta^2+\gamma^2)^2-2(\beta^2+\gamma^2)\beta^2,\\E =&(h-\alpha)^2T^{11}+(h-\alpha)^4-2(h-\alpha)^4\\&-2(h-\alpha)\beta T^{12}+2(h-\alpha)^2\beta^2-2(h-\alpha)((h+\alpha)\gamma^2+(h-\alpha)\beta^2)-2(h-\alpha)^2\beta^2\\&+\beta^2T^{22}+(\beta^2+\gamma^2)^2-2(\beta^2+\gamma^2)\beta^2,\end{aligned}$$

те зато имамо

$$\begin{aligned}A =&(h+\alpha)^2T^{11}+2(h+\alpha)\beta T^{12}+\beta^2T^{22}-(h+\alpha)^4-2(h^2-\alpha^2)\gamma^2-2(h+\alpha)^2\beta^2+\gamma^4-\beta^4,\\E =&(h-\alpha)^2T^{11}-2(h-\alpha)\beta T^{12}+\beta^2T^{22}-(h-\alpha)^4-2(h^2-\alpha^2)\gamma^2-2(h-\alpha)^2\beta^2+\gamma^4-\beta^4,\end{aligned}$$

што доноси

$$\frac{A+E}{2} = C_1^2+(h^2+\alpha^2)(T^{11}-2(h^2+\alpha^2))+2\alpha\beta(T^{12}-2\alpha\beta)+\beta^2(T^{22}-2(\beta^2+\gamma^2)). \tag{8.23}$$

$$\frac{A-E}{2} = 2h\alpha(T^{11} - 2(h^2+\alpha^2)) + 2h\beta(T^{12} - 2\alpha\beta). \tag{8.24}$$

Коначно, коефицијент од x^2y^2 је

$$\begin{aligned} C =& 2(h+\alpha)(h-\alpha)T^{11} + 2(h+\alpha)^2(h-\alpha)^2 - 2(h+\alpha)(h-\alpha)^3 - 2(h-\alpha)(h+\alpha)^3 \\ &+ (-2(h+\alpha)\beta + 2(h-\alpha)\beta)T^{12} - 4(h+\alpha)(h-\alpha)\beta^2 + 8h^2\gamma^2 \\ &- 2(h+\alpha)((h+\alpha)\gamma^2 + (h-\alpha)\beta^2) - 2(h-\alpha)((h+\alpha)\beta^2 + (h-\alpha)\gamma^2) + 2(h-\alpha)^2\beta^2 \\ &+ 2(h+\alpha)^2\beta^2 - 8(h^2-\alpha^2)\gamma^2 + (-2\beta^2+4\gamma^2)T^{22} + 2(\beta^2+\gamma^2)^2 - 2(\beta^2+\gamma^2)(-2\beta^2+4\gamma^2), \end{aligned}$$

те зато имамо

$$\frac{C}{2} = (h^2-\alpha^2)T^{11} - 2\alpha\beta T^{12} + (2\gamma^2-\beta^2)T^{22} + C_1^2 - 2h^4 + 2\alpha^4 - 4\gamma^4 + \beta^2(4\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\gamma^2).$$

Заједно са (8.23) то даје $(A+E+C)/4 = h^2T^{11} + \gamma^2T^{22} + C_1^2 - 2h^2(h^2+\alpha^2) - 2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)$ што може бити записано као

$$\frac{A+E+C}{4} = C_1^2 + h^2(T^{11} - 2(h^2+\alpha^2)) + \gamma^2(T^{22} - 2(\beta^2+\gamma^2)). \tag{8.25}$$

Ако је M цвајштајн, тада постоји константа C_2 таква да је $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X')^2 = C_2(x^2+y^2)^2$, што даје $A = E = C_2$, $C = 2C_2$ и $B = D = 0$. У том случају ако уведемо краће ознаке $K^{11} = T^{11} - 2(h^2+\alpha^2)$, $K^{22} = T^{22} - 2(\beta^2+\gamma^2)$ и $K^{12} = T^{12} - 2\alpha\beta$, једнакости (8.21), (8.22), (8.23), (8.24) и (8.25) доносе

$$\begin{aligned} hK^{12} &= 0, \\ \alpha K^{12} + \beta K^{22} &= 0, \\ (h^2+\alpha^2)K^{11} + 2\alpha\beta K^{12} + \beta^2K^{22} &= C_2 - C_1^2, \\ 2h\alpha K^{11} + 2h\beta K^{12} &= 0, \\ h^2K^{11} + \gamma^2K^{22} &= C_2 - C_1^2, \end{aligned}$$

док (8.20) додатно даје $K^{11} + K^{22} = (2-n)C_1$.

Случај $h \neq 0$ је једноставан, јер најпре имамо $K^{12} = 0$, одакле је $K^{11} = 0$ и $\beta K^{22} = 0$, што даје $C_2 = C_1^2$, те и $K^{22} = 0$. Међутим, тада је $(2-n)C_1 = 0$, те због $n > 2$ следи $C_1 = 0$, као и $C_2 = 0$ (збир квадрата сопствених вредности Јакобијевог оператора једнак је нули), што повлачи $R' = 0$.

Преостаје случај $h = 0$ где претходне једнакости доносе

$$K^{11} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2\gamma^2}(C_2 - C_1^2), \quad K^{22} = \frac{1}{\gamma^2}(C_2 - C_1^2), \quad K^{12} = -\frac{\beta}{\alpha\gamma^2}(C_2 - C_1^2),$$

одакле следи

$$(2-n)C_1 = K^{11} + K^{22} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2\gamma^2}(C_2 - C_1^2) = \frac{-C_1}{\alpha^2\gamma^2}(C_2 - C_1^2),$$

те како је $C_1 \neq 0$ (иначе је $\alpha = \beta = \gamma = 0$), добијамо $C_2 - C_1^2 = (n-2)\alpha^2\gamma^2$.

Како је $H^1 = H^2 = 0$ можемо ротирати ортонормирану базу (ξ^1, ξ^2) у нормалном простору тако да добијемо $T^{12} = 0$, односно $K^{12} = -2\alpha\beta$, што даје $\beta(n-4) = 0$, а приде важи $K^{22} = (n-2)\alpha^2$ и $K^{11} = (n-2)(\beta^2+\gamma^2)$.

Случај $n = 4$ је Осерманов, док у случају $\beta = 0$ можемо дискутовати остале блокове. У случају да имамо 1×1 блок, постоји вектор e_3 такав да је $A^1 e_3 = \mu e_3$ и $A^2 e_3 = \nu e_3$. Тада из (8.17) рачунамо

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}'_{xe_1+ye_2+ze_3})^2 =&(\alpha x^2 - \alpha y^2 + \mu z^2)^2 T^{11} + (\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \mu^2 z^2)^2 \\ &- 2(\alpha x^2 - \alpha y^2 + \mu z^2)(\alpha^3 x^2 - \alpha^3 y^2 + \mu^3 z^2) \\ &+ 2(\mu\nu z^2)^2 - 2(\alpha x^2 - \alpha y^2 + \mu z^2)(-\alpha\gamma^2 x^2 + \alpha\gamma^2 y^2 + \mu\nu^2 z^2) \\ &- 2(2\gamma xy + \nu z^2)(-2\alpha^2\gamma xy + \mu^2\nu z^2) \\ &+ (2\gamma xy + \nu z^2)^2 T^{22} + (\gamma^2 x^2 + \gamma^2 y^2 + \nu^2 z^2)^2 - 2(2\gamma xy + \nu z^2)(2\gamma^3 xy + \nu^3 z^2).\end{aligned}$$

Коефицијент од xyz^2 је $4\gamma\nu(T^{22} - \mu^2 + \alpha^2 - \nu^2 - \gamma^2) = 0$, али како је $T^{22} = \mu^2 + \nu^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = 2\gamma^2 < T^{22}$ контрадикторно, добијамо $\nu = 0$. Сада, једначењем коефицијената од $x^2 z^2$ и $y^2 z^2$ имамо $4\alpha\mu(T^{11} - \mu^2 - \alpha^2 - \gamma^2) = 0$, али због $\mu \neq 0$ добијамо контрадикцију $T^{11} = 2\alpha^2 < T^{11}$.

Коначно, случај још једног 2×2 блока укључује векторе e_3 и e_4 тако да за њих важи $A^1 e_3 = \alpha' e_3$, $A^1 e_4 = -\alpha' e_4$, $A^2 e_3 = \gamma' e_4$, $A^2 e_4 = \gamma' e_3$. Коефицијент од $xyzw$ у $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}'_{xe_1+ye_2+ze_3+we_4})^2$ је $T^{22} + \alpha^2 - \gamma^2 + \alpha'^2 - \gamma'^2 = 0$, те зато имамо контрадикцију $T^{22} = \gamma^2 - \alpha^2 + \gamma'^2 - \alpha'^2 < T^{22}$.

Сумирајући, добијамо наредну теорему из [45]. Напоменимо да се наш доказ разликује од оригинала, захваљујући разним додатним стварима које смо приметили.

Теорема 8.12. *Повезана цвајштајн подмногострукост кодимензије два у просторним формама има равно нормално раслојење, те зато има константну кривину.*

Глава 9

ПРИНЦИП ДУАЛНОСТИ

9.1 Принцип дуалности

Нека је R Осерманов алгебарски тензор кривине на позитивно дефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. За јединичне векторе $X, Y \in \mathcal{V}$ природно се јавља импликација

$$\mathcal{J}_X Y = \lambda Y \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}_Y X = \lambda X, \tag{9.1}$$

која значајно може упростити неке рачуне. За јединичан $X \in \mathcal{V}$, Лема A.21 даје ортонормирану сопствену базу $(E_1, \ldots, E_{n-1})$ у $X^\perp$ такву да $\mathcal{J}_X E_i = \lambda_i E_i$ важи за $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Произвољно $Y = \sum_{i=1}^{n-1} a_i E_i \in X^\perp$ задовољава $g(\mathcal{J}_X Y, Y) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \lambda_i$, те се све секционе кривине налазе између $\min_i \lambda_i$ и $\max_i \lambda_i$, при чему достижу ове екстремне вредности тачно тада кад су X и Y један другом сопствени вектори. Због тога тврђење (9.1) важи кад је λ екстремна (минимум или максимум) сопствена вредност Јакобијевог оператора, што је искористио Чи 1988. године [34, Лема 3]. Штавише, Ракић је искористио импликацију (9.1) да формулише и докаже принцип дуалности 1998. године [102, 103].

Међутим, у недефинитном случају импликација (9.1) је непрецизна у случају да X и Y припадају различитим јединичним псеудо-сферама. Стање се исправља у складу са Теоремом 8.2 помоћу наредне импликације коју је дао Андрејић 2006. године [3] (видети такође [15]),

$$\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X. \tag{9.2}$$

Због компатибилности $g(\mathcal{J}_Y X, X) = g(\mathcal{J}_X Y, Y)$, кадгод су X и Y један другом сопствени вектори, одговарајуће сопствене вредности су исте, те из (9.2) можемо искључити λ увођењем еквивалентне импликације,

$$Y \text{ је сопствени вектор од } \mathcal{J}_X \quad \Longrightarrow \quad X \text{ је сопствени вектор од } \mathcal{J}_Y. \tag{9.3}$$

Важно је (поготово ако се бавимо обратним проблемом из Секције 9.5) испитати оптимално продужење за наш (X, Y) домен из (9.3). Користимо три врсте дуалности у зависности од тог домена. Ако (9.3) важи за међусобно ортогоналне јединичне X и Y, као што је то случај у оригиналној дефиницији (видети Ракић [102, 103]), кажемо да је R ***слабо Јакоби-дуалан***. Ако (9.3) важи за све $X, Y \in \mathcal{V}$ са $\varepsilon_X \neq 0$, кажемо да је R ***Јакоби-дуалан*** или да R ***задовољава принцип дуалности*** (видети Андрејић и Ракић [16]). Коначно, ако (9.3) важи са једином рестрикцијом $X \neq 0$ (концепт у којем импликација (9.2) нема рестрикције на X и Y), кажемо да је R ***потпуно Јакоби-дуалан***.

По дефиницији, потпуно Јакоби-дуалан повлачи Јакоби-дуалан, док Јакоби-дуалан повлачи слабо Јакоби-дуалан. Размотримо друге везе између ових дуалних особина. Како је

$$\mathcal{J}_{X/\sqrt{|\varepsilon_X|}}(Y/\sqrt{|\varepsilon_Y|}) = \varepsilon_{X/\sqrt{|\varepsilon_X|}} \lambda (Y/\sqrt{|\varepsilon_Y|})$$

еквивалентно са $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ (множење са $|\varepsilon_X|\sqrt{|\varepsilon_Y|} \neq 0$), имамо праволинијско продужење са јединичних на дефинитне векторе. Услов међусобне ортогоналности лако се уклања коришћењем наредне леме коју је изложио Андрејић 2010. године [5, Лема 2].

Лема 9.1. *Ако имплификација* (9.2) *важи за све међусобно ортогоналне X и Y са $\varepsilon_X \neq 0$, тада она важи са једином рестрикцијом $\varepsilon_X \neq 0$.*

Доказ. Претпоставимо да је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ за $\varepsilon_X \neq 0$ са $g(X,Y) \neq 0$. Ортогонална декомпозиција $Y = \alpha X + Z$ са $g(Z,X) = 0$ повлачи $\alpha \neq 0$. Како је

$$0 = g(\mathcal{J}_X X, \alpha X + Z) = g(\mathcal{J}_X(\alpha X + Z), X) = g(\varepsilon_X \lambda(\alpha X + Z), X) = g(\varepsilon_X \lambda \alpha X, X) = (\varepsilon_X)^2 \alpha \lambda,$$

то $\varepsilon_X \neq 0$ и $\alpha \neq 0$ повлаче $\lambda = 0$. Одавде је $\mathcal{J}_X Z = \mathcal{J}_X(\alpha X + Z) = \varepsilon_X \lambda(\alpha X + Z) = 0$, те због $g(Z,X) = 0$ и $\varepsilon_X \neq 0$, претпоставке леме дају $\mathcal{J}_Z X = 0$. Добијамо

$$\mathcal{J}_Y X = \mathcal{J}_{\alpha X + Z}(X) = \alpha \mathcal{R}(X,Z)X + \mathcal{R}(X,Z)Z = -\alpha \mathcal{J}_X Z + \mathcal{J}_Z X = 0,$$

што доказује $\mathcal{J}_Y X = 0 = \varepsilon_Y \lambda X$. □

У случају да је R Јакоби-дијагонализабилан, наш домен се еквивалентно може продужити на све $X, Y \in \mathcal{V}$ са $\varepsilon_X \neq 0$, што је изложио Андрејић 2006. године [3, Теорема 3.1] (видети такође [15, Теорема 3.2] и [5, Теорема 2]).

Теорема 9.2. *Ако је R Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине, тада је R Јакоби-дуалан ако и само ако је слабо Јакоби-дуалан.*

Доказ. Претпоставимо да важи $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$, $g(X,Y) = 0$, $\varepsilon_X \neq 0$ и $\varepsilon_Y = 0$. Како је R Јакоби-дијагонализабилан то је $\mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1}) \ni Y$ (уопштени) сопствени простор. По Леми A.22 он је недегенерисан, те Лема 4.10 дозвољава декомпозицију $Y = S + T$, тако да важи $S, T \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1})$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T = 1$. За $\theta^2 \neq 1$, $S + \theta T$ је дефинитно због $\varepsilon_{S+\theta T} = \varepsilon_S + \theta^2 \varepsilon_T = (1 - \theta^2) \neq 0$. Вектори $S + \theta T$, S и T су дефинитни, ортогонални на X, сопствени вектори од $\mathcal{J}_X$ који одговарају сопственој вредности $\varepsilon_X \lambda$, те слаба Јакоби-дуалност даје

$$\mathcal{J}_{S+\theta T} X = \varepsilon_{S+\theta T} \lambda X, \quad \mathcal{J}_S X = \varepsilon_S \lambda X, \quad \mathcal{J}_T X = \varepsilon_T \lambda X.$$

Одавде је

$$\varepsilon_{S+\theta T} \lambda X = \mathcal{J}_{S+\theta T} X = \mathcal{J}_S X + \theta^2 \mathcal{J}_T X + 2\theta \mathcal{J}(S,T)X = \varepsilon_S \lambda X + \theta^2 \varepsilon_T \lambda X + 2\theta \mathcal{J}(S,T)X,$$

што за свако $\theta \notin \{-1, 0, 1\}$ повлачи $\mathcal{J}(S,T)X = 0$. Тада је

$$\mathcal{J}_Y X = \mathcal{J}_{S+T} X = \mathcal{J}_S X + \mathcal{J}_T X + 2\mathcal{J}(S,T)X = \varepsilon_S \lambda X + \varepsilon_T \lambda X = 0 = \varepsilon_Y \lambda X,$$

што доказује (9.2) за $X \perp Y$ и $\varepsilon_X \neq 0$. Коначно, Лема 9.1 уклања услов $X \perp Y$. □

Нека је R Јакоби-дијагонализабилан Осерманов алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. За свако фиксирано јединично $X = E_x \in \mathcal{V}$ постоји ортонормирана сопствена база $(E_1, \ldots, E_n)$ за $\mathcal{V}$ у односу на $\mathcal{J}_X$. За сваки корен $\lambda \in \mathbb{R}$ од $\det(\varepsilon_X \lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X)$, постављамо $\Lambda = \{1 \leqslant j \leqslant n : \varepsilon_x \varepsilon_j R_{xjjx} = \lambda\}$ и примењујемо Теорему 8.8, те добијамо

$$\sum_{i,j \in \Lambda} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 0,$$

за све $1 \leqslant y \neq x \leqslant n$.

Под претпоставком да $\mathcal{J}_X$ нема изотропних сопствених вектора, сваки сопствени простор састоји се од вектора који су истог типа, $\varepsilon_i\varepsilon_j = 1$ важи за $i,j \in \Lambda$, што повлачи $\sum_{i,j\in\Lambda}(R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 0$. Одавде важи $R_{ixyj} + R_{iyxj} = 0$ за све $i,j \in \Lambda$, те посебно за $i = j$ имамо $R_{ixyi} = 0$ за свако $i \in \Lambda$. Како је свако z у неком Λ имамо $R_{xzzy} = 0$ за све $y \neq x$, те зато услов $\mathcal{J}_{E_x}E_z = \varepsilon_x\lambda E_z$ повлачи $\mathcal{J}_{E_z}E_x = \sum_p \varepsilon_p R_{xzzp}E_p = \varepsilon_x R_{xzzx}E_x = \varepsilon_z\lambda E_x$, што доказује да је R Јакоби-дуалан.

Теорема 9.3. *Нека је R Јакоби-дијагонализабилан Осерманов алгебарски тензор кривине такав да $\mathcal{J}_X$ нема изотропних сопствених вектора за све јединичне X. Тада је R Јакоби-дуалан.*

Теорему 9.3 је поставио Андрејић 2006. године [3, Теорема 3.4] (видети такође [15, Последица 3.5]) и она има значајне последице. На пример, Осерманов R са свим различитим сопственим вредностима за Јакобијев оператор је обавезно Јакоби-дијагонализабилан са једнодимензионим сопственим просторима, те је зато Јакоби-дуалан. Приметимо да се ово тврђење пре може видети као последица Теореме 8.7, неголи Теореме 8.8.

У сваком случају, најзначајнија последица долази у дефинитном случају, кад изотропни вектори не постоје и свако R је Јакоби-дијагонализабилно. Зато је сваки Риманов Осерманов R Јакоби-дуалан, штавише он је потпуно Јакоби-дуалан. Напоменимо да је ово важно тврђење (заправо чињеницу да је Риманов Осерманов R слабо Јакоби-дуалан) први доказао Ракић 1998. године [102, Теорема 2.5] [103, Теорема 1.1], док је касније другачији доказ изложио Гилки 2001. године [54, Теорема 3.1.2].

Теорема 9.4. *Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине је потпуно Јакоби-дуалан.*

9.2 Квази-Клифордов тензор кривине

Подсетимо се првих примера алгебарских тензора кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. У питању су били R^1 из (6.14) и R^J из (6.15), где је J косоадјунгован ендоморфизам на $\mathcal{V}$. Пример 6.6 показује да је линеарна комбинација

$$R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i R^{J_i} \tag{9.4}$$

алгебарски тензор кривине за косоадјунговане ендоморфизме $J_1, \ldots, J_m$ на $\mathcal{V}$, где имамо $\mu_j \in \mathbb{R}$ за $0 \leqslant j \leqslant m$.

Клифордова фамилија ранга m је антикомутативна фамилија косоадјунгованих комплексних структура J_i за $1 \leqslant i \leqslant m$. Алгебарске тензоре кривине облика (9.4) који су повезани са Клифордовом фамилијом увео је Гилки 1994. године [53] (видети такође [58]). Међутим, ми посматрамо уопштење у виду антикомутативне фамилије од J_i таквих да је $J_i^2 = c_i\,\mathbb{1}$ за неке $c_i \in \mathbb{R}$, што значи да уопштене Хурвицове релације,

$$J_iJ_j + J_jJ_i = 2c_i\delta_{ij}\,\mathbb{1}, \tag{9.5}$$

важе за $1 \leqslant i,j \leqslant m$. Кажемо да је алгебарски тензор кривине R ***квази-Клифордов*** ако је облика (9.4) тако да важе релације (9.5), што су увели Андрејић и Лукић[1] 2019. године [12]. Посебно, R је ***Клифордов*** ако је квази-Клифордов са $c_i = -1$ за свако $1 \leqslant i \leqslant m$.

Добро је познато да је Клифордов алгебарски тензор кривине Осерманов. Међутим, на основу резултата Николајевског [92, Секција 2], у дефинитном окружењу

[1] Катарина Лукић (1994), српска математичарка

важи обрат (сваки Риманов Осерманов R је Клифордов) у свим димензијама осим за $n = 16$, те и у многим случајевима где је $n = 16$.

Пођимо од квази-Клифордовог R и произвољног вектора $X \in \mathcal{V}$. Свако J_i је косоадјунговано што повлачи $g(J_iX, X) = 0$ и поједностављује рачун за Јакобијев оператор,

$$\mathcal{J}_X Y = \mathcal{R}(Y, X)X = \mu_0(g(X, X)Y - g(Y, X)X) + \sum_{i=1}^{m} 3\mu_i g(J_iY, X)J_iX,$$

одакле је

$$\mathcal{J}_X Y = \mu_0(\varepsilon_X Y - g(Y, X)X) - 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y, J_iX)J_iX. \tag{9.6}$$

Додатно, једнакост (9.5) повлачи $g(J_iX, J_jX) = 0$ и $\varepsilon_{J_iX} = -c_i\varepsilon_X$ за $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$. Ако означимо

$$\mathcal{F}_t = \{X, J_1X, \ldots, J_tX\}$$

за $1 \leqslant t \leqslant m$, тада добијамо

$$\mathcal{J}_X(J_iX) = \varepsilon_X(\mu_0 + 3c_i\mu_i)J_iX, \quad \mathcal{J}_X Z = \varepsilon_X\mu_0 Z,$$

за свако $1 \leqslant i \leqslant m$ и $Z \in \mathcal{F}_m^{\perp}$, одакле се виде сопствене вредности и сопствени вектори Јакобијевог оператора.

Важно је разликовати случај $c_i \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$ од случаја $c_i = 0$, $k < i \leqslant m$. За дефинитно X, скуп $\mathcal{F}_k$ састоји се од међусобно ортогоналних дефинитних сопствених вектора, те су $\operatorname{Span}\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{F}_k^{\perp}$ недегенерисани, док је $\operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k)$ потпуно изотропан потпростор. Из $\mathcal{F}_k^{\perp} \cap \operatorname{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k)^{\perp} \leqslant \operatorname{Ker}((\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^{\perp}} - \varepsilon_X\mu_0\,\mathbb{1})^n)$ следи

$$\mathcal{F}_k^{\perp} \cap \operatorname{Ker}((\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^{\perp}} - \varepsilon_X\mu_0\,\mathbb{1})^n)^{\perp} \leqslant \operatorname{Span}\{J_{k+1}X, \ldots, J_mX\},$$

али уопштени сопствени простор је недегенерисан (Лема A.22), као и његов ортогонал, који не може бити потпростор потпуно изотропног потпростора осим ако је тривијалан, што доноси $\operatorname{Ker}((\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^{\perp}} - \varepsilon_X\mu_0\,\mathbb{1})^n) = \mathcal{F}_k^{\perp}$. Зато је

$$\det\left(\lambda\,\mathbb{1} - \frac{1}{\varepsilon_X}\mathcal{J}_X\right) = \lambda(\lambda - \mu_0)^{n-k-1}\prod_{i=1}^{k}(\lambda - (\mu_0 + 3c_i\mu_i))$$

константно и на основу Теореме 8.2, R је Осерманов (видети Андрејић и Лукић 2019 [12, Теорема 2.1]).

Теорема 9.5. *Сваки квази-Клифордов алгебарски тензор кривине је Осерманов.*

Додатно, Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ има критичан део на $\mathcal{F}_k^{\perp}$, где имамо

$$\operatorname{Im}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^{\perp}} - \varepsilon_X\mu_0\,\mathbb{1}) \subseteq \operatorname{Span}\{J_{k+1}X, \ldots, J_mX\} \subseteq \operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^{\perp}} - \varepsilon_X\mu_0\,\mathbb{1}),$$

те важи нилпотентност у два корака, $(\mathcal{J}_X\restriction_{\mathcal{F}_k^{\perp}} - \varepsilon_X\mu_0\,\mathbb{1})^2 = 0$. Одавде следи да квази-Клифордов R не допушта Жорданове блокове величине веће од 2. Међутим, Пример 8.6 даје Жордан-Осерманов тензор кривине чија Жорданова нормална форма има Жорданов блок величине 3, што значи да обрат пада у сигнатури $(2, 2)$, где Осерманов R не мора бити квази-Клифордов.

Следимо аргументе које су дали Андрејић и Лукић 2019. године [12] (што је уопштење од Андрејић и Ракић 2015 [16]), у циљу провере да ли је квази-Клифордов $R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i R^{J_i}$ Јакоби-дуалан. Нека је $X \in \mathcal{V}$ дефинитно и претпоставимо да је

Y сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$, што значи да за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ важи $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$. Тада (9.6) повлачи

$$\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)Y = -\mu_0 g(Y,X)X - 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(Y,J_iX)J_iX, \tag{9.7}$$

док промена улога за X и Y у (9.6) доноси

$$\mathcal{J}_Y X = \mu_0(\varepsilon_Y X - g(X,Y)Y) - 3\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(X,J_iY)J_iY. \tag{9.8}$$

У случају $\lambda \neq \mu_0$, можемо изразити Y из (9.7) и добити

$$Y = \frac{-\mu_0 g(Y,X)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}X - 3\sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i g(Y,J_iX)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}J_iX. \tag{9.9}$$

Након замене у (9.8) имамо

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_Y X = \ & \mu_0\left(\varepsilon_Y X - g(X,Y)\left(\frac{-\mu_0 g(Y,X)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}X - 3\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j g(Y,J_jX)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}J_jX\right)\right)\\ & - 3\sum_{i=1}^{m}\mu_i g(X,J_iY)J_i\left(\frac{-\mu_0 g(Y,X)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}X - 3\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j g(Y,J_jX)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}J_jX\right),\end{aligned}$$

што повлачи

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_Y X = \ & \mu_0\left(\varepsilon_Y + \frac{\mu_0(g(X,Y))^2}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\right)X + \frac{3\mu_0 g(X,Y)}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\sum_{i=1}^{m}\mu_i\left(g(Y,J_iX)+g(X,J_iY)\right)J_iX\\ & + \frac{9}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX.\end{aligned}$$

Како је свако J_i косоадјунговано, средњи члан на десној страни нестаје. Додатно, како је $\mu_i\mu_j g(X,J_iY)g(Y,J_jX)J_iJ_jX + \mu_j\mu_i g(X,J_jY)g(Y,J_iX)J_jJ_iX = 0$ за $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$, то се последњи члан на десној страни редукује. Одавде добијамо

$$\mathcal{J}_Y X = \left(\mu_0\varepsilon_Y + \frac{\mu_0^2(g(X,Y))^2}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)} - \frac{9}{\varepsilon_X(\lambda-\mu_0)}\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2(g(Y,J_iX))^2c_i\right)X,$$

те је зато X сопствени вектор од $\mathcal{J}_Y$.

У супротном, имамо случај $\lambda = \mu_0$, те једнакост (9.7) постаје

$$\mu_0 g(Y,X)X + 3\sum_{i=1}^{m}\mu_i g(Y,J_iX)J_iX = 0. \tag{9.10}$$

Уколико раздвојимо $c_i \neq 0$ за $1 \leqslant i \leqslant k$ и $c_i = 0$ за $k < i \leqslant m$, тада је $\mathrm{Span}\{X, J_1X, \ldots, J_kX\}$ недегенерисан потпростор од $\mathcal{V}$ димензије $k+1$ који је ортогоналан на $\{J_{k+1}X, \ldots, J_mX\}$, за свако дефинитно X. За дефинитно X, из (9.10) имамо $\mu_i g(X,J_iY) = \mu_i g(Y,J_iX) = 0$ за $1 \leqslant i \leqslant k$ са $\mu_0 g(Y,X) = 0$, те преостаје $\sum_{i=k+1}^{m}\mu_i g(Y,J_iX)J_iX = 0$, док из (9.8) добијамо $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\mu_0 X - 3\sum_{i=k+1}^{m}\mu_i g(X,J_iY)J_iY$.

Случај $m = k+1$ даје $\mu_{k+1}g(Y,J_{k+1}X)J_{k+1}X = 0$, одакле свакако следи $\mu_{k+1}g(Y,J_{k+1}X) = 0$, те добијамо дуалност, $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y\mu_0 X$. Тако смо доказали наредну теорему (видети [12, Теорема 3.1]).

Теорема 9.6. *Сваки квази-Клифордов алгебарски тензор кривине са највише једним $c_i = 0$ је Јакоби-дуалан.*

Међутим, тврђење више није тачно уколико постоје бар два таква J_i са $c_i = 0$. Нека је $(T_1, \dots T_p, S_1, \dots, S_q)$ ортонормирана база квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ сигнатуре (p, q). Дефинишимо ендоморфизам J на $\mathcal{V}$ са

$$\begin{aligned} JT_1 = T_2 + S_2 = -JS_1, \quad -JT_2 = T_1 + S_1 = JS_2 \\ JT_3 = T_4 + S_4 = -JS_3, \quad -JT_4 = T_3 + S_3 = JS_4 \\ JT_5 = \dots = JT_p = JS_5 = JS_6 = \dots = JS_q = 0. \end{aligned}$$

Лако је проверити да је J косоадјунгован са $J^2 = 0$, те конструишемо алгебарски тензор кривине са $R = R^J$. За његов Јакобијев оператор по формули (9.6) важи $\mathcal{J}_X Y = -3g(Y, JX)JX$, одакле се види да му је карактеристични полином једнак λ^{p+q}. Уколико је $JX \neq 0$, онда Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ има има тачно један блок величине 2, док случај $JX = 0$ повлачи $\mathcal{J}_X = 0$ и таквих блокова нема. Ако поставимо $X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i T_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_j S_j$, видимо да је $JX = 0$ ако и само ако за свако $1 \leqslant i \leqslant 4$ важи $\alpha_i = \beta_i$, што се никад не дешава за дефинитно $X \in \mathrm{Span}\{T_1, \dots, T_4, S_1, \dots, S_4\}$, а увек за произвољно $X \in \mathrm{Span}\{T_5, \dots, T_p, S_5, \dots, S_q\}$. У случају $4 = p < q$, Осерманов алгебарски тензор кривине $R = R^J$ је временски Жордан-Осерманов, али није просторно Жордан-Осерманов, што личи на резултат који су дали Гилки и Иванова [56, Теорема 3] и Гилки [54, Секција 3.2].

Теорема 9.7. *Постоје временски Жордан-Осерманови алгебарски тензори кривине који нису просторно Жордан-Осерманови.*

Да бисмо направили пример квази-Клифордовог R који није Јакоби-дуалан, поред већ конструисаног косоадјунгованог ендоморфизма J са $J^2 = 0$, по Теореми 9.6, потребан нам је барем још један косоадјунговани ендоморфизам K са $K^2 = 0$, при чему је потребно обезбедити да постоји дефинитан X такав да су JX и KX линеарно зависни. Међутим, важно је обезбедити и да важи антикомутативност $JK = -KJ$. Уведимо додатни ендоморфизам K на $\mathcal{V}$ са

$$\begin{aligned} KT_1 = T_2 + S_2 = -KS_1, \quad -KT_2 = T_1 + S_1 = KS_2 \\ KT_5 = T_6 + S_6 = -KS_5, \quad -KT_6 = T_5 + S_5 = KS_6 \\ KT_3 = KT_4 = KT_7 = \dots = KT_p = KS_3 = KS_4 = KS_7 = \dots = KS_q = 0. \end{aligned}$$

Нови ендоморфизам је направљен по узору на J, при чему вектори T_3, T_4, S_3, S_4 мењају улоге са T_5, T_6, S_5, S_6, тим редом. Због тога је K такође косоадјунгован са $K^2 = 0$, при чему смо додатно обезбедили $JK = KJ = 0$ и тако решили питање антикомутативности. Уколико поставимо

$$R = R^J - R^K,$$

добијамо квази-Клифордов алгебарски тензор кривине, који је по Теореми 9.5 Осерманов.

Из (9.6) је $\mathcal{J}_X Y = 3(g(Y, KX)KX - g(Y, JX)JX)$. Како је $JT_1 = KT_1 = T_2 + S_2$, то имамо $\mathcal{J}_{T_1} Y = 0$ за свако $Y \in \mathcal{V}$. Са друге стране, за $Y = T_2 + \sqrt{2}S_4$ важи

$$g(Y, JT_1) = g(Y, KT_1) = g(T_2 + \sqrt{2}S_4, T_2 + S_2) = -1,$$

те је зато $\mathcal{J}_Y T_1 = 3(g(Y, JT_1)JY - g(Y, KT_1)KY) = -3\sqrt{2}(T_3 + S_3)$. Тако добијамо

$$\mathcal{J}_{T_1}(T_2 + \sqrt{2}S_4) = 0, \quad \mathcal{J}_{T_2 + \sqrt{2}S_4}(T_1) = -3\sqrt{2}(T_3 + S_3),$$

што показује да R није Јакоби-дуалан. Штавише, наш контрапример садржи међусобно ортогоналне јединичне векторе $X = T_1$ и $Y = T_2 + \sqrt{2}S_4$, тако да принцип дуалности не важи.

Теорема 9.8. *Постоји квази-Клифордов (и зато Осерманов) алгебарски тензор кривине који није Јакоби-дуалан.*

Први покушај конструкције примера Осермановог алгебарског тензора кривине који није Јакоби-дуалан објављен је 2019. године у [12, Теорема 3.2], где је K конструисано по узору на J тако да само S_4 и S_5 мењају улоге. Нажалост, овај оригинални пример не обезбеђује антикомутативност за J и K, те добијени тензор кривине није ни квази-Клифордов ни Осерманов. Међутим, идеја јесте добра и наши рачуни након увођења K су буквално идентични оригиналним.

9.3 Потпуна дуалност

Нека је R квази-Клифордов алгебарски тензор кривине из претходне секције. Косоадјунговани ендоморфизми са $J_i^2 = 0$ мењају Жорданову нормалну форму од $\mathcal{J}_X$ те зато нису одговарајући за принцип дуалности, што смо видели у Теореми 9.8. Уколико их уклонимо са $m = k$, преживеће само они J_i који су аутоморфизми. Не умањујући општост, уз рескалирање $(1/\sqrt{|c_i|})J_i$, можемо претпоставити $c_i \in \{-1, 1\}$, и рећи да је такво R ***полу-Клифордов***. Лако је видети да је полу-Клифордов R Јакоби-дијагонализабилан и последично Жордан-Осерманов.

Зато посматрамо фамилију $\{J_1, \ldots, J_k\}$ антикомутативних косоадјунгованих ортогоналних и антиортогоналних оператора на $\mathcal{V}$. Заправо, у питању су комплексне структуре ($c_i = -1$) и производ структуре ($c_i = 1$). Ваља напоменути да производ структуре J_i мењају сигнатуру због $\varepsilon_{J_iX} = -\varepsilon_X$, те зато свако полу-Клифордово R које није Клајново, јесте Клифордово.

Већ смо видели да је полу-Клифордов R Јакоби-дуалан, и наредни корак је истражити да ли је R потпуно Јакоби-дуалан. Андрејић и Ракић су 2015. године [16, Пропозиција 5.2] поставили довољан услов за потпуну Јакоби-дуалност.

Теорема 9.9. *Ако је полу-Клифордов алгебарски тензор кривине R генерисан полу-Клифордовом фамилијом $\{J_1, \ldots, J_m\}$, такав да је за свако изотропно X скуп $\{X, J_1X, \ldots, J_mX\}$ линеарно независан, онда је R потпуно Јакоби-дуалан.*

Доказ. По Теореми 9.6, сваки полу-Клифордов R је Јакоби-дуалан, што даје импликацију (9.2) за дефинитно X. У случају изотропног X, претпоставка да је Y сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$, по Теореми 8.4 даје $\mathcal{J}_XY = 0$. Тада једнакост (9.6) повлачи (9.10), где линеарна независност од $\mathcal{F}_m$, као и раније даје $\mu_i g(Y, J_iX) = 0$ за $1 \leqslant i \leqslant m$ са $\mu_0 g(Y, X) = 0$. Зато је $\mathcal{J}_YX = \varepsilon_Y \mu_0 X$, те је X сопствени вектор од $\mathcal{J}_Y$. □

Андрејић и Лукић су 2019. године [12] разматрали питање линеарне независности скупа $\mathcal{F}_m = \{X, J_1X, \ldots, J_mX\}$ за изотропан вектор X. Дискусија започиње следећом важном теоремом (видети [12, Теорема 4.1]).

Теорема 9.10. *Ако је $\theta_0X + \theta_1J_1X + \cdots + \theta_mJ_mX = 0$ за квази-Клифордову фамилију $\{J_1, \ldots, J_m\}$ са $J_i^2 = c_i\mathbb{1}, 1 \leqslant i \leqslant m$, и $\theta_0, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$, $X \neq 0$, тада је $\theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \cdots - c_m\theta_m^2 = 0$.*

Доказ. За свако $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \{0, 1\}^m$ дефинишемо ендоморфизам $J^\alpha = J_m^{\alpha_m} \ldots J_1^{\alpha_1}$ и $(-1)^\alpha = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m}$. Применом $(-1)^\alpha J^\alpha$ на једнакост

$$\theta_0X + \theta_1J_1X + \cdots + \theta_mJ_mX = 0,$$

добијамо $\sum_{i=0}^m (-1)^\alpha \theta_i J^\alpha J^{e_i} X = 0$, где смо поставили $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{im})$ са додатним $e_0 = (0, \ldots, 0)$, што значи $J^{e_i} = J_i$ и $J^{e_0} = \mathbb{1}$. Како $(-1)^\alpha J^\alpha J^{e_i} = (-1)^{\alpha_i + \cdots + \alpha_m}(c_i)^{\alpha_i} J^{\alpha \pm e_i}$ важи

за $1 \leqslant i \leqslant m$, где се $\alpha \pm e_i$ и α разликују само на i-том месту, то за свако $\alpha \in \{0,1\}^m$ добијамо једнакост

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{\alpha_i+\cdots+\alpha_m}(c_i)^{\alpha_i}\theta_i J^{\alpha\pm e_i}X = 0.$$

На овај начин добијен је хомогени систем од 2^m линеарних једначина са 2^m непознатих, $\sum_\beta M_{\alpha\beta}J^\beta X = 0$, где је

$$M_{\alpha\alpha} = (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}\theta_0,$$
$$M_{\alpha(\alpha\pm e_i)} = (-1)^{\alpha_i+\cdots+\alpha_m}(c_i)^{\alpha_i}\theta_i,$$

за $1 \leqslant i \leqslant m$, док је иначе $M_{\alpha\beta} = 0$. Посматрајмо матрицу M^2 и израчунајмо њене елементе,

$$(M^2)_{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}M_{\alpha\alpha} + M_{\alpha(\alpha\pm e_1)}M_{(\alpha\pm e_1)\alpha} + \cdots + M_{\alpha(\alpha\pm e_m)}M_{(\alpha\pm e_m)\alpha} = \theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \cdots - c_m\theta_m^2,$$
$$(M^2)_{\alpha(\alpha\pm e_i)} = M_{\alpha\alpha}M_{\alpha(\alpha\pm e_i)} + M_{\alpha(\alpha\pm e_i)}M_{(\alpha\pm e_i)(\alpha\pm e_i)} = 0,$$
$$(M^2)_{\alpha(\alpha\pm e_i\pm e_j)} = M_{\alpha(\alpha\pm e_i)}M_{(\alpha\pm e_i)(\alpha\pm e_i\pm e_j)} + M_{\alpha(\alpha\pm e_j)}M_{(\alpha\pm e_j)(\alpha\pm e_i\pm e_j)} = 0,$$

и $(M^2)_{\alpha\beta} = 0$ иначе. Зато је M^2 дијагонална матрица са

$$(\det M)^2 = \det(M^2) = (\theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \cdots - c_m\theta_m^2)^{2^m}.$$

За $\det M \neq 0$ систем има јединствено нула решење $X = J_1X = \cdots = J_mX = 0$, али како је $X \neq 0$ то је $\det M = 0$, што доказује теорему. □

У случају Клифордовог R, имамо $c_i = -1$ за свако $1 \leqslant i \leqslant m$, те Теорема 9.10 из услова $\theta_0X + \theta_1J_1X + \cdots + \theta_mJ_mX = 0$ повлачи $\theta_0^2 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_m^2 = 0$, што даје $\theta_i = 0$ за свако $0 \leqslant i \leqslant m$. Због тога је $\mathcal{F}_m$ линеарно независан скуп и по Теореми 9.9, R је потпуно Јакоби-дуалан (видети [12, Теорема 4.2]).

Теорема 9.11. *Сваки Клифордов алгебарски тензор кривине је потпуно Јакоби-дуалан.*

Међутим, постоје одређени проблеми у случају кад имамо $c_i = 1$ за неко i. Сваки полу-Клифордов R је по Теореми 9.6 Јакоби-дуалан, те ако желимо да испитамо да ли је R потпуно Јакоби-дуалан, довољно је проверити импликацију (9.2) за изотропно $X \in \mathcal{V}$. Почетни услов за изотропно X је $\mathcal{J}_XY = 0$, одакле (9.6) даје (9.10), где добијамо $\theta_0X + \theta_1J_1X + \cdots + \theta_mJ_mX = 0$ за конкретне $\theta_0 = \mu_0g(Y,X)$ и $\theta_i = 3\mu_ig(Y,J_iX)$ за $1 \leqslant i \leqslant m$. Питање да ли је R потпуно Јакоби-дуалан еквивалентно је са тим да ли почетни услови увек дају $\mathcal{J}_YX = \varepsilon_Y\mu_0X - \theta_0Y + \theta_1J_1Y + \cdots + \theta_mJ_mY$ које је пропорционално са X, што је очигледно кад је $\theta_i = 0$ за све $0 \leqslant i \leqslant m$.

Из почетних услова $\theta_0 = \mu_0g(Y,X)$ и $\theta_i = 3\mu_ig(Y,J_iX)$ можемо израчунати

$$\theta_0^2 = \mu_0g(Y,\theta_0X) = -\mu_0\sum_{i=1}^{m}\theta_ig(Y,J_iX) = -\mu_0\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i^2}{3\mu_i},$$

док из Теореме 9.10 следи

$$\theta_0^2 = \sum_{i=1}^{m}c_i\theta_i^2 = -\mu_0\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i^2}{3\mu_i}, \tag{9.11}$$

одакле добијамо

$$\sum_{i=1}^{m}(c_i + \frac{\mu_0}{3\mu_i})\theta_i^2 = 0.$$

Ако су сви бројеви $(3c_i\mu_i + \mu_0)/\mu_i$ истог знака за $1 \leqslant i \leqslant m$, онда је једино решење претходне једначине $\theta_1 = \cdots = \theta_m = 0$, док (9.11) даје $\theta_0 = 0$, што повлачи потпуну Јакоби-дуалност, одакле важи наредна теорема (видети [12, Теорема 4.3]).

Теорема 9.12. *Ако је* $(3c_i\mu_i + \mu_0)\mu_i > 0$ *за свако* $1 \leqslant i \leqslant m$ *или* $(3c_i\mu_i + \mu_0)\mu_i < 0$ *за свако* $1 \leqslant i \leqslant m$*, онда је одговарајући полу-Клифордов* R *потпуно Јакоби-дуалан.*

Уколико $c_i = 1$ важи за свако $1 \leqslant i \leqslant m$ кажемо да је R ***анти-Клифордов***. У случају анти-Клифордовог R примена Теореме 9.10 (за хипотетичко $\theta_0 = 0$ даје $\theta_1^2 + \cdots + \theta_m^2 = 0$) доказује да је скуп $\{J_1X, \ldots, J_mX\}$ линеарно независан, али $\mathcal{F}_m$ може бити линеарно зависан.

Како $J_1X, \ldots, J_mX$ чини базу потпуно изотропног потпростора од $\mathcal{V}$, по Теореми 4.12 постоји база $(P_1, \ldots, P_m)$ изотропног суплемента, тако да $g(J_iX, P_j) = \delta_{ij}$ и $g(P_i, P_j) = 0$ важе за $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Тада

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{3\mu_i} P_i$$

има особине $\theta_i = 3\mu_i g(Z, J_iX)$, те последично по (9.11), $\theta_0 = \mu_0 g(Z, X)$. Лако је видети да $Z + W$ има те исте особине за свако $W \in \{J_1X, \ldots, J_mX\}^\perp$.

Из (9.8), потребно нам је такво Y да $-\theta_0 Y + \sum_{i=1}^m \theta_i J_i Y$ није пропорционално са X. Зато тражимо $Y = Z + W$ такво да $\mathcal{K}(Z + W)$ није пропорционално са X, при чему је $\mathcal{K} = -\theta_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^m \theta_i J_i$. За дефинитно D, скуп $\{D, J_1D, \ldots, J_mD\}$ је линеарно независан (међусобно ортогонални дефинитни вектори), те $\mathcal{K}(D) = 0$ повлачи $\theta_0 = \cdots = \theta_m = 0$, што није могуће. Одавде добијамо $\mathcal{K}(D) \neq 0$ за свако дефинитно D.

Претпоставка $n > 2m$, омогућава дефинитан вектор H из $\{J_1X, \ldots, J_mX, P_1, \ldots, P_m\}^\perp$. Од раније је $\mathcal{K}(X) = -2\theta_0 X$. Ако је R потпуно Јакоби-дуалан имамо додатно $\mathcal{K}(Z) = \zeta X$ и $\mathcal{K}(Z + H) = \xi X$. Тада је $\mathcal{K}(H) = (\xi - \zeta)X \neq 0$, те $\mathcal{K}(Z - (\zeta/(\xi - \zeta))H) = 0$, што повлачи да $Z - (\zeta/(\xi - \zeta))H$ није дефинитан, и зато $\zeta = 0$. Слично, $\mathcal{K}(X + (2\theta_0/\xi)H) = 0$, што повлачи да $X + (2\theta_0/\xi)H$ није дефинитан, те зато $\theta_0 = 0$, што је контрадикција. Одавде добијамо наредну теорему (видети [12, Теорема 5.2]).

Теорема 9.13. *Ако постоје* $\theta_0, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$ *(где нису сви једнаки нули), такви да* $\theta_0 X + \theta_1 J_1 X + \cdots + \theta_m J_m X = 0$ *важи за неко изотропно* X*, са условом* (9.11)*, тада одговарајући анти-Клифордов алгебарски тензор кривине димензије* $n > 2m$ *није потпуно Јакоби-дуалан.*

Прикажимо неке конкретне примере анти-Клифордових алгебарских тензора кривине који нису потпуно Јакоби-дуални.

Пример 9.1. За $m = 1$, Теорема 9.12 даје потребан услов $\mu_0 + 3\mu_1 = 0$. Косоадјунгована производ структура дата са $JT_i = S_i$ и $JS_i = T_i$ за све $1 \leqslant i \leqslant t$, $n = 2t \geqslant 4$, где је $(T_1, \ldots, T_t, S_1, \ldots, S_t)$ ортонормирана база у квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ неутралне сигнатуре, омогућава анти-Клифордов $R = 3\mu R^1 - \mu R^J$ за $\mu \neq 0$. Можемо узети $X = S_1 + T_1$, због линеарне зависности $X = JX$ и применити Теорему 9.13. Зато је $R = 3R^1 - R^J$ анти-Клифордов који није потпуно Јакоби-дуалан. △

Пример 9.2. За $m = 2$, Теорема 9.12 даје потребан услов $(\mu_0 + 3\mu_1)(\mu_0 + 3\mu_2)\mu_1\mu_2 \leqslant 0$. Посматрајмо косоадјунговане производ структуре J и K дефинисане са $JT_{2i-1} = S_{2i-1}$, $JT_{2i} = S_{2i}$, $KT_{2i-1} = S_{2i}$ и $KT_{2i} = -S_{2i-1}$, за све $1 \leqslant i \leqslant t$, $n = 4t \geqslant 8$, где је $(T_1, \ldots, T_{2t}, S_1, \ldots, S_{2t})$ ортонормирана база у квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ неутралне сигнатуре. Можемо узети $X = \cos\alpha\, T_1 + \sin\alpha\, T_2 + \cos\beta\, S_1 + \sin\beta\, S_2$ за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ да бисмо добили једначину $X = \cos(\beta - \alpha) JX + \sin(\beta - \alpha) KX$. Услов (9.11) даје

$$\operatorname{tg}^2(\beta - \alpha) = \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{\cos^2(\beta - \alpha)} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^2 = -\frac{\mu_0 + 3\mu_1}{\mu_0 + 3\mu_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

те можемо изабрати $\alpha = 0$,

$$\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\mu_0 + 3\mu_1}{\mu_0 + 3\mu_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

и применити Теорему 9.13 да бисмо добили анти-Клифордов $R = \mu_0 R^1 + \mu_1 R^J + \mu_2 R^K$ који није потпуно Јакоби-дуалан. △

9.4 Четвородимензиони цвајштајн

Нека је R четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине. Теорема 8.6 даје неке корисне информације. Из (8.8) за $1 \leqslant x \leqslant 4$ имамо четири једнакости

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113} + \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114} &= C_1,\\
\varepsilon_2\varepsilon_1 R_{1221} + \varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223} + \varepsilon_2\varepsilon_4 R_{4224} &= C_1,\\
\varepsilon_3\varepsilon_1 R_{1331} + \varepsilon_3\varepsilon_2 R_{2332} + \varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4334} &= C_1,\\
\varepsilon_4\varepsilon_1 R_{1441} + \varepsilon_4\varepsilon_2 R_{2442} + \varepsilon_4\varepsilon_3 R_{3443} &= C_1,
\end{aligned}$$

те кад решимо систем једначина добијамо

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223} &= \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114},\\
\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{4224} &= \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113},\\
\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4334} &= \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112}.
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Из (8.9) за $1 \leqslant x \neq y \leqslant 4$ добијамо шест једнакости

$$\begin{aligned}
R_{2443} &= -\varepsilon_1\varepsilon_4 R_{2113}, \quad & R_{1442} &= -\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{1332},\\
R_{2334} &= -\varepsilon_1\varepsilon_3 R_{2114}, \quad & R_{1443} &= -\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{1223},\\
R_{3224} &= -\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{3114}, \quad & R_{1334} &= -\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{1224}.
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Из (8.10) за $1 \leqslant x \leqslant 4$ имамо четири једнакости

$$\begin{aligned}
R_{2112}^2 + R_{3113}^2 + R_{4114}^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{2113}^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{2114}^2 + 2\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{3114}^2 &= C_2,\\
R_{1221}^2 + R_{3223}^2 + R_{4224}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 R_{1223}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_4 R_{1224}^2 + 2\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{3224}^2 &= C_2,\\
R_{1331}^2 + R_{2332}^2 + R_{4334}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{1332}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_4 R_{1334}^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{2334}^2 &= C_2,\\
R_{1441}^2 + R_{2442}^2 + R_{3443}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{1442}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 R_{1443}^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{2443}^2 &= C_2,
\end{aligned}$$

што након коришћења (9.12) и (9.13) доноси

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{2113}^2 + \varepsilon_2\varepsilon_4 R_{2114}^2 + \varepsilon_3\varepsilon_4 R_{3114}^2 &= \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{1223}^2 + \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{1224}^2 + \varepsilon_3\varepsilon_4 R_{3114}^2\\
&= \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{1332}^2 + \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{1224}^2 + \varepsilon_2\varepsilon_4 R_{2114}^2\\
&= \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{1332}^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{1223}^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 R_{2113}^2.
\end{aligned}$$

Претходни систем једначина има следеће решење,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{2113}^2 &= \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{1224}^2,\\
\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{2114}^2 &= \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{1223}^2,\\
\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{3114}^2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{1332}^2.
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Изведене једначине су довољно добре да решимо проблем слабе Јакоби-дуалности. Наредну теорему је оригинално доказао Андрејић 2006. године [3] (видети такође [15, Теорема 4.1]), док презентујемо једноставнији доказ из [5, Теорема 3].

Теорема 9.14. *Сваки четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине је слабо Јакоби-дуалан.*

Доказ. Нека $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ важи за јединичне међусобно ортогоналне $X, Y \in \mathcal{V}$. Поставимо векторе $E_1 = X$, $E_2 = Y$ и продужимо их до ортонормиране базе (E_1, E_2, E_3, E_4) у $\mathcal{V}$. Претпоставка $\mathcal{J}_{E_1} E_2 = \varepsilon_1 \lambda E_2$ даје $R_{2112} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda$, $R_{2113} = 0$ и $R_{2114} = 0$. Зато је из (9.14) $R_{1224} = 0$ и $R_{1223} = 0$. Коначно је $\mathcal{J}_{E_2} E_1 = \varepsilon_1 R_{1221} E_1 + \varepsilon_3 R_{1223} E_3 + \varepsilon_4 R_{1224} E_4 = \varepsilon_2 \lambda E_1$, те имамо $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$, одакле је R слабо Јакоби-дуалан. □

Под истим почетним условима можемо решити проблем Јакоби-дуалности. Време је да конкретизујемо сигнатуру. Ако је R дефинитан ($\operatorname{Ind} g = 0$ или $\operatorname{Ind} g = 4$) онда је он Јакоби-дијагонализабилан, где Теорема 9.2 и Теорема 9.14 повлаче да је R Јакоби-дуалан. Ако је R Лоренцов ($\operatorname{Ind} g = 1$ или $\operatorname{Ind} g = 3$), сваки цвајштајн R је константне секционе кривине (Теорема 8.10), те је Клифордов и зато Јакоби-дуалан (Теорема 9.6).

Зато је довољно проверити само неутралну сигнатуру $(2, 2)$. Не умањујући општост можемо поставити $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$. Примењујући (8.11) за $x = 2, y = 3$ и за $x = 3, y = 2$, добијамо

$$\begin{aligned}
&R_{1221}R_{1231} - R_{1224}R_{1234} - R_{3221}R_{3231} + R_{3224}R_{3234} - R_{4221}R_{4231} + R_{4224}R_{4234} = 0,\\
&R_{1331}R_{1321} - R_{1334}R_{1324} + R_{2331}R_{2321} - R_{2334}R_{2324} - R_{4331}R_{4321} + R_{4334}R_{4324} = 0,
\end{aligned}$$

те након неких преуређивања уз употребу (9.12) и (9.13) добијамо

$$\begin{aligned}
&R_{2112}R_{2113} - R_{1224}R_{1234} + R_{1223}R_{1332} + R_{3114}R_{2114} - R_{1224}R_{1324} + R_{3113}R_{2113} = 0,\\
&R_{3113}R_{2113} - R_{1224}R_{1324} - R_{1332}R_{1223} - R_{2114}R_{3114} - R_{1224}R_{1234} + R_{2112}R_{2113} = 0.
\end{aligned}$$

Збир и разлика претходних једначина су

$$R_{2112}R_{2113} + R_{3113}R_{2113} - R_{1224}R_{1234} - R_{1224}R_{1324} = 0, \tag{9.15}$$

$$R_{1223}R_{1332} + R_{2114}R_{3114} = 0. \tag{9.16}$$

Из (8.12) за $x = 2, y = 3$ добијамо

$$\begin{aligned}
&2(R_{1221}R_{1331} - 2R_{1224}R_{1334} + R_{4224}R_{4334})\\
&+ 2(R_{2112}^2 + R_{3113}^2 + R_{4114}^2 - 2R_{2113}^2 - 2R_{2114}^2 + 2R_{3114}^2) + (R_{1231} + R_{1321})^2\\
&+ R_{1232}^2 - R_{1323}^2 - (R_{1234} + R_{1324})^2 + R_{2321}^2 - R_{2323}^2 - R_{2324}^2 - R_{3231}^2 - R_{3232}^2\\
&+ R_{3234}^2 - (R_{4231} + R_{4321})^2 - R_{4232}^2 + R_{4323}^2 + (R_{4234} + R_{4324})^2 = 0,
\end{aligned}$$

што након коришћења (9.12), (9.13) и (9.14) постаје

$$\begin{aligned}
&2R_{2112}R_{3113} - 4R_{2113}^2 + 2R_{3113}R_{2112}\\
&+ 2R_{2112}^2 + 2R_{3113}^2 + 2R_{4114}^2 - 4R_{2113}^2 - 4R_{2114}^2 + 4R_{3114}^2 + 4R_{2113}^2\\
&+ R_{2114}^2 - R_{3114}^2 - (R_{1234} + R_{1324})^2 + R_{2114}^2 - R_{4114}^2 - R_{3114}^2 - R_{3114}^2 - R_{4114}^2\\
&+ R_{2114}^2 - (R_{1324} + R_{1234})^2 - R_{3114}^2 + R_{2114}^2 + 4R_{2113}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Одавде следи

$$4R_{2112}R_{3113} + 2R_{2112}^2 + 2R_{3113}^2 - 2(R_{1234} + R_{1324})^2 = 0,$$

те коначно

$$(R_{2112} + R_{3113})^2 = (R_{1234} + R_{1324})^2. \tag{9.17}$$

Изведене формуле су довољне да докажу наредну теорему коју је поставио Андрејић 2010. године [5, Теорема 4].

Теорема 9.15. *Сваки четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине је Јакоби-дуалан.*

Доказ. Из Теореме 9.14 важи слаба Јакоби-дуалност, те је по Леми 9.1 довољно доказати импликацију (9.2) за $X \perp Y$ са $(\varepsilon_X)^2 = 1$ и $\varepsilon_Y = 0$. Поставимо $E_1 = X$. Лема 4.10 раставља $Y = E_2 + E_3$ са међусобно ортогоналним јединичним E_2 и E_3, који су ортогонални на X, тако да је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3$. Нека је E_4 вектор који их продужава до ортонормиране базе (E_1, E_2, E_3, E_4). Захваљујући сигнатури $(2,2)$ имамо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$, што омогућава употребу претходних једначина. Наш циљ је доказати следећу формулу,

$$\mathcal{J}_{E_1}(E_2 + E_3) = \varepsilon_1 \lambda (E_2 + E_3) \Longrightarrow \mathcal{J}_{E_2+E_3} E_1 = 0.$$

Претпоставка је

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \lambda (E_2 + E_3) &= \mathcal{J}_{E_1}(E_2 + E_3) \\ &= \varepsilon_2 (R_{2112} + R_{3112}) E_2 + \varepsilon_3 (R_{2113} + R_{3113}) E_3 + \varepsilon_4 (R_{2114} + R_{3114}) E_4,\end{aligned}$$

што повлачи

$$\varepsilon_2 (R_{2112} + R_{3112}) = \varepsilon_1 \lambda = \varepsilon_3 (R_{2113} + R_{3113}), \quad \varepsilon_4 (R_{2114} + R_{3114}) = 0,$$

и коначно

$$R_{2112} + R_{3113} + 2R_{2113} = 0, \tag{9.18}$$

$$R_{2114} + R_{3114} = 0. \tag{9.19}$$

Замена (9.19) у (9.16) даје

$$R_{1223} R_{1332} = -R_{2114} R_{3114} = R_{2114}^2 = R_{1223}^2,$$

те је зато $R_{1223} = 0$ или $R_{1332} = R_{1223}$. Међутим, из (9.14) и (9.19) имамо

$$R_{1223} = 0 \Rightarrow R_{2114} = 0 \Rightarrow R_{3114} = 0 \Rightarrow R_{1332} = 0$$

те једначина

$$R_{1332} = R_{1223}, \tag{9.20}$$

важи у сваком случају. Ако заменимо (9.18) у (9.15) добијамо

$$(R_{1234} + R_{1324}) R_{1224} = (R_{2112} + R_{3113}) R_{2113} = -2R_{2113}^2 = -2R_{1224}^2.$$

Зато је $R_{1224} = 0$ или $R_{1234} + R_{1324} = -2R_{1224}$. Слично користимо (9.14), (9.18) и (9.17) за

$$R_{1224} = 0 \Rightarrow R_{2113} = 0 \Rightarrow R_{2112} + R_{3113} = 0 \Rightarrow R_{1234} + R_{1324} = 0,$$

те свакако имамо

$$R_{1234} + R_{1324} = -2R_{1224} = -(R_{1224} + R_{1334}). \tag{9.21}$$

Завршни рачун даје

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{E_2+E_3} E_1 &= \sum_{p=1}^{4} \varepsilon_p (R_{122p} + R_{123p} + R_{132p} + R_{133p}) E_p \\ &= \varepsilon_1 (R_{2112} + R_{3113} + 2R_{2113}) E_1 + \varepsilon_2 (R_{1332} - R_{1223}) E_2 \\ &\quad + \varepsilon_3 (R_{1223} - R_{1332}) E_3 + \varepsilon_4 (R_{1224} + R_{1334} + R_{1234} + R_{1324}) E_4.\end{aligned}$$

Једначине (9.18), (9.20) и (9.21) коначно дају $\mathcal{J}_{E_2+E_3} E_1 = 0$, што комплетира доказ. □

Наравно, Осерманов R је цвајштајн те је зато сваки четвородимензиони Осерманов алгебарски тензор кривине Јакоби-дуалан.

9.5 Обратни проблем

У претходној секцији доказали смо да су Осерманови алгебарски тензори кривине Јакоби-дуални под претпоставком малог индекса или ситне димензије. У Римановом окружењу ($\operatorname{Ind} g = 0$), сваки Осерманов R је потпуно Јакоби-дуалан (Теорема 9.4). У Лоренцовом окружењу ($\operatorname{Ind} g = 1$), сваки Осерманов R има константну секциону кривину (Теорема 8.10), те је зато потпуно Јакоби-дуалан (Теорема 9.11).

У случају димензије $n = 4$, сваки Осерманов R је Јакоби-дуалан (Теорема 9.15). Међутим, четвородимензиони Осерманов R не мора бити потпуно Јакоби-дуалан (Пример 9.1), те је главно питање обрата да ли Јакоби-дуалан R обавезно повлачи да је R Осерманов.

Најпре прикажимо елементаран и елегантан доказ да је сваки Риманов Јакоби-дуалан R барем Ајнштајнов (Андрејић и Лукић 2024 [14]).

Лема 9.16. *Сваки Риманов Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине је Ајнштајнов.*

Доказ. За произвољан јединични вектор $E_1 \in \mathcal{V}$ постоји ортонормирана сопствена база $(E_1, \ldots, E_n)$ у $\mathcal{V}$ у односу на $\mathcal{J}_{E_1}$, те постоје скалари $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ који зависе од E_1, тако да $\mathcal{J}_{E_1} E_i = \lambda_i E_i$ важи за $1 \leqslant i \leqslant n$. Ако је R Јакоби-дуалан онда важи $\mathcal{J}_{E_i} E_1 = \lambda_i E_1$, те посматрајући повисилицу Ричијевог тензора као линеарни оператор имамо $\operatorname{Ric}^\sharp = \mathcal{J}_{E_1} + \cdots + \mathcal{J}_{E_n}$, одакле је $\operatorname{Ric}^\sharp(E_1) = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) E_1$. Зато је сваки јединични $E_1 \in \mathcal{V}$ сопствени вектор од $\operatorname{Ric}^\sharp$, те су све сопствене вредности од $\operatorname{Ric}^\sharp$ исте, што повлачи да је $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ константно, и доказује да је R Ајнштајнов. □

У решавању обратног проблема веома је корисна наредна универзална лема коју је поставио Андрејић 2009. године [4, Лема 1].

Лема 9.17. *Ако је $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ и $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X$ за $X \perp Y$, тада за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи*

$$\mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y) = \varepsilon_{\alpha X + \beta Y} \lambda (\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y).$$

Доказ. У питању је последица праволинијског рачуна,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y) &= \mathcal{R}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y, \alpha X + \beta Y)(\alpha X + \beta Y) \\
&= (\varepsilon_X \alpha^2 + \varepsilon_Y \beta^2) \mathcal{R}(X, Y)(\alpha X + \beta Y) \\
&= \varepsilon_{\alpha X + \beta Y}(\beta \mathcal{J}_Y(X) - \alpha \mathcal{J}_X(Y)) = \varepsilon_{\alpha X + \beta Y} \lambda (\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y).
\end{aligned}$$

□

Посматрамо обратни проблем у ситним димензијама. Почнимо са тродимензионим Јакоби-дуалним алгебарским тензором кривине R. Како тродимензиони Ајнштајнов R има константну секциону кривину (Пример 6.13), очекујемо наредну теорему коју је изложио Андрејић 2009. године [4, Теорема 1].

Теорема 9.18. *Тродимензиони Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.*

Доказ. Нека је (E_1, E_2, E_3) произвољна ортонормирана база у $\mathcal{V}$, таква да је $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Како Јакобијев оператор $\mathcal{J}_{E_1}$ има матрицу

$$\mathcal{J}_{E_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 R_{2112} & \varepsilon_2 R_{3112} \\ 0 & \varepsilon_3 R_{2113} & \varepsilon_3 R_{3113} \end{pmatrix},$$

карактеристични полином његовог редукованог Јакобијевог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_{E_1}$ је

$$\widetilde{\omega}_{E_1}(\lambda) = \lambda^2 - (\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_3 R_{3113})\lambda + \varepsilon_2 \varepsilon_3 R_{2112} R_{3113} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 R_{3112} R_{2113}.$$

Дискриминанта D квадратне једначине $\widetilde{\omega}_{E_1}(\lambda) = 0$ је

$$\begin{aligned} D &= (\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_3 R_{3113})^2 - 4\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{2112}R_{3113} + 4\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3112}R_{2113} \\ &= (\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_3 R_{3113})^2 + 4(R_{2113})^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

За $D > 0$ наша квадратна једначина има два различита реална корена, који дају две различите сопствене вредности од $\widetilde{\mathcal{J}}_{E_1}$, те постоје два једнодимензиона сопствена простора. У супротном, $D = 0$ даје $\varepsilon_2 R_{2112} = \varepsilon_3 R_{3113}$ и $R_{2113} = 0$, те је $\widetilde{\mathcal{J}}_{E_1}$ дијагоналан са двоструким кореном и имамо дводимензиони сопствени простор. Зато постоји ортонормирана сопствена база (E_1, E_2, E_3) у односу на $\mathcal{J}_{E_1}$.

Како је R Јакоби-дуалан, E_1 је сопствени вектор од $\mathcal{J}_{E_2}$ што испуњава захтеве Леме 9.17, те је $\varepsilon_2\beta E_1 - \varepsilon_1\alpha E_2$ сопствени вектор од $\mathcal{J}_{\alpha E_1+\beta E_2}$. Штавише, за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ где важи $\alpha^2\varepsilon_1 + \beta^2\varepsilon_2 \neq 0$, и $\alpha E_1 + \beta E_2$ и $\varepsilon_2\beta E_1 - \varepsilon_1\alpha E_2$ су дефинитни и међусобно ортогонални. Како је $\mathcal{J}_{\alpha E_1+\beta E_2}$ самоадјунгован, $\mathcal{J}_{\alpha E_1+\beta E_2}E_3$ је ортогоналан и на $\varepsilon_2\beta E_1 - \varepsilon_1\alpha E_2$ и на $\alpha E_1 + \beta E_2$, те је E_3 сопствени вектор од $\mathcal{J}_{\alpha E_1+\beta E_2}$. Из Јакоби-дуалности $\alpha E_1 + \beta E_2$ је сопствени вектор од $\mathcal{J}_{E_3}$, што је могуће само ако је $\mathrm{Span}\{E_1, E_2\}$ дводимензиони сопствени простор од $\widetilde{\mathcal{J}}_{E_3}$. Слично, можемо доказати да је $\mathrm{Span}\{E_1, E_3\}$ сопствени простор од $\widetilde{\mathcal{J}}_{E_2}$. Одавде имамо $\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{1221} = \varepsilon_2\varepsilon_3 R_{2332} = \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{1331} = \kappa$ и $R_{2113} = R_{1223} = R_{1332} = 0$. Ове једначине у потпуности одређују R, те он има константну секциону кривину κ. □

Нека је R четвородимензиони Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$. Претпоставимо да постоји неко дефинитно X такво да је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилан. Тада постоји ортонормирана сопствена база (E_1, E_2, E_3, E_4) у $\mathcal{V}$ таква да $\mathcal{J}_{E_1}E_i = \varepsilon_1\lambda_{1i}E_i$ важи за $i = 2, 3, 4$. Не умањујући општост претпоставимо $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$.

Како из Јакоби-дуалности следи $\mathcal{J}_{E_2}E_1 = \varepsilon_2\lambda_{12}E_1$, то је $\mathcal{J}_{E_2}$ инваријантно на дефинитном потпростору $\mathrm{Span}\{E_3, E_4\}$. Зато је $\mathcal{J}_{E_2}$ дијагонализабилно са два међусобно ортогонална сопствена вектора $\alpha_3E_3 + \alpha_4E_4$ и $\varepsilon_4\alpha_4E_3 - \varepsilon_3\alpha_3E_4$ за неко $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ тако да је $\alpha_3^2\varepsilon_3 + \alpha_4^2\varepsilon_4 \neq 0$. Одавде следе пропорционалности

$$\begin{aligned} &\alpha_3^2\mathcal{J}_{E_3}(E_2) + \alpha_4^2\mathcal{J}_{E_4}(E_2) + 2\alpha_3\alpha_4\mathcal{J}(E_3, E_4)(E_2) \propto E_2, \\ &\alpha_4^2\mathcal{J}_{E_3}(E_2) + \alpha_3^2\mathcal{J}_{E_4}(E_2) - 2\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_3\alpha_4\mathcal{J}(E_3, E_4)(E_2) \propto E_2, \end{aligned}$$

те је зато

$$(\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_3^2 + \alpha_4^2)\mathcal{J}_{E_3}(E_2) + (\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_4^2 + \alpha_3^2)\mathcal{J}_{E_4}(E_2) \propto E_2.$$

Одавде, $\mathcal{J}_{E_3}E_2 \perp E_4$ заједно са $\mathcal{J}_{E_3}(\mathrm{Span}\{E_2, E_4\}) \subseteq \mathrm{Span}\{E_2, E_4\}$ (из $\mathcal{J}_{E_3}E_1 = \varepsilon_3\lambda_{13}E_1$) повлачи $\mathcal{J}_{E_3}E_2 \propto E_2$, те је $\mathcal{J}_{E_3}E_4 \propto E_4$. Добијамо $\mathcal{J}_{E_2}E_3 \propto E_3$ и $\mathcal{J}_{E_2}E_4 \propto E_4$, одакле се види да наша база дијагонализује све операторе $\mathcal{J}_{E_1}, \mathcal{J}_{E_2}, \mathcal{J}_{E_3}, \mathcal{J}_{E_4}$. Тако долазимо до $\mathcal{J}_{E_i}E_j = \varepsilon_i\lambda_{ij}E_j$, где је $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ за све $1 \leqslant i, j \leqslant 4$.

Овај закључак допушта једноставне рачуне,

$$\mathcal{J}(E_1, E_2)(E_3) = \sum_i \varepsilon_i\frac{1}{2}(R_{312i} + R_{321i})E_i = \frac{1}{2}\varepsilon_4(R_{3124} + R_{3214})E_4,$$

што важи у свим пермутацијама индекса из скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Како је

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\alpha_1E_1+\alpha_2E_2}(E_3) &= (\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{23})E_3 + \alpha_1\alpha_2\varepsilon_4(R_{3124} + R_{3214})E_4, \\ \mathcal{J}_{\alpha_1E_1+\alpha_2E_2}(E_4) &= (\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{14} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{24})E_4 + \alpha_1\alpha_2\varepsilon_3(R_{4123} + R_{4213})E_3, \end{aligned}$$

након смене $Q_{12} = R_{3124} + R_{3214} = R_{4123} + R_{4213}$, имамо

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\alpha_1E_1+\alpha_2E_2}(\alpha_3E_3 + \alpha_4E_4) = {} & (\alpha_3(\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{23}) + \alpha_4\alpha_1\alpha_2\varepsilon_3Q_{12})E_3 \\ & + (\alpha_4(\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{14} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{24}) + \alpha_3\alpha_1\alpha_2\varepsilon_4Q_{12})E_4. \end{aligned}$$

Потребно је дискутовати два случаја, $Q_{12} \neq 0$ и $Q_{12} = 0$.

Најпре претпоставимо да је $Q_{12} \neq 0$. За све $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ тако да је $\alpha_1^2\varepsilon_1 + \alpha_2^2\varepsilon_2 \neq 0$, по Леми 9.17 је $\mathcal{J}_{\alpha_1E_1+\alpha_2E_2}(\varepsilon_2\alpha_2E_1 - \varepsilon_1\alpha_1E_2) = \varepsilon_{\alpha_1E_1+\alpha_2E_2}\lambda_{12}(\varepsilon_2\alpha_2E_1 - \varepsilon_1\alpha_1E_2)$. Зато постоје $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ тако да је $\alpha_3^2\varepsilon_3 + \alpha_4^2\varepsilon_4 \neq 0$ и $\mathcal{J}_{\alpha_1E_1+\alpha_2E_2}(\alpha_3E_3 + \alpha_4E_4) \propto \alpha_3E_3 + \alpha_4E_4$. Одавде је

$$\alpha_4(\alpha_3(\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{23}) + \alpha_4\alpha_1\alpha_2\varepsilon_3Q_{12}) = \alpha_3(\alpha_4(\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{14} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{24}) + \alpha_3\alpha_1\alpha_2\varepsilon_4Q_{12}),$$

што повлачи

$$\alpha_3\alpha_4(\alpha_1^2\varepsilon_1(\lambda_{13} - \lambda_{14}) + \alpha_2^2\varepsilon_2(\lambda_{23} - \lambda_{24})) = \alpha_1\alpha_2Q_{12}(\alpha_3^2\varepsilon_4 - \alpha_4^2\varepsilon_3).$$

Међутим, Јакоби-дуалност повлачи да је $\alpha_1E_1+\alpha_2E_2$ сопствени вектор од $\mathcal{J}_{\alpha_3E_3+\alpha_4E_4}$, те због $Q_{34} = R_{2341} + R_{2431} = R_{1342} + R_{1432} = Q_{12}$, можемо користити симетричну формулу да добијемо

$$\alpha_1\alpha_2(\alpha_3^2\varepsilon_3(\lambda_{31} - \lambda_{32}) + \alpha_4^2\varepsilon_4(\lambda_{41} - \lambda_{42})) = \alpha_3\alpha_4Q_{12}(\alpha_1^2\varepsilon_2 - \alpha_2^2\varepsilon_1).$$

Рескалирајмо са $\alpha_1 = x, \alpha_2 = 1$ и $\alpha_3 = y, \alpha_4 = 1$, што значи да за свако x (са $x^2 \neq -\varepsilon_1\varepsilon_2$) постоји y (са $y^2 \neq -\varepsilon_3\varepsilon_4$) такво да је

$$\begin{aligned}(\varepsilon_4Q_{12}x)y^2 - (\varepsilon_1x^2(\lambda_{13} - \lambda_{14}) + \varepsilon_2(\lambda_{23} - \lambda_{24}))y - \varepsilon_3Q_{12}x = 0,\\ (\varepsilon_3(\lambda_{13} - \lambda_{23})x)y^2 - (Q_{12}(\varepsilon_2x^2 - \varepsilon_1))y + \varepsilon_4(\lambda_{14} - \lambda_{24})x = 0.\end{aligned}$$

Како решења (квадратне једначине по y) иду у паровима (међусобно ортогонални сопствени вектори), последње две једначине дају иста решења, што повлачи

$$\begin{aligned}\varepsilon_4Q_{12}x &= K\varepsilon_3(\lambda_{13} - \lambda_{23})x,\\ \varepsilon_1x^2(\lambda_{13} - \lambda_{14}) + \varepsilon_2(\lambda_{23} - \lambda_{24}) &= KQ_{12}(\varepsilon_2x^2 - \varepsilon_1),\\ -\varepsilon_3Q_{12}x &= K\varepsilon_4(\lambda_{14} - \lambda_{24})x,\end{aligned}$$

за бесконачно много x и неко $K = K(x) \in \mathbb{R}$. Одмах је $\lambda_{13} - \lambda_{23} = -(\lambda_{14} - \lambda_{24})$, што даје

$$\lambda_{13} + \lambda_{14} = \lambda_{23} + \lambda_{24}.$$

Додатно важи

$$\varepsilon_3(\lambda_{13} - \lambda_{23})(\varepsilon_1x^2(\lambda_{13} - \lambda_{14}) + \varepsilon_2(\lambda_{23} - \lambda_{24})) = \varepsilon_4Q_{12}^2(\varepsilon_2x^2 - \varepsilon_1),$$

те полиномијална једначина

$$(\varepsilon_1\varepsilon_3(\lambda_{13} - \lambda_{23})(\lambda_{13} - \lambda_{14}) - \varepsilon_2\varepsilon_4Q_{12}^2)x^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3(\lambda_{13} - \lambda_{23})(\lambda_{23} - \lambda_{24}) + \varepsilon_1\varepsilon_4Q_{12}^2 = 0$$

има бесконачно много решења, одакле следи

$$\begin{aligned}(\lambda_{13} - \lambda_{23})(\lambda_{13} - \lambda_{14}) &= \quad\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4Q_{12}^2,\\ (\lambda_{13} - \lambda_{23})(\lambda_{23} - \lambda_{24}) &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4Q_{12}^2.\end{aligned}$$

Зато је $\lambda_{13} - \lambda_{14} = \lambda_{24} - \lambda_{23}$, што заједно са $\lambda_{13} + \lambda_{14} = \lambda_{24} + \lambda_{23}$ повлачи

$$\lambda_{13} = \lambda_{24} \quad \text{и} \quad \lambda_{14} = \lambda_{23}.$$

Штавише, имамо

$$(\lambda_{13} - \lambda_{14})^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4Q_{12}^2, \tag{9.22}$$

из чега одмах следи $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$, што значи да $Q_{12} \neq 0$ није могуће у Лоренцовом окружењу.

Пређимо сада на случај $Q_{12} = 0$, где важи $\mathcal{J}_{\alpha_1 E_1+\alpha_2 E_2}(E_3) = (\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{23})E_3$, одакле Јакоби-дуалност даје

$$\alpha_1\varepsilon_3\lambda_{13}E_1 + \alpha_2\varepsilon_3\lambda_{23}E_2 = \mathcal{J}_{E_3}(\alpha_1E_1 + \alpha_2E_2) = \varepsilon_3\frac{\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{23}}{\alpha_1^2\varepsilon_1 + \alpha_2^2\varepsilon_2}(\alpha_1E_1 + \alpha_2E_2),$$

што повлачи $\lambda_{13} = \lambda_{23}$. Слично, $\mathcal{J}_{\alpha_1 E_1+\alpha_2 E_2}(E_4) = (\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{14} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{24})E_4$ даје $\lambda_{14} = \lambda_{24}$.

Закључак дискусије је да $Q_{12} \neq 0$ даје $\lambda_{13} = \lambda_{24}$ и $\lambda_{14} = \lambda_{23}$, док иначе $Q_{12} = 0$ доноси $\lambda_{13} = \lambda_{23}$ и $\lambda_{14} = \lambda_{24}$. Сличне закључке добијамо користећи симетрије за $Q_{13} = R_{2134} + R_{2314}$ и $Q_{14} = R_{3142} + R_{3412}$ у односу на $Q_{12} = R_{3124} + R_{3214}$. Случај $Q_{13} \neq 0$ даје $\lambda_{12} = \lambda_{34}$ и $\lambda_{14} = \lambda_{23}$, док $Q_{13} = 0$ доноси $\lambda_{12} = \lambda_{23}$ и $\lambda_{14} = \lambda_{34}$, као што $Q_{14} \neq 0$ даје $\lambda_{13} = \lambda_{24}$ и $\lambda_{12} = \lambda_{34}$, док $Q_{14} = 0$ доноси $\lambda_{13} = \lambda_{34}$ и $\lambda_{12} = \lambda_{24}$.

Случај $Q_{12} = Q_{13} = Q_{14} = 0$ одмах даје $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{34}$, док једначина $0 = R_{1234} + R_{2314} + R_{3124} = R_{1234} + (Q_{13} - R_{2134}) + (R_{3412} - Q_{14}) = 3R_{1234}$ следи из првог Бјанкијевог идентитета, те је $R_{1234} = -R_{1324} = 0$. Одавде је $R = \lambda_{12}R^1$, те је R константне секционе кривине. Приметимо да је ово једини могући случај у Лоренцовом окружењу, јер ако је $Q_{1i} \neq 0$ за неко $2 \leqslant i \leqslant 4$ одмах, због (9.22), важи $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$.

Како први Бјанкијев идентитет даје $Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} = 0$, то остали случајеви имају барем два од Q_{12}, Q_{13} и Q_{14} који су различити од нуле. Одавде је очигледно да у сваком случају (рачунајући и онај са $Q_{12} = Q_{13} = Q_{14} = 0$) важи

$$\lambda_{12} = \lambda_{34}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{24}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{23}.$$

Захваљујући формули (9.22) која важи за $Q_{12} \neq 0$, као и њој симетричним формулама, додатно имамо $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$ и једначине $(\lambda_{14} - \lambda_{13})^2 = Q_{12}^2$, $(\lambda_{12} - \lambda_{14})^2 = Q_{13}^2$, $(\lambda_{13} - \lambda_{12})^2 = Q_{14}^2$, јер за евентуално $Q_{1i} = 0$ важи $\lambda_{1j} = \lambda_{ik} = \lambda_{ij} = \lambda_{1k}$, где је $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Мењајући, уколико је потребно, знак једног вектора у нашој бази, можемо поставити

$$\lambda_{14} - \lambda_{13} = Q_{12}, \quad \lambda_{12} - \lambda_{14} = Q_{13}, \quad \lambda_{13} - \lambda_{12} = Q_{14}.$$

На пример, ако је $Q_{12} \neq 0$ тада $\lambda_{14} - \lambda_{13} = -Q_{12}$, након што заменимо E_4 са $-E_4$, даје $\lambda_{14} - \lambda_{13} = Q_{12}$. Сада, ако је $\lambda_{12} - \lambda_{14} \neq Q_{13}$ то је $\lambda_{12} - \lambda_{14} = -Q_{13}$, и добијамо $\pm(\lambda_{13} - \lambda_{12}) = Q_{14} = -Q_{12} - Q_{13} = \lambda_{12} - 2\lambda_{14} + \lambda_{13}$. Како је $\lambda_{14} \neq \lambda_{13}$ то следи $\lambda_{14} = \lambda_{12}$, те је $Q_{13} = 0 = \lambda_{12} - \lambda_{14}$. Тако добијамо

$$\begin{aligned}\lambda_{14} - \lambda_{13} &= Q_{12} = -R_{1324} + R_{1432} = R_{1234} - 2R_{1324},\\ \lambda_{12} - \lambda_{14} &= Q_{13} = -R_{1234} + R_{1423} = -2R_{1234} + R_{1324},\end{aligned}$$

те је зато

$$R_{1234} = -\frac{2}{3}\lambda_{12} + \frac{1}{3}\lambda_{13} + \frac{1}{3}\lambda_{14}, \quad R_{1324} = -\frac{1}{3}\lambda_{12} + \frac{2}{3}\lambda_{13} - \frac{1}{3}\lambda_{14}.$$

На овај начин израчунали смо последња два од 20 независних координатних компоненти тензора кривине (видети Теорему 6.4), што у потпуности одређује R. Рачуни су урађени у зависности од три параметра $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14} \in \mathbb{R}$, док од раније имамо 6 независних чланова облика $R_{ijji} = \lambda_{ij} = \lambda_{kl}$ и још 12 њих облика $R_{jiik} = 0$, где је $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Сваки полу-Клифордов алгебарски тензор кривине је и Осерманов (Теорема 9.5) и Јакоби-дуалан (Теорема 9.6), тако да је основна идеја конструисати полу-Клифордов алгебарски тензор кривине који ће имати компоненте једнаке компонентама нашег R, те ће из једнозначности следити да је R Осерманов.

Ако је сигнатура дефинитна, не умањујући општост можемо претпоставити да је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, те увести кватернионску Клифордову фамилију $\{J_1, J_2, J_3\}$ дату

са

$$\begin{aligned}
J_1E_1 &= E_2, & J_1E_2 &= -E_1, & J_1E_3 &= E_4, & J_1E_4 &= -E_3,\\
J_2E_1 &= E_3, & J_2E_2 &= -E_4, & J_2E_3 &= -E_1, & J_2E_4 &= E_2,\\
J_3E_1 &= E_4, & J_3E_2 &= E_3, & J_3E_3 &= -E_2, & J_3E_4 &= -E_1,
\end{aligned}$$

где је наше R индуковано Клифордовим

$$R = -\frac{\lambda_{12}}{3}R^{J_1} - \frac{\lambda_{13}}{3}R^{J_2} - \frac{\lambda_{14}}{3}R^{J_3}.$$

Ако је сигнатура неутрална, можемо претпоставити $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, те увести паракватернионску полу-Клифордову фамилију $\{J_1, J_2, J_3\}$ дату са

$$\begin{aligned}
J_1E_1 &= -E_2, & J_1E_2 &= E_1, & J_1E_3 &= E_4, & J_1E_4 &= -E_3,\\
J_2E_1 &= E_3, & J_2E_2 &= E_4, & J_2E_3 &= E_1, & J_2E_4 &= E_2,\\
J_3E_1 &= E_4, & J_3E_2 &= -E_3, & J_3E_3 &= -E_2, & J_3E_4 &= E_1,
\end{aligned}$$

где је наше R индуковано полу-Клифордовим

$$R = -\frac{\lambda_{12}}{3}R^{J_1} + \frac{\lambda_{13}}{3}R^{J_2} + \frac{\lambda_{14}}{3}R^{J_3}.$$

Претходна разматрања доказују наредну теорему коју је дао Андрејић 2018. године [9, Теорема 4.2].

Теорема 9.19. *Сваки четвородимензиони Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине такав да је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилан за неко дефинитно X је Осерманов.*

Последично, сваки Риманов четвородимензиони Јакоби-дуалан R је Осерманов, што је варијанта ове теореме коју су оригинално доказали Брозос-Васкез[2] и Мерино[3] 2012. године [27]. Додатно, можемо приметити да сваки Лоренцов четвородимензиони Јакоби-дуалан R има константну секциону кривину.

На основу Теореме 8.10 Лоренцов Осерманов тензор кривине има константну секциону кривину, тако да је природно имати следећу теорему коју су поставили Андрејић и Ракић 2015. године [16, Теорема 4.1].

Теорема 9.20. *Лоренцов потпуно Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.*

Доказ. Нека је T јединични временски вектор у Лоренцовом квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. Тада је $T^\perp$ позитивно дефинитан, те је $\widetilde{\mathcal{J}}_T$ дијагонализабилан. Нека је $(S_1, \ldots, S_{n-1})$ ортонормирана сопствена база за $T^\perp$ у односу на $\widetilde{\mathcal{J}}_T$. Тада добијамо $\mathcal{J}_T S_i = \varepsilon_T \lambda_i S_i$ и Јакоби-дуалност даје $\mathcal{J}_{S_i} T = \varepsilon_{S_i} \lambda_i T$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Како је

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{T\pm S_i} T &= \mathcal{R}(T, T \pm S_i)(T \pm S_i) = \mp \mathcal{J}_T S_i + \mathcal{J}_{S_i} T = \lambda_i (T \pm S_i),\\
\mathcal{J}_{T\pm S_i} S_i &= \mathcal{R}(S_i, T \pm S_i)(T \pm S_i) = \mathcal{J}_T S_i \mp \mathcal{J}_{S_i} T = \mp \lambda_i (T \pm S_i),
\end{aligned}$$

то је $\mathcal{J}_{T\pm S_i}$ инваријантан на $\mathcal{U}_i = \operatorname{Span}\{T, S_i\}$, те како је самоадјунгован, онда је инваријантан и на $\mathcal{U}_i^\perp = \operatorname{Span} \bigcup_{j \neq i} \{S_j\}$. Рестрикција $\mathcal{J}_{T\pm S_i}\restriction_{\mathcal{U}_i^\perp}$ је дијагонализабилна као самоадјунговани оператор на дефинитном простору. Ако је M дефинитан сопствени вектор од $\mathcal{J}_{T\pm S_i}\restriction_{\mathcal{U}_i^\perp}$, тада $\mathcal{J}_{T\pm S_i} M = \mu M$ заједно са условом потпуне Јакоби-дуалности даје $\mathcal{J}_M (T \pm S_i) = \nu (T \pm S_i)$. Међутим из компатибилности,

$$\mu \varepsilon_M = g(\mathcal{J}_{T\pm S_i} M, M) = g(\mathcal{J}_M (T \pm S_i), T \pm S_i) = \nu \varepsilon_{T\pm S_i} = 0,$$

[2] Miguel Brozos-Vázquez, шпански математичар
[3] Eugenio Merino, шпански математичар

те је $\mu = 0$ и зато $\mathcal{J}_{T\pm S_i}M = 0$. Последично је $\mathcal{J}_{T\pm S_i} = 0$ на $\mathcal{U}_i^{\perp}$, одакле $\mathcal{J}_{T\pm S_i}S_j = 0$ важи за све $1 \leqslant i \neq j \leqslant n-1$. Тада релација $\mathcal{J}_{T+S_i}S_j = 0$ и потпуна Јакоби-дуалност повлаче да је $T + S_i$ сопствени вектор од $\mathcal{J}_{S_j}$. Како је $g(T, T + S_i) = -1 \neq 0$, сопствени вектори T и $T + S_i$ од $\mathcal{J}_{S_j}$ нису ортогонални, те имају исту сопствену вредност. Тако је $\mathcal{J}_{S_j}S_i = \lambda_j S_i$, што повлачи $\lambda_i = \lambda_j$ и R има константну секциону кривину.

Алтернативно, из $\mathcal{J}_{T\pm S_i} = \mathcal{J}_T + \mathcal{J}_{S_i} \pm 2\mathcal{J}(T, S_i)$ добијамо $\mathcal{J}_{T+S_i} + \mathcal{J}_{T-S_i} = 2(\mathcal{J}_T + \mathcal{J}_{S_i})$. Зато $\mathcal{J}_{T\pm S_i}S_j = 0$ повлачи $\mathcal{J}_{S_i}S_j = -\mathcal{J}_T S_j = \lambda_j S_j$. Упоређујући ову једначину након (i,j)-симетрије $\mathcal{J}_{S_j}S_i = \lambda_i S_i$ и након особине Јакоби-дуалности $\mathcal{J}_{S_j}S_i = \lambda_j S_i$, лако закључујемо да је $\lambda_i = \lambda_j$ за $1 \leqslant i \neq j \leqslant n-1$, што доказује да R има константну секциону кривину. □

9.6 Осерманове пертурбације

Нека је R Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. Размотримо аналитичку криву $\gamma\colon I \to \mathcal{V}$ за неки отворен интервал $I \subseteq \mathbb{R}$. Направимо једнопараметарску фамилију самоадјунгованих ендоморфизама $A(t) = \mathcal{J}_{\gamma(t)}$ за $t \in I$. На основу Леме 6.5, елементи матрице $\mathcal{J}_{\gamma(t)}$ су хомогени полиноми степена 2 у компонентама од $\gamma(t)$, те су зато аналитички на I. Са друге стране, како је R Јакоби-дијагонализабилан, свако $\mathcal{J}_{\gamma(t)}$ има хиперболички карактеристични полином.

Услови Теореме A.26 су испуњени, што доноси аналитичку функцију сопствене вредности $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ и аналитичку криву сопственог вектора $V\colon I \to \mathcal{V}$ тако да $\mathcal{J}_{\gamma(t)}V(t) = \lambda(t)V(t)$ важи за $t \in I$. Одавде следи

$$R(V(t), \gamma(t), \gamma(t), V(t)) = g(\mathcal{J}_{\gamma(t)}V(t), V(t)) = \lambda(t)g(V(t), V(t)) = \lambda(t)\varepsilon_{V(t)}.$$

Ако узмемо извод у односу на t, добијамо

$$2g(\mathcal{J}_{\gamma(t)}V(t), V'(t)) + 2g(\mathcal{J}_{V(t)}\gamma(t), \gamma'(t)) = \lambda'(t)g(V(t), V(t)) + 2\lambda(t)g(V(t), V'(t)),$$

што доводи до идентитета

$$2g(\mathcal{J}_{V(t)}\gamma(t), \gamma'(t)) = \varepsilon_{V(t)}\lambda'(t). \tag{9.23}$$

Претпоставимо да је R Осерманов, што даје $\lambda(t) = \varepsilon_{\gamma(t)}C$ за неку константу $C \in \mathbb{R}$, и повлачи $\lambda'(t) = 2g(\gamma(t), \gamma'(t))C$. Коришћењем (9.23), добијамо $g(\mathcal{J}_{V(t)}\gamma(t), \gamma'(t)) = \varepsilon_{V(t)}g(\gamma(t), \gamma'(t))C$, што значи да је вектор $\mathcal{J}_{V(t)}\gamma(t) - \varepsilon_{V(t)}C\gamma(t)$ ортогоналан на $\gamma'(t)$. Сада посматрајмо дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ тако да је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \mu Y$ за неко $\mu \in \mathbb{R}$ и ненула вектор $Y \in \mathcal{V}$. Узмимо произвољан вектор $Z \in \mathcal{V}$ и дефинишимо криву $\gamma\colon I \to \mathcal{V}$ са $\gamma(t) = X + tZ$ близу $0 \in I$. Применом нашег резултата у $t = 0$ закључујемо да је $\mathcal{J}_{V(0)}X - \varepsilon_{V(0)}CX$ ортогоналан на свако Z, те из недегенерисаности скаларног производа, имамо $\mathcal{J}_{V(0)}X = \varepsilon_{V(0)}CX$. Теорема A.26 додатно омогућава да важи $V(0) = Y$ и $\lambda(0) = \mu = C$, те је зато $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu X$, што доказује да је R Јакоби-дуалан.

Обратно, нека је R Јакоби-дуалан, што повлачи $\mathcal{J}_{V(t)}\gamma(t) = (\varepsilon_{V(t)}/\varepsilon_{\gamma(t)})\lambda(t)\gamma(t)$, док год је $\gamma(t)$ дефинитан. Тада коришћењем (9.23), добијамо $2\lambda(t)g(\gamma(t), \gamma'(t)) = \varepsilon_{\gamma(t)}\lambda'(t)$. Нека су вектори $X, Z \in \mathcal{V}$ такви да је $\varepsilon_X = \varepsilon_Z \neq 0$, те дефинишимо криву $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ са $\gamma(t) = X\cos t + Z\sin t$. Тада је $\varepsilon_{\gamma(t)}$ ненула константа, што даје $2g(\gamma(t), \gamma'(t)) = 0$, те имамо $\lambda'(t) = 0$. Добијамо да је λ константа, што значи да $\mathcal{J}_X$ и $\mathcal{J}_Z$ имају исте сопствене вредности, те је последично R Осерманов.

Теорема 9.21. *Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине је Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан.*

Претходна теорема је последица општијег резултата који су дали Николајевски и Ракић 2016. године [94]. Конкретно, сваки Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине је Јакоби-дуалан [94, Теорема 1], док је полупрост алгебарски тензор кривине Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан [94, Теорема 2]. Напоменимо такође да је Риманов алгебарски тензор кривине Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан, што је специјалан случај Теореме 9.21, који су претходно доказали Николајевски и Ракић 2013. године [93, Теорема 2.1].

Глава 10

ОСЕРМАНОВИ ТЕНЗОРИ И МНОГОСТРУКОСТИ

10.1 Прост-корен Осерманови тензори

Нека је R алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. Кажемо да је R ***k-корена*** ако редукован Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно k различитих сопствених вредности (рачунајући комплексне корене) за сваки дефинитан $X \in \mathcal{V}$ (видети Андрејић [10]). У складу са тим, кажемо да је псеудо-Риманова многострукост (M, g) ***k-корена*** ако је њен тензор кривине k-корена у свакој тачки, односно ако редукован Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно k различитих сопствених вредности за сваки дефинитан $X \in TM$.

Наравно, сваки Осерманов R је k-корена за неко фиксирано $k \in \mathbb{N}$. Посматрајмо k-корена Осерманов R коме је

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda\,\mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \lambda(\lambda - \varepsilon_X\lambda_1)^{\nu_1} \cdots (\lambda - \varepsilon_X\lambda_k)^{\nu_k}$$

карактеристични полином Јакобијевог оператора, а $(\lambda - \varepsilon_X\lambda_1)^{\mu_1} \cdots (\lambda - \varepsilon_X\lambda_k)^{\mu_k}$ минимални полином одговарајућег редукованог Јакобијевог оператора. У општем случају знамо да $1 \leqslant \mu_i \leqslant \nu_i$ важи за $1 \leqslant i \leqslant k$, док за Јакоби-дијагонализабилно R (на пример за Риманов R) важи $\mu_i = 1$.

Сви самоадјунговани линеарни оператори $\mathcal{K}_X^i = \mathcal{J}_X - \varepsilon_X\lambda_i\,\mathbb{1}$ за $1 \leqslant i \leqslant k$ са $\mathcal{J}_X$ имају заједничке уопштене сопствене просторе,

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{K}_X^i - \varepsilon_X(\lambda_j - \lambda_i)\,\mathbb{1})^{\mu_j} = \operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X\lambda_j\,\mathbb{1})^{\mu_j},$$

за $1 \leqslant j \leqslant k$. Свака два таква оператора комутирају,

$$\mathcal{K}_X^i\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X^j\mathcal{K}_X^i = (\mathcal{J}_X)^2 - \varepsilon_X(\lambda_i + \lambda_j)\mathcal{J}_X + \varepsilon_X^2\lambda_i\lambda_j\,\mathbb{1},$$

те су зато њихове композиције такође самоадјунговане. То нас мотивише да за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ дефинишемо самоадјунговани линеарни оператор $L(X)\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ са

$$L(X) = (\mathcal{K}_X^2)^{\mu_2}(\mathcal{K}_X^3)^{\mu_3} \cdots (\mathcal{K}_X^k)^{\mu_k}.$$

У изабраној ортонормираној бази $(E_1, \ldots, E_n)$ за $X = \sum_{i=1}^n x_iE_i$ добијамо

$$g(\mathcal{K}_X^i(E_a), E_b) = \sum_{p,q=1}^{n} (R_{apqb} - \varepsilon_a\varepsilon_p\delta_{ab}\delta_{pq}\lambda_i)x_px_q,$$

те су зато елементи матрице $L(X)$ хомогени полиноми степена $2(\mu_2 + \cdots + \mu_k)$. Међутим, за дефинитно $X \in \mathcal{V}$, због

$$\mathcal{V} = \operatorname{Span}\{X\} \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(\mathcal{K}_X^j)^{\mu_j},$$

лако је видети да

$$\operatorname{Ker} L(X) \supseteq \bigoplus_{j=2}^{k} \operatorname{Ker}(\mathcal{K}_X^j)^{\mu_j}$$

важи са додатним $L(X)X = (-\varepsilon_X)^{\mu_2+\cdots+\mu_k}\lambda_2^{\mu_2}\lambda_3^{\mu_3}\cdots\lambda_k^{\mu_k}X$.

У овој секцији истражујемо случај $\nu_1 = 1$, што значи просту сопствену вредност λ_1, где је $L(X) = (\varepsilon_X)^{\mu_2+\cdots+\mu_k}(\lambda_1-\lambda_2)^{\mu_2}(\lambda_1-\lambda_3)^{\mu_3}\cdots(\lambda_1-\lambda_k)^{\mu_k}\mathbb{1}$ на $\operatorname{Ker}(\mathcal{K}_X^1)^{\mu_1}$. Ако је $\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_k \neq 0$, посматрамо нови алгебарски тензор кривине $R' = R - \lambda_k R^1$ уместо оригиналног R, што је стандардни трик. Одговарајући редуковани Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}'_X$ има исте сопствене просторе као што их има $\widetilde{\mathcal{J}}_X$, али су сопствене вредности померене тако да важи $\lambda'_k = 0$, што ће омогућити $L(X)X = 0$.

На овај начин, за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$, имамо самоадјунговану матрицу $L(X)$ ранга један тако да су њени елементи L_{ij} хомогени полиноми степена $2(\mu_2+\cdots+\mu_k)$ по n променљивих $x_1,\ldots,x_n$. Свака подматрица реда два у матрици ранга један је сингуларна што даје

$$L_{ii}(X)L_{jj}(X) = L_{ij}(X)L_{ji}(X)$$

за све $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Међутим, $L(X)$ је самоадјунговано што повлачи

$$\varepsilon_i L_{ij}(X) = g(L(X)E_j, E_i) = g(L(X)E_i, E_j) = \varepsilon_j L_{ji}(X),$$

те је зато

$$\varepsilon_i\varepsilon_j L_{ii}(X)L_{jj}(X) = L_{ij}(X)^2. \tag{10.1}$$

Ако фиксирамо неки мономијални поредак (на пример лексикографски) тада постоји јединствени монични (коефицијент највећег монома је 1) $G(X)$ који је највећи заједнички делитељ за све $L_{ij}(X)$. Пермутовањем базе можемо поставити

$$\varepsilon_i L_{ii}(X) = \sigma_i G(X)Q_i(X)P_i(X)^2,$$

где су $P_i(X)$ и $Q_i(X)$ неки ненула полиноми за $1 \leqslant i \leqslant m$, уз додатно $L_{ii}(X) = 0$ за $m < i \leqslant n$, док је $\sigma_i \in \{-1,1\}$. Међутим, таква декомпозиција је јединствена до на знак од $P_i(X)$ уколико поставимо да је $Q_i(X)$ моничан бесквадратан. Зато

$$\sigma_i\sigma_j G(X)^2 Q_i(X)Q_j(X)P_i(X)^2P_j(X)^2 = L_{ij}(X)^2$$

повлачи $Q_i(X) = Q_j(X) = Q(X)$ и $\sigma_i = \sigma_j = \sigma$ за $1 \leqslant i,j \leqslant m$, те је

$$\varepsilon_i L_{ij}(X) = \varepsilon_j L_{ji}(X) = \sigma_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j G(X)Q(X)P_i(X)P_j(X),$$

где је $\sigma_{ij} \in \{-1,1\}$. Са друге стране, на основу (10.1) важи $L_{ij} = 0$ кадгод је $m < i \leqslant n$ или $m < j \leqslant n$, што можемо третирати као $P_i(X) = 0$ за $m < i \leqslant n$ и продужити индексе на $m = n$. Како су сви елементи матрице дељиви са $G(X)Q(X)$ то мора бити $Q(X) = 1$.

Друга подматрица реда два даје

$$L_{1i}(X)L_{ij}(X) = L_{1j}(X)L_{ii}(X),$$

одакле следи $\sigma_{1i}\sigma_{ij} = \sigma_{1j}\sigma_{ii}$, али како је $\sigma_{ii} = \sigma_i = \sigma$, то имамо $\sigma_{ij} = \sigma\sigma_{1i}\sigma_{1j}$, одакле добијамо $\varepsilon_j L_{ij}(X) = \sigma G(X)\sigma_{1i}P_i(X)\sigma_{1j}P_j(X)$. Како су полиноми $P_i(X)$ јединствени до на знак, можемо искористити $\sigma_{1i}P_i(X)$ уместо $P_i(X)$ да бисмо добили

$$\varepsilon_j L_{ij}(X) = \sigma G(X)P_i(X)P_j(X)$$

за све $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Претходна једнакост повлачи

$$\begin{aligned} L(X)\left(\sum_{i=1}^{n} P_i(X)E_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P_i(X)L(X)E_i = \sum_{i=1}^{n} P_i(X)\sum_{j=1}^{n} L_{ji}(X)E_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P_j(X)(\sigma\varepsilon_j G(X)P_i(X)P_j(X))E_i \\ &= \sigma G(X)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j P_j(X)^2\left(\sum_{i=1}^{n} P_i(X)E_i\right). \end{aligned}$$

Тако је $\sum_{i=1}^{n} P_i(X)E_i$ сопствени вектор од $L(X)$ који одговара простој сопственој вредности

$$\sigma G(X)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j P_j(X)^2 = \sum_{j=1}^{n} L_{jj}(X) = \operatorname{Tr} L(X).$$

Штавише, $\sum_{i=1}^{n} P_i(X)E_i$ је сопствени вектор од $\widetilde{\mathcal{J}}'_X$ за $\varepsilon_X(\lambda_1 - \lambda_k)$ и такође сопствени вектор од $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ који одговара сопственој вредности $\varepsilon_X\lambda_1$. Међутим,

$$\sigma G(X)\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i P_i(X)^2 = \operatorname{Tr} L(X) = (\varepsilon_X)^{\mu_2+\cdots+\mu_k}(\lambda_1-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda_1-\lambda_k)^{\mu_k},$$

што даје $G(X) = (\varepsilon_X)^s = (\varepsilon_1 x_1^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2)^s$ за неки цео број $s \geqslant 0$, те је зато

$$\sigma\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i P_i(X)^2 = (\varepsilon_X)^d(\lambda_1-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda_1-\lambda_k)^{\mu_k}, \tag{10.2}$$

где је $d = \mu_2 + \cdots + \mu_k - s$.

Иако смо оригинално посматрали само дефинитне X, P_i су хомогени полиноми степена $d \leqslant \mu_2 + \cdots + \mu_k$, те $P_i(X)$ постоји за свако $X \in \mathcal{V}$. То нам омогућава да конструишемо пресликавање $P\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ са

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{|(\lambda_1-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda_1-\lambda_k)^{\mu_k}|}}\sum_{i=1}^{n} P_i(X)E_i.$$

Уколико је X дефинитно, $P(X)$ је дефинитно и ортогонално на X, при чему важи

$$\mathcal{J}_X P(X) = \varepsilon_X\lambda_1 P(X), \tag{10.3}$$

док једнакост (10.2) доноси

$$\varepsilon_{P(X)} = \delta(\varepsilon_X)^d, \tag{10.4}$$

где је $\delta = \sigma\operatorname{sgn}((\lambda_1-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda_1-\lambda_k)^{\mu_k})$ фиксиран знак.

Нека је R Жордан-Осерманов. Онда је R Јакоби-дуалан (видети коментар после Теореме 9.21), те једнакост (10.3) даје $\mathcal{J}_{P(X)}X = \varepsilon_{P(X)}\lambda_1 X$, а последично по Леми 9.17 за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имамо

$$\mathcal{J}_{\alpha X+\beta P(X)}(\varepsilon_{P(X)}\beta X - \varepsilon_X\alpha P(X)) = \varepsilon_{\alpha X+\beta P(X)}\lambda_1(\varepsilon_{P(X)}\beta X - \varepsilon_X\alpha P(X)).$$

Одавде, за дефинитно $\alpha X+\beta P(X)$ добијамо $P(\alpha X+\beta P(X)) \propto \varepsilon_{P(X)}\beta X - \varepsilon_X\alpha P(X)$, што значи да постоји коефицијент пропорционалности $0 \neq K_X(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$P(\alpha X + \beta P(X)) = K_X(\alpha,\beta)(\alpha P(X) - \beta(\varepsilon_{P(X)}/\varepsilon_X)X).$$

За фиксирано $X = \sum_i x_i E_i$ имамо фиксирано $P(X) = \sum_i p_i E_i$, те за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ важи

$$\frac{P_i(\dots, \alpha x_j + \beta p_j, \dots)}{\sqrt{|(\lambda_1 - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda_k)^{\mu_k}|}} = K_X(\alpha, \beta)(\alpha p_i - \beta\delta(\varepsilon_X)^{d-1} x_i),$$

одакле се види да је $K_X(\alpha, \beta)$ непрекидно, као рационална функција по α и β, где је $\alpha^2 + \beta^2\delta(\varepsilon_X)^{d-1} \neq 0$, што је еквивалентно са тим да је $\alpha X + \beta P(X)$ дефинитно, односно да је $\alpha P(X) - \beta\delta(\varepsilon_X)^{d-1} X$ дефинитно.

Како је $P_i(-X) = (-1)^d P_i(X)$ за свако $1 \leqslant i \leqslant n$, то имамо $P(-X) = (-1)^d P(X)$. Због тога, поред очигледног $K_X(1, 0) = 1$ имамо и $K_X(-1, 0) = (-1)^{d-1}$. Из (10.4) добијамо

$$(K_X(\alpha, \beta))^2 = \frac{\varepsilon_{P(\alpha X + \beta P(X))}}{\varepsilon_{\alpha P(X) - \beta(\varepsilon_{P(X)}/\varepsilon_X)X}} = \frac{\delta(\alpha^2\varepsilon_X + \beta^2\varepsilon_{P(X)})^d}{\varepsilon_{P(X)}(\alpha^2 + \beta^2\varepsilon_{P(X)}/\varepsilon_X)} = \left(\frac{\alpha^2\varepsilon_X + \beta^2\varepsilon_{P(X)}}{\varepsilon_X}\right)^{d-1},$$

одакле се види да за парно d увек важи $\alpha^2 + \beta^2\delta(\varepsilon_X)^{d-1} > 0$, те је домен од K_X повезан скуп $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ чија слика није повезан скуп због $K_X(1, 0) > 0$, $K_X(-1, 0) < 0$ и $K_X(\alpha, \beta) \neq 0$. Због тога је d непарно и важи $P(-X) = -P(X)$.

Додатно имамо $K_X(\alpha, \beta) = S_X(\alpha, \beta)(\alpha^2 + \beta^2\delta(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}}$, где је $S_X(\alpha, \beta) \in \{-1, 1\}$. Зато је $S_X(\alpha, \beta)(\alpha^2 + \beta^2\delta(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}}(\alpha p_i - \beta\delta(\varepsilon_X)^{d-1} x_i)$ хомоген полином по α и β степена d, а његов коефицијент уз α^d је фиксиран и износи $S_X(\alpha, \beta)p_i$, те избором i за које је $p_i \neq 0$ добијамо да је S_X константно. Зато је $S_X(\alpha, \beta) = S_X(1, 0) = 1$, што нас доводи до формуле

$$P(\alpha X + \beta P(X)) = (\alpha^2 + \beta^2\delta(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}}\big(\alpha P(X) - \beta\delta(\varepsilon_X)^{d-1} X\big). \tag{10.5}$$

Напоменимо да формула (10.5) такође важи и кад је $\alpha X + \beta P(X)$ изотропно (тада мора бити $\delta = -1$), јер из непрекидности полиномијалног пресликавања имамо $P(\alpha X + \beta P(X)) = 0$. Посебно, формула (10.5) за $\alpha = 0, \beta = 1$ повлачи

$$P(P(X)) = (\delta(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}}(-\delta(\varepsilon_X)^{d-1})X = -\delta^{\frac{d+1}{2}}(\varepsilon_X)^{\frac{d^2-1}{2}} X. \tag{10.6}$$

Лема 10.1. *Нека је R k-корена Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$ чији редукован Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има просту сопствену вредност $\varepsilon_X\lambda_1$, док су μ_i за $2 \leqslant i \leqslant k$ вишеструкости нула минималног полинома. Тада постоји хомогено полиномијално пресликавање $P\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ непарног степена $d \leqslant \mu_2 + \cdots + \mu_k$ такво да за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ важи* (10.3), (10.4) *и* (10.5).

Најчешћи случај Леме 10.1 разматра Јакоби-дијагонализабилан R где имамо $\mu_i = 1$ за $1 \leqslant i \leqslant k$, док је најважнији случај Римановог R где додатно важи $\varepsilon_j = 1$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, одакле (10.4) даје $\delta = 1$. Као последицу, добијамо наредну лему сличну оној коју је поставио Николајевски 2003. године [88, Лема 2.1].

Лема 10.2. *Нека је R Риманов k-корена Осерманов алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$ чији редуковани Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има просту сопствену вредност $\varepsilon_X\lambda_1$. Тада постоји хомогено полиномијално пресликавање $P\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ непарног степена $d \leqslant k - 1$ такво да за свако ненула $X \in \mathcal{V}$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи*

$$\widetilde{\mathcal{J}}_X P(X) = \varepsilon_X\lambda_1 P(X), \quad \varepsilon_{P(X)} = (\varepsilon_X)^d,$$
$$P(\alpha X + \beta P(X)) = (\alpha^2 + \beta^2(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}}\big(\alpha P(X) - \beta(\varepsilon_X)^{d-1} X\big).$$

10.2 Риманови Осерманови тензори

Нека је R алгебарски тензор кривине на позитивно дефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. Ако је $\lambda \in \mathbb{R}$ сопствена вредност редукованог Јакобијевог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ за свако $X \in \mathbf{S}^{n-1} = \{X \in \mathcal{V} : \varepsilon_X = 1\} \subset \mathcal{V}$, која има константну

вишеструкост r, тада је

$$\widetilde{\mathcal{J}}_X - \lambda\,\mathbb{1}_{X^\perp}$$

хомоморфизам тангентног раслојења над $\mathbf{S}^{n-1}$ са идентификацијом $T_X\mathbf{S}^{n-1} \cong X^\perp$. Како он има константан ранг $n-r$, по Теореми 3.3, $\operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \lambda\,\mathbb{1}_{X^\perp})$ је подраслојење од $T\mathbf{S}^{n-1}$. То нас доводи до наредне корисне леме.

Лема 10.3. *Нека је R Риманов алгебарски тензор кривине димензије n. Ако је $\lambda \in \mathbb{R}$ сопствена вредност вишеструкости r од $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ на $\mathbf{S}^{n-1}$, онда је $\operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \lambda\,\mathbb{1}_{X^\perp})$ r-димензиона дистрибуција на $\mathbf{S}^{n-1}$.*

На основу Теореме 3.5, $\mathbf{S}^{n-1}$ за $\rho(n) \leqslant k \leqslant n-1-\rho(n)$ не допушта k-димензиону дистрибуцију, где је ρ Хурвиц–Радон функција дата једначином (3.3). Зато Лема 10.3 редукује могућности за вишеструкост сопствених вредности од $\mathcal{J}_X$ на $\mathbf{S}^{n-1}$.

Теорема 10.4. *Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине непарне димензије има константну секциону кривину.*

Доказ. Осерманов услов повлачи да свака сопствена вредност λ редукованог Јакобијевог оператора $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ за $X \in \mathbf{S}^{n-1}$ има константну вишеструкост r, што омогућава да применимо Лему 10.3. Чињеница да $\rho(n) = 1$ важи за непарно n искључује вишеструкости r за које је $1 \leqslant r \leqslant n-2$, што нас оставља са $r = n-1$, те је $\operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \lambda\,\mathbb{1}_{X^\perp}) = T\mathbf{S}^{n-1}$. Зато $\widetilde{\mathcal{J}}_X = \lambda\,\mathbb{1}$ важи за свако $X \in \mathbf{S}^{n-1}$, те R има константну секциону кривину λ. □

Посматрајмо наредни једноставан случај, кад је димензија облика $n = 4m+2$. Лема 10.3 и чињеница $\rho(4m+2) = 2$ оставља нас са $r \in \{1, n-2, n-1\}$. Не постоје две сопствене вредности λ и μ чија је вишеструкост 1, јер тада $\operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X - \lambda\,\mathbb{1}) \oplus \operatorname{Ker}(\mathcal{J}_X - \mu\,\mathbb{1})$ дефинише дводимензиону дистрибуцију што није могуће. Зато, или имамо константну секциону кривину као раније, или имамо две различите сопствене вредности чије су вишеструкости 1 и $n-2$.

Теорема 10.5. *Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине двоструко непарне димензије има константну секциону кривину или је Клифордов ранга* 1.

Доказ. Нека $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно две сопствене вредности, просту сопствену вредност $\varepsilon_X\lambda$ и $\varepsilon_X\mu$ чија је вишеструкост $n-2$. Применом Леме 10.2 конструишемо хомогено полиномијално пресликавање $P\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ степена $d = 1$ (што значи да је P линеарно) такво да $\widetilde{\mathcal{J}}_X P(X) = \varepsilon_X\lambda P(X)$ важи са $\varepsilon_{P(X)} = \varepsilon_X$. Штавише, P је комплексна структура на $\mathcal{V}$ јер из једнакости (10.6) имамо $P^2 = -\mathbb{1}$. Додатно, ако поставимо $Y = \alpha X + \beta P(X) + Z$ за $Z \in \operatorname{Span}\{X, P(X)\}^\perp = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\mu\,\mathbb{1})$, онда је $X \in \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_Z - \varepsilon_Z\mu\,\mathbb{1}) = \operatorname{Span}\{Z, P(Z)\}^\perp$, што повлачи $X \perp P(Z)$. Одавде је $g(P(X), Y) = \beta\varepsilon_{P(X)} = \beta\varepsilon_X = -g(X, P(\beta P(X))) = -g(X, P(Y))$, те је P косоадјунговано. Како наш ортогонални косоадјунговани ендоморфизам P на $\mathcal{V}$ једнозначно одређује Јакобијеве операторе, он једнозначно одређује и тензор кривине. Зато је једино решење Клифордов $R = \mu R^1 + (\mu - \lambda)/3R^P$. □

Већ смо видели да захваљујући Леми 10.2 лако доказујемо претходну теорему. Међутим, овај случај може се решити и директним рачунима као што је то Чи оригинално урадио 1988. године [34, Секција 2]. Такође је занимљиво решење које су дали Гарсија-Рио, Купели и Васкез-Лорензо [62, Лема 2.1.4]. У наредном примеру показаћемо неке рачуне базиране на њиховим идејама.

Пример 10.1. Нека $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно две сопствене вредности, просту сопствену вредност $\varepsilon_X\lambda$ и вредност $\varepsilon_X\mu$ чија је вишеструкост $n-2$. Глатка једнодимензиона дистрибуција $\operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \lambda\,\mathbb{1})$ даје векторско поље $J\colon \mathbf{S}^{n-1} \to T\mathbf{S}^{n-1}$ такво да је $X \mapsto JX \in X^\perp$. Нека је $\mathcal{U}_X = \operatorname{Span}\{X\} \oplus \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda\,\mathbb{1}) = \operatorname{Span}\{X, JX\}$ и $\mathcal{U}_X^\perp = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\mu\,\mathbb{1})$. По Теореми

9.4 имамо $Y \in \mathcal{U}_X^\perp$ ако и само ако $X \in \mathcal{U}_Y^\perp$, док Лема 9.17 додатно даје $Y \in \mathcal{U}_X$ ако и само ако $X \in \mathcal{U}_Y$. Зато је $J(X\cos\theta + JX\sin\theta) = \pm(JX\cos\theta - X\sin\theta)$ где је знак одређен из непрекидности и вредности у $\theta = 0$,

$$J(X\cos\theta + JX\sin\theta) = JX\cos\theta - X\sin\theta,$$

те последично добијамо $J(-X) = -JX$ и $J^2 = -\mathbb{1}$.

Користимо скраћенице $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ да израчунамо $J(X\cos\theta + Y\sin\theta)$, где је $Y \in \mathcal{U}_X^\perp$. Из $Y \in \mathcal{U}_X^\perp = \mathcal{U}_{JX}^\perp$ имамо $X, JX \in \mathcal{U}_Y^\perp$, те је $JY \perp \{X, JX, Y\}$. За $Z \in \mathrm{Span}\{X, JX, Y, JY\}^\perp$ имамо $Z \in \mathcal{U}_X^\perp \cap \mathcal{U}_Y^\perp$, одакле је $X, Y \in \mathcal{U}_Z^\perp$, те $cX + sY \in \mathcal{U}_Z^\perp$ и зато $Z \in \mathcal{U}_{cX+sY}^\perp = \mathcal{U}_{J(cX+sY)}^\perp$. За свако $Z \in \mathrm{Span}\{X, JX, Y, JY\}^\perp$ имамо $Z \perp J(cX + sY)$, те $J(cX + sY) \in \mathrm{Span}\{X, JX, Y, JY\}$. Са друге стране имамо

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{cX+sY}(sX - cY) &= \mathcal{R}(sX - cY, cX + sY)(cX + sY) = \mathcal{R}(X, Y)(cX + sY)\\ &= s\mathcal{J}_Y X - c\mathcal{J}_X Y = \mu(sX - cY),\end{aligned}$$

што додатно даје $J(cX + sY) \perp \mathrm{Span}\{X, Y\}$ и доноси $J(cX + sY) \in \mathrm{Span}\{JX, JY\}$.

Поставимо $J(cX + sY) = \alpha JX + \beta JY$, где је $\alpha = \alpha(\theta)$ и $\beta = \beta(\theta)$ са $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. За $\alpha JX + \beta JY \in \mathcal{U}_{cX+sY}$ имамо $cX + sY \in \mathcal{U}_{\alpha JX+\beta JY}$, што даје $\mathcal{J}_{\alpha JX+\beta JY}(cX + sY) = \lambda(cX + sY)$. Зато је

$$\begin{aligned}\alpha^2\mathcal{J}_{JX}(cX + sY) + \beta^2\mathcal{J}_{JY}(cX + sY) + 2\alpha\beta\mathcal{J}(JX, JY)(cX + sY) &= \lambda(cX + sY),\\ \alpha^2(c\lambda X + s\mu Y) + \beta^2(c\mu X + s\lambda Y) + \alpha\beta(\mathcal{R}(cX + sY, JX)JY + \mathcal{R}(cX + sY, JY)JX) &= \lambda(cX + sY),\\ (\mu - \lambda)(\beta^2 cX + \alpha^2 sY) + \alpha\beta(c\mathcal{R}(X, JX)JY + s\mathcal{R}(Y, JX)JY + c\mathcal{R}(X, JY)JX + s\mathcal{R}(Y, JY)JX) &= 0.\end{aligned}$$

Како $X, JX, cX + sY \in \mathcal{U}_{JY}^\perp$ повлачи $JY \in \mathcal{U}_X^\perp \cap \mathcal{U}_{JX}^\perp \cap \mathcal{U}_{cX+sJX}^\perp$ имамо $\mathcal{J}(X, JX)JY = 0$, што даје $\mathcal{R}(JY, X)JX + \mathcal{R}(JY, JX)X = 0$. Ако укључимо први Бјанкијев идентитет добијамо једнакост $\mathcal{R}(X, JX)JY = 2\mathcal{R}(X, JY)JX$, те слично и $\mathcal{R}(Y, JY)JX = 2\mathcal{R}(Y, JX)JY$. Одавде извире,

$$(\mu - \lambda)(\beta^2 cX + \alpha^2 sY) + 3\alpha\beta(c\mathcal{R}(X, JY)JX + s\mathcal{R}(Y, JX)JY) = 0.$$

Како је $R(X, JY, JX, X) = 0 = R(Y, JX, JY, Y)$, узимајући скаларни производ са X и Y добијамо

$$\begin{aligned}(\mu - \lambda)\beta^2 c + 3\alpha\beta s R(Y, JX, JY, X) &= 0\\ (\mu - \lambda)\alpha^2 s + 3\alpha\beta c R(X, JY, JX, Y) &= 0\end{aligned}$$

те је зато

$$(\mu - \lambda)\beta^2 c^2 = -3\alpha\beta s c R(X, JY, JX, Y) = (\mu - \lambda)\alpha^2 s^2.$$

Одавде важи $\alpha^2 s^2 = \beta^2 c^2$, што даје $\alpha^2 = \cos^2\theta$ и $\beta^2 = \sin^2\theta$. Поново, на основу непрекидности добијамо

$$J(X\cos\theta + Y\sin\theta) = JX\cos\theta + JY\sin\theta,$$

што доказује да је J линеарно. Продужење $J(tX) = tJ(X)$ за $t \in \mathbb{R}$ дефинише ендоморфизам J на $\mathcal{V}$, и тако даље... △

10.3 Шурови проблеми

У овој секцији разматрамо псеудо-Риманове многострукости и истражујемо резултате повезане са Шуровим типом проблема који су базирани на Теореми 6.8. Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост (M, g) ***k*-штајн** ако је њен тензор кривине k-штајн у свакој тачки од M. Другим речима, (M, g) је k-штајн ако постоје глатке функције $C_j \in \mathfrak{F}(M)$ такве да

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X{}^j) = (\varepsilon_X)^j C_j(p)$$

важи за све $p \in M$, $X \in T_pM$ и $1 \leqslant j \leqslant k$. Желимо да проучимо да ли су функције C_j обавезно константне, те такве проблеме зовемо Шурови проблеми (видети Гилки [54, Секција 1.13]).

Најједноставнији случај разматра функцију C_1, где је наредна теорема заправо другачије записана Теорема 6.12.

Теорема 10.6. *Свака повезана 1-штајн многострукост димензије $n \neq 2$ има константно C_1.*

Кажемо да симетрично $A \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ има ***Шурово својство*** ако дато $A = fg$ за неку функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ повлачи да је f константна (видети Карпентер 1980 [32, Глава 2]). На основу Теореме 10.6 Ричијев тензор има Шурово својство осим за $\dim M = 2$.

Дефинишимо занимљив симетричан коваријантни тензор $\Omega \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ тако што у околини неке тачке поставимо

$$\Omega(X,Y) = \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k R(X,E_i,E_j,E_k)R(Y,E_i,E_j,E_k),$$

где је $(E_1,\dots,E_n)$ ортонормирани локални покретни репер над том околином. Ако је $(F_1,\dots,F_n)$ неки други ортонормирани локални покретни репер, то је веза са старим репером $E_i = \sum_t m_{ti}F_t$, односно $F_p = \sum_t m^{tp}E_t$, при чему важи $\sum_t m_{it}m^{tp} = \delta_{ip}$ (инверзна матрица) и $\varepsilon_p m_{pi} = g(E_i,F_p) = \varepsilon_i m^{ip}$. Како је $\sum_i \varepsilon_i m_{pi}m_{ui} = \sum_i \varepsilon_u m_{pi}m^{iu} = \varepsilon_u\delta_{pu}$, то имамо

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k R(X,E_i,E_j,E_k)R(Y,E_i,E_j,E_k)\\
&= \sum_{i,j,k} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k \sum_{p,q,r} m_{pi}m_{qj}m_{rk}R(X,F_p,F_q,F_r) \sum_{u,v,w} m_{ui}m_{vj}m_{wk}R(Y,F_u,F_v,F_w)\\
&= \sum_{p,q,r,u,v,w} R(X,F_p,F_q,F_r)R(Y,F_u,F_v,F_w) \sum_i \varepsilon_i m_{pi}m_{ui} \sum_j \varepsilon_j m_{qj}m_{vj} \sum_k \varepsilon_k m_{rk}m_{wk}\\
&= \sum_{p,q,r} \varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(X,F_p,F_q,F_r)R(Y,F_p,F_q,F_r),
\end{aligned}$$

те је Ω добро дефинисано јер не зависи од избора ортонормираног репера.

Ова природна инваријанта је алгебарски најједноставнија после скаларне и Ричијеве кривине, и помиње се код Бесеа из 1978. године [18, стр.164–165]. Уколико уведемо

$$\varepsilon_R = \|R\|^2 = \operatorname{tr}_g \Omega,$$

тада имамо следећу лему.

Лема 10.7. *За Ајнштајнову многострукост важи $\nabla\varepsilon_R = 4\operatorname{div}\Omega$.*

Доказ. У ортонормираном локалном покретном реперу имамо,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\Omega)(E_k) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_i \nabla_{E_i}\Omega(E_k,E_i) = \sum_{1\leqslant i,p,q,r\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r \nabla_{E_i}(R_{kpqr}R_{ipqr})\\
&= \sum_{1\leqslant i,p,q,r\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R_{ipqr}\nabla_i R_{kpqr} + \sum_{1\leqslant i,p,q,r\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R_{kpqr}\nabla_i R_{ipqr}.
\end{aligned}$$

За Ајнштајнову многострукост важи $R_{ij} = \varepsilon_i\delta_{ij}C_1$, те је $\nabla R_{ij} = 0$. Зато из (6.10) следи

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_i \nabla_i R_{ipqr} &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_i(-\nabla_r R_{ipiq} - \nabla_q R_{ipri}) = \sum_{1\leqslant i,l\leqslant n} g^{il}\nabla_r R_{ipql} - \sum_{1\leqslant i,l\leqslant n} g^{il}\nabla_q R_{iprl}\\
&= \nabla_{E_r}R_{pq} - \nabla_{E_q}R_{pr} = 0,
\end{aligned}$$

одакле нестаје други члан, $\sum_{1\leqslant p,q,r\leqslant n}\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R_{kpqr}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varepsilon_i\nabla_i R_{ipqr}=0$. Тада је,

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\Omega)(E_k) &= \sum_{1\leqslant i,p,q,r\leqslant n}\varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R_{ipqr}\nabla_i R_{kpqr}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,p,q,r\leqslant n}\varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R_{ipqr}(-\nabla_k R_{piqr}-\nabla_p R_{ikqr}+\nabla_i R_{kpqr})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,p,q,r\leqslant n}\varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R_{ipqr}\nabla_k R_{ipqr}=\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i,p,q,r\leqslant n}\varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r\nabla_{E_k}(R_{ipqr})^2=\frac{1}{4}\nabla_{E_k}\varepsilon_R.\end{aligned}$$

□

Грај и Вилмор [63] су Ајнштајнову многострукост (M,g) димензије $n>4$ назвали ***супер-Ајнштајнова*** ако задовољава $\Omega=fg$ за неко $f\in\mathfrak{F}(M)$. У том случају, узимајући трагове у односу на g имамо $\varepsilon_R=fn$, те је зато по (6.30),

$$\operatorname{div}\Omega=\operatorname{div}fg=\nabla f=\frac{1}{n}\nabla\varepsilon_R.$$

Из Леме 10.7 следи

$$\frac{1}{4}\nabla\varepsilon_R=\frac{1}{n}\nabla\varepsilon_R,$$

што даје $\nabla\varepsilon_R=0$, те је зато ε_R константно. Видимо да у Ајнштајновој многострукости Ω има Шурово својство, осим у случају $n=4$. Додатно, супер-Ајнштајнова многострукост димензије $n=4$ је дефинисана као Ајнштајнова многострукост са константним ε_R.

Посматрајмо 2-штајн многострукост (M,g) димензије n. У ортонормираном локалном покретном реперу $(E_1,\dots,E_n)$, Теорема 8.6 за $1\leqslant x\neq y\leqslant n$ даје једнакост (8.12),

$$2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixxj}R_{iyyj}+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj}+R_{iyxj})^2=2\varepsilon_x\varepsilon_y C_2.$$

Коришћењем симетрије $\sum_{i,j}\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj})^2=\sum_{j,i}\varepsilon_j\varepsilon_i(R_{iyxj})^2$, то постаје

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\varepsilon_i\varepsilon_j\left(R_{ixxj}R_{iyyj}+R_{ixyj}R_{iyxj}+(R_{ixyj})^2\right)=\varepsilon_x\varepsilon_y C_2.$$

Помножимо то са ε_y и сумирајмо по индексу y за све $y\neq x$. Додајмо и одузмимо случај $y=x$ на левој страни, док $\sum_{i,j}\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixxj})^2=C_2$ важи из (8.10), те имамо

$$-3\varepsilon_x C_2+\sum_{1\leqslant y,i,j\leqslant n}\varepsilon_y\varepsilon_i\varepsilon_j\left(R_{ixxj}R_{iyyj}+R_{ixyj}R_{iyxj}+(R_{ixyj})^2\right)=\sum_{1\leqslant y\leqslant n,y\neq x}\varepsilon_x C_2,$$

одакле је

$$\sum_{1\leqslant y,i,j\leqslant n}\varepsilon_y\varepsilon_i\varepsilon_j\left(R_{ixxj}R_{iyyj}+R_{ixyj}R_{iyxj}+(R_{ixyj})^2\right)=(n+2)\varepsilon_x C_2. \tag{10.7}$$

Продискутујмо понаособ чланове на левој страни. Користимо Ајнштајнове формуле (8.8) и (8.9) за први члан,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant y,i,j\leqslant n}\varepsilon_y\varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixxj}R_{iyyj} &= \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixxj}\sum_{1\leqslant y\leqslant n}\varepsilon_y R_{iyyj}+\sum_{1\leqslant i\leqslant n}R_{ixxi}\sum_{1\leqslant y\leqslant n}\varepsilon_y R_{iyyi}\\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}R_{ixxi}\cdot\varepsilon_i C_1=\varepsilon_x C_1^2.\end{aligned}$$

За други члан у (10.7) користимо симетрије и први Бјанкијев идентитет,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant y,i,j\leqslant n}\varepsilon_y\varepsilon_i\varepsilon_j R_{ixyj}R_{iyxj} &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant y,i,j\leqslant n}\varepsilon_y\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{xijy}R_{xjiy}+R_{xiyj}R_{xyij})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant y,i,j\leqslant n}\varepsilon_y\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{xijy}(-R_{xiyj}-R_{xyji})+R_{xijy}R_{xyji})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant y,i,j\leqslant n}\varepsilon_y\varepsilon_i\varepsilon_j R_{xijy}R_{xijy} = \frac{1}{2}\Omega(E_x,E_x).\end{aligned}$$

Последњи члан је једноставан,

$$\sum_{1\leqslant y,i,j\leqslant n}\varepsilon_y\varepsilon_i\varepsilon_j(R_{ixyj})^2 = \Omega(E_x,E_x).$$

Након замене у (10.7) имамо

$$\varepsilon_x C_1^2 + \frac{1}{2}\Omega(E_x,E_x) + \Omega(E_x,E_x) = (n+2)\varepsilon_x C_2,$$

одакле је

$$\Omega(E_x,E_x) = \frac{2}{3}\varepsilon_x((n+2)C_2 - C_1^2).$$

После поларизације то доноси

$$\Omega = \frac{2}{3}((n+2)C_2 - C_1^2)g,$$

те је зато

$$\varepsilon_R = \frac{2}{3}n((n+2)C_2 - C_1^2).$$

Наши рачуни показују да је 2-штајн многострукост димензије $n > 4$ супер-Ајнштајнова, што повлачи да је ε_R константно, те је константно и C_2. Додатно, на основу Примера 6.13, R у димензији $n = 3$ има константну секциону кривину. Међутим, постоје проблеми у преосталим димензијама јер C_1 не мора бити константно за $n = 2$ и ε_R не мора бити константно за $n = 4$.

Неке варијације наредног резултата, углавном рестриковане на Риманово окружење, могу се наћи у Бесе [18, стр.164–165], Гилки, Сван[1], Ванхеке[2] [58, Теорема 2.4], Гилки [54, Секција 1.13, стр.75–78], Гарсија-Рио, Купели, Васкез-Лорензо [62, стр.10–15].

Теорема 10.8. *Ако је (M,g) повезана 2-штајн многострукост димензије $n \notin \{2,4\}$, онда је C_2 константно.*

10.4 Један-корен многострукости

Нека је R k-корена алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V},g)$. Посматрајмо Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ за ненула вектор $X = \sum_{i=1}^n x_iE_i$. Елементи његове (реалне) матрице у односу на неку ортонормирану базу $(E_1,\dots,E_n)$ су хомогене полиномијалне функције степена два у коефицијентима $x_1,\dots,x_n$,

$$(\mathcal{J}_X)_{ab} = \varepsilon_a g(\mathcal{J}_X(E_b),E_a) = \varepsilon_a\sum_{i,j=1}^n R_{bija}x_ix_j.$$

[1]Andrew Francis Swann, дански математичар
[2]Lieven Vanhecke, белгијски математичар

Како услов k-корена повлачи да се сопствене вредности не пресецају, вишеструкости сопствених вредности се не мењају док X варира. На основу Теореме A.28, то нам омогућава да означимо сопствене вредности тако да зависе аналитички од координата од $X(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Најједноставнији случај $k = 1$ је везан за ***један-корен многострукости*** што је разматрао Андрејић 2018. године [9, Секција 5]. Нека је R алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$ такав да редукован Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има само једну сопствену вредност $\varepsilon_X \mu_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$. Напоменимо да је у овом случају та једина сопствена вредност обавезно реална.

У Римановом окружењу добијамо $X^\perp = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \mu_X \mathbb{1}_{X^\perp})$. Зато за међусобно ортогоналне дефинитне $X, Y \in \mathcal{V}$ имамо $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \mu_X Y$ и $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \mu_Y X$, те је

$$\varepsilon_X \varepsilon_Y \mu_X = g(\mathcal{J}_X(Y), Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \kappa(X, Y) = g(\mathcal{J}_Y(X), X) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \mu_Y,$$

што повлачи константну секциону кривину $\mu_X = \mu_Y = \kappa(X, Y)$. Исти доказ пролази и за Јакоби-дијагонализабилно R (видети [62, p.102]). Коначно, примена Шурове теореме (Теорема 6.8) повлачи наредну теорему.

Теорема 10.9. *Повезана један-корен Јакоби-дијагонализабилна многострукост димензије $n \geqslant 3$ је простор константне секционе кривине. Посебно, повезана Риманова један-корен многострукост димензије $n \geqslant 3$ је простор константне секционе кривине.*

Посматрајмо исти проблем у Лоренцовом окружењу. У овом случају можемо користити чињеницу да је $\mathcal{J}_T$ дијагонализабилно за свако временско T. За просторно X ортогонално на временско T можемо применити $\mathcal{J}_{X+tT} = \mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, T) + t^2 \mathcal{J}_T$ на произвољно $A \in \mathrm{Span}\{X, T\}^\perp$. Тада је $\mathcal{J}_{X+tT}(A) = \varepsilon_{X+tT} \mu_{X+tT} A$ за $\varepsilon_{X+tT} < 0$, док је $\mathcal{J}_X(A) = \alpha A + B$, $\mathcal{J}(X, T)A = \beta A + C$ и $\mathcal{J}_T(A) = \varepsilon_T \mu_T A$, где $B, C \in A^\perp$. Тако важи $B + 2tC = 0$ за све $|t| > \sqrt{-\varepsilon_X/\varepsilon_T}$ што повлачи $B = C = 0$, те је A сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$. Зато је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилно за свако просторно X и као раније мора бити константне секционе кривине. То доказује наредну теорему коју је поставио Андрејић 2018. године [9, Теорема 5.1].

Теорема 10.10. *Сваки Лоренцов један-корен алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину. Повезана Лоренцова један-корен многострукост димензије $n \geqslant 3$ је простор константне секционе кривине.*

Проблем један-корен алгебарског тензора кривине у вишим сигнатурама је много компликованији. На пример, у Секцији 8.2 видели смо неке глобално Осерманове један-корен многострукости које нису Јакоби-дијагонализабилне.

Додатно, претпоставимо да је један-корен многострукост тачка по тачка Осерманова, са једном сопственом вредности $\varepsilon_X \mu(p) \in \mathbb{R}$ од $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ за $X \in T_pM$. Како је сваки Осерманов R Ајнштајнов имамо $\varepsilon_X C_1(p) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X) = \varepsilon_X (n-1)\mu(p)$. По Теореми 10.6, повезана 1-штајн M димензије $n \neq 2$ има константно C_1, те је зато μ константно на M и због тога је M глобално Осерманова.

Теорема 10.11. *Повезана један-корен тачка по тачка Осерманова многострукост димензије $n \geqslant 3$ је глобално Осерманова.*

10.5 Два-корена Осерманове многострукости

Посматрајмо наредни случај, $k = 2$. Нека је (M, g) повезана тачка по тачка Осерманова многострукост димензије n таква да у свакој тачки $p \in M$ за $X \in T_pM$ одговарајући редукован Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно две различите сопствене вредности $\varepsilon_X \lambda(p)$ и $\varepsilon_X \mu(p)$ чије су вишеструкости редом $\sigma(p)$ и $\tau(p)$.

На основу Теореме 8.3, Осерманов алгебарски тензор кривине за $n \geqslant 3$ је n-штајн. Због тога постоје глатке функције $C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{F}(M)$ такве да

$$(\varepsilon_X)^j C_j(p) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X{}^j) = (\varepsilon_X)^j(\sigma(p)(\lambda(p))^j + \tau(p)(\mu(p))^j).$$

важи за свако $1 \leqslant j \leqslant n$.

Већ знамо да је C_1 константно за $n \neq 2$ (Теорема 10.6), као и да је C_2 константно за $n \notin \{2, 4\}$ (Теорема 10.8). Због тога услов $n \geqslant 5$ искључује нежељене случајеве, те имамо константне и C_1 и C_2. Поставимо $C_0 = n - 1$ и посматрајмо систем једначина за $j \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \sigma(p) + \tau(p) &= C_0, \\ \sigma(p)\lambda(p) + \tau(p)\mu(p) &= C_1, \\ \sigma(p)\lambda(p)^2 + \tau(p)\mu(p)^2 &= C_2. \end{aligned}$$

Из прве две једначине имамо

$$\sigma = \frac{C_1 - C_0\mu}{\lambda - \mu}, \quad \tau = \frac{C_1 - C_0\lambda}{\mu - \lambda},$$

те након замене у трећу једначину следи

$$C_1(\lambda + \mu) - C_0\lambda\mu = C_2.$$

Како је $\tau \geqslant 1$ имамо $C_1 - C_0\lambda \neq 0$, те претходна једначина даје

$$\mu = \frac{C_2 - C_1\lambda}{C_1 - C_0\lambda}.$$

Преостале функције могу се изразити преко λ на следећи начин

$$\sigma = \frac{C_0C_2 - C_1^2}{C_0\lambda^2 - 2C_1\lambda + C_2}, \quad \tau = \frac{(C_1 - C_0\lambda)^2}{C_0\lambda^2 - 2C_1\lambda + C_2}.$$

Одавде конкретно σ даје највише две вредности за λ, што су решења одговарајуће квадратне једначине. Како су вредности за σ цели бројеви $1 \leqslant \sigma \leqslant n - 2$, то следи да λ може узети највише $2(n - 2)$ конкретних вредности. Из $C_j(p) = \sigma(p)\lambda(p)^j + \tau(p)\mu(p)^j$ можемо видети да $C_j(p)$ за $j > 2$ може узети највише $2(n - 2)$ конкретних вредности. Функција $C_j(p)$ је глатка, те и непрекидна, те зато може узети само једну вредност. Зато је C_j константно као што је случај и са свим осталим функцијама (σ, τ, λ и μ), што доказује да је M глобално Осерманова.

Овај резултат важи и у случају комплексних сопствених вредности. Постојање комплексне сопствене вредности $\alpha(p) + i\beta(p)$ од $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ повлачи да је $\alpha(p) - i\beta(p)$ као конјугат такође корен карактеристичног полинома са истом вишеструкости $(n - 1)/2$. Тада имамо $C_1 = (n - 1)\alpha(p)$ и $C_2 = (n - 1)(\alpha(p)^2 - \beta(p)^2)$, што повлачи да су $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ такође константе. Константе α и β дају константне сопствене вредности и зато имамо глобално Осерманову многострукост.

Теорема 10.12. *Свака повезана два-корена тачка по тачка Осерманова многострукост димензије $n \geqslant 5$ је глобално Осерманова.*

Постоји варијанта Теореме 10.12 која захтева константне вишеструкости $\sigma(p)$ и $\tau(p)$ (видети Гарсија-Рио, Купели, Васкез-Лорензо [62, стр.10–16]), али већ смо видели да овај захтев није неопходан јер је σ цео број по дефиницији као што је Андрејић показао 2013. године [7, Теорема 2.1].

10.6 Два-корена Риманови тензори

Нека је R два-корена алгебарски тензор кривине на позитивно дефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n. Тада, редукован Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ за ненула $X \in \mathcal{V}$ има тачно две сопствене вредности $\varepsilon_X \mu_X$ и $\varepsilon_X \nu_X$ са константним вишеструкостима, те карактеристични полином Јакобијевог оператора гласи

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \lambda(\lambda - \varepsilon_X \mu_X)^p (\lambda - \varepsilon_X \nu_X)^q$$

за фиксиране природне бројеве $p \geqslant q \geqslant 1$ са $p + q = n - 1$.

Фокусирајмо се на јединичну сферу $\mathcal{S} = \mathbf{S}^{n-1} = \{X \in \mathcal{V} : \varepsilon_X = 1\} \subset \mathcal{V}$. Посматрајмо $\widetilde{\mathcal{J}}_X - \mu_X \mathbb{1}_{X^\perp}$ као глатки хомоморфизам тангентног раслојења над $\mathcal{S}$ са идентификацијом $T_X\mathcal{S} \cong X^\perp$. Како је он константног ранга q, $\operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \mu_X \mathbb{1}_{X^\perp})$ је подраслојење од $T\mathcal{S}$ (видети Теорему 3.3), односно p-димензиона дистрибуција на $\mathcal{S}$. На сличан начин, $\operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \nu_X \mathbb{1}_{X^\perp})$ је q-димензиона дистрибуција на $\mathcal{S}$. За $\rho(n) \leqslant k \leqslant n - 1 - \rho(n)$, $\mathcal{S}$ по Теореми 3.5 не допушта k-димензиону дистрибуцију, што нас оставља са

$$q < \rho(n), \tag{10.8}$$

где је ρ Хурвиц–Радон функција из (3.3).

Неједнакост (10.8) значајно редукује могућности за вишеструкости p и q. На пример, одмах уклања непарно n због $\rho(n) = 1$, те n мора вити парно, што је приметио Андрејић 2022. године [10, Теорема 3]).

Теорема 10.13. *Не постоји непарнодимензиони Риманов два-корена алгебарски тензор кривине. Посебно, не постоји два корена Риманова многострукост непарне димензије.*

Не умањујући општост можемо претпоставити $\mu_X < \nu_X$, јер у супротном посматрамо $-R$ као нови алгебарски тензор кривине. За сваки ненула $X \in \mathcal{V}$ дефинишемо сопствене просторе,

$$\mathcal{M}(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \mu_X \mathbb{1}_{X^\perp}), \quad \mathcal{N}(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \nu_X \mathbb{1}_{X^\perp}),$$

где је $\dim \mathcal{M}(X) = p$ и $\dim \mathcal{N}(X) = q$, што допушта ортонормирану декомпозицију

$$X^\perp = \mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{N}(X).$$

За ненула $X, Y \in \mathcal{V}$ који задовољавају $Y \in \mathcal{M}(X)$, можемо раставити $X = M + N$ тако да је $M \in \mathcal{M}(Y)$ и $N \in \mathcal{N}(Y)$. Због

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_X(Y), Y) &= g(\varepsilon_X \mu_X Y, Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \mu_X, \\ g(\mathcal{J}_Y(X), X) &= g(\varepsilon_Y \mu_Y M + \varepsilon_Y \nu_Y N, M + N) = \varepsilon_Y \varepsilon_M \mu_Y + \varepsilon_Y \varepsilon_N \nu_Y, \end{aligned}$$

имамо $\varepsilon_X \mu_X = \varepsilon_M \mu_Y + (\varepsilon_X - \varepsilon_M)\nu_Y$, те је последично

$$\varepsilon_M = \varepsilon_X \frac{\nu_Y - \mu_X}{\nu_Y - \mu_Y}, \tag{10.9}$$

што даје

$$0 \leqslant \frac{\nu_Y - \mu_X}{\nu_Y - \mu_Y} \leqslant 1,$$

те отуда $\mu_Y \leqslant \mu_X \leqslant \nu_Y$. У сличном маниру, $Y \in \mathcal{N}(X)$ повлачи

$$\varepsilon_N = \varepsilon_X \frac{\mu_Y - \nu_X}{\mu_Y - \nu_Y} \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \frac{\nu_X - \mu_Y}{\nu_Y - \mu_Y} \leqslant 1,$$

те је зато $\mu_Y \leqslant \nu_X \leqslant \nu_Y$. Одавде имамо

$$\begin{aligned} 0 \neq Y \in \mathcal{M}(X) \quad &\Longrightarrow \quad \mu_Y \leqslant \mu_X \leqslant \nu_Y, \\ 0 \neq Y \in \mathcal{N}(X) \quad &\Longrightarrow \quad \mu_Y \leqslant \nu_X \leqslant \nu_Y. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Рестрикције $\mu\restriction_{\mathcal{S}} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ и $\nu\restriction_{\mathcal{S}} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ су непрекидне функције на компакту, те су њихове слике затворени интервали. Из $\mathcal{J}_{tX}/\varepsilon_{tX} = \mathcal{J}_X/\varepsilon_X$ важи $\mu(tX) = \mu(X)$ за све $X \neq 0$ и $t \in \mathbb{R}$. Одатле, за ненула $X \in \mathcal{V}$ достижемо $\mu_X \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ и $\nu_X \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$, што омогућава да дефинишемо

$$\mathcal{U} = \mu^{-1}(\mu_{\min}) \cup \{0\}, \quad \mathcal{W} = \nu^{-1}(\nu_{\max}) \cup \{0\}.$$

Ако $0 \neq Y \in \mathcal{M}(X)$ важи за $0 \neq X \in \mathcal{U}$, онда (10.10) даје $Y \in \mathcal{U}$, док (10.9) повлачи $\varepsilon_M = \varepsilon_X$, односно $X = M \in \mathcal{M}(Y)$. На сличан начин то можемо поновити за $Y \in \mathcal{N}(X)$ и $X \in \mathcal{W}$. Тако добијамо неку врсту Ракићевог принципа дуалности где су сопствене вредности екстремне,

$$\begin{aligned} 0 \neq Y \in \mathcal{M}(X) \wedge 0 \neq X \in \mathcal{U} \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \neq X \in \mathcal{M}(Y) \wedge 0 \neq Y \in \mathcal{U}, \\ 0 \neq Y \in \mathcal{N}(X) \wedge 0 \neq X \in \mathcal{W} \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \neq X \in \mathcal{N}(Y) \wedge 0 \neq Y \in \mathcal{W}. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Уколико имамо и $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ и $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X$ за ненула међусобно ортогоналне $X, Y \in \mathcal{V}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, тада за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, по Леми 9.17 имамо

$$\mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y) = \varepsilon_{\alpha X + \beta Y} \lambda (\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y). \tag{10.12}$$

На основу формуле (10.11), $Y \in \mathcal{M}(X)$ са $X \in \mathcal{U}$ повлачи $X \in \mathcal{M}(Y)$ са $Y \in \mathcal{U}$, те (10.12) доноси $\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y \in \mathcal{M}(\alpha X + \beta Y)$ са $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{U}$. Зато $0 \neq U \in \mathcal{U}$ повлачи $\operatorname{Span}\{U\} \oplus \mathcal{M}(U) \subseteq \mathcal{U}$, или последично $\mathcal{U}^\perp \subseteq \mathcal{N}(U)$, као и одговарајући аналог за $\mathcal{W}$,

$$\begin{aligned} 0 \neq U \in \mathcal{U} \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{Span}\{U\} \oplus \mathcal{M}(U) \subseteq \mathcal{U}, \\ 0 \neq W \in \mathcal{W} \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{Span}\{W\} \oplus \mathcal{N}(W) \subseteq \mathcal{W}. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Како је $\dim(\operatorname{Span}\{U\} \oplus \mathcal{M}(U)) = p + 1$, $\dim(\operatorname{Span}\{W\} \oplus \mathcal{N}(W)) = q + 1$ и притом важи $\dim \mathcal{V} = p + q + 1 > (p + 1) + (q + 1)$, Грасманова формула даје нетривијалан пресек,

$$0 \neq (\operatorname{Span}\{U\} \oplus \mathcal{M}(U)) \cap (\operatorname{Span}\{W\} \oplus \mathcal{N}(W)) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{W}. \tag{10.14}$$

Формула (10.14) допушта да као почетни корак узмемо $0 \neq A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, те искористимо његова лепа својства $\mu_A = \mu_{\min}$ и $\nu_A = \nu_{\max}$.

Због Теореме 10.13, n мора бити парно, те разматрамо наредни по једноставности случај где је димензија n два пута непар. У том случају је $\rho(n) = 2$, те неједнакост (10.8) даје $q = 1$, што значи прост корен.

Претпоставимо да је једна сопствена вредност проста, односно да важи $q = 1$. Ако додамо још $p > n/2$ (што искључује само $n = 4$), тада из Грасманове формуле свака два $\mathcal{M}$ простора имају нетривијалан пресек. Зато за ненула векторе $X, Y \in \mathcal{U}$ постоји $0 \neq S \in \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(Y)$, те (10.11) доноси $X, Y \in \mathcal{M}(S)$ са $S \in \mathcal{U}$, те (10.13) даје $\operatorname{Span}\{X, Y\} \subset \mathcal{U}$, што доказује да је $\mathcal{U}$ потпростор од $\mathcal{V}$.

Желимо да покажемо да је μ константа, или еквивалентно да је $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Претпоставимо ли супротно, $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, како је $\mathcal{U}$ потпростор, то применом (10.13) имамо $\dim \mathcal{U} = n - 1$, одакле је

$$0 \neq X \in \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U} = \operatorname{Span}\{X\} \oplus \mathcal{M}(X) \quad \wedge \quad \mathcal{U}^\perp = \mathcal{N}(X). \tag{10.15}$$

Започнимо са $0 \neq A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ из (10.14). За $0 \neq Z \in \mathcal{N}(A) = \mathcal{U}^\perp$, из (10.11) имамо $A \in \mathcal{N}(Z)$ са $Z \in \mathcal{W}$, те је $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(Z) = \operatorname{Span}\{A, Z\}^\perp$. За $0 \neq B \in \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(Z)$ имамо

$B \in \mathcal{U}$, те је по (10.15), $Z \in \mathcal{U}^\perp = \mathcal{N}(B)$. Тада $g(\mathcal{J}_B(Z), Z) = g(\mathcal{J}_Z(B), B)$ даје $\nu_B = \mu_Z = c$. Међутим, ако су B и Z јединични, онда из (10.12) важи

$$\mathcal{J}_{Z\cos t + B\sin t}(B\cos t - Z\sin t) = c(B\cos t - Z\sin t),$$

што повлачи $\overline{\mu}(t) = \mu(Z\cos t + B\sin t) = c$ или $\overline{\nu}(t) = \nu(Z\cos t + B\sin t) = c$, за свако $t \in \mathbb{R}$. Функције $\overline{\mu}, \overline{\nu} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ су непрекидне са $\overline{\mu} < \overline{\nu}$ и $\overline{\mu}(0) = \overline{\nu}(\pi/2) = c$, одакле је $\mathbb{R} = \overline{\mu}^{-1}(c) \sqcup \overline{\nu}^{-1}(c)$ дисјунктна унија непразних затворених скупова, што није могуће.

То доказује да $\mu_X = \mu$ мора бити константа за $q = 1$, осим ако је $n = 4$. Ово нам омогућава да уведемо нови алгебарски тензор кривине $R' = R - \mu R^1$, где је $R^1 \in \mathfrak{T}^0_4(\mathcal{V})$ тензор константне секционе кривине један, дат са (6.14). Овај трик помера сопствене вредности, те карактеристични полином новог Јакобијевог оператора постаје $\det(\lambda\,\mathbb{1} - \mathcal{J}'_X) = \lambda^{n-1}(\lambda - \varepsilon_X(\nu_X - \mu))$.

Да не компликујемо ствари превише, задржаћемо претходну нотацију и претпоставити да $\mathcal{J}_X$ има просту сопствену вредност $\varepsilon_X \nu_X > 0$, док су све остале сопствене вредности једнаке нули. То суштински значи да оригинални редуковани Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има просту сопствену вредност $\varepsilon_X(\nu_X + \mu)$, док други корен $\varepsilon_X \mu$ има вишеструкост $n - 2$.

Проста сопствена вредност мотивише нас да модификујемо идеје из Секције 10.1. Изаберимо произвољну ортонормирану базу $(E_1, \ldots, E_n)$ у $\mathcal{V}$. Тада за свако ненула $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i \in \mathcal{V}$, Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ је ранга један, такав да су елементи његове матрице $\mathcal{J}_{ij}(X)$ квадратне форме у n променљивих $x_1, \ldots, x_n$. Свака подматрица реда два у симетричној матрици ранга један је сингуларна што даје

$$\mathcal{J}_{ii}(X)\mathcal{J}_{jj}(X) = \mathcal{J}_{ij}(X)^2 \tag{10.16}$$

за све $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Ако фиксирамо неки мономијални поредак онда постоји јединствен монични $G(X)$ који је највећи заједнички делилац за све $\mathcal{J}_{ij}(X)$. Пермутујући базу можемо подесити

$$\mathcal{J}_{ii}(X) = \sigma_i G(X) Q_i(X) P_i(X)^2,$$

где су $P_i(X)$ и $Q_i(X)$ ненула полиноми за $1 \leqslant i \leqslant m$ са додатним $\mathcal{J}_{ii}(X) = 0$ за $m < i \leqslant n$, док је $\sigma_i \in \{-1, 1\}$. Међутим, такво растављање је јединствено до на знак од $P_i(X)$ уколико поставимо да је $Q_i(X)$ моничан бесквадратан. Тада

$$\sigma_i \sigma_j G(X)^2 Q_i(X) Q_j(X) P_i(X)^2 P_j(X)^2 = \mathcal{J}_{ij}(X)^2$$

повлачи да важи $Q_i(X) = Q_j(X) = Q(X) = 1$ и $\sigma_i = \sigma_j = \sigma$ за $1 \leqslant i \leqslant m$, одакле добијамо $\mathcal{J}_{ij}(X) = \sigma_{ij} G(X) P_i(X) P_j(X)$, где је $\sigma_{ij} \in \{-1, 1\}$. Додатно, из (10.16) је $\mathcal{J}_{ij}(X) = 0$ кадгод важи $m < i \leqslant n$ или $m < j \leqslant n$, што се може третирати као $P_i(X) = 0$ за $m < i \leqslant n$ и продужава индексе на $m = n$.

Друга подматрица реда 2 даје $\mathcal{J}_{1i}(X)\mathcal{J}_{ij}(X) = \mathcal{J}_{1j}(X)\mathcal{J}_{ii}(X)$, те $\sigma_{1i}\sigma_{ij} = \sigma_{1j}\sigma_{ii}$. Како важи $\sigma_{ii} = \sigma_i = \sigma$, то је $\sigma_{ij} = \sigma\sigma_{1i}\sigma_{1j}$, одакле следи $\mathcal{J}_{ij}(X) = \sigma G(X) \sigma_{1i} P_i(X) \sigma_{1j} P_j(X)$. Како су полиноми $P_i(X)$ јединствени до на знак, можемо користити $\sigma_{1i} P_i(X)$ уместо $P_i(X)$ да бисмо добили $\mathcal{J}_{ij}(X) = \sigma G(X) P_i(X) P_j(X)$ за свако $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Штавише, упоредимо ли степене у полиному $\mathcal{J}_{ij}(X)$ закључујемо да сви P_i имају исти степен, који је нула или један. Степен нула доноси константне полиноме P_i, те је $\mathcal{J}_X = G(X)M$ за неку константну матрицу M. У том случају, ако је $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \nu_X Y$ онда је $\mathcal{J}_X(Z) = 0$ за свако $Z \in Y^\perp$, што даје $MZ = 0$. Међутим, тада је $\mathcal{J}_Y(Z) = G(Y)MZ = 0$, што даје контрадикцију $\mathcal{J}_Y = 0$. Зато сви P_i имају степен један, док $G(X)$ има степен нула одакле следи $G(X) = 1$.

Сумирајући претходна запажања, једнакост

$$\mathcal{J}_{ij}(X) = \sigma P_i(X) P_j(X)$$

важи за све $1 \leqslant i, j \leqslant n$, где су P_i линеарни хомогени полиноми. Уколико поставимо

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i(X) E_i,$$

тада следи

$$\mathcal{J}_X(P(X)) = \sum_{i=1}^{n} P_i(X) \sum_{j=1}^{n} \mathcal{J}_{ji}(X) E_j = \sigma \sum_{i=1}^{n} P_i(X)^2 (P(X)).$$

Тако је $P(X)$ сопствени вектор од $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ који одговара простој сопственој вредности

$$\sigma \varepsilon_{P(X)} = \sigma \sum_{i=1}^{n} P_i(X)^2 = \operatorname{Tr} \mathcal{J}_X = \varepsilon_X \nu_X,$$

али како смо поставили $\nu_X > 0$, мора бити $\sigma = 1$. На овај начин конструисали смо линеарно пресликавање $P \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ такво да је $\mathcal{N}(X) = \operatorname{Span}\{P(X)\}$ и

$$\nu_X = \frac{\varepsilon_{P(X)}}{\varepsilon_X}$$

са $\nu_{P(X)} \geqslant \nu_X$ (због (10.10)) за свако ненула $X \in \mathcal{V}$.

Почнимо са $0 \neq A \in \mathcal{W}$ где $P(A) \in \mathcal{N}(A)$ због (10.11), даје $A \in \mathcal{N}(P(A))$ са $P(A) \in \mathcal{W}$. Због тога, по (10.12), важи

$$\mathcal{J}_{\alpha A + \beta P(A)}(\varepsilon_{P(A)} \beta A - \varepsilon_A \alpha P(A)) = \varepsilon_{\alpha A + \beta P(A)} \nu_{\max} (\varepsilon_{P(A)} \beta A - \varepsilon_A \alpha P(A)),$$

што даје $\nu(\alpha A + \beta P(A)) = \nu_{\max}$ и $P(\alpha A + \beta P(A)) \propto \varepsilon_{P(A)} \beta A - \varepsilon_A \alpha P(A)$. Коришћењем линеарности од P и чињеницу да је $P(A) \perp \operatorname{Span}\{A, P^2(A)\}$, добијамо коефицијент пропорционалности једнак $-1/\varepsilon_A$, те одатле важи $P^2(A) = -\nu_A A$ са $\operatorname{Span}\{A, P(A)\} \subseteq \mathcal{W}$.

Можемо наставити у сличном маниру, употребом $A_1 = A$ и $\nu_1 = \nu_{\max}$ као базе индукције. Претпоставимо да већ имамо међусобно ортогоналне ненула векторе $A_1, P(A_1), \ldots, A_k, P(A_k)$ такве да

$$\operatorname{Span}\{A_i, P(A_i)\} \setminus \{0\} \subseteq \nu^{-1}(\nu_i) \quad \text{и} \quad P^2(A_i) = -\nu_i A_i \tag{10.17}$$

важи за све $1 \leqslant i \leqslant k$ са $0 < \nu_k \leqslant \ldots \leqslant \nu_1$. Дефинишемо

$$\nu_{k+1} = \max\{\nu_X : X \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}(A_1) \cdots \cap \mathcal{M}(A_k)\} \leqslant \nu_k$$

и узмимо произвољно $0 \neq A_{k+1} \in \nu^{-1}(\nu_{k+1})$. Захвално је приметити да како је μ константа, дуалност (10.11) увек омогућава $Y \in \mathcal{M}(X) \iff X \in \mathcal{M}(Y)$. Као последица тога, $A_{k+1} \in \mathcal{M}(A_i) = \mathcal{M}(P(A_i)) = \operatorname{Span}\{A_i, P(A_i)\}^\perp$ повлачи $A_i, P(A_i) \in \mathcal{M}(A_{k+1}) \perp \mathcal{N}(A_{k+1})$, те $P(A_{k+1}) \in \operatorname{Span}\{A_i, P(A_i)\}^\perp = \mathcal{M}(A_i)$. Зато је $\nu_{P(A_{k+1})} \leqslant \nu_{k+1}$, те из формуле (10.10) имамо $\nu_{P(A_{k+1})} = \nu_{k+1}$, док једнакост (10.12) даје $\operatorname{Span}\{A_{k+1}, P(A_{k+1})\} \setminus \{0\} \subseteq \nu^{-1}(\nu_{k+1})$ и $P^2(A_{k+1}) = -\nu_{k+1} A_{k+1}$.

Овај поступак користи константе $0 < \nu_{n/2} \leqslant \ldots \leqslant \nu_1$ са својствима (10.17) за исцрпљивање простора

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{n/2} \operatorname{Span}\{A_i, P(A_i)\}. \tag{10.18}$$

Имајући ово на уму, лако је увидети да је P косоадјунгован. Наиме, уколико поставимо векторе $X = \sum_{i=1}^{n/2} (x_i A_i + \overline{x}_i P(A_i))$ и $Y = \sum_{i=1}^{n/2} (y_i A_i + \overline{y}_i P(A_i))$, онда је

$$g(P(X), Y) = \sum_{i=1}^{n/2} g(x_i P(A_i) - \overline{x}_i \nu_i A_i, y_i A_i + \overline{y}_i P(A_i)) = \sum_{i=1}^{n/2} \nu_i \varepsilon_{A_i} (x_i \overline{y}_i - \overline{x}_i y_i) = -g(P(Y), X).$$

Кључна идеја је да сваки косоадјунгован ендоморфизам P на $\mathcal{V}$, на основу Примера 8.3 генерише алгебарски тензор кривине $R^P \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$, где имамо

$$\mathcal{J}_X^P = \begin{cases} -3\varepsilon_X \nu_X \mathbb{1} & \text{on } \operatorname{Span}\{P(X)\} \\ 0 & \text{on } \operatorname{Span}\{P(X)\}^\perp \end{cases}.$$

Зато, узимајући у обзир померање сопствених вредности за $\varepsilon_X \mu$, и могући избор од $\nu_X < \mu_X$ са почетка дискусије, алгебарски тензор кривине мора бити облика

$$R = \pm \left(-\frac{1}{3} R^P + \mu R^1 \right). \tag{10.19}$$

Овај резултат је боље изразити у ортонормираној бази $(E_1, F_1, \ldots, E_{n/2}, F_{n/2})$ која је добијена из (10.18) рескалирањем $E_i = A_i/\sqrt{\varepsilon_{A_i}}$ и $F_i = P(A_i)/\sqrt{\varepsilon_{P(A_i)}}$. Обратно, лако је видети да за произвољну ортонормирану базу $(E_1, F_1, \ldots, E_{n/2}, F_{n/2})$ у $\mathcal{V}$, константе $0 < \nu_{n/2} \leqslant \ldots \leqslant \nu_1$ генеришу косоадјунговани ендоморфизам P на $\mathcal{V}$ са

$$P(E_i) = \sqrt{\nu_i} F_i, \quad P(F_i) = -\sqrt{\nu_i} E_i, \tag{10.20}$$

за свако $1 \leqslant i \leqslant n/2$. Тако смо добили наредну теорему коју је поставио Андрејић 2023. године [10, Теорема 4].

Теорема 10.14. *Сваки Риманов два-корена алгебарски тензор кривине димензије $n > 4$ са простим кореном је облика* (10.19)*, за $\mu \in \mathbb{R}$ и неки косоадјунговани ендоморфизам P дефинисан са* (10.20) *користећи позитивне константе $\nu_1, \ldots, \nu_{n/2} \in \mathbb{R}$.*

10.7 Два-корена Риманове многострукости

Теорема 10.14 и формула (10.19) карактеришу све могуће два-корена алгебарске тензоре кривине димензије двапут непар. Наредни корак је заснован на употреби другог Бјанкијевог идентитета са идејом да се види који од тих алгебарских тензора кривине може бити реализован као тензор кривине Риманове многострукости.

Посматрајмо Риманову многострукост M локално у околини $U \subset M$ неке тачке. Тамо можемо поставити локални ортонормирани покретни репер и глатко продужити елементе наше конструкције. Глаткоћа тензора кривине $R \in \mathfrak{T}_4^0(U)$ даје глаткоћу $\mu \in \mathfrak{F}(U)$, док је ν глатко на тангентном раслојењу TU без нула секције. Тада, начин на који смо конструисали P даје глаткоћу од $P_i(X) \in \mathfrak{F}(U)$, што доноси косоадјунговани оператор $P \in \mathfrak{T}_1^1(U)$. Коначно, $\nu \in \mathfrak{F}(TU \setminus (M \times \{0\}))$ повлачи $\nu_1, \ldots, \nu_{n/2} \in \mathfrak{F}(U)$, те можемо продужити нашу ортонормирану базу из конструкције на локални ортонормирани покретни репер $(E_1, F_1, \ldots, E_{n/2}, F_{n/2})$ у $\mathfrak{X}(U)$ који се уклапа у формулу (10.20). Згодно је користити овај покретни репер у наредном тексту.

Овакво продужење допушта нам да применимо коваријантне изводе на наше тензоре. Важно је напоменути да је $\nabla_V P \in \mathfrak{T}_1^1(U)$ такође косоадјунгован, јер $PX \perp X$ повлачи

$$0 = \nabla_V(g(PX, X)) = g(\nabla_V(PX), X) + g(PX, \nabla_V X) = g(\nabla_V(PX), X) - g(P\nabla_V X, X) = g((\nabla_V P)X, X),$$

што након поларизације даје

$$g((\nabla_V P)X, Y) = -g((\nabla_V P)Y, X),$$

за све $X, Y, V \in \mathfrak{X}(U)$.

Како је $\nabla R^1 = 0$, коваријантни извод дуж векторског поља $V \in \mathfrak{X}(U)$ нашег тензора кривине R из формуле (10.19) може се изразити са

$$\nabla_V R = \mp \frac{1}{3} \nabla_V R^P \pm (\nabla_V \mu) R^1.$$

За све $X, Y, Z, W, V \in \mathfrak{X}(U)$ можемо израчунати

$$\begin{aligned}(\nabla_V R^P)(X,Y,Z,W) = \; & g\big(g(PX,Z)(\nabla_V P)Y - g(PY,Z)(\nabla_V P)X + 2g(PX,Y)(\nabla_V P)Z, W\big) \\ & + g\big(g((\nabla_V P)X,Z)PY - g((\nabla_V P)Y,Z)PX + 2g((\nabla_V P)X,Y)PZ, W\big),\end{aligned} \tag{10.21}$$

и

$$\begin{aligned}&(\nabla_V R^P)(X,Y,Y,X) + (\nabla_X R^P)(Y,V,Y,X) + (\nabla_Y R^P)(V,X,Y,X) \\ &\quad = \; 3g(PX,Y)\big(2g((\nabla_V P)Y,X) - g((\nabla_X P)Y,V) + g((\nabla_Y P)X,V)\big) \\ &\qquad - 3g\big(g((\nabla_X P)X,Y)PY + g((\nabla_Y P)Y,X)PX, V\big).\end{aligned}$$

Зато примена другог Бјанкијевог идентитета доноси

$$\begin{aligned}0 =& (\nabla_V R)(X,Y,Y,X) + (\nabla_X R)(Y,V,Y,X) + (\nabla_Y R)(V,X,Y,X) \\ =& \mp g(PX,Y)\big(2g((\nabla_V P)Y,X) - g((\nabla_X P)Y,V) + g((\nabla_Y P)X,V)\big) \\ & \pm g\big(g((\nabla_X P)X,Y)PY + g((\nabla_Y P)Y,X)PX, V\big) \\ & \pm (\nabla_V \mu)(\varepsilon_X \varepsilon_Y - g(X,Y)^2) \pm (\nabla_X \mu)(g(X,Y)g(Y,V) - \varepsilon_Y g(X,V)) \\ & \pm (\nabla_Y \mu)(g(X,Y)g(X,V) - \varepsilon_X g(Y,V)).\end{aligned} \tag{10.22}$$

Претпостављајући $Y \perp PX$ у (10.22) добијамо

$$\begin{aligned}0 = \; & g\big(g((\nabla_X P)X,Y)PY + g((\nabla_Y P)Y,X)PX, V\big) \\ & + (\nabla_X \mu) g(g(X,Y)Y - \varepsilon_Y X, V) + (\nabla_Y \mu) g(g(X,Y)X - \varepsilon_X Y, V) + (\nabla_V \mu)(\varepsilon_X \varepsilon_Y - g(X,Y)^2),\end{aligned}$$

те је зато

$$\begin{aligned}(\varepsilon_X \varepsilon_Y - g(X,Y)^2)(\nabla \mu)^\sharp = & - g((\nabla_X P)X,Y)PY - g((\nabla_Y P)Y,X)PX \\ & + (X(\mu)\varepsilon_Y - Y(\mu)g(X,Y))X + (Y(\mu)\varepsilon_X - X(\mu)g(X,Y))Y.\end{aligned}$$

За свуда ненула $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ такве да $Y \in \operatorname{Span}\{X, PX\}^\perp$ имамо $(\nabla \mu)^\sharp \in \operatorname{Span}\{X, PX, Y, PY\}$. Међутим, употреба нашег покретног репера са (10.20) даје

$$(\nabla \mu)^\sharp \in \bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant n/2} \operatorname{Span}\{E_i, F_i, E_j, F_j\} = 0,$$

што доноси $\nabla \mu = 0$. Зато μ мора бити константа, док формула (10.22) доноси

$$\begin{aligned}& g(PX,Y)\big(2g((\nabla_V P)Y,X) - g((\nabla_X P)Y,V) + g((\nabla_Y P)X,V)\big) \\ & - g\big(g((\nabla_X P)X,Y)PY + g((\nabla_Y P)Y,X)PX, V\big) = 0.\end{aligned} \tag{10.23}$$

Поново, $Y \perp PX$ даје $g((\nabla_X P)X,Y)PY + g((\nabla_Y P)Y,X)PX = 0$, док додатно $Y \perp X$ омогућава линеарну независност за PX и PY (јер су X и Y линеарно независни као ортогонални), те је зато $g((\nabla_X P)X,Y) = 0$ за $Y \in \operatorname{Span}\{X, PX\}^\perp$. Међутим, ми знамо да је $g((\nabla_X P)X,X) = 0$, што повлачи $(\nabla_X P)X \propto PX$.

Дефинишимо $\lambda_X \colon U \to \mathbb{R}$ за свако $X \in \mathfrak{X}(U)$ са $\lambda_X = g((\nabla_X P)X, PX)/g(PX,PX)$ на $(\varepsilon_{PX})^{-1}(\mathbb{R}_+) = (\varepsilon_X)^{-1}(\mathbb{R}_+) \subseteq U$ и $\lambda_X = 0$ на $(\varepsilon_X)^{-1}(\{0\})$, где претходно доказана пропорционалност доноси

$$(\nabla_X P)X = \lambda_X PX. \tag{10.24}$$

Лако је проверити да $\lambda_{fX} = f\lambda_X$ важи за $f \in \mathfrak{F}(U)$. Са друге стране, из (10.24) за свако $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ имамо

$$(\nabla_X P)Y + (\nabla_Y P)X = (\lambda_{X+Y} - \lambda_X)PX + (\lambda_{X+Y} - \lambda_Y)PY,$$

што након узимања скаларног производа са X даје

$$(\lambda_{X+Y} - \lambda_Y)g(PY, X) = g((\nabla_X P)Y, X) = -g((\nabla_X P)X, Y) = -\lambda_X g(PX, Y),$$

те је зато $(\lambda_{X+Y} - \lambda_Y - \lambda_X)g(PX, Y) = 0$. Због тога, адитивност

$$\lambda_{X+Y} = \lambda_X + \lambda_Y$$

важи кадгод је $g(Y, PX)$ свуда ненула. За свако $p \in U$, услов $Y_p \perp PX_p$ се може искључити захваљујући непрекидности од $\lambda(p)\colon T_pU \to \mathbb{R}$ датог са $\lambda(p)(X_p) = \lambda_X(p)$. Зато адитивност важи за све $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, што значи да λ јесте $\mathfrak{F}(U)$-линеарно. Последично, како $\lambda_E \in \mathfrak{F}(U)$ за јединично $E \in \mathfrak{X}(U)$, имамо $\lambda_X \in \mathfrak{F}(U)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(U)$, те коначно важи $\lambda \in \mathfrak{T}^0_1(U) = \mathfrak{X}^*(U)$.

Са овим на уму, једнакост (10.23) постаје

$$g(PX, Y)\Big(2g((\nabla_V P)Y, X) - g\big((\nabla_X P)Y - (\nabla_Y P)X + \lambda_X PY - \lambda_Y PX, V\big)\Big) = 0.$$

Одавде

$$2g((\nabla_V P)Y, X) = g\big((\nabla_X P)Y - (\nabla_Y P)X + \lambda_X PY - \lambda_Y PX, V\big) \tag{10.25}$$

важи у случају да је $g(PX, Y)$ свуда ненула. Међутим, како је десна страна линеарна по Y и постоји покретан репер који се састоји од векторских поља која нису ортогонална на PX, једнакост (10.25) важи за све $X, Y, V \in \mathfrak{X}(U)$. Двоструком применом (10.25) имамо

$$4g((\nabla_V P)Y, X) = g\big((\nabla_V P)Y - (\nabla_Y P)V + \lambda_V PY - \lambda_Y PV, X\big) + 2g\big(-(\nabla_Y P)X + \lambda_X PY - \lambda_Y PX, V\big),$$

те је зато

$$2\lambda_X g(PY, V) = g\big(3(\nabla_V P)Y - (\nabla_Y P)V - \lambda_V PY - \lambda_Y PV, X\big),$$

што даје

$$2g(PY, X)\lambda^\sharp = 3(\nabla_X P)Y - (\nabla_Y P)X - \lambda_X PY - \lambda_Y PX.$$

Са друге стране, из дефиниције за $\lambda \in \mathfrak{X}^*(U)$ имамо $(\nabla_X P)Y + (\nabla_Y P)X = \lambda_Y PX + \lambda_X PY$, те зато добијамо $g(X, PY)\lambda^\sharp = (\nabla_X P)Y - (\nabla_Y P)X$, што се може записати са

$$2(\nabla_X P)Y = g(X, PY)\lambda^\sharp + \lambda_Y PX + \lambda_X PY. \tag{10.26}$$

Сада када знамо ∇P, преостаје да израчунамо $\nabla^2 P$ и употребимо Ричијев идентитет за тензорско поље $P \in \mathfrak{T}^1_1(U)$. Из (10.26) имамо

$$\begin{aligned}
2(\nabla_X \nabla_Y P)Z =& 2\nabla_X((\nabla_Y P)Z) - 2(\nabla_Y P)(\nabla_X Z)\\
=& \nabla_X(g(Y, PZ)\lambda^\sharp + \lambda_Z PY + \lambda_Y PZ) - (g(Y, P(\nabla_X Z))\lambda^\sharp + \lambda_{\nabla_X Z} PY + \lambda_Y P(\nabla_X Z))\\
=& (g(\nabla_X Y, PZ) + g(Y, \nabla_X PZ))\lambda^\sharp + g(Y, PZ)\nabla_X \lambda^\sharp\\
&+ (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Z) + g(\lambda^\sharp, \nabla_X Z))PY + \lambda_Z \nabla_X PY\\
&+ (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Y) + g(\lambda^\sharp, \nabla_X Y))PZ + \lambda_Y \nabla_X PZ\\
&- g(Y, P(\nabla_X Z))\lambda^\sharp - \lambda_{\nabla_X Z} PY - \lambda_Y P(\nabla_X Z)\\
=& (g(\nabla_X Y, PZ) + g(Y, (\nabla_X P)Z))\lambda^\sharp + g(\nabla_X \lambda^\sharp, Z)PY + (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Y) + g(\lambda^\sharp, \nabla_X Y))PZ\\
&+ g(Y, PZ)\nabla_X \lambda^\sharp + \lambda_Z \nabla_X PY + \lambda_Y (\nabla_X P)Z,
\end{aligned}$$

те је зато

$$
\begin{aligned}
2(\nabla^2_{X,Y}P - \nabla^2_{Y,X}P)Z &= 2(\nabla_X\nabla_Y P - \nabla_Y\nabla_X P - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}P)Z \\
&=(g(\nabla_X Y, PZ) + g(Y, (\nabla_X P)Z))\lambda^\sharp + g(\nabla_X\lambda^\sharp, Z)PY + (g(\nabla_X\lambda^\sharp, Y) + g(\lambda^\sharp, \nabla_X Y))PZ \\
&\quad + g(Y, PZ)\nabla_X\lambda^\sharp + \lambda_Z\nabla_X PY + \lambda_Y(\nabla_X P)Z \\
&\quad - (g(\nabla_Y X, PZ) + g(X, (\nabla_Y P)Z))\lambda^\sharp - g(\nabla_Y\lambda^\sharp, Z)PX - (g(\nabla_Y\lambda^\sharp, X) + g(\lambda^\sharp, \nabla_Y X))PZ \\
&\quad - g(X, PZ)\nabla_Y\lambda^\sharp - \lambda_Z\nabla_Y PX - \lambda_X(\nabla_Y P)Z \\
&\quad - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, PZ)\lambda^\sharp - \lambda_Z P(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \lambda_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}PZ, \\
&=(g(Y, (\nabla_X P)Z) - g(X, (\nabla_Y P)Z))\lambda^\sharp - g(\nabla_Y\lambda^\sharp, Z)PX + g(\nabla_X\lambda^\sharp, Z)PY \\
&\quad + (g(\nabla_X\lambda^\sharp, Y) - g(\nabla_Y\lambda^\sharp, X))PZ + g(Y, PZ)\nabla_X\lambda^\sharp - g(X, PZ)\nabla_Y\lambda^\sharp \\
&\quad + \lambda_Z(\nabla_X P)Y - \lambda_Z(\nabla_Y P)X + \lambda_Y(\nabla_X P)Z - \lambda_X(\nabla_Y P)Z.
\end{aligned}
$$

Поновном употребом (10.26) добијамо

$$
\begin{aligned}
&2(\nabla^2_{X,Y}P - \nabla^2_{Y,X}P)Z \\
&\quad =\lambda_Z g(Y, PX)\lambda^\sharp - g(\nabla_Y\lambda^\sharp, Z)PX + g(\nabla_X\lambda^\sharp, Z)PY \\
&\qquad + (g(\nabla_X\lambda^\sharp, Y) - g(\nabla_Y\lambda^\sharp, X))PZ + g(Y, PZ)\nabla_X\lambda^\sharp - g(X, PZ)\nabla_Y\lambda^\sharp \\
&\qquad + \lambda_Z g(X, PY)\lambda^\sharp + \frac{1}{2}(\lambda_Y g(X, PZ) - \lambda_X g(Y, PZ))\lambda^\sharp + \frac{1}{2}\lambda_Y\lambda_Z PX - \frac{1}{2}\lambda_X\lambda_Z PY \\
&\quad =\frac{1}{2}(\lambda_Y g(X, PZ) - \lambda_X g(Y, PZ))\lambda^\sharp + (\frac{1}{2}\lambda_Y\lambda_Z - g(\nabla_Y\lambda^\sharp, Z))PX - (\frac{1}{2}\lambda_X\lambda_Z - g(\nabla_X\lambda^\sharp, Z))PY \\
&\qquad + (g(\nabla_X\lambda^\sharp, Y) - g(\nabla_Y\lambda^\sharp, X))PZ + g(Y, PZ)\nabla_X\lambda^\sharp - g(X, PZ)\nabla_Y\lambda^\sharp.
\end{aligned}
$$

Да бисмо поједноставили нотацију уводимо нови оператор $Q \in \mathfrak{T}^1_1(U)$ дефинисан са $QX = \frac{1}{2}\lambda_X\lambda^\sharp - \nabla_X\lambda^\sharp$, те претходна једнакост постаје

$$
\begin{aligned}
2(\nabla^2_{X,Y}P - \nabla^2_{Y,X}P)Z =& g(X, PZ)QY - g(Y, PZ)QX \\
&+ g(Z, QY)PX - g(Z, QX)PY + (g(QY, X) - g(QX, Y))PZ.
\end{aligned} \tag{10.27}
$$

Са друге стране, за оператор кривине $\mathcal{R}$ из (10.19) имамо $\pm 3\mathcal{R} = -\mathcal{R}^P + 3\mu\mathcal{R}^1$, те је

$$
\begin{aligned}
&\pm 3(\mathcal{R}(X, Y)PZ - P(\mathcal{R}(X, Y)Z)) \\
&\qquad = -\mathcal{R}^P(X, Y)PZ + 3\mu\mathcal{R}^1(X, Y)PZ + P(\mathcal{R}^P(X, Y)Z) - 3\mu P(\mathcal{R}^1(X, Y)Z) \\
&\qquad = -g(PX, PZ)PY + g(PY, PZ)PX - 2g(PX, Y)P^2Z + 3\mu(g(Y, PZ)X - g(X, PZ)Y) \\
&\qquad\quad + g(PX, Z)P^2Y - g(PY, Z)P^2X + 2g(PX, Y)P^2Z - 3\mu(g(Y, Z)PX - g(X, Z)PY) \\
&\qquad = -g(PX, PZ)PY + g(PY, PZ)PX + 3\mu g(Y, PZ)X - 3\mu g(X, PZ)Y \\
&\qquad\quad + g(PX, Z)P^2Y - g(PY, Z)P^2X - 3\mu g(Y, Z)PX + 3\mu g(X, Z)PY.
\end{aligned}
$$

Уводимо самоадјунговани оператор $S \in \mathfrak{T}^1_1(U)$ дефинисан са $SX = 3\mu X + P^2X$, те претходна једнакост постаје

$$
\pm 3(\mathcal{R}(X, Y)PZ - P(\mathcal{R}(X, Y)Z)) = g(PX, Z)SY - g(PY, Z)SX + g(SX, Z)PY - g(SY, Z)PX.
$$

Ричијев идентитет (6.36), $((\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})P)Z = \mathcal{R}(X, Y)PZ - P(\mathcal{R}(X, Y)Z)$, важи за све $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, што употребом (10.27) доноси

$$
\begin{aligned}
&g(X, PZ)QY - g(Y, PZ)QX + g(Z, QY)PX - g(Z, QX)PY + (g(QY, X) - g(QX, Y))PZ \\
&= \pm\frac{2}{3}\Big(g(PX, Z)SY - g(PY, Z)SX + g(SX, Z)PY - g(SY, Z)PX\Big).
\end{aligned}
$$

Захвално је увести још један оператор $K = Q \pm \frac{2}{3}S \in \mathfrak{T}^1_1(U)$, односно такав да

$$KX = \frac{1}{2}\lambda_X\lambda^\sharp - \nabla_X\lambda^\sharp \pm \frac{2}{3}(3\mu X + P^2X)$$

важи за $X \in \mathfrak{X}(U)$, те претходна једнакост постаје

$$g(X,PZ)KY - g(Y,PZ)KX + g(Z,KY)PX - g(Z,KX)PY + (g(KY,X) - g(KX,Y))PZ = 0.$$

Специјални случај $Z = Y$ повлачи

$$g(X,PY)KY + g(Y,KY)PX + (g(KY,X) - 2g(KX,Y))PY = 0, \tag{10.28}$$

што важи за свако $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. За произвољно свуда ненула $Y \in \mathfrak{X}(U)$ можемо изабрати свуда ненула $X \in \mathrm{Span}\{Y, PY\}^\perp$. У овом случају $X \perp PY$ даје

$$g(Y,KY)PX + (g(KY,X) - 2g(KX,Y))PY = 0,$$

али како су X и Y линеарно независни као међусобно ортогонални, то су PX и PY линеарно независни, што повлачи $g(Y,KY) = 0$.

Одавде $KY \perp Y$ важи за све $Y \in \mathfrak{X}(U)$, те поларизација даје $g(KX,Y) + g(KY,X) = 0$ и доказује да је K такође косоадјунгован. Са тим на уму, једнакост (10.28) постаје

$$g(X,PY)KY + 3g(KY,X)PY = 0,$$

и важи за све $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. Заменом $X = PY$ за свуда ненула $Y \in \mathfrak{X}(U)$, добијамо $KY \propto PY$, док узимањем унутрашњег производа са PY добијамо $4\varepsilon_{PY}g(KY,PY) = 0$, те је $K = 0$. Одавде извире важна формула

$$\nabla_X\lambda^\sharp = \frac{1}{2}\lambda_X\lambda^\sharp \pm \frac{2}{3}(3\mu X + P^2X). \tag{10.29}$$

За свако $X, Z \in \mathfrak{X}(U)$, користимо (10.26) да израчунамо

$$\begin{aligned}\nabla_X(\varepsilon_{PZ}) &= \nabla_X g(PZ,PZ) = 2g(\nabla_X(PZ),PZ) = 2g((\nabla_X P)Z + P\nabla_X Z, PZ)\\ &= g(X,PZ)\lambda_{PZ} + g(PX,PZ)\lambda_Z + g(PZ,PZ)\lambda_X - 2g(\nabla_X Z, P^2Z).\end{aligned}$$

Са друге стране имамо $\nabla_X(\varepsilon_{PZ}) = \nabla_X(\nu_Z\varepsilon_Z) = \nu_Z\nabla_X\varepsilon_Z + \varepsilon_Z\nabla_X\nu_Z$, што даје

$$\nu_Z\nabla_X\varepsilon_Z + \varepsilon_Z\nabla_X\nu_Z = g(X,PZ)\lambda_{PZ} - g(X,P^2Z)\lambda_Z + \varepsilon_{PZ}\lambda_X - 2g(\nabla_X Z, P^2Z).$$

Размотримо сопстевене просторе од P^2, дефинисане са

$$\mathcal{P}_j = \mathrm{Ker}(P^2 + \nu_j\,\mathbb{1}) = \bigoplus_{\nu_i=\nu_j} \mathrm{Span}\{E_i, F_i\}.$$

Ако $Z \in \mathcal{P}_j$ важи за неко $1 \leqslant j \leqslant n/2$, тада је $-2g(\nabla_X Z, P^2Z) = 2\nu_j g(\nabla_X Z, Z) = \nu_j\nabla_X\varepsilon_Z$, што повлачи

$$\varepsilon_Z\nabla_X\nu_j = g(X,PZ)\lambda_{PZ} + \nu_j g(X,Z)\lambda_Z + \nu_j\varepsilon_Z\lambda_X.$$

Тако добијамо

$$d(\ln\nu_j)(X) = \frac{\nabla_X\nu_j}{\nu_j} = \begin{cases} 2\lambda_X \text{ for } X \in \mathrm{Span}\{Z,PZ\} \\ \lambda_X \text{ for } X \in \mathrm{Span}\{Z,PZ\}^\perp \end{cases}, \tag{10.30}$$

кадгод је $Z \in \mathcal{P}_j$, те имамо

$$\lambda = \frac{2}{n+2}\sum_{i=1}^{n/2} d(\ln\nu_i) = \frac{2}{n+2}d(\ln(\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n/2})). \tag{10.31}$$

Једначина (10.31) показује да λ не може бити било какво ковекторско поље, већ барем оно које је диференцијал глатке функције. Штавише, употребом (10.29) имамо неопходан услов,

$$\nabla_X \operatorname{grad}(\ln(\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n/2})) = \frac{1}{2}\lambda_X \operatorname{grad}(\ln(\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n/2})) \pm \frac{n+2}{3}(3\mu X + P^2 X),$$

који важи за све $X \in \mathfrak{X}(U)$. То коначно доказује наредну теорему коју је поставио Андрејић 2023. године [10, Теорема 5].

Теорема 10.15. *Два-корена Риманова многострукост димензије* $n \equiv 2 \pmod 4$ *локално има тензор кривине облика* (10.19)*, за константу* μ *и неки косоадјунгован линеарни оператор* P *дефинисан са* (10.20) *уз коришћење позитивних глатких функција* $\nu_1, \ldots, \nu_{n/2}$*. Додатно важе једначине* (10.26)*,* (10.29)*,* (10.30) *и* (10.31)*.*

Најприроднији случај има $\lambda = 0$, где једначина (10.26) повлачи $\nabla P = 0$, те (10.21) даје $\nabla R^P = 0$, и последично $\nabla R = 0$, што значи да је M локално симетричан. Штавише, једначина (10.29) за $\lambda = 0$ повлачи $P^2 = -3\mu\,\mathbb{1}$, што даје $\nu = 3\mu$, и последично је M глобално Осерманова, где редукован Јакобијев оператор $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има просту сопствену вредност $4\varepsilon_X\mu$, док је друга сопствена вредност (вишеструкости $n-2$) четири пута мања. Зато, повезана два-корена Риманова многострукост димензије $n \geqslant 3$ са $n \equiv 2 \pmod 4$ која има $\lambda = 0$ јесте глобално Осерманова и одатле две-тачке хомогена.

Напоменимо да ако $\nabla\nu_j = 0$ важи за неко $1 \leqslant j \leqslant n/2$, онда је $\lambda = 0$, и важи претходни закључак. Питање да ли постоји два-корена Риманова многострукост димензије два пута непар која није Осерманова остаје отворено и захтева конструкцију конкретне многострукости са $\lambda \neq 0$. Први покушај може бити $\lambda^\sharp = E_k$ за неко $1 \leqslant k \leqslant n/2$, где (10.30) доноси $d(\ln\nu_k) = 2\lambda = 2d(\ln\nu_i)$ за све $i \neq k$, те постоје константе C_i такве да је $\nu_k = C_i\nu_i^2$.

10.8 Принцип пропорционалности

Нека је R k-корена Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ тако да

$$\widetilde{\omega}_X(\lambda) = \det(\lambda\,\mathbb{1} - \widetilde{\mathcal{J}}_X) = (\lambda - \varepsilon_X\lambda_1(X))^{\nu_1}\ldots(\lambda - \varepsilon_X\lambda_k(X))^{\nu_k}$$

важи за све дефинитне $X \in \mathcal{V}$ и неке скаларе $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1(X), \ldots, \lambda_k(X) \in \mathbb{R}$, који су уређени са $\lambda_1(X) < \cdots < \lambda_k(X)$. Другим речима, $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ има сопствене вредности $\varepsilon_X\lambda_1(X), \ldots, \varepsilon_X\lambda_k(X)$ са вишеструкостима $\nu_1, \ldots, \nu_k$, тим редом. Дефинишимо ν_i-димензионе (уопштене) сопствене просторе

$$\mathcal{V}_i(X) = \operatorname{Ker}(\widetilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda_i(X)\,\mathbb{1})$$

од $\widetilde{\mathcal{J}}_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ и $1 \leqslant i \leqslant k$. На овај начин, за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ имамо директну ортогоналну декомпозицију

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=0}^{k} \mathcal{V}_i(X), \tag{10.32}$$

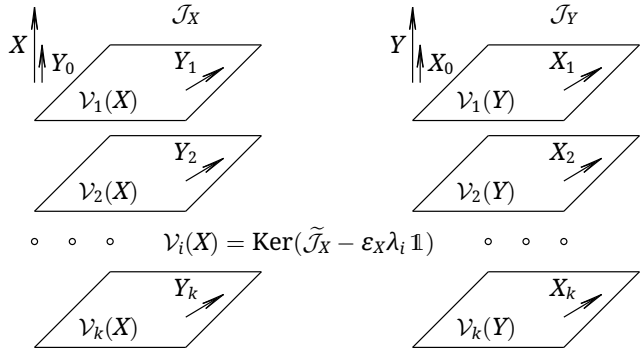
где је $\mathcal{V}_0(X) = \operatorname{Span}\{X\}$.

Кажемо да је k-корена Јакоби-дијагонализабилно R ***Јакоби-пропорционално*** ако за сваки пар дефинитних вектора $X, Y \in \mathcal{V}$ имамо пропорционалност

$$\varepsilon_X(\varepsilon_{Y_0}, \varepsilon_{Y_1}, \ldots, \varepsilon_{Y_k}) = \varepsilon_Y(\varepsilon_{X_0}, \varepsilon_{X_1}, \ldots, \varepsilon_{X_k}),$$

где су $X = \sum_{i=0}^{k} X_i$ и $Y = \sum_{j=0}^{k} Y_j$ растављања таква да $X_i \in \mathcal{V}_i(Y)$ и $Y_j \in \mathcal{V}_j(X)$.

У Римановом окружењу, важан специјални случај, где $Y \in \mathcal{V}_i(X)$ за неко $1 \leqslant i \leqslant k$ повлачи $X \in \mathcal{V}_i(Y)$, повезан је са Јакоби-дуалном импликацијом (9.3). Јасно је да је Риманов Јакоби-пропорционалан R слабо Јакоби-дуалан, по Теореми 9.2 он је Јакоби--дуалан, те је на основу Теореме 9.21 Осерманов, са $\lambda_i(X) = \lambda_i$ за $1 \leqslant i \leqslant k$.



Јакоби-пропорционалност за Риманове Осерманове тензоре открио је Андрејић 2022. године [11], док је уопштење на псеудо-Риманов случај изложено у [13]. Основна идеја је била посматрати Јакоби-пропорционалан Осерманов алгебарски тензор R, и искористити $\mathcal{J}_X V = \varepsilon_X \lambda_i V$ да дефинишемо $\mathcal{K}_X V = \varepsilon_X \mu_i V$ за произвољне $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Наравно, неопходно је додати $\mathcal{K}_X X = 0$, што значи $\mu_0 = 0$. На овај начин, добили смо ендоморфизме $\mathcal{K}_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ задржавајући постојеће сопствене просторе и мењајући им сопствене вредности.

Како (10.32) растављa $Y = \sum_{i=0}^{k} Y_i$ и $Z = \sum_{i=0}^{k} Z_i$ са $Y_i, Z_i \in \mathcal{V}_i(X)$ за $0 \leqslant i \leqslant k$, имамо

$$g(\mathcal{K}_X Y, Z) = g\left(\sum_{i=0}^{k} \mathcal{K}_X Y_i, \sum_{j=0}^{k} Z_j\right) = \varepsilon_X \sum_{i,j=0}^{k} \mu_i g(Y_i, Z_j) = \varepsilon_X \sum_{j=0}^{k} \mu_j g(Y_j, Z_j) = g(Y, \mathcal{K}_X Z),$$

што значи да је свако $\mathcal{K}_X$ самоадјунговано.

Како је R Јакоби-пропорционалан, ако раставимо дефинитне векторе $X, Y \in \mathcal{V}$ са $X = \sum_{i=0}^{k} X_i$ и $Y = \sum_{j=0}^{k} Y_j$ тако да важи $X_i \in \mathcal{V}_i(Y)$ и $Y_j \in \mathcal{V}_j(X)$, онда је $\varepsilon_X \varepsilon_{Y_i} = \varepsilon_Y \varepsilon_{X_i}$ за све $0 \leqslant i \leqslant k$. Добијамо

$$g(\mathcal{K}_X Y, Y) = g\left(\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_X \mu_i Y_i, Y\right) = \varepsilon_X \sum_{i=0}^{k} \mu_i g(Y_i, Y) = \varepsilon_X \sum_{i=0}^{k} \mu_i \varepsilon_{Y_i},$$
$$g(\mathcal{K}_Y X, X) = g\left(\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_Y \mu_i X_i, X\right) = \varepsilon_Y \sum_{i=0}^{k} \mu_i g(X_i, X) = \varepsilon_Y \sum_{i=0}^{k} \mu_i \varepsilon_{X_i},$$

те компатибилност $g(\mathcal{K}_Y X, X) = g(\mathcal{K}_X Y, Y)$ важи за дефинитне $X, Y \in \mathcal{V}$. Тако смо испунили услове Теореме 6.7, што даје наредну теорему (видети [13, Теорема 2] и [11, Теорема 2]).

Теорема 10.16. *Ако постоји Јакоби-пропорционалан Јакоби-дијагонализабилан k-корена алгебарски тензор кривине такав да је* $\det(\lambda \mathbb{1} - \widetilde{\mathcal{J}}_X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \varepsilon_X \lambda_i)^{\nu_i}$, *тада за све $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$ постоји нови Осерманов алгебарски тензор кривине такав да је* $\det(\lambda \mathbb{1} - \widetilde{\mathcal{J}}_X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \varepsilon_X \mu_i)^{\nu_i}$.

Сваки Риманов Јакоби-пропорционалан R је Осерманов, а испоставља се да су сви познати примери Римановог Осермановог R Јакоби-пропорционални. Како $\varepsilon_Y X_0 = g(X, Y) Y$ и $\varepsilon_X Y_0 = g(Y, X) X$ увек важи, добијамо

$$\varepsilon_Y \varepsilon_{X_0} = (g(X, Y))^2 = \varepsilon_X \varepsilon_{Y_0}. \tag{10.33}$$

Свака две-тачке хомогена многострукост неконстантне секционе кривине је два--корена. У том случају $k = 2$, због $\varepsilon_X = \varepsilon_{X_0} + \varepsilon_{X_1} + \varepsilon_{X_2}$ и $\varepsilon_Y = \varepsilon_{Y_0} + \varepsilon_{Y_1} + \varepsilon_{Y_2}$, једнакост (10.33) доноси

$$\varepsilon_X \varepsilon_{Y_1} - \varepsilon_Y \varepsilon_{X_1} = \varepsilon_Y \varepsilon_{X_2} - \varepsilon_X \varepsilon_{Y_2}.$$

Са друге стране, $g(\mathcal{J}_X Y, Y) = g(\mathcal{J}_Y X, X)$ даје $\varepsilon_X(\lambda_1 \varepsilon_{Y_1} + \lambda_2 \varepsilon_{Y_2}) = \varepsilon_Y(\lambda_1 \varepsilon_{X_1} + \lambda_2 \varepsilon_{X_2})$, те је зато

$$\lambda_1(\varepsilon_X \varepsilon_{Y_1} - \varepsilon_Y \varepsilon_{X_1}) = \lambda_2(\varepsilon_Y \varepsilon_{X_2} - \varepsilon_X \varepsilon_{Y_2}).$$

Међутим, како је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, из претходних једнакости добијамо

$$\varepsilon_X \varepsilon_{Y_1} - \varepsilon_Y \varepsilon_{X_1} = 0 = \varepsilon_Y \varepsilon_{X_2} - \varepsilon_X \varepsilon_{Y_2},$$

што повлачи $\varepsilon_Y(\varepsilon_{X_0}, \varepsilon_{X_1}, \varepsilon_{X_2}) = \varepsilon_X(\varepsilon_{Y_0}, \varepsilon_{Y_1}, \varepsilon_{Y_2})$ и даје следећу теорему.

Теорема 10.17. *Сваки два-корена Јакоби-дијагонализабилан Осерманов алгебарски тензор кривине је Јакоби-пропорционалан.*

Претходну теорему је дао Андрејић 2022. године [11, Теорема 3], али је суштински у питању лема о слабој дуалности коју је објавио исти аутор 2010. године [6, Лема 5.6] (видети такође [8, Лема 9]), што се може сматрати за претечу принципа пропорционалности за Осерманове многострукости.

Међутим, иако је свака позната Риманова Осерманова многострукост или један--корен или два-корена, то није случај са Римановим Осермановим алгебарским тензорима кривине. Срећом, сваки познати пример Римановог k-корена Осермановог алгебарског тензора кривине за $k > 2$ је Клифордов.

Нека је R полу-Клифордов, те самим тим и Јакоби-дијагонализабилан Осерманов. Ако раставимо $Y = \alpha_0 X + \sum_{i=1}^m \alpha_i J_i X + P$ и $X = \beta_0 Y + \sum_{i=1}^m \beta_i J_i Y + Q$, где је $P \in \operatorname{Span}\{X, J_1 X, \ldots, J_m X\}^\perp$ и $Q \in \operatorname{Span}\{Y, J_1 Y, \ldots, J_m Y\}^\perp$, онда добијамо

$$-c_i \varepsilon_X \alpha_t = \varepsilon_{J_t X} \alpha_t = g(Y, J_t X) = -g(X, J_t Y) = -\varepsilon_{J_t Y} \beta_t = c_i \varepsilon_Y \beta_t$$

за $1 \leqslant t \leqslant m$, што даје $\varepsilon_X^2 \alpha_t^2 = \varepsilon_Y^2 \beta_t^2$, одакле је $\varepsilon_Y \varepsilon_{\beta_t J_t Y} = -c_i \varepsilon_Y^2 \beta_t^2 = -c_i \varepsilon_X^2 \alpha_t^2 = \varepsilon_X \varepsilon_{\alpha_t J_t X}$. Већ имамо $\varepsilon_Y^2 \beta_0^2 = \varepsilon_X^2 \alpha_0^2$ из (10.33), те преостаје

$$\varepsilon_Y \varepsilon_Q = \varepsilon_Y \varepsilon_X - \varepsilon_Y^2 \beta_0^2 + \varepsilon_Y^2 \sum_{i=1}^m c_i \beta_i^2 = \varepsilon_X \varepsilon_Y - \varepsilon_X^2 \alpha_0^2 + \varepsilon_X^2 \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i^2 = \varepsilon_X \varepsilon_P,$$

што је довољно да закључимо да је R Јакоби-пропорционалан (видети [11, Теорема 4]).

Теорема 10.18. *Сваки полу-Клифордов алгебарски тензор кривине је Јакоби-пропорционалан.*

Нека је R Риманов k-корена Осерманов алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n, тако да је $\widetilde{\omega}_X(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \varepsilon_X \lambda_i)^{\nu_i}$. По Николајевском [88, 89, 90, 91], сваки такав R је Клифордов, осим за $n = 16$, са $\nu_i = 7$ или $\nu_i = 8$ за неко $1 \leqslant i \leqslant k$.

Нека је R Риманов Јакоби-пропорционалан k-корена за $k \geqslant 3$ који није Клифордов, што повлачи $n = 16$. Можемо уредити вишеструкости са $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_k$, те закључити да је $\nu_1 = 8$ или $\nu_1 = 7$. На основу Теореме 10.16, постоји нови Осерманов алгебарски тензор кривине такав да је $\widetilde{\omega}_X(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \varepsilon_X \mu_i)^{\nu_i}$ за произвољне скаларе $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Искористимо $\mu_2 = \lambda_1$ са $\mu_i = \lambda_i$ за $i \neq 2$ да бисмо направили R_1, те $\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1$ са $\mu_i = 0$ за $i \neq 2$ да бисмо направили R_2. Лако је закључити да

важи $R = R_1 + R_2$. Међутим, R_1 је $(k-1)$-корена Осерманов са $\nu_{\max} = \nu_1 + \nu_2$, те је зато Клифордов, осим у случају

$$\nu_1 = 7, \nu_2 = \cdots = \nu_9 = 1, \tag{10.34}$$

док је R_2 2-корена Осерманов са $\nu_{\max} = n - 1 - \nu_2$, те Клифордов, осим у случају

$$\nu_1 = \nu_2 = 7, \nu_3 = 1. \tag{10.35}$$

Због тога, ако искључимо случајеве (10.34) и (10.35), $R = R_1 + R_2$ је сума два Клифордова тензора. Међутим, R_1 и R_2 имају компатибилне Јакобијеве операторе, те ако је J_1 комплексна структура из Клифордове фамилије ранга $\nu_3 + \cdots + \nu_k$ из R_1, а J_2 комплексна структура из Клифордове фамилије ранга ν_2 из R_2, тада $J_1X \perp J_2X$ важи за свако $X \in \mathcal{V}$. Зато добијамо $g(J_1J_2X, X) = 0$, што након поларизације даје $g(J_1J_2X, Y) + g(J_1J_2Y, X) = 0$ за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Одавде имамо $g((J_1J_2 + J_2J_1)X, Y) = 0$, те последично $J_1J_2 + J_2J_1 = 0$, што значи да је унија наших Клифордових фамилија такође Клифордова фамилија, те је R Клифордов.

Штавише, случај (10.34) је такође Клифордов, јер се на сличан начин као раније може раставити на два Клифордова тензора, R_1 који дефинише $\mu_2 = \mu_3 = \lambda_1$ са $\mu_i = \lambda_i$ за $i \neq 2, 3$ и R_2 који дефинише $\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1$ са $\mu_i = 0$ за $i \neq 2, 3$. Тада је R_1 7-корена Осерманов са $\nu_{\max} = 9$, док је R_2 3-корена Осерманов са $\nu_{\max} = 13$, те су зато оба Клифордова.

Са друге стране, преостали случај $\nu_1 = 8, \nu_2 = 7$ је напоменуо Николајевски [91, Теорема 1.2], који је објавио тврђење да је таква Осерманова многострукост локално изометрична са $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$ или $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$ (али треба бити пажљив јер доказ није дат). Напоменимо да су у питању једине познате Осерманове многострукости које нису Клифордове. Остале потенцијалне контрапримере који су Јакоби-пропорционални треба тражити у случају (10.35).

Теорема 10.19. *Ако је R Риманов Јакоби-пропорционалан алгебарски тензор кривине који није Клифордов, онда је R 2-корена са вишеструкостима* 8 *и* 7*, или је 3-корена са вишеструкостима* 7*,* 7 *и* 1*.*

Претходну теорему је дао Андрејић 2022. године [11, Теорема 5], а она може бити корисна у решавању Осерманове хипотезе. Тако је кључно питање да ли можемо показати да су Осерманови алгебарски тензори кривине Јакоби-пропорционални.

Глава A

ДОДАТАК

A.1 Теорија скупова

Да бисмо избегли потенцијалне двосмислености поставимо нотацију за стандардне скупове које користимо кроз ову књигу. Скуп свих природних бројева (без нуле) означавамо са $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, док нам је $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Скуп целих бројева је $\mathbb{Z}$, скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$, скуп реалних бројева $\mathbb{R}$, а скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$.

Скуп је ***пребројив*** ако постоји инјективно пресликавање из њега у скуп природних бројева $\mathbb{N}$. Другим речима, сваком елементу скупа може се доделити јединствен природан број, те или је скуп коначан или постоји бијективно пресликавање између њега и $\mathbb{N}$. Уколико желимо да нагласимо да пребројив скуп није коначан, кажемо да је ***пребројиво бесконачан***. Напоменимо да постоје аутори који уместо нашег пребројив користе термин највише пребројив, док реч пребројив користе само ако скуп није коначан. У сваком случају, ми сматрамо да коначан скуп јесте пребројив.

Наведимо неке основне чињенице о пребројивим скуповима. Скупови $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ јесу пребројиви, док $\mathbb{R}$ није пребројив. Сваки подскуп пребројивог скупа је пребројив. Производ два пребројива скупа је пребројив. Пребројива унија пребројивих скупова је пребројива.

Наредна лема нам говори како се пресликавање између скупова понаша у односу на скуповне операције.

Лема A.1. *Слика уније подскупова при произвољном пресликавању једнака је унији њихових слика. Слика пресека подскупова при инјективном пресликавању једнака је пресеку њихових слика.*

Доказ. Нека су X и Y произвољни скупови, $A_\alpha \subseteq X$ за свако $\alpha \in \Lambda$, а $f\colon X \to Y$ пресликавање. Из $A_\beta \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha$ је $f(A_\beta) \subseteq f(\bigcup_\alpha A_\alpha)$ за свако $\beta \in \Lambda$, те $\bigcup_\alpha f(A_\alpha) \subseteq f(\bigcup_\alpha A_\alpha)$. Са друге стране, за $x \in f(\bigcup_\alpha A_\alpha)$ постоји $y \in \bigcup_\alpha A_\alpha$ тако да је $f(y) = x$, те постоји $\beta \in \Lambda$ тако да је $y \in A_\beta$, одакле је $x = f(y) \in f(A_\beta) \subseteq \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$, што даје $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) \subseteq \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$ и доказује

$$f\Big(\bigcup_\alpha A_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha). \tag{A.1}$$

Из $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq A_\beta$ је $f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subseteq f(A_\beta)$ за свако $\beta \in \Lambda$, те $f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subseteq \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$. Са друге стране, за $x \in \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$ је $x \in f(A_\beta)$ за свако $\beta \in \Lambda$, те уз услов да је f инјективно имамо $f^{-1}(x) \in A_\beta$ за свако $\beta \in \Lambda$ и зато $x \in f(\bigcap_\alpha A_\alpha)$, што даје $\bigcap_\alpha f(A_\alpha) \subseteq f(\bigcap_\alpha A_\alpha)$ и доказује

$$f\Big(\bigcap_\alpha A_\alpha\Big) = \bigcap_\alpha f(A_\alpha). \tag{A.2}$$

Напоменимо да формула (A.2) не мора да важи ако f није инјективно, на пример за константно f и дисјунктне A_α. □

А.2 Топологија

Ова књига написана је за читаоце који већ имају солидно разумевање основне топологије, а као подсетник могу послужити Ли [77] и Крајник[1] [37]. У овој секцији дајемо основне идеје из топологије које смо користили кроз ову књигу.

Топологија на скупу X је фамилија $\mathcal{T}$ подскупова од X таква да је $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, док су произвољна унија елемената из $\mathcal{T}$, као и коначан пресек елемената из $\mathcal{T}$ такође у $\mathcal{T}$. Елементи топологије су ***отворени подскупови***, док је подскуп $A \subseteq X$ ***затворен*** ако је његов комплемент $X \setminus A$ отворен. ***Тополошки простор*** је уређен пар $(X, \mathcal{T})$ који се састоји од скупа X опремљеног топологијом $\mathcal{T}$ на X, али кад се топологија подразумева уобичајено је да за X кажемо да је тополошки простор.

За дато $x \in X$, ***околина*** од x је сваки отворен подскуп $U \subseteq X$ такав да $x \in U$. Многи аутори користе појам околина у ширем смислу, да означе произвољан подскуп који садржи отворен подскуп око x. За такве подскупове који нису нужно отворени, користићемо појам ***уопштена околина*** од x. Међутим, у овој књизи се околина увек сматра отвореним скупом.

Пример А.1. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A \subset X$. ***Релативна топологија*** је топологија $\mathcal{T}_A$ на скупу A задата са $\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\}$. △

Пример А.2. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, а $q\colon X \to Y$ сурјективно пресликавање. ***Количничка топологија*** је топологија $\mathcal{T}_q = \{V \subseteq Y : q^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ задата на скупу Y. Често је сурјекција q природна пројекција која елементе из X шаље у њихове класе еквиваленције за неку релацију еквиваленције на X. △

За пресликавање $f\colon X \to Y$ између тополошких простора кажемо да је ***непрекидно*** ако је инверзна слика $f^{-1}(U) \subseteq X$ отворена за сваки отворен $U \subseteq Y$. Бијективно пресликавање $f\colon X \to Y$ такво да су и f и f^{-1} непрекидна зовемо ***хомеоморфизам***. Уколико постоји хомеоморфизам из X у Y онда кажемо да су X и Y ***хомеоморфни***.

Унија свих отворених подскупова који су подскуп скупа A зовемо ***унутрашњост*** скупа A и обележавамо са $\operatorname{Int} A$. Пресек свих затворених подскупова који су надскуп скупа A зовемо ***затворење*** скупа A и обележавамо са $\overline{A}$. ***Граница*** скупа A је скуп $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$. За тачку $x \in A$ кажемо да је ***изолована тачка*** од A ако x има околину U такву да је $U \cap A = \{x\}$.

За низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тачака тополошког простора X кажемо да ***конвергира*** ка $x \in X$ ако за сваку околину U од x постоји $N \in \mathbb{N}$ тако да је $x_n \in U$ за свако $n \geqslant N$, а тада пишемо $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

За тополошки простор X кажемо да је ***Хаусдорфов простор*** ако за сваки пар различитих тачака $p, q \in X$ постоје отворени подскупови $U, V \subseteq X$ са $p \in U$ и $q \in V$ тако да је $U \cap V = \emptyset$. Другим речима, тополошки простор је Хаусдорфов, ако се сваке две различите тачке могу раздвојити њиховим дисјунктним околинама. Тополошки простор X је ***регуларан простор*** ако се за свако $x \in X$ и сваки затворен подскуп $C \not\ni x$, тачка x и скуп C могу раздвојити дисјунктним околинама. Простор је ***нормалан*** ако се свака два дисјунктна затворена подскупа од X могу раздвојити дисјунктним околинама.

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. ***База топологије*** је фамилија $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ таква да је свако $U \in \mathcal{T}$ унија неких елемената из $\mathcal{B}$. ***Локална база*** у $x \in X$ је фамилија $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ околина од x таква да свака околина од x садржи барем један елемент из $\mathcal{B}_x$. Неки аутори дозвољавају да елементи локалне базе не буду отворени скупови, те ће ***уопштена локална база*** у $x \in X$ бити фамилија уопштених околина од x таква да свака околина од x садржи барем један елемент те фамилије. За тополошки

[1] Marius Crainic (1974), румунско-холандски математичар

простор кажемо да задовољава ***прву аксиому пребројивости*** ако свака тачка простора има пребројиву базу, а задовољава ***другу аксиому пребројивости*** ако има пребројиву базу топологије.

Две најчешће изучаване тополошке особине кроз историју топологије су свакако повезаност и компактност. За тополошки простор кажемо да је ***повезан*** уколико се не може изразити као унија два дисјунктна непразна отворена подскупа. Тополошки простор је ***путно повезан*** ако су сваке две тачке повезане путем (за свако $x, y \in X$ постоји непрекидно пресликавање $f\colon [0,1] \to X$ такво да је $f(0) = x$ и $f(1) = y$). За подскуп тополошког простора кажемо да је ***повезан*** или ***путно повевезан*** ако има те особине у односу на релативну топологију. Повезаност је инваријанта непрекидног пресликавања, а сваки путно повезан тополошки простор је повезан.

Грубо говорећи, кажемо да је тополошко својство локално задовољено ако свака мала област простора личи на област простора у којем то својство важи. Конкретније, ако је X тополошки простор, а P придев који се може применити на просторе, онда „X је ***локално*** P“ често значи да за свако $x \in X$ и сваку околину $U \ni x$ постоји подскуп $A \subseteq U$ који задовољава особину P и садржи околину од x. Другим речима, тополошки простор је локално P ако и само ако свака тачка има уопштену локалну базу која се састоји од скупова са особином P.

Тополошки простор је ***локално повезан*** ако свака тачка има локалну базу која се састоји од повезаних околина. Како унија локалних база по свим тачкама чини базу топологије, а свака база топологије садржи локалну базу за сваку од тачака, то је тополошки простор локално повезан ако и само ако има базу која се састоји од повезаних скупова. Сасвим слично, тополошки простор је ***локално путно повезан*** ако има базу од путно повезаних скупова.

Компонента повезаности тополошког простора је његов максималан повезан подскуп. Свака тачка тополошког простора X припада некој његовој компоненти повезаности, а компоненте повезаности су дисјунктне и затворене у X. Ако је тополошки простор локално повезан, онда су све компоненте повезаности отворене, одакле следи да је он простор дисјунктне уније његових компоненти повезаности, што у општем случају није тачно.

Пример А.3. Повезан простор који није локално повезан ни путно повезан може се пронаћи чак и као подскуп еуклидске равни, а класични примери су тополошка синусоида (график функције $\sin(1/x)$ за $x \in (0,1]$ заједно са дужи $\{0\} \times [-1,1]$) и бесконачна метла (унија дужи које спајају координатни почетак са тачкама $(1, 1/n)$ за $n \in \mathbb{N}$ заједно са дужи $[1/2, 1] \times \{0\}$). △

Покривач неког скупа је фамилија скупова чија унија садржи тај скуп као подскуп, а уколико су сви елементи те фамилије отворени, онда је то ***отворен покривач***. ***Потпокривач*** неког покривача је његова потфамилија која је такође покривач. За тополошки простор или неки његов подскуп кажемо да је ***компактан*** ако сваки његов отворен покривач има коначан потпокривач. За подскуп кажемо да је ***релативно компактан*** уколико је његово затворење компактно.

Сваки затворен подскуп компактног простора је компактан, док је сваки компактан подскуп Хаусдорфовог простора затворен. Компактност је инваријанта непрекидног пресликавања, а важи и наредна лема.

Лема А.2. *Ако је $f\colon M \to N$ непрекидно пресликавање између компактног простора M и Хаусдорфовог простора N, онда је f затворено.*

Доказ. Сваки затворен подскуп $X \subseteq M$ компактног скупа је компактан, те је $f(X) \subseteq N$ компактан и зато затворен. □

Структура компактних подскупова еуклидског простора је добро схваћена кроз ***Хајне***[2]***–Борел***[3] ***теорему***.

Теорема А.3. *Подскуп од $\mathbb{R}^n$ је компактан ако и само ако је затворен и ограничен.*

Тополошки простор је ***локално компактан*** ако свака тачка има уопштену локалну базу која се састоји од компактних скупова. Уколико је простор Хаусдорфов (што је готово увек случај) може се показати да је он локално компактан ако и само ако свака тачка има локалну базу која се састоји од релативно компактних скупова. Међутим, испоставља се да је Хаусдорфов простор локално компактан ако и само ако свака његова тачка има компактну уопштену околину, што је и најчешће коришћена дефиниција. Наравно, сваки компактан Хаусдорфов простор је локално компактан.

Занимљива је ***Теорема о инваријантности домена***, што је дубок резултат који је 1911. поставио Браувер[4] [26], а дајемо га без доказа.

Теорема А.4. *Ако је $U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен за неко $n \in \mathbb{N}$ и $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ непрекидно и инјективно, онда је $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен.*

Другим речима, свако непрекидно инјективно пресликавање између еуклидских простора истих димензија је отворено пресликавање. Важна последица инваријантности домена је ***Теорема о инваријантности димензије***.

Теорема А.5. *Непразан подскуп од $\mathbb{R}^m$ није хомеоморфан отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$ осим за $m = n$.*

Доказ. Нека је отворен $U \subseteq \mathbb{R}^m$ хомеоморфан са $V \subseteq \mathbb{R}^n$ при хомеоморфизму $f\colon U \to V$. Не умањујући општост можемо претпоставити да је $n \leqslant m$ (иначе посматрамо f^{-1}), те постоји линеарна инклузија $\imath\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$. Пресликавање $\imath \circ f\colon U \to \mathbb{R}^m$ је непрекидно и инјективно, те је по Теореми А.4 $\imath(f(U))$ отворен. Међутим, то је немогуће за $n < m$ јер слика инклузије лежи у хиперравни, а свака околина тачке хиперравни садржи тачке које нису у хиперравни, те преостаје $m = n$. □

А.3 Сопствена структура ендоморфизама

У овој секцији понављамо нека знања из линеарне алгебре и дискутујемо алгебарске и аналитичке аспекте који су повезани са сопственом структуром ендоморфизама векторског простора. Основна литература може бити књига коју су написали Фридберг[5], Инсел[6] и Спенс[7] [51].

Нека је $\mathcal{V}$ векторски простор димензије $n \in \mathbb{N}$ над пољем $\mathbb{F}$, где нас највише занимају случајеви $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. ***Ендоморфизам*** векторског простора $\mathcal{V}$ је линеарно пресликавање $A\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, а скуп свих ендоморфизама од $\mathcal{V}$ обележавамо са $\mathrm{End}(\mathcal{V})$.

Сопствени вектор од $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ је ненула вектор који не мења правац након што на њега применимо A. Тада ендоморфизам A само скалира X за неко $\lambda \in \mathbb{F}$ које зовемо ***сопствена вредност*** од A, што можемо записати са $AX = \lambda X$ уз $X \neq 0$. Скуп свих сопствених вектора од A за вредност λ, заједно са нула вектором, зовемо ***сопствени простор*** $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathbb{1}) \leqslant \mathcal{V}$.

[2] Heinrich Eduard Heine (1821–1881), немачки математичар
[3] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956), француски математичар и политичар
[4] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), холандски математичар и филозоф
[5] Stephen Howard Friedberg, амерички математичар
[6] Arnold Joseph Insel (1940), амерички математичар
[7] Lawrence Edward Spence (1946), амерички математичар

У присуству неке базе $e = (E_1, \ldots, E_n)$ за $\mathcal{V}$, свако $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ се идентификује са матрицом $[A]_e \in \mathbb{F}^{n\times n}$ за коју важи $A(E_j) = \sum_{i=1}^{n}([A]_e)_{ij}E_i$ за свако $1 \leqslant j \leqslant n$. Ако је X сопствени вектор од A за сопствену вредност λ, онда важи $(\lambda\mathbb{1} - A)X = 0$, те матрица $[\lambda\mathbb{1} - A]_e = \lambda\mathbb{1} - [A]_e$ не може бити инвертибилна јер би донела јединствено решење $X = 0$, што повлачи $\det(\lambda\mathbb{1} - [A]_e) = 0$. Обратно, ако је $\det(\lambda\mathbb{1} - [A]_e) = 0$ једначина $(\lambda\mathbb{1} - A)X = 0$ има бесконачно много решења (јер је $X = 0$ свакако решење), те постоји сопствени вектор за који је λ сопствена вредност.

Полином $\omega_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A) = \det(x\mathbb{1} - [A]_e)$ не зависи од избора базе e, и зовемо га ***карактеристични полином*** од A, а сопствене вредности ендоморфизма A су тачно корени полинома ω_A. Карактеристични полином је степена n, те број различитих сопствених вредности не може бити већи од димензије простора.

Вишеструкост (или ***алгебарска вишеструкост***) сопствене вредности λ ендоморфизма $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ је највеће $r \in \mathbb{N}$ за које полином $(x - \lambda)^r$ дели $\omega_A(x)$, док је њена ***геометријска вишеструкост*** једнака $s = \dim \mathcal{E}_\lambda$. Ако базу за $\mathcal{E}_\lambda$ продужимо до базе e за $\mathcal{V}$, онда је $[A]_e$ горње троугаона блок матрица, одакле се види да полином $(\lambda - x)^s$ дели $\omega_A(x)$, што значи да геометријска вишеструкост сопствене вредности није већа од њене алгебарске вишеструкости, а свакако је барем 1.

За ендоморфизам $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ кажемо да је ***дијагонализабилан*** ако постоји база e за $\mathcal{V}$ таква да је матрица $[A]_e$ дијагонална. Ако неки сопствени вектори од A чине базу за $\mathcal{V}$, за ту базу кажемо да је ***сопствена база***, а A је дијагонализабилан ако и само ако $\mathcal{V}$ има сопствену базу у односу на A. За полином из $\mathbb{F}[x]$ кажемо да је ***растављив*** (над $\mathbb{F}$) ако се може факторисати на линеарне факторе, односно ако су му сви корени у $\mathbb{F}$. Карактеристични полином дијагонализабилног ендоморфизма је очигледно растављив.

Лема А.6. *Сопствени вектори ендоморфизма векторског простора који одговарају различитим сопственим вредностима су линеарно независни.*

Доказ. Нека је $r \in \mathbb{N}$ минималан број линеарно зависних вектора који одговарају различитим сопственим вредностима од $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, а $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r = 0$ важи за неке $X_i \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \in \mathbb{F}$ са $AX_i = \lambda_i X_i$ за $1 \leqslant i \leqslant r$, где су $\lambda_i \in \mathbb{F}$ различити. Тада је $\alpha_1 AX_1 + \cdots + \alpha_r AX_r = 0$, те имамо $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 + \cdots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_1)X_r = 0$. Како је r минимално, $X_2, \ldots, X_r$ су линеарно независни, те је $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_r(\lambda_r - \lambda_1) = 0$. Одавде добијамо $\alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$, а затим из $\alpha_1 X_1 = 0$ следи и $\alpha_1 = 0$, те су $X_1, \ldots, X_r$ линеарно независни, што је супротно претпоставци и доказује тврђење. □

Као последица претходне леме, може се показати да важи $\mathcal{E}_\mu \cap \sum_{\lambda\neq\mu} \mathcal{E}_\lambda = \{0\}$, што значи да сопствени простори чине директну суму $\bigoplus_\lambda \mathcal{E}_\lambda \leqslant \mathcal{V}$. Напоменимо да ознака $\bigoplus_\lambda$ формално представља директну суму по свим скаларима $\lambda \in \mathbb{F}$, али ако λ није сопствена вредност по дефиницији је $\mathcal{E}_\lambda = \{0\}$, те суштински имамо директну суму по сопственим вредностима λ. Једнакост $\bigoplus_\lambda \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{V}$ се достиже ако и само ако је A дијагонализабилан, те је у случају дијагонализабилног A геометријска вишеструкост једнака алгебарској за сваку сопствену вредност од A.

За $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ кажемо да је A-***инваријантан*** потпростор од $\mathcal{V}$ за $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ ако важи $A(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$, односно ако $A(X) \in \mathcal{W}$ за свако $X \in \mathcal{W}$. У том случају је $A\restriction_{\mathcal{W}} \in \mathrm{End}(\mathcal{W})$, а ако базу за $\mathcal{W}$ допунимо до базе e за $\mathcal{V}$ онда је $[A]_e$ горње троугаона блок матрица, одакле се види да полином $\omega_{A\restriction_{\mathcal{W}}}(x)$ дели $\omega_A(x)$.

Лема А.7. *Карактеристични полином рестрикције ендоморфизма A коначнодимензионог векторског простора на A-инваријантан потпростор дели карактеристични полином од A.*

Основни пример A-инваријантног потпростора од $\mathcal{V}$ за $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ је A-***циклични*** потпростор $\mathcal{C}_X = \mathrm{Span} \bigcup_{r\in\mathbb{N}_0} \{A^r(X)\}$ генерисан ненула вектором $X \in \mathcal{V}$, што је најмањи

A-инваријантан потпростор од $\mathcal{V}$ који садржи X. Ако је $m \in \mathbb{N}$ највеће такво да је скуп $\bigcup_{r=0}^{m-1}\{A^r(X)\}$ линеарно независан ($m \leqslant n$), онда је $\operatorname{Span}\bigcup_{r=0}^{m-1}\{A^r(X)\}$ A-инваријантан и једнак са $\mathcal{C}_X$. Тада је $e = (X, A(X), \ldots, A^{m-1}(X))$ база за $\mathcal{W} = \mathcal{C}_X$ и имамо $\dim \mathcal{C}_X = m$. Ако за $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{F}$ важи

$$\alpha_0 X + \alpha_1 A(X) + \cdots + \alpha_{m-1} A^{m-1}(X) + A^m(X) = 0,$$

онда је матрица рестрикованог ендоморфизма A у нашој бази једнака

$$[A\restriction_{\mathcal{W}}]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix},$$

те добијамо карактеристични полином $\omega_{A\restriction_{\mathcal{W}}}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$.

Одавде је $(\omega_{A\restriction_{\mathcal{W}}}(A))(X) = (a_0\,\mathbb{1} + a_1 A + \cdots + a_{m-1}A^{m-1} + A^m)(X) = 0$, а како по Леми А.7 полином $\omega_{A\restriction_{\mathcal{W}}}(x)$ дели $\omega_A(x)$, то је и $(\omega_A(A))(X) = 0$ за свако $X \neq 0$. Наравно, $\omega_A(A)$ је линеарно те је $(\omega_A(A))(0) = 0$ и комплетира једнакост $\omega_A(A) = 0$ што је познато као ***Кејли–Хамилтон теорема***.

Теорема А.8. *Ендоморфизам коначнодимензионог векторског простора поништава свој карактеристични полином.*

Сваки ендоморфизам $A \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$ поништва свој карактеристични полином, те постоји моничан полином $\mu_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ најмањег природног степена који има то својство, $\mu_A(A) = 0$. Такав полином μ_A је јединствен и зовемо га ***минимални полином***, а јасно је да он мора да дели полином ω_A. Ако је $p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(A) = 0$, онда имамо

$$p(x)\,\mathbb{1} = p(x)\,\mathbb{1} - p(A) = \sum_{j=0}^{m} a_j((x\,\mathbb{1})^j - A^j) = (x\,\mathbb{1} - A)\sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{k=1}^{j} x^{j-k}A^{k-1},$$

одакле следи да $\omega_A(x) = \det(x\,\mathbb{1} - A)$ дели полином $\det(p(x)\,\mathbb{1}) = (p(x))^n$, где је $n = \dim \mathcal{V}$, што доказује наредну лему која посебно важи и за минимални полином.

Лема А.9. *Ако ендоморфизам поништава неки полином, онда тај полином за факторе има све иредуцибилне факторе карактеристичног полинома.*

Основна идеја је раставити $\mathcal{V}$ на директну суму A-инваријантних потпростора јер се понашање ендоморфизма A на $\mathcal{V}$ може закључити из његовог понашања на појединачним потпросторима. Ако је $\mathcal{V} = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{W}_k$, где су $\mathcal{W}_k \leqslant \mathcal{V}$ A-инваријантни за $1 \leqslant k \leqslant m$, онда од појединачних база можемо направити базу за $\mathcal{V}$ у односу на коју A има блок дијагоналну матрицу, те је карактеристични полином од A једнак производу карактеристичних полинома појединачних рестрикција,

$$\omega_A(x) = \prod_{k=1}^{m} \omega_{A\restriction_{\mathcal{W}_k}}(x).$$

Нека је A ендоморфизам n-димензионог векторског простора $\mathcal{V}$ над пољем $\mathbb{F}$. Ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ за који постоји $r \in \mathbb{N}$ такво да је $(A - \lambda\,\mathbb{1})^r(X) = 0$ зовемо ***уопштени сопствени вектор*** од A за $\lambda \in \mathbb{F}$. Скуп свих уопштених сопствених вектора од A за вредност λ у пакету са нула вектором обележавамо са $\mathcal{V}_\lambda$ и зовемо ***уопштени сопствени простор***, а лако је проверити да је он векторски потпростор од $\mathcal{V}$. Ради једноставнијег записа, за $\lambda \in \mathbb{F}$ дефинишемо $A_\lambda = A - \lambda\,\mathbb{1} \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$.

Ако је $d < n$ вишеструкост сопствене вредности λ, то постоје $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ и $0 \neq \mu \in \mathbb{F}$ тако да је $\omega_A(x) = (x-\lambda)^d(p(x)(x-\lambda)+\mu)$. По Кејли–Хамилтон теореми (Теорема А.8) имамо $0 = \omega_A(A) = p(A)(A_\lambda)^{d+1} + \mu(A_\lambda)^d$, одакле следи $(A_\lambda)^d = -(1/\mu)p(A)(A_\lambda)^{d+1}$, те ако је $(A_\lambda)^r X = 0$ за $r > d$, онда је и $(A_\lambda)^d X = 0$, што по Теореми А.8 важи и за $d = n$. Зато је $\mathcal{V}_\lambda = \operatorname{Ker}(A_\lambda)^d$, а како је $d \leqslant n$ увек можемо написати $\mathcal{V}_\lambda = \operatorname{Ker}(A_\lambda)^n$.

За полиноме $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ важи $p(A)q(A) = q(A)p(A)$, а примена за $q(A) = (A_\lambda)^d$ доноси $p(A)(\mathcal{V}_\lambda) \subseteq \mathcal{V}_\lambda$, што значи да сваки уопштени сопствени простор $\mathcal{V}_\lambda$ јесте $p(A)$-инваријантан, те и A-инваријантан. Штавише, ако полином $p(x)$ није дељив са $x-\lambda$, онда је рестрикција од $p(A)$ на $\mathcal{V}_\lambda$ инјективна. Претпоставка $X \in \mathcal{V}_\lambda \cap \operatorname{Ker} p(A)$ даје минимално $0 \leqslant r \leqslant d$ такво да је $(A_\lambda)^r X = 0$ као и $0 = p(A)(X) = q(A)A_\lambda X + \mu X$ за неко $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ и $0 \neq \mu \in \mathbb{F}$, одакле за $r \geqslant 1$ важи $q(A)(A_\lambda)^r X + \mu(A_\lambda)^{r-1}X = 0$, те r није минимално због $(A_\lambda)^{r-1}X = 0$ и преостаје $r = 0$, односно $X = 0$. Зато је $p(A)\restriction_{\mathcal{V}_\lambda}$ аутоморфизам потпростора $\mathcal{V}_\lambda$ кад $p(x)$ није дељив са $x-\lambda$, што посебно важи за A_μ у случају $\mu \neq \lambda$.

Лема А.10. *Нека је A ендоморфизам коначнодимензионог векторског простора $\mathcal{V}$ над пољем $\mathbb{F}$, λ његова сопствена вредност, а $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ произвољан полином. Уопштени сопствени простор $\mathcal{V}_\lambda$ је $p(A)$-инваријантан, а ако полином $x-\lambda$ не дели $p(x)$ онда је рестрикција од $p(A)\restriction_{\mathcal{V}_\lambda}$ аутоморфизам потпростора $\mathcal{V}_\lambda$.*

По Теореми о рангу и дефекту за $(A_\lambda)^d \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$, A-инваријантни потпростори $\operatorname{Ker}(A_\lambda)^d = \mathcal{V}_\lambda$ и $\operatorname{Im}(A_\lambda)^d = (A_\lambda)^d(\mathcal{V})$ су комплементарни, те је $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\lambda \oplus (A_\lambda)^d(\mathcal{V})$. За $X = (A_\lambda)^d(Y)$ из $A_\lambda(X) = 0$ следи $Y \in \mathcal{V}_\lambda$ и $X = 0$, те не постоји $X \in (A_\lambda)^d(\mathcal{V})$ које је сопствени вектор од A за λ, што значи да λ није сопствена вредност рестрикције од A на $(A_\lambda)^d(\mathcal{V})$. Како $A\restriction_{\mathcal{V}_\lambda}$ поништава полином $(x-\lambda)^d$, његов карактеристични полином по Леми А.9 нема других иредуцибилних фактора осим $x-\lambda$, те мора бити баш $(x-\lambda)^d$.

Лема А.11. *Ако је d вишеструкост сопствене вредности λ за ендоморфизам A коначнодимензионог векторског простора $\mathcal{V}$, онда је $\dim \mathcal{V}_\lambda = d$ и $(x-\lambda)^d$ је карактеристични полином рестрикције $A\restriction_{\mathcal{V}_\lambda}$.*

Ако је $X \in \mathcal{V}_\lambda \cap \sum_{\mu\neq\lambda} \mathcal{V}_\mu$, то је $(A_\lambda)^n(X) = 0$, а како је A_λ по Леми А.10 аутоморфизам на $\mathcal{V}_\mu$ за $\mu \neq \lambda$ то је $(A_\lambda)^n$ аутоморфизам на $\sum_{\mu\neq\lambda} \mathcal{V}_\mu \ni X$, одакле следи $X = 0$. Зато уопштени сопствени простори чине директну суму $\bigoplus_\lambda \mathcal{V}_\lambda \leqslant \mathcal{V}$, што уопштава Лему А.6. Ако је карактеристични полином ω_A растављив, онда је збир вишеструкости сопствених вредности једнак n и добијамо $\mathcal{V} = \bigoplus_\lambda \mathcal{V}_\lambda$.

Теорема А.12. *Ако ендоморфизам A коначнодимензионог векторског простора $\mathcal{V}$ има растављив карактеристични полином, онда се $\mathcal{V}$ раставља на директну суму уопштених сопствених простора у односу на A.*

Размотримо како се ендоморфизам A понаша на уопштеном сопственом простору $\mathcal{V}_\lambda$. За фиксирану сопствену вредност λ поставимо $\mathcal{W} = \mathcal{V}_\lambda$ и $B = A_\lambda\restriction_{\mathcal{W}} \in \operatorname{End}(\mathcal{W})$. Из Леме А.11 је $B^d = 0$ за $d = \dim \mathcal{W}$, одакле следи да за свако $0 \neq Y \in \mathcal{W}$ постоји најмање $r(Y) \in \mathbb{N}$ такво да је $B^{r(Y)}Y = 0$, те са $f(Y) = B^{r(Y)-1}Y \neq 0$ и $f(0) = 0$ дефинишемо пресликавање $f\colon \mathcal{W} \to \mathcal{E}_\lambda = \operatorname{Ker} B$ које сваком уопштеном сопственом вектору за сопствену вредност λ додељује сопствени вектор за λ.

За свако ненула $X \in \mathcal{E}_\lambda$ уводимо непразан скуп $\mathcal{U}_X = \{Y \in \mathcal{W} : B^{r(Y)-1}Y = X\}$, одакле произвољно ненула $Y \in \mathcal{U}_X$ за које је $s = r(Y)$ даје B-циклични потпростор $\mathcal{C}_Y = \operatorname{Span}\bigcup_{k=0}^{s-1}\{B^k(Y)\} \leqslant \mathcal{W}$ са особином $f(\mathcal{C}_Y) = \operatorname{Span}\{X\}$. Циклус $(B^{s-1}Y, \ldots, B^2Y, BY, Y)$ је канонска база за $\mathcal{C}_Y$, а у односу на њу матрица ендоморфизма $A\restriction_{\mathcal{C}_Y} = A_\lambda\restriction_{\mathcal{C}_Y} + \lambda\,\mathbb{1}_{\mathcal{C}_Y} =$

$B\restriction_{\mathcal{C}_Y} + \lambda\,\mathbb{1}_{\mathcal{C}_Y}$ има облик

$$\mathcal{J}_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{s\times s}, \tag{A.3}$$

за који кажемо да је (стандардни) ***Жорданов блок*** или ***Жорданова матрица*** реда s за вредност $\lambda \in \mathbb{F}$.

Нека је $(E_1, \ldots, E_m)$ произвољна база сопственог простора $\mathcal{E}_\lambda$, а $Y_i \in \mathcal{U}_{E_i}$ за $1 \leqslant i \leqslant m$ произвољан избор вектора. Математичком индукцијом по m доказујемо да важи $\sum_{k=1}^m \mathcal{C}_{Y_k} = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{C}_{Y_k}$, што је очигледно за $m = 1$. За корак индукције имамо да важи $\sum_k \mathcal{C}_{Y_k} = \mathcal{C}_{Y_j} + \sum_{k\neq j} \mathcal{C}_{Y_k} = \mathcal{C}_{Y_j} + \bigoplus_{k\neq j} \mathcal{C}_{Y_k}$, а како је $\mathcal{C}_{Y_j} \cap \bigoplus_{k\neq j} \mathcal{C}_{Y_k} = \{0\}$ због $f(\mathcal{C}_{Y_j}) = \operatorname{Span}\{E_j\}$ и $f(\bigoplus_{k\neq j} \mathcal{C}_{Y_k}) \subseteq \operatorname{Span} \bigcup_{k\neq j}\{E_k\}$, то добијамо директну суму $\bigoplus_{k=1}^m \mathcal{C}_{Y_k} \leqslant \mathcal{W}$.

Ако избор $Y_i \in \mathcal{U}_{E_i}$ за $1 \leqslant i \leqslant m$ начинимо тако да је $r(Y_i)$ максимално за $Y_i \in \mathcal{U}_{E_i}$, можемо доказати да је $\mathcal{W} = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{C}_{Y_k}$. Доказ изводимо математичком индукцијом по $d = \dim \mathcal{W}$, што очигледно важи за $d = 1$. За корак индукције посматрамо потпростор $B(\mathcal{W}) \leqslant \mathcal{W}$ и рестрикцију $B\restriction_{B(\mathcal{W})}$, где имамо $\operatorname{Ker} B = \mathcal{E}_\lambda$, одакле је $\dim B(\mathcal{W}) = d - m < d$. По индукцијској хипотези важи $B(\mathcal{W}) = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{C}_{BY_k}$, где је по конвенцији $\mathcal{C}_0 = \{0\}$, што имамо у случају $Y_k = E_k$. Како је $\dim \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{C}_{Y_k} = m + \dim \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{C}_{BY_k} = d$, то је $\mathcal{W} = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{C}_{Y_k}$.

Лема А.13. *Уопштени сопствени простор ендоморфизма A раставља се на директну суму A-цикличних потпростора.*

Као последицу Теореме А.12 добијамо наредну теорему.

Теорема А.14. *Ако ендоморфизам A коначнодимензионог векторског простора $\mathcal{V}$ има растављив карактеристични полином, онда се $\mathcal{V}$ раставља на директну суму A-цикличних потпростора и постоји база која се састоји од дисјунктних циклуса уопштених сопствених вектора у којој је матрица од A блок-дијагонална са Жордановим матрицама на дијагонали.*

Размотримо за нас најважнији случај $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, кад је $\mathcal{V}$ коначнодимензиони реални векторски простор. Карактеристични полином ω_A за $A \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$ има реалне коефицијенте, али његови корени не морају нужно бити реални. Тако је могуће да ендоморфизам A има нерастављив карактеристични полином, те да самим тим не буде дијагонализабилан. Комплексни бројеви чине алгебарски затворено поље, а ***основна теорема алгебре*** каже да сваки неконстантан полином из $\mathbb{C}[x]$ има барем један комплексни корен, те у случају $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ сваки ендоморфизам има растављив карактеристични полином.

То нас мотивише да реални векторски простор $\mathcal{V}$ природно продужимо на комплексни векторски простор $\mathcal{V}_\mathbb{C} = \{(X, Y) : X, Y \in \mathcal{V}\} = \mathcal{V} \times \mathcal{V} = \mathcal{V} \oplus i\mathcal{V} = \{X + iY : X, Y \in \mathcal{V}\}$ за који кажемо да је ***комплексификација*** од $\mathcal{V}$. Произвољна база за $\mathcal{V}$ је такође база комплексификације $\mathcal{V}_\mathbb{C}$. Наравно, ако је $(E_1, \ldots, E_n)$ база за $\mathcal{V}$, а $\mathcal{V}_\mathbb{C}$ посматрамо као реални векторски простор, онда је његова природна база $(E_1, iE_1, \ldots, E_n, iE_n)$.

За $A \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$, ***комплексификација*** од A је ендоморфизам $A_\mathbb{C} \in \operatorname{End}(\mathcal{V}_\mathbb{C})$ дефинисан са $A_\mathbb{C}(X + iY) = A(X) + iA(Y)$ за свако $X, Y \in \mathcal{V}$. Уобичајено је да идентификујемо сопствене вредности и векторе од A са сопственим вредностима и векторима од $A_\mathbb{C}$, те можемо рећи да су сопствене вредности од A корени од ω_A. Ако је $\lambda \notin \mathbb{R}$ сопствена вредност од $A_\mathbb{C}$, онда кажемо да је $\lambda \in \mathbb{C}$ ***комплексна сопствена вредност*** од A. Комплексне сопствене вредности морају да иду у пару са својим конјугатом, што видимо у наредној леми.

Лема А.15. *Нека је A ендоморфизам реалноī векīорскоī īросīора $\mathcal{V}$. Ако је $\lambda \in \mathbb{C}$ соīсīвена вредносī од $A_{\mathbb{C}}$ за соīсīвени векīор $Z \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, онда је $\overline{\lambda}$ соīсīвена вредносī од $A_{\mathbb{C}}$ за соīсīвени векīор $\overline{Z} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$.*

Доказ. Ако је $\lambda = \alpha + i\beta$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $Z = X + iY$ за $X, Y \in \mathcal{V}$, то из услова леме имамо

$$A(X) + iA(Y) = A_{\mathbb{C}}(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY) = (\alpha X - \beta Y) + i(\alpha Y + \beta X),$$

одакле следи $A(X) = \alpha X - \beta Y$ и $A(Y) = \beta X + \alpha Y$, те добијамо

$$A_{\mathbb{C}}(X - iY) = A(X) - iA(Y) = (\alpha X - \beta Y) - i(\alpha Y + \beta X) = (\alpha - i\beta)(X - iY),$$

што доказује $A_{\mathbb{C}}(\overline{Z}) = \overline{\lambda}\overline{Z}$, док је $\overline{Z} \neq 0$ јер је $Z \neq 0$. □

Ако карактеристични полином од A није растављив можемо искористити комплексификацију да од $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ добијемо $A_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$. Карактеристични полином од $A_{\mathbb{C}}$ је растављив те из Теореме А.12 добијамо $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda}$. Како по Леми А.15 комплексне сопствене вредности иду у паровима са својим конјугатом, поред постојећих $A_{\lambda} = A - \lambda\,\mathbb{1}$ за $\lambda \in \mathbb{R}$, дефинишемо

$$A_{\lambda} = (A - \lambda\,\mathbb{1})(A - \overline{\lambda}\,\mathbb{1}) = A^2 - 2\Re(\lambda)A + |\lambda|^2\,\mathbb{1}$$

за комплексну сопствену вредност $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, што даје додатне ***уоīшīене соīсīвене īросīоре*** облика

$$\mathcal{V}_{\lambda} = \mathrm{Ker}(A_{\lambda})^n = \Re\left(\mathrm{Ker}\left((A_{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathbb{1})(A_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda}\,\mathbb{1})\right)^n\right) = \Re\left((\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda} \oplus (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\overline{\lambda}}\right)$$

и омогућава декомпозицију

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda, \Im(\lambda) \geqslant 0} \mathcal{V}_{\lambda}.$$

За $Z = X + iY \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ и $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ можемо за свако $r \in \mathbb{N}$ израчунати

$$\begin{aligned}(A_{\mathbb{C}} - (\alpha \pm i\beta)\,\mathbb{1})^r(X \pm iY) &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}(-1)^k(\alpha \pm i\beta)^k(A_{\mathbb{C}})^{r-k}(X \pm iY) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}(-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\alpha^{k-j}\beta^j(\pm i)^j(A^{r-k}X \pm iA^{r-k}Y),\end{aligned}$$

док су вектори $(i)^j(A^{r-k}X + iA^{r-k}Y)$ и $(-i)^j(A^{r-k}X - iA^{r-k}Y)$ међусобно конјуговани (што се лако провери како за парне тако и за непарне j), одакле добијамо

$$\overline{(A_{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathbb{1})^r Z} = (A_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda}\,\mathbb{1})^r\overline{Z}. \tag{А.4}$$

Зато је $(A_{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathbb{1})^s Z = 0$ ако и само ако је $(A_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda}\,\mathbb{1})^s\overline{Z} = 0$, те сваки $(A_{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathbb{1})$-циклични потпростор $\mathcal{C}_Z$ од $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda}$ генерисан вектором Z и димензије s има одговарајући конјуговани $(A_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda}\,\mathbb{1})$-циклични потпростор $\mathcal{C}_{\overline{Z}}$ од $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\overline{\lambda}}$ генерисан вектором $\overline{Z}$ димензије s, што нам омогућава да објединимо та два потпростора и добијемо потпростор $\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\overline{Z}} \leqslant (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda} \oplus (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\overline{\lambda}}$. Ако уведемо $E_j = (A_{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathbb{1})^{s-j}Z$ и $F_j = (A_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda}\,\mathbb{1})^{s-j}\overline{Z}$ за $1 \leqslant j \leqslant s$, онда је $e = (E_1, \ldots, E_s, F_1, \ldots, F_s)$ природна база за $\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\overline{Z}}$ док ендоморфизам $A_{\mathbb{C}}$ у тој

бази има облик,

$$\left[A_{\mathbb{C}}\restriction_{\mathcal{C}_Z\oplus\mathcal{C}_{\overline{Z}}}\right]_e = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_s(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_s(\overline{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{\lambda} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \overline{\lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2s\times 2s}.$$

Како су E_j и F_j по формули (А.4) међусобно конјуговани, то можемо преуредити базне векторе са

$$G_j = \Re(E_j) = \frac{E_j + F_j}{2} \in \mathcal{V}, \quad H_j = \Im(E_j) = \frac{E_j - F_j}{2i} \in \mathcal{V},$$

и поставити нову базу $e' = (G_1, H_1, \ldots, G_s, H_s)$. Како за $2 \leqslant j \leqslant s$ имамо $A_{\mathbb{C}}E_j = \lambda E_j + E_{j-1}$ и $A_{\mathbb{C}}F_j = \overline{\lambda}F_j + F_{j-1}$, то за $\lambda = \alpha + i\beta$ добијамо

$$\begin{aligned} AG_j &= \Re(\lambda E_j) + \Re(E_{j-1}) = \alpha G_j - \beta H_j + G_{j-1}, \\ AH_j &= \Im(\lambda E_j) + \Im(E_{j-1}) = \alpha H_j + \beta G_j + H_{j-1}, \end{aligned}$$

уз додатне релације $AG_1 = \alpha G_1 - \beta H_1$ и $AH_1 = \alpha H_1 + \beta G_1$. У новој бази рестрикција од $A_{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\overline{Z}}$, а самим тим и рестрикција од A на $\Re(\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\overline{Z}}) \leqslant \mathcal{V}_\lambda$, има облик

$$\mathcal{J}_s(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2s\times 2s},$$

што је ***реални Жорданов блок*** или ***реална Жорданова матрица*** реда $2s$ која одговара пару конјугованих вредности $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Последица Теореме А.14 је наредна теорема која нам омогућава да у случају $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ канонски раставимо $\mathcal{V}$ на директну суму где сваком сабирку одговара Жорданов блок.

Теорема А.16. *Ако је A ендоморфизам коначнодимензионоī реалноī векторскоī īростора $\mathcal{V}$, онда īостоји база за $\mathcal{V}$ у којој је матрица од A блок-дијаīонална са (стандардним или реалним) Жордановим матрицама на дијаīонали.*

Неуређена фамилија Жорданових блокова из претходне теореме зове се ***Жорданова нормална форма*** ендоморфизма.

Коефицијенти карактеристичног полинома ω_A ендоморфизма A се полиномијално изражавају преко елемената матрице од A. Посебно, препознајемо траг и детерминанту као коефицијенте у једначини

$$\omega_A(x) = x^n - \mathrm{Tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A),$$

а додатне инваријанте су трагови степенова, што видимо у наредној леми.

Лема А.17. *Ако је A ендоморфизам векторског простора који има карактеристични полином $\omega_A(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1}x + \sigma_n$, онда*

$$m\sigma_m + \sigma_{m-1}\operatorname{Tr}(A) + \sigma_{m-2}\operatorname{Tr}(A^2) + \cdots + \sigma_1 \operatorname{Tr}(A^{m-1}) + \operatorname{Tr}(A^m) = 0 \tag{А.5}$$

важи за свако $1 \leqslant m \leqslant n$.

Доказ. Нека је $\omega(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_n = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$ (уколико постоје комплексне сопствене вредности можемо посматрати $A_{\mathbb{C}}$ уместо A). Коефицијенти σ_m за $1 \leqslant m \leqslant n$ се изражавају преко Вијетових[8] формула,

$$\sigma_m = (-1)^m \sum_{i_1<\cdots<i_m} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_m}.$$

Рачун за $1 \leqslant j \leqslant m-1$ даје

$$\sigma_{m-j}\operatorname{Tr}(A^j) = (-1)^{m-j}(\lambda_1^j + \lambda_2^j + \cdots + \lambda_n^j) \sum_{i_1<\cdots<i_{m-j}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_{m-j}},$$

што након смене

$$S_q^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^p \cdot \sum_{j_1<\cdots<j_q,\, j_l\neq i} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_q} \right),$$

постаје $\sigma_{m-j}\operatorname{Tr}(A^j) = (-1)^{m-j}(S_{m-j-1}^{j+1} + S_{m-j}^{j})$, одакле је

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sigma_{m-j}\operatorname{Tr}(A^j) = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j}(S_{m-j-1}^{j+1} + S_{m-j}^{j}) = -S_0^m + (-1)^{m-1}S_{m-1}^1.$$

Очигледно важи $S_0^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m = \operatorname{Tr}(A^m)$, док имамо

$$S_{m-1}^1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \sum_{j_1<\cdots<j_{m-1},\, j_l\neq i} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_{m-1}} \right).$$

Сваки члан из

$$(-1)^m\sigma_m = \sum_{i_1<\cdots<i_m} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_m},$$

на пример $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$, појављује се тачно m пута у S_{m-1}^1, што даје $S_{m-1}^1 = m(-1)^m\sigma_m$. Коначно, имамо

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sigma_{m-j}\operatorname{Tr}(A^j) = -\operatorname{Tr}(A^m) - m\sigma_m,$$

што доказује једначину (А.5). □

Карактеристични и минимални полином имају исте корене, те ако су $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ различите сопствене вредности, онда је $\omega_A(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots(x-\lambda_k)^{\alpha_k}$, док су α_j за $1 \leqslant j \leqslant k$ (алгебарске) вишеструкости сопствених вредности. Минимални полином мора бити облика $\mu_A(x) = (x-\lambda_1)^{\beta_1}(x-\lambda_2)^{\beta_2}\cdots(x-\lambda_k)^{\beta_k}$, а за његове вишеструкости важи $1 \leqslant \beta_j \leqslant \alpha_j$. Имајући у виду Теорему А.14 и Теорему А.16, можемо приметити да је β_j највећи ред (стандардног) Жордановог блока у оквиру потпростора $\mathcal{V}_{\lambda_j}$.

[8] François Viète (1540–1603), француски математичар

А.4 Самоадјунговани ендоморфизми

Ова секција је природан наставак претходне у којој смо изучавали сопствену структуру ендоморфизама. Ако у игру укључимо скаларни производ са којим се ендоморфизам лепо слаже, можемо финије подесити ствари везане за сопствену структуру и остварити одређене бенефите. Као литературу препоручујемо Маљцева [9] [81].

Уобичајено посматрамо самоадјунговани ендоморфизам на квадратном векторском простору, али је корисно имати одговарајуће продужење за комплексни векторски простор.

Нека је $\mathcal{V}$ векторски простор коначне димензије над пољем $\mathbb{C}$. ***Комплексни скаларни производ*** g на $\mathcal{V}$ уобичајено је недегенерисана симетрична билинеарна форма $g\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{C}$, што је уопштење скаларног производа. ***Комплексни квадратни векторски простор*** је комплексни векторски простор опремљен комплексним скаларним производом.

Сесквилинеарна форма на $\mathcal{V}$ је функција $g\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{C}$ која је $\mathbb{C}$-линеарна по првом аргументу, а конјуговано-линеарна по другом аргументу, односно таква да $g(\alpha X+\beta Y,Z)=\alpha g(X,Z)+\beta g(Y,Z)$ и $g(X,\alpha Y+\beta Z)=\overline{\alpha}g(X,Y)+\overline{\beta}g(X,Z)$ важи за свако $X,Y\in\mathcal{V}$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. ***Ермитска форма*** на $\mathcal{V}$ је сесквилинеарна форма g на $\mathcal{V}$ таква да за свако $X,Y\in\mathcal{V}$ важи $g(Y,X)=\overline{g(X,Y)}$. ***Ермитски скаларни производ*** је недегенерисана ермитска форма, док је ***ермитски квадратни векторски простор*** комплексни векторски простор опремљен ермитским скаларним производом.

Пример А.4. Ермитски квадратни векторски простор који је позитивно дефинитан назива се ***унитаран простор***. Стандардни пример унитарног простора је $\mathbb{C}^n$ са ермитском формом g која је дефинисана са

$$g((X_1,\dots,X_n),(Y_1,\dots,Y_n))=X_1\overline{Y_1}+X_2\overline{Y_2}+\cdots+X_n\overline{Y_n},$$

за све $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n\in\mathbb{C}$. △

По узору на реални случај, ***квадратна форма*** од g је функција $\varepsilon\colon\mathcal{V}\to\mathbb{C}$ дефинисана са $\varepsilon_X=g(X,X)$. Сесквилинеарна форма g је свакако $\mathbb{R}$-билинеарна, а за $X,Y\in\mathcal{V}$ имамо поларизационе идентитете

$$4g(X,Y)=\varepsilon_{X+Y}-\varepsilon_{X-Y}+i\varepsilon_{X+iY}-i\varepsilon_{X-iY},\quad 2g(X,Y)=(1+i)\varepsilon_X+(1+i)\varepsilon_Y-\varepsilon_{X-Y}-i\varepsilon_{X-iY}.$$

За ермитску форму g, свако $X,Y\in\mathcal{V}$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ важи једнакост

$$g(\alpha X+\beta Y,\alpha X+\beta Y)=|\alpha|^2\varepsilon_X+2\Re(\alpha\overline{\beta}g(X,Y))+|\beta|^2\varepsilon_Y,$$

одакле следи да је $\varepsilon_X\in\mathbb{R}$ за свако $X\in\mathcal{V}$.

Нека је $(\mathcal{V},g)$ (реални) квадратни векторски простор. Комплексификација доноси комплексни векторски простор $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, а комплексификацију скаларног производа g можемо извести на два природна начина. За свако $X,Y,Z,W\in\mathcal{V}$ формуле

$$\begin{aligned}g_{\mathbb{C}}(X+iY,Z+iW)&=(g(X,Z)-g(Y,W))+i(g(Y,Z)+g(X,W)),\\ g^H_{\mathbb{C}}(X+iY,Z+iW)&=(g(X,Z)+g(Y,W))+i(g(Y,Z)-g(X,W)),\end{aligned}$$

дефинишу комплексни скаларни производ $g_{\mathbb{C}}\colon\mathcal{V}_{\mathbb{C}}\times\mathcal{V}_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ и ермитски скаларни производ $g^H_{\mathbb{C}}\colon\mathcal{V}_{\mathbb{C}}\times\mathcal{V}_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$. Ако за свако $Z\in\mathcal{V}$ важи $g_{\mathbb{C}}(X+iY,Z)=0$ или $g^H_{\mathbb{C}}(X+iY,Z)=0$, онда добијамо $g(X,Z)=0$ и $g(Y,Z)=0$, те је $X+iY=0$, што доказује да су обе форме недегенерисане. Штавише у ермитском квадратном векторском простору важи

[9] Анатолий Иванович Мальцев, руски математичар

Силвестеров закон инерције и ермитско продужење чува сигнатуру оригиналног простора. У сваком случају $(\mathcal{V}, g)$ индукује како комплексни квадратни векторски простор $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ тако и ермитски квадратни векторски простор $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}, g^H_{\mathbb{C}})$.

Ако је A самоадјунговани ендоморфизам од $\mathcal{V}$, онда у комплексном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ имамо

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}(X+iY), Z+iW) &= (g(AX,Z) - g(AY,W)) + i(g(AY,Z) + g(AX,W)) \\ &= (g(X,AZ) - g(Y,AW)) + i(g(Y,AZ) + g(X,AW)) = g_{\mathbb{C}}(X+iY, A_{\mathbb{C}}(Z+iW)), \end{aligned}$$

док у ермитском квадратном векторском простору $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}, g^H_{\mathbb{C}})$ имамо

$$\begin{aligned} g^H_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}(X+iY), Z+iW) &= (g(AX,Z) + g(AY,W)) + i(g(AY,Z) - g(AX,W)) \\ &= (g(X,AZ) + g(Y,AW)) + i(g(Y,AZ) - g(X,AW)) = g^H_{\mathbb{C}}(X+iY, A_{\mathbb{C}}(Z+iW)), \end{aligned}$$

што значи да је комплексификација $A_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$ такође самоадјунгована у оба случаја.

Важно је приметити да ако је A самоадјунговани ендоморфизам комплексног квадратног векторског простора, онда је то и $A - \lambda\,\mathbb{1}$ за $\lambda \in \mathbb{C}$, као и $p(A)$ где је $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ произвољни полином. Међутим, то не важи у ермитском квадратном векторском простору, где имамо $g((A-\lambda\,\mathbb{1})X, Y) = g(AX,Y) - \lambda g(X,Y) = g(X, (A - \overline{\lambda}\,\mathbb{1})Y)$.

Из доказа Теореме А.12 знамо да уопштени сопствени простори имају тривијалан пресек и зато дају директну суму. У случају да је A самоадјунговани ендоморфизам, та директна сума је ортогонална.

Лема А.18. *Уопштени сопствени простори самоадјунгованог ендоморфизма реалног или комплексног квадратног простора су међусобно ортогонални.*

Доказ. Нека је $A \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, а $X \in \mathcal{V}_\lambda$ и $Y \in \mathcal{V}_\mu$ произвољни за $\lambda \neq \mu$. По Леми А.10 рестрикција од A_λ је аутоморфизам од $\mathcal{V}_\mu$, те постоји $Z \in \mathcal{V}_\mu$ такво да је $(A_\lambda)^n Z = Y$. Ако је A самоадјунгован, то је такав и $(A_\lambda)^n$, те имамо $g(X,Y) = g(X, (A_\lambda)^n Z) = g((A_\lambda)^n X, Z) = 0$, што доказује $\mathcal{V}_\lambda \perp \mathcal{V}_\mu$. □

Лема А.19. *Уопштени сопствени простори самоадјунгованог ендоморфизма ермитског квадратног простора који одговарају међусобно неконјугованим сопственим вредностима су међусобно ортогонални. Посебно, уопштени сопствени простори који одговарају сопственим вредностима које нису реалне су потпуно изотропни.*

Доказ. Сасвим слично доказу Леме А.18, за $\overline{\lambda} \neq \mu$ постоји $Z \in \mathcal{V}_\mu$ такво да је $(A_{\overline{\lambda}})^n Z = Y$, те како је A самоадјунгован добијамо $g(X,Y) = g(X, (A_{\overline{\lambda}})^n Z) = g((A_\lambda)^n X, Z) = 0$. □

Додатне погодности пружају се уколико је (реални) скаларни производ (позитивно) дефинитан, јер тада су све сопствене вредности реалне.

Лема А.20. *Сопствене вредности самоадјунгованог ендоморфизма на дефинитном квадратном векторском простору су реалне.*

Доказ. Ако је $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ комплексна сопствена вредност самоадјунгованог ендоморфизма A на дефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$, онда постоји ненула $Z = X + iY \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ такво да је $A_{\mathbb{C}} Z = \lambda Z$, одакле је $AX = \alpha X - \beta Y$ и $AY = \beta X + \alpha Y$. Како је A самоадјунгован то је $g(\alpha X - \beta Y, Y) = g(X, \beta X + \alpha Y)$ одакле следи $\beta(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) = 0$, а како је $\mathcal{V}$ дефинитан то је $\varepsilon_X + \varepsilon_Y \neq 0$, те добијамо $\beta = 0$, што даје $\lambda \in \mathbb{R}$. □

За $0 \neq X \in \mathcal{V}$ постоји најмање $r \in \mathbb{N}$ такво да је $(A_\lambda)^r X \neq 0$, одакле дефинитан скаларни производ даје $g((A_\lambda)^{2r} X, X) = g((A_\lambda)^r X, (A_\lambda)^r X) \neq 0$, али $(A_\lambda)^{2r} X = 0$ за $2r > r$, што повлачи $r = 0$, одакле је $A_\lambda X = 0$ и важи $\mathcal{V}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda$. По Леми А.20 карактеристични

полином ω_A је растављив, а по Теореми А.12 се $\mathcal{V}$ раставља на директну суму сопствених простора $\mathcal{V}_\lambda$, која је због Леме А.18 ортогонална. Зато је A дијагонализабилан и дозвољава спектралну декомпозицију $\mathcal{V} = \bigoplus_\lambda \mathcal{E}_\lambda$, што је тврђење које зовемо ***спектрална теорема***.

Лема А.21. *Самоадјунтовани ендоморфизам A дефинитног квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ је дијагонализабилан и важи $\mathcal{V} = \bigoplus_\lambda \operatorname{Ker}(A - \lambda\,\mathbb{1})$.*

Спектрална декомпозиција није увек могућа кад је g недефинитно, пре свега јер ω_A не мора бити растављив. Карактеристични полином од $A_\mathbb{C}$ је растављив те из Теореме А.12 уз Лему А.18 добијамо $\mathcal{V}_\mathbb{C} = \bigoplus_\lambda (\mathcal{V}_\mathbb{C})_\lambda$, што последично омогућава декомпозицију $\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda, \Im(\lambda) \geqslant 0} \mathcal{V}_\lambda$. Како је директна сума ортогонална, уопштени сопствени простори $\mathcal{V}_\lambda$ су недегенерисани.

Лема А.22. *Уопштени сопствени простори самоадјунтованог ендоморфизма квадратног векторског простора су недегенерисани, а сам простор је једнак њиховој ортогоналној суми.*

Уопштени сопствени простор $\mathcal{V}_\lambda$ за $A \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$ се по Леми А.13 раставља на директну суму A-цикличних потпростора. Посматрајмо $\mathcal{C}_Y = \operatorname{Span} \bigcup_{k=0}^{s-1} \{B^k Y\}$, где је $B = (A - \lambda\,\mathbb{1})\restriction_{\mathcal{V}_\lambda}$, а $s = r(Y)$ ($B^{s-1}Y$ је сопствени вектор).

У присуству реалног или комплексног скаларног производа g можемо конструисати низ скалара $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1} \in \mathbb{F}$ тако што рекурентно дефинишемо $\alpha_0 = 1$ и

$$\alpha_{s-1-m} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{s-2-m} \sum_{k=0}^{\min(s-1-m-j, s-2-m)} \alpha_j \alpha_k g(B^{m+j+k} Y, Y)$$

за $s - 2 \geqslant m \geqslant 0$ да бисмо увели $Z = \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_j B^j Y \in \mathcal{C}_Y$ и добили

$$\begin{aligned} g(B^m Z, Z) &= g\left(B^m \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_j B^j Y, \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_k B^k Y\right) = \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_j \alpha_k g(B^{m+j} Y, B^k Y) \\ &= \sum_{j=0}^{s-1-m} \sum_{k=0}^{s-1-m-j} \alpha_j \alpha_k g(B^{m+j+k} Y, Y) = 0. \end{aligned}$$

Низ вектора $E_j = B^{s-j} Z$ за $1 \leqslant j \leqslant s$ чини базу $e = (E_1, \ldots, E_s)$ за $\mathcal{C}_Y = \mathcal{C}_Z$. У односу на ту базу ендоморфизам има Жорданову матрицу $[A\restriction_{\mathcal{C}_Y}]_e = \mathcal{J}_s(\lambda)$, док је Грамова матрица $[g\restriction_{\mathcal{C}_Y}]_e = \nu N_s$, где је $\nu = g(B^{s-1} Z, Z)$ и

$$N_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{s \times s}. \tag{A.6}$$

Уколико је $\nu = 0$ не можемо превише да урадимо јер је $\mathcal{C}_Y$ потпуно изотропан потпростор. Међутим, ако је $\nu \neq 0$, у самој конструкцији вектор Z можемо заменити вектором μZ за произвољно $0 \neq \mu \in \mathbb{F}$, одакле добијамо $g(B^{s-1}\mu Z, \mu Z) = \mu^2 g(B^{s-1} Z, Z)$, што нам омогућава да у случају $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ изаберемо $\mu = 1/\sqrt{|g(B^{s-1} Z, Z)|}$ и тако нормирамо $\nu = \pm 1$, док у случају $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ избор $\mu = (g(B^{s-1} Z, Z))^{-1/2}$ омогућава $\nu = 1$.

Од постојеће базе можемо направити нову базу са

$$G_j = E_j + \operatorname{sgn}(2j - s - 1) E_{s+1-j},$$

за $1 \leqslant j \leqslant s$, одакле добијамо

$$\begin{aligned}
g(G_j, G_k) &= g\left(E_j + \operatorname{sgn}(2j-s-1)E_{s+1-j}, E_k + \operatorname{sgn}(2k-s-1)E_{s+1-k}\right) \\
&= \nu\delta^j_{s+1-k} + \nu\operatorname{sgn}(2k-s-1)\delta^j_k + \nu\operatorname{sgn}(2j-s-1)\delta^j_k \\
&\quad + \nu\operatorname{sgn}((2j-s-1)(2k-s-1))\delta^j_{s+1-k} \\
&= 2\nu\delta^j_k\operatorname{sgn}(2j-s-1) + \nu\delta^j_{s+1-k}\left(1-\operatorname{sgn}(2j-s-1)^2\right) \\
&= \nu\delta^j_k\left(2\operatorname{sgn}(2j-s-1) + \delta^{2j}_{s+1}\right),
\end{aligned}$$

што доноси

$$g(G_j, G_k) = \begin{cases} 2\nu\delta_{jk} \text{ за } 2j > s+1 \\ \nu\delta_{jk} \text{ за } 2j = s+1 \\ -2\nu\delta_{jk} \text{ за } 2j < s+1 \end{cases}$$

и доказује да је наша база ортогонална.

Основна идеја је да свако $\mathcal{V}_\lambda$ раставимо на ортогоналну суму недегенерисаних потпростора облика $\mathcal{C}_Y$. Ако изаберемо произвољан дефинитни вектор $D \in \mathcal{V}_\lambda$ имамо $X = f(D) \in \mathcal{E}_\lambda$, а како $\mathcal{C}_Y \ni D$ није потпуно изотропан следи $\nu \neq 0$. Сада се ортогонална база коју смо имали лако претвара у ортонормирану, те је $\mathcal{C}_Y$ недегенерисан потпростор индекса $s/2$ за парно s, односно $(s - \operatorname{sgn}\nu)/2$ за непарно s. Ову процедуру можемо наставити на недегенерисаном потпростору $\mathcal{V}_\lambda \cap (\mathcal{C}_Y)^\perp$, те ћемо тако у $\dim \mathcal{E}_\lambda$ корака раставити читаво $\mathcal{V}_\lambda$.

Теорема А.23. *Ако је A самоадјунговани ендоморфизам комплексног квадратног векторског простора $\mathcal{V}$, онда се $\mathcal{V}$ раставља на ортогоналну суму недегенерисаних A-цикличних потпростора, и постоји база за $\mathcal{V}$ у којој је матрица од A блок-дијагонална са Жордановим матрицама, а Грамова матрица блок-дијагонална са блоковима облика* (А.6).

Преостаје да у случају $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ размотримо $\mathcal{V}_\lambda$ за комплексну сопствену вредност λ. У доказу Теореме А.16 смо раставили $\mathcal{V}_\lambda$ на директну суму потпростора који су облика $\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\overline{Z}} \leqslant (\mathcal{V}_\mathbb{C})_\lambda \oplus (\mathcal{V}_\mathbb{C})_{\overline{\lambda}}$. Ту смо имали канонску базу $(E_1, \ldots, E_s, F_1, \ldots, F_s)$ у којој ендоморфизам има блок дијагоналну матрицу са $\mathcal{J}_s(\lambda)$ и $\mathcal{J}_s(\overline{\lambda})$ на дијагонали. Нова база $(G_1, H_1, \ldots, G_s, H_s)$, где су $G_j = \Re(E_j)$ и $H_j = \Im(E_j)$ довела нас је до матрице $\mathcal{J}_s(\alpha, \beta)$, где је $\lambda = \alpha + i\beta$, те преостаје да видимо како изгледа Грамова матрица у тој бази.

Ако продужимо g на комплексни скаларни производ $g_\mathbb{C}$, по Леми А.18 имамо $g_\mathbb{C}(E_j, F_k) = 0$, док је $g_\mathbb{C}(F_j, F_k) = g_\mathbb{C}(\overline{E_j}, \overline{E_k}) = \overline{g_\mathbb{C}(E_j, E_k)}$. Сада можемо израчунати,

$$\begin{aligned}
g(G_j, G_k) &= g_\mathbb{C}(\Re(E_j), \Re(E_k)) = \frac{1}{2}\Re(g_\mathbb{C}(E_j, E_k)), \\
g(G_j, H_k) &= g_\mathbb{C}(\Re(E_j), \Im(E_k)) = 0, \\
g(H_j, H_k) &= g_\mathbb{C}(\Im(E_j), \Im(E_k)) = -\frac{1}{2}\Re(g_\mathbb{C}(E_j, E_k)),
\end{aligned}$$

те како је $g_\mathbb{C}(E_j, E_k) = \delta^j_{s+1-k}\nu$, уколико је $\nu \neq 0$, погодним избором вектора μZ уместо Z можемо нормирати $\nu = 2$ да бисмо добили $g(G_j, G_k) = 1$ и $g(H_j, H_k) = -1$ само за $j + k = s + 1$, док су остале компоненте једнаке нули, Тако долазимо до базе у којој

ендоморфизам има матрицу $\mathcal{J}_s(\alpha,\beta)$, док је Грамова матрица облика

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2s\times 2s}, \tag{A.7}$$

што је индекса s, односно неутралне сигнатуре.

Као и у случају $\lambda \in \mathbb{R}$, бирамо произвољни дефинитни вектор $D \in (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_\lambda$, да бисмо обезбедили да $\mathcal{C}_Y \ni D$ није потпуно изотропан (иако је по Леми А.19 у ермитском случају $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_\lambda$ потпуно изотропан, али наш случај је комплексни), те исцрпљивањем растављамо читаво $\mathcal{V}_\lambda$ као и раније.

Теорема А.24. *Ако је A самоадјуновани ендоморфизам реалноī квадратноī векторскоī простора $\mathcal{V}$, онда се $\mathcal{V}$ раставља на ортоīоналну суму недеīенерисаних потпростора, и постоји база за $\mathcal{V}$ у којој је матрица од A блок-дијаīонална са (стандардним или реалним) Жордановим матрицама, а Грамова матрица блок-дијаīонална са блоковима облика* (А.6) *и* (А.7)*.*

А.5 Теорија пертурбација

Разумевање о томе како спектрална декомпозиција ендоморфизма на квадратном простору зависи од параметара је природан и значајан проблем. Добро је познато да n корена реалног или комплексног полинома степена n зависе непрекидно од коефицијената полинома. Последично, сопствене вредности ендоморфизма варирају непрекидно са елементима његове матрице. Важно је нагласити да ту корене посматрамо као неуређену n-торку скалара. Како не постоји канонски начин да се корени уреде, то није увек могуће означити сопствене вредности тако да појединачно чине непрекидне функције.

Међутим, ми смо пре свега заинтересовани за питање глаткоће или аналитичности сопствене структуре. Историја теорије пертурбација почиње 1937. године са Релихом[10] и његовим првим радом у серији [104], што је коначно довело до његове књиге [105]. Теорија је кулминирала класичном монографијом коју је написао Като[11] [71]. За модерну перспективу теорије, препоручујемо прегледни рад који су написали Парусињски[12] и Рајнер[13] [99].

Нека $P_A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ означава монични полином степена n са реалним коефицијентима $A = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$. За монични полином P_A кажемо да је ***хиперболички*** ако су сви његови корени $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (бројимо их са вишеструкостима) реални.

За отворен интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ који садржи нулу, посматрамо једнопараметарску фамилију хиперболичких моничних полинома $P_{A(t)}$ степена n за $t \in I$, где је $A = (a_1,\ldots,a_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ аналитичка. Применом ***Чирнхаусове трансформације*** [14]

$$P_B(x) = P_A\left(x - \frac{a_1}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} x^k \left(\frac{-a_1}{n}\right)^{n-j-k} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}x^k,$$

[10] Franz Rellich (1906–1955), аустријско-немачки математичар
[11] Tosio Kato (1917–1999), јапански математичар
[12] Adam Parusiński, пољски математичар
[13] Armin Rainer, аустријски математичар
[14] Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651–1708), немачки математичар, физичар и филозоф

добијамо $B = (b_1, \dots, b_n) \colon I \to \mathbb{R}^n$, где је $a_0 = 1$ и

$$b_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} \left(\frac{-1}{n}\right)^{n-j-k} a_j a_1^{n-j-k},$$

за $0 \leqslant k \leqslant n$. На овај начин добили смо фамилију полинома $P_{B(t)}$ који остају монични ($b_0 = 1$) и имају коефицијент од x^{n-1} једнак нули ($b_1 = 0$). За такав полином P_B кажемо да је у ***Чирнхаусовој форми***. Његови корени су $\mu_j = \lambda_j + a_1/n$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, те је P_B такође хиперболички, док $B \colon I \to \mathbb{R}^n$ остаје аналитичка.

Како је $\sum_j \mu_j^2 = \sum_{j,k} \mu_j \mu_k - 2\sum_{j<k} \mu_j \mu_k = (-b_1)^2 - 2b_2$, услов $b_1 = 0$ повлачи идентитет $-2b_2 = \mu_1^2 + \cdots + \mu_n^2$, и последично $b_2 \leqslant 0$. Случај $b_2 = 0$ је праволинијски, јер онда важи $\mu_j = 0$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, што повлачи да су оригинални корени $\lambda_j = -a_1/n$ аналитички. У супротном, можемо смањити интервал тако да је $-b_2(t) = t^{2m} u(t)$, где је $u(0) > 0$ за неко $m \in \mathbb{N}_0$ (приметимо да ако је $b_2(0) \neq 0$ имамо $m = 0$) и $t \in I'$, са $0 \in I' \subseteq I$.

Простор параметара је једнодимензион, те можемо изабрати $\theta(t) = \pm t^m u^{1/2}(t)$ као један од два аналитичка квадратна корена од $-b_2(t)$ и дефинисати

$$P_C(x) = \theta^{-n} P_B(\theta x) = x^n - x^{n-2} + \sum_{j=3}^{n} \theta^{-j} b_j x^{n-j}.$$

Овако добијамо аналитичку функцију $C = (c_1, \dots, c_n) \colon I' \to \mathbb{R}^n$ тако да је $c_1 = 0$ и $c_2 = -1$. Зато је $\xi_1 + \cdots + \xi_n = 0$ и $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 2$, где су $\xi_j = \theta^{-1}\mu_j$ за $1 \leqslant j \leqslant n$ корени од P_C. Ово нам омогућава да факторишемо $P_{C(0)} = P_D P_E$, где су P_D и P_E монични реални полиноми позитивног степена без заједничких корена.

Размотримо пресликавање $\psi \colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{p+q}$ дефинисано са $\psi(Y, Z) = W$, где важи $P_W = P_Y P_Z$. Другим речима, за $Y = (y_1, \dots, y_p)$ и $Z = (z_1, \dots, z_q)$, добијамо $W = (w_1, \dots, w_{p+q})$ тако да важи $w_k = \sum_{j=0}^{k} y_{k-j} z_j$ за све $1 \leqslant k \leqslant p+q$, где је $y_0 = z_0 = 1$. Јакобијева матрица овог полиномијалног пресликавања ψ је тачно Силвестерова матрица у односу на P_Y и P_Z. Штавише, резултанта од P_Y и P_Z је, до на знак, једнака детерминанти Силвестерове матрице. Зато P_Y и P_Z немају заједничке (комплексне) корене ако и само ако је ψ инвертибилно.

Како P_D и P_E немају заједничке корене, ψ је инвертибилно у (D, E), те по Теореми о инверзној функцији (Теорема А.30), остаје инвертибилно у околини од (D, E). Зато постоји околина $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ од $C(0) = \psi(D, E)$ таква да се за свако $W \in \mathcal{U}$ одговарајући полином јединствено раставља са $P_W = P_Y P_Z$. Штавише, инверзно пресликавање ψ^{-1} је аналитичко на $\mathcal{U}$, те су композиције $\pi_1 \circ \psi^{-1} \colon W \mapsto Y$ и $\pi_2 \circ \psi^{-1} \colon W \mapsto Z$ такође аналитичке, са $\pi_1 \circ \psi^{-1}(C(0)) = D$ и $\pi_2 \circ \psi^{-1}(C(0)) = E$.

Овако добијамо идентитет $P_{Y(t)} P_{Z(t)} = P_{C(t)}$ за свако $t \in I''$, где је $0 \in I'' \subseteq I' \subseteq I$, док су пресликавања $Y \colon I'' \to \mathbb{R}^p$ и $Z \colon I'' \to \mathbb{R}^q$ аналитичка. Како је $p = \deg D < n$ и $q = \deg E < n$, можемо применити индукцијску хипотезу на $\deg A = n$ и добити аналитичке функције $\lambda_j \colon I'' \to \mathbb{R}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$ које параметризују корене од $P_{A(t)}$.

Овај локални резултат може се схватити као реформулација Релихове теореме [104, Лема 2] која је инспирисана приступом обрађеним у [99]. Међутим, због јединствености аналитичког продужења, без умањења општости можемо претпоставити да је $I \subseteq \mathbb{R}$ произвољан отворен интервал, као и да важи $I'' = I$. Последично добијамо наредну глобалну верзију теореме.

Теорема А.25. *Нека је $P_{A(t)}(x) = x^n + a_1(t)x^{n-1} + \cdots + a_n(t)$ за $t \in I$ једнопараметарска фамилија хиперболичких моничних полинома степена n са реалним аналитичким коефицијентима $a_j \colon I \to \mathbb{R}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, где је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал. Тада постоје аналитичке функције $\lambda_j \colon I \to \mathbb{R}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$ такве да $P_{A(t)}(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \lambda_j(t))$ важи за све $t \in I$.*

Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал који садржи 0, те размотримо једнопараметарску фамилију ендоморфизама $A(t)$ на векторском простору $\mathcal{V}$ димензије $n \in \mathbb{N}$. Ако фиксирамо базу $(E_1, \ldots, E_n)$ од $\mathcal{V}$, онда су елементи матрице од $A(t)$ у тој бази дати са $A(t)(E_j) = \sum_k A_{kj}(t)E_k$ за $1 \leqslant j, k \leqslant n$, те претпоставимо да су све функције $A_{jk} \colon I \to \mathbb{R}$ аналитичке. Важно је приметити да се аналитичност елемената A_{jk} чува приликом промене базе, све док матрица преласка зависи аналитички по t.

Ако је карактеристични полином од $A(t)$ хиперболички за све $t \in I$, онда можемо применити Теорему А.25. То доноси аналитичке сопствене вредности $\lambda_j \colon I \to \mathbb{R}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, тако да

$$\det(x\mathbb{1} - A(t)) = \prod_{j=1}^{n}(x - \lambda_j(t))$$

важи за све $t \in I$.

Нека је $V(t) = \sum_j v_j(t)E_j$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda(t)$. Означимо $M(t) = A(t) - \lambda(t)\mathbb{1}$. Тада сопствена једначина $M(t)V(t) = 0$ доноси систем $\sum_{k=1}^{n} M_{jk}(t)v_k(t) = 0$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, где су $M_{jk}(t) = A_{jk}(t) - \lambda(t)\delta_{jk}$ аналитичке функције.

Ако је $M(0) \neq 0$, онда због $\det M(0) = 0$ постоји број $r \in \mathbb{N}$ такав да су сви минори реда $r+1$ једнаки нули, док постоји минор реда $r = |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ за који важи $\det((M_{jk}(0))_{j\in\mathcal{A}, k\in\mathcal{B}} \neq 0$. Нека $N_{jk}(t)$ означава кофактор елемента $M_{jk}(t)$ у $(r+1)\times(r+1)$ матрици $(M_{jk}(t))_{j\in\mathcal{A}', k\in\mathcal{B}'}$, где имамо $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \sqcup \{a\}$ и $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \sqcup \{b\}$. Ако дефинишемо $v_k(t) = N_{ak}(t)$ за $k \in \mathcal{B}'$ и $v_k(t) = 0$ за $k \notin \mathcal{B}'$, тада ће вектор $V(t) = \sum_k v_k(t)E_k$ задовољити

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(t)v_k(t) = \sum_{k\in\mathcal{B}'} M_k(t)N_{ak}(t) = \begin{vmatrix} M_{p_1q_1}(t) & M_{p_1q_2}(t) & \cdots & M_{p_1q_r}(t) & M_{p_1b}(t) \\ M_{p_2q_1}(t) & M_{p_2q_2}(t) & \cdots & M_{p_2q_r}(t) & M_{p_2b}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{p_rq_1}(t) & M_{p_rq_2}(t) & \cdots & M_{p_rq_r}(t) & M_{p_rb}(t) \\ M_{aq_1}(t) & M_{aq_2}(t) & \cdots & M_{aq_r}(t) & M_{ab}(t) \end{vmatrix} = 0,$$

за све $1 \leqslant \ \leqslant n$, где је $\mathcal{A} = \{p_1, \ldots, p_r\}$ и $\mathcal{B} = \{q_1, \ldots, q_r\}$. Из непрекидности следи да можемо смањити интервал тако да важи

$$D(t) = \det(((M_{jk}(t))_{j\in\mathcal{A}, k\in\mathcal{B}}) \neq 0,$$

за све $t \in I'$, где је $0 \in I' \subseteq I$. Зато је, $v_b(t) = N_{ab}(t) = D(t) \neq 0$, те је $V(t)$ сопствени вектор од $A(t)$ који одговара сопственој вредности $\lambda(t)$ за свако $t \in I'$.

Ако је $M(0) = 0$, онда је случај $M(t) = 0$ за све $t \in I$ тривијалан. У супротном, како су све функције $M_{jk} \colon I \to \mathbb{R}$ аналитичке и задовољавају $M_{jk}(0) = 0$, постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да је $M(t) = t^m M^o(t)$, где је $M^o(0) \neq 0$. У овом случају, можемо решити систем $\sum_{k=1}^{n} M^o_{jk}(t)v_k(t) = 0$ као раније и добити сопствени вектор $V(t)$.

Претпоставимо да $A(0)X = \mu X$ важи за неки ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ и $\mu \in \mathbb{R}$. Постоји база $(E_1, \ldots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ у којој је матрица од $A(0)$ блок дијагонална са Жордановим матрицама на дијагонали тако да је $E_1 = X$ (видети Теорему А.14). Ако искористимо $\lambda(0) = \mu$, постојаће индекси $1 \leqslant a, b \leqslant n$ такви да је $M_{ak}(0) = 0$ и $M_{kb}(0) = 0$ за све $1 \leqslant k \leqslant n$ (наравно, имамо $b = 1$), те зато $a \notin \mathcal{A}$ и $b \notin \mathcal{B}$. Применом претходних резултата добијамо сопствени вектор $V(t) = \sum_k v_k(t)E_k$ за $\lambda(t)$, где је $v_k(0) = 0$ за све $k \neq b = 1$, што даје $V(0) = v_1(0)E_1$, те зато $W(t) = V(t)/D(t)$ генерише аналитички сопствени вектор који одговара $\lambda(t)$ тако да је $W(0) = X$ и $\lambda(0) = \mu$.

Теорема А.26. *Нека је $A(t)$, за $t \in I$, једнопараметарска фамилија ендоморфизама на коначнодимензионом векторском простору $\mathcal{V}$ са хиперболичким карактеристичним полиномом, тако да су елементи одговарајуће матрице реалне аналитичке функције на отвореном интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$ који садржи 0. Ако $A(0)X = \mu X$ важи за неки*

ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ и $\mu \in \mathbb{R}$, онда постоји аналитичка функција $\lambda\colon I' \to \mathbb{R}$ и аналитичко пресликавање $V\colon I' \to \mathcal{V} \setminus \{0\}$ тако да $A(t)V(t) = \lambda(t)V(t)$ важи за све $t \in I'$, где је $0 \in I' \subseteq I$, са $V(0) = X$ и $\lambda(0) = \mu$.

Уколико имамо квадратни векторски простор $(\mathcal{V}, g)$, онда је природно претпоставити да су сви $A(t)$ самоадјунговани. Такође претпостављамо да је свако $A(t)$ дијагонализабилно (са хиперболичким карактеристичним полиномом). Овај услов је геометријски природан и аутоматски испуњен кад је $\mathcal{V}$ дефинитан (видети Лему А.20 и Лему А.21).

Нека је $(E_1, \ldots, E_n)$ ортонормирана база таква да је $A(0)E_i = \mu_i E_i$ за све $1 \leqslant i \leqslant n$. Већ смо показали (Теорема А.26) да за свако μ_i, рецимо μ_1, постоји аналитичка сопствена вредност $\lambda\colon I' \to \mathbb{R}$ и одговарајуће аналитичко пресликавање $V\colon I' \to \mathcal{V}$ такво да је $V(t)$ сопствени вектор од $A(t)$ за сопствену вредност $\lambda(t)$ за свако $t \in I'$, где је $0 \in I' \subseteq I$, $\lambda(0) = \mu_1$ и $V(0) = E_1$. Додатно, могуће након смањивања интервала, пресликавање V се може нормализовати тако да се добије јединично аналитичко пресликавање.

Дефинишемо ендоморфизам $P(t)\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, који зовемо ***оператор пројекције***, са $P(t)U = g(V(t), U)V(t)$. где је V јединично аналитичко пресликавање које смо малопре конструисали. Елементи матрице $P(t)$ у односу на фиксирану ортонормирану базу су дати са $p_{jk}(t) = \varepsilon_k v_j(t) v_k(t)$. Ови елементи су аналитичке функције по t. Сада разматрамо нову фамилију самоадјунгованих ендоморфизама која је дефинисана са $B(t) = A(t) - P(t)$.

Сваки сопствени вектор од $A(0)$ који одговара сопственој вредности $\lambda(0)$ који је ортогоналан на $V(0)$ је такође сопствени вектор од $B(0)$ за исту сопствену вредност. Штавише, посматрамо сопствено пресликавање $W\colon I'' \to \mathbb{R}$ такво да је $A(t)W(t) - g(V(t), W(t))V(t) = B(t)W(t) = \lambda(t)W(t)$ за $t \in I''$, где је $0 \in I'' \subseteq I'$. Како је $A(t) - \lambda(t)\,\mathbb{1}$ самоадјунговано, добијамо

$$0 = g((A(t) - \lambda(t)\,\mathbb{1})V(t), W(t)) = g((A(t) - \lambda(t)\,\mathbb{1})W(t), V(t)) = g(V(t), W(t))g(V(t), V(t)),$$

што повлачи $V(t) \perp W(t)$ за све $t \in I''$.

Ова конструкција нам омогућава да наставимо индукцијом по вишеструкости ν од $\lambda(0)$, чиме добијамо ν ортонормираних аналитичких сопствених вектора V_i који одговарају λ и задовољавају $AV_i(t) = \lambda(t)V_i(t)$, са $V_i(0) = E_i$ кад год је $\mu_i = \lambda(0)$. Примењујући исти аргумент за сваку сопствену вредност од $A(0)$ добијамо класичан Релихов резултат да сопствене вредности и одговарајући сопствени вектори од $A(t)$ могу бити изабрани тако да зависе аналитички по t у околини од 0 (видети [104, Пропозиција 1], [105, Теорема 1], [99]). Као и раније, ова локална конструкција повлачи глобално тврђење на произвољном отвореном интервалу I, доносећи $I = I'$ након аналитичког продужења.

Теорема А.27. *Нека је $A(t)$, за $t \in I$, једнопараметарска фамилија дијагонализабилних самоадјунгованих ендоморфизама на квадратном простору $\mathcal{V}$ димензије n, тако да су елементи одговарајуће матрице реалне аналитичке функције на отвореном интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$. Тада постоје аналитичке функције $\lambda_j\colon I \to \mathbb{R}$ и аналитичка пресликавања $V_j\colon I \to \mathcal{V}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, тако да $(V_1(t), \ldots, V_n(t))$ чини ортонормирану базу од $\mathcal{V}$ за све $t \in I$, и свако $V_j(t)$ задовољава $A(t)V_j(t) = \lambda_j(t)V_j(t)$ за све $t \in I$ и $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Ако елементи одговарајуће матрице нису аналитички, већ само глатки, сопствени вектори могу да не дозволе чак ни непрекидан избор, као што видимо у наредном примеру преузетом из [104].

Пример А.5. Размотримо једнопараметарску фамилију самоадјунгованих ендоморфизама дефинисаних матрицама

$$A(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{t} & \sin\frac{1}{t} \\ \sin\frac{1}{t} & -\cos\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

за $t \neq 0$ и поставимо $A(0) = 0$. Ова фамилија је глатка за $t \in \mathbb{R}$, укључујући и $t = 0$, али није аналитичка у $t = 0$ (видети Пример А.7). Како имамо да је $\operatorname{Tr} A(t) = 0$ и $\det A(t) = -e^{-2/t^2}$, сопствене вредности од $A(t)$ су $\lambda(t) = \pm e^{-1/t^2}$. На пример, вектор $V(t) = (\cos(1/2t), \sin(1/2t))$ је сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda(t) = e^{-1/t^2}$. Међутим, овај сопствени вектор се не може продужити у свуда ненула непрекидно пресликавање у $t = 0$, јер пресликавање $t \mapsto V(t)$ јако осцилује и нема лимес кад $t \to 0$. △

Међутим, ни Теорема А.25 ни Теорема А.27 не могу се продужити на вишепараметарски случај, што демонстрира наредни пример из [104].

Пример А.6. Размотримо двопараметарску фамилију самоадјунгованих ендоморфизама дефинисаних преко матрица

$$A(t,s) = \begin{pmatrix} 1+2t & t+s \\ t+s & 1+2s \end{pmatrix}$$

за $t, s \in \mathbb{R}$. Сопствене вредности од $A(t,s)$ су дате са $\lambda(t,s) = 1 + t + s \pm \sqrt{2(t^2+s^2)}$, што није аналитичка функција ни у једној околини координатног почетка. △

Неке вишепараметарске верзије теореме су предложили Курдика[15] и Паунеску[16] [75], али за наше потребе довољно је посматрати само једноставније случајеве. Кад радимо са вишепараметарским фамилијама самоадјунгованих ендоморфизама, аналитичка зависност сопствених вредности и сопствених вектора се губи у општем случају, као што смо демонстрирали у Примеру А.6.

Ако размотримо вишепараметарску фамилију хиперболичких моничних полинома $P_{A(T)}$ степена n, где је $T \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ отворен скуп са $m > 1$, онда се доказ Теореме А.25 не може директно продужити, јер више нисмо у могућности да изаберемо аналитички квадратни корен од $-b_2(T)$. На пример, узимање $A(t,s) = (0, -t^2 - s^2)$ доноси фамилију $P_{A(t,s)}(x) = x^2 - t^2 - s^2$, чији корени $\pm\sqrt{t^2+s^2}$ нису аналитички у координатном почетку.

Међутим, ако вишеструкости сопствених вредности остају константне у околини дате тачке, тада можемо успоставити делимичну регуларност. Кад се вишеструкости не мењају док T варира, немамо преплитање сопствених вредности, те се полином $P_{B(T)}$ у Чирнхаусовој форми симултано раставља, што спречава случај неконстантног b_2 са $b_2(0) = 0$. Зато су квадратни корени од $-b_2 > 0$ аналитички, и можемо наставити у истом маниру као раније. Ако је домен U просто повезан, сопствене вредности могу бити означене тако да буду аналитичке.

Теорема А.28. *Нека је $P_{A(T)}(x) = x^n + a_1(T)x^{n-1} + \cdots + a_n(T)$ за $T \in U$ вишепараметарска фамилија хиперболичких моничних полинома степена n са реалним аналитичким коефицијентима $a_j \colon U \to \mathbb{R}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$, где је $U \subseteq \mathbb{R}^m$ просто повезан отворен скуп и $m > 1$. Ако вишеструкости корена остају константни кроз U, онда постоје аналитичке функције $\lambda_j \colon U \to \mathbb{R}$ са $1 \leqslant j \leqslant n$ тако да је $P_{A(T)}(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \lambda_j(T))$ за све $T \in U$.*

А.6 Анализа

У овој секцији налазе се неки резултати из реалне анализе који су нам потребни у књизи.

[15] Krzysztof Kurdyka (1957), пољски математичар
[16] Laurenţiu Păunescu (1952), румунско-аустралијски математичар

Пример А.7. Посматрајмо функцију $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{за } x > 0 \\ 0 & \text{за } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

За $x < 0$ очигледно имамо $f^{(n)}(x) = 0$, док за $x > 0$ индукцијом по n доказујемо да n-ти извод функције f има облик

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}} f(x), \tag{A.8}$$

где је $P_{n-1}(x)$ неки полином степена $n-1$. База индукције је испуњена јер за $n = 1$ имамо $f'(x) = f(x)/x^2$, што се реализује за $P_0(x) = 1$. Корак индукције проверавамо кроз рачун

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{P'_{n-1}(x)}{x^{2n}} - 2n\frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n+1}} + \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n+2}} \right) f(x) \\ &= \frac{x^2 P'_{n-1}(x) - (2nx-1)P_{n-1}(x)}{x^{2n+2}} f(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2(n+1)}} f(x), \end{aligned}$$

где је $P_n(x)$ полином степена n добијен рекурзијом $P_n(x) = x^2 P'_{n-1}(x) - (2nx-1)P_{n-1}(x)$. Иако је довољно рећи да је $P_n(x)$ полином степена не већег од n, из рекурентне везе видимо да је водећи коефицијент од $P_n(x)$ добијен од водећег коефицијента од $P_{n-1}(x)$ множењем са $-(n+1)$, односно да износи $(-1)^n(n+1)! \neq 0$.

Преостаје да докажемо да је десни извод функције f у тачки $x = 0$ једнак нули. Експоненцијална функција свакако доминира над степенима на позитивним x. На пример, за свако $m \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\frac{1}{x^m} = x\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} \leqslant (m+1)!x\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{1}{x}\right)^i = (m+1)!xe^{\frac{1}{x}},$$

и отуда

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^m} \leqslant (m+1)! \lim_{x\searrow 0} x = 0. \tag{A.9}$$

Добијена формула (А.9) за $m = 1$ даје

$$f'(0) = \lim_{x\searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0.$$

Како је (А.8) установљено за $x > 0$, формула (А.9) за $m = 2n+1$ уз претпоставку да је $f^{(n)}(0) = 0$ повлачи

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\searrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n+1}} e^{-\frac{1}{x}} = P_{n-1}(0) \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+1}} = 0,$$

што индукцијом по n доказује да је $f^{(n)}(0) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, односно да је f свуда глатка.

Функција f није аналитичка (у нули) јер како је $f^{(n)}(0) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$ то Маклоренов[17] ред од f конвергира ка нула функцији и не може бити једнак $f(x)$ за $x > 0$. Тако смо добили пример глатке функције која није аналитичка. △

Лема А.29 (Адамарова лема). *Ако је $U \ni a$ отворена конвексна околина у $\mathbb{R}^n$, онда за $f \in \mathfrak{F}(U)$ постоје функције $l_i \in \mathfrak{F}(U)$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ тако да за свако $x \in U$ важи*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (\pi_i(x) - \pi_i(a)) l_i(x),$$

при чему је $l_i(a) = (\partial f/\partial \pi_i)(a)$.

[17] Colin Maclaurin (1698–1746), шкотски математичар

Доказ. Дефинишимо $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ са $h(t) = f(a + t(x-a))$, те како је

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \pi_i}(a + t(x-a))(\pi_i(x) - \pi_i(a)),$$

имамо

$$f(x) - f(a) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}(\pi_i(x) - \pi_i(a)) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \pi_i}(a + t(x-a))\,dt,$$

где је

$$l_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \pi_i}(a + t(x-a))\,dt,$$

те је функција l_i глатка и важи $l_i(a) = (\partial f/\partial \pi_i)(a)$. □

Ако је $f\colon U \to V$ глатка функција, где су $U \subseteq \mathbb{R}^m$ и $V \subseteq \mathbb{R}^n$ отворени подскупови еуклидских простора, онда је (потпуни) ***извод*** од f у $p \in U$ линеарно пресликавање $f'(p)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ такво да за $v \in \mathbb{R}^m$ важи

$$(f'(p))(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p + tv).$$

Теорема А.30 (Теорема о инверзној функцији). *Нека је $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ глатка функција за отворен $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ако је $f'(p)$ инвертибилно за $p \in U$, тада постоји околина $V \subseteq U$ од p таква да је $f\restriction_V\colon V \to f(V)$ дифеоморфизам.*

Доказ. На пример, видети Ли [78, Теорема С.34]. □

А.7 Алгебра

Претпоставимо да скуп $\mathcal{V}$ има две бинарне операције $+$ и $\times$, те нека је 0 неутрални елемент за $+$. ***Јакобијев идентитет*** је једнакост дата са

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0, \tag{А.10}$$

за све $x, y, z \in \mathcal{V}$. Стандардни векторски производ $x \times y$ задовољава Јакобијев идентитет, као и комутатор операција $[x,y] = x \times y - y \times x$. У општем случају имамо наредну лему.

Лема А.31. *У подмодулу алгебре над прстеном који је затворен за комутатор, Јакобијев идентитет* (А.10) *важи за комутатор.*

Доказ. Јакобијев идентитет $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ може се једноставно проверити, јер директан рачун по дефиницији даје дванаест чланова који се поништавају по паровима, $xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz = 0$. □

Занимљиво је размотрити билинеарно пресликавање $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. У општем случају, слика $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^n$ није векторски потпростор. Међутим, ако јесте, онда на располагању имамо наредне неједнакости које су дате у теореми коју је поставио Хауард[18] 1980. године [69] (такође видети [98] за једноставнији доказ).

Теорема А.32. *Ако је $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ билинеарно и сурјективно, онда је $n \leqslant 2m - 1$. Додатно, ако је f кососиметрично, онда је $n \leqslant 2m - 3$.*

[18] Ralph Elwood Howard (1950), амерички математичар

А.8 Теорија бројева

Лема А.33 (Дирихлеова теорема о апроксимацији). *За свако $c \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$, постоје $m, n \in \mathbb{N}_0$ са $n \leqslant N$ тако да је $|nc - m| \leqslant 1/N$.*

Доказ. Размотримо бројеве $pc - \lfloor pc \rfloor \in [0, 1)$ за целе бројеве $0 \leqslant p \leqslant N$. Ако изделимо интервал $[0, 1)$ на N подинтервала једнаких дужина, на основу Дирихлеовог принципа, два таква броја $0 \leqslant p < q \leqslant N$ морају бити у истом подинтервалу одакле добијамо $|(qc - \lfloor qc \rfloor) - (pc - \lfloor pc \rfloor)| < 1/N$. Коначно, постављамо $n = q - p$ и $m = \lfloor qc \rfloor - \lfloor pc \rfloor$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. F. Adams, *Vector fields on spheres*, Annals of Math. **75** (1962), 603–632.

[2] М. Антић, *Диференцијална геометрија многострукости*, Математички факултет, Београд, 2015.

[3] В. Андрејић, *Прилог теорији псеудо-Риманових Осерманових многострукости*, Универзитет у Београду, магистарска теза, 2006.

[4] V. Andrejić, *On certain classes of algebraic curvature tensors*, SFIN XXII A1 (2009), 43–50.

[5] V. Andrejić, *Strong duality principle for four-dimensional Osserman manifolds*, Kragujevac J. Math. **33** (2010), 17–28.

[6] В. Андрејић, *Принцип дуалности за Осерманове многострукости*, Универзитет у Београду, докторска теза, 2010.

[7] V. Andrejić, *Duality principle and special Osserman manifolds*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **94** (2013), 197–204.

[8] V. Andrejić, *Quasi-special Osserman manifolds*, Filomat **28** (2014), 623–633.

[9] V. Andrejić, *On Lorentzian spaces of constant sectional curvature*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **103** (2018), 7–15.

[10] V. Andrejić, *Two-root Riemannian manifolds*, Mediterr. J. Math. **20** (2023), 100.

[11] V. Andrejić, *The proportionality principle for Osserman manifolds*, J. Geom. Phys. **176** (2022), 104516.

[12] V. Andrejić, K. Lukić, *On quasi-Clifford Osserman curvature tensors*, Filomat **33** (2019), 1241–1247.

[13] V. Andrejić, K. Lukić, *On the existence of a curvature tensor for given Jacobi operators*, Filomat **37** (2023), 8465–8471.

[14] V. Andrejić, K. Lukić, *The Orthogonality Principle for Osserman Manifolds*, Acta Math. Hungar, **173** (2024), 246–252.

[15] V. Andrejić, Z. Rakić, *On the duality principle in pseudo-Riemannian Osserman manifolds*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 2158–2166.

[16] V. Andrejić, Z. Rakić, *On some aspects of duality principle*, Kyoto J. Math. **55** (2015), 567–577.

[17] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Springer, 1971.

[18] A. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, Vol. 93, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[19] A. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[20] G. Birkhoff, *Metric foundations of geometry. I*, Trans. Am. Math. Soc. **55** (1944), 465–492.

[21] R. L. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964.

[22] N. Blažić, N. Bokan, P. Gilkey, *A Note on Osserman Lorentzian manifolds*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 227–230.

[23] N. Blažić, S. Vukmirović, *Examples of self-dual, Einstein metrics of (2,2)-signature*, Math. Scand. **94** (2004), 63–74.

[24] A. Bonome, P. Castro, E. García-Río, L. Hervella, R. Vázquez-Lorenzo, *Pseudo-Riemannian manifolds with simple Jacobi operators*, J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 847–875.

[25] R. Bott, J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Am. Math. Soc. **64** (1958), 87–89.

[26] L. E. J. Brouwer, *Beweis der invarianz des n-dimensionalen gebiets*, Math. Ann. **71** (1911), 305–313.

[27] M. Brozos-Vázquez, E. Merino, *Equivalence between the Osserman condition and the Rakić duality principle in dimension 4*, J. Geom. Phys. **62** (2012), 2346–2352.

[28] H. Busemann, *Metric methods of Finsler spaces and in the foundations of geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1942.

[29] E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, I*, Bull. Soc. Math. France **54** (1926), 214–264.

[30] E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, II*, Bull. Soc. Math. France **55** (1927), 114–134.

[31] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Boston, 1992.

[32] P. Carpenter, *Harmonic Riemannian manifolds*, Durham University, PhD thesis, 1980.

[33] P. Carpenter, A. Gray, T. Willmore, *The Curvature of Einstein Symmetric Spaces*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **33** (1982), 45–64.

[34] Q. Chi, *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 187–202.

[35] Q. Chi, *Curvature characterization and classification of rank-one symmetric spaces*, Pac. J. Math. **150** (1991), 31–42.

[36] E. A. de Costa, *Codimension two submanifolds with 2-nonnegative curvature operator*, Arch. Math. **90** (2008), 82–86.

[37] M. Crainic, *Inleiding Topologie*, Lecture notes, 2019.

[38] P. Clark, *Quadratic Forms, Chapter 1: Witt's theory*, Lecture notes, 2013.

[39] M. Dajczer, K. Nomizu, *On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric*, Bol. Soc. Bras. Mat. **11** (1980), 25–30.

[40] M. Dajczer, C.-R. Onti, T. Vlachos, *Einstein submanifolds with flat normal bundle in space forms are holonomic*, Proc. Am. Math. Soc. **146** (2018), 4035–4038.

[41] M. Dajczer, R. Tojeiro *Submanifold theory, Beyond an introduction*, Universitext, Springer, 2019.

[42] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pures Appl. **23** (1944), 65–76.

[43] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differ. Geom. **18** (1983), 279–315.

[44] B. Eckmann, *Gruppentheoretischer beweis des satzes von Hurwitz-Radon über die komposition quadratischer formen*, Comment. Math. Helv. **15** (1943), 358–366.

[45] Y. Euh, J. Kim, Y. Nikolayevsky, J. Park, *On 2-stein submanifolds in space forms*, Result. Math. **77**, 84 (2022).

[46] A. Fialkow, *Hypersurfaces of a space of constant curvature*, Annals of Math. **39** (1938), 762–785.

[47] B. Fiedler, *Determination of the structure of algebraic curvature tensors by means of Young symmetrizers*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **48** (2003), Article B48d.

[48] M. M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Matem. Palermo **22** (1906), 1–72.

[49] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differ. Geom. **17** (1982), 357–453.

[50] G. Freitas: *Submanifolds with homothetic Gauss map in codimension two*, Geom. Dedicata **180** (2016), 151–170.

[51] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear algebra*, Pearson, 4th Edition, 2002.

[52] P.M. Gadea, A. Montesinos, *Spaces of constant para-holomorphic sectional curvature*, Pacific J. Math. **136** (1989), 85–101.

[53] P. Gilkey, *Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint*, J. Geom. Anal. **4** (1994), 155–158.

[54] P. Gilkey, *Geometric properties of natural operators defined by the Riemann curvature tensor*, World Scientific, 2001.

[55] P. Gilkey, *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, Imperial College Press, 2007.

[56] P. Gilkey, R. Ivanova, *The Jordan normal form of Osserman algebraic curvature tensors*, Result. Math. **40** (2001), 192–204.

[57] P. Gilkey, R. Ivanova, *Spacelike Jordan Osserman algebraic curvature tensors in the higher signature setting*, Differential Geometry, Valencia 2001, World Scientific (2002), 179–186.

[58] P. Gilkey, A. Swann, L. Vanhecke, *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **46** (1995), 299–320.

[59] J. Gallier, J. Quaintance, *Differential geometry and Lie groups: A computational perspective*, Springer, 2020.

[60] E. García-Río, D.N. Kupeli, M.E. Vázquez-Abal, *On a problem of Osserman in Lorentzian geometry*, Differ. Geom. Appl. **7** (1997), 85–100.

[61] E. García-Río, D.N. Kupeli, M.E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo, *Affine Osserman connections and their Riemann extensions*, Differ. Geom. Appl. **11** (1999), 145–153.

[62] E. García-Río, D.N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 2002.

[63] A. Gray, T. J. Willmore, *Mean-value theorems for Riemannian manifolds*, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A **92** (1982), 343–364.

[64] M. Gromov, *Sign and geometric meaning of curvature*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **61** (1991), 9–123.

[65] G. Gross, E. Meinrenken, *Manifolds, vector fields and differential forms*, Springer, 2023.

[66] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[67] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[68] H. Hopf, W. Rinow, *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. **3** (1931), 209--225.

[69] R. Howard, *Dimension inequalities on the range of a multilinear function with vector space range*, Linear Multilinear Algebra **8** (1980), 247--252.

[70] A. Hurwitz, *Über die komposition der quadratischen formen*, Math. Ann. **88** (1923), 1–25.

[71] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, corrected printing of the 2nd Edition, Springer, 1995.

[72] M. Kervaire, *Non-Parallelizability of the n-Sphere for* $n > 7$, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **44** (1958), 280–283.

[73] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), 257–270.

[74] R.S. Kulkarni, *The values of sectional curvature in indefinite metrics*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 173–176.

[75] K. Kurdyka, L. Păunescu, *Hyperbolic polynomials and multiparameter real-analytic perturbation theory*, Duke Math. J. **141** (2008), 123--149.

[76] Jeffrey M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, 2009.

[77] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2011.

[78] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2013.

[79] John M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2018.

[80] L. A. Lichtenfelz, P. Piccione, A. Zeghib, *On the isometry group of Lorentz manifolds*. In: *Recent trends in Lorentzian geometry*, Springer, 2013, 277–293.

[81] A. I. Mal'cev, *Foundations of linear algebra*, W. H. Freeman and company, 1963.

[82] Y. Matsuyama: *Minimal Einstein submanifolds with codimension two*, Tensor (N.S.) **52** (1993), 61–68.

[83] E. Meinrenken, *Clifford Algebras and Lie Theory*, Springer, 2013.

[84] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Math. **64** (1956), 399–405.

[85] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer, 1977.

[86] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society, 2001.

[87] S. B. Myers, N. E. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Annals of Math. **40** (1939), 400–416.

[88] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds and Clifford structures*, Houston J. Math. **29** (2003), 59–75.

[89] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds of dimension 8*, Manuscripta Math. **115** (2004), 31–53.

[90] Y. Nikolayevsky, *Osserman conjecture in dimension* $n \neq 8, 16$, Math. Ann. **331** (2005), 505–522.

[91] Y. Nikolayevsky, *On Osserman manifolds of dimension 16*, Contemporary Geometry and Related Topics, Proc. Conference, Belgrade (2006), 379–398.

[92] Y. Nikolayevsky, *Conformally Osserman manifolds*, Pac. J. Math. **245** (2010), 315–358.

[93] Y. Nikolayevsky, Z. Rakić, *A note on Rakić duality principle for Osserman manifolds*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **94** (2013), 43–45.

[94] Y. Nikolayevsky, Z. Rakić, *The duality principle for Osserman algebraic curvature tensors*, Linear Algebra Appl. **504** (2016), 574–580.

[95] Z. Olszak *On the existence of generalized space forms*, Israel. J. Math. **65** (1989), 214–218.

[96] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.

[97] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, Am. Math. Mon. **97** (1990), 731–756.

[98] P. Pamfilos, *On the dimensions of the image of a multilinear function*, Linear Multilinear Algebra **20** (1987), 333--336.

[99] A. Parusiński, A. Rainer *Perturbation theory of polynomials and linear operators*. In: *Handbook of Geometry and Topology of Singularities VII*, Springer, 2025, 121--202.

[100] H. Poincaré, *Analysis Situs*, J. Éc. Polytech., Math. (1895), 1–123.

[101] J. Radon, *Lineare scharen orthogonaler matrizen*, Abh. Sem. Hamburg I (1923), 1–14.

[102] Z. Rakić, *Ossermanove mnogostrukosti*, Univerzitet u Beogradu, doktorska teza, 1998.

[103] Z. Rakić, *On duality principle in Osserman manifolds*, Linear Algebra Appl. **296** (1999), 183–189.

[104] F. Rellich, *Störungstheorie der Spektralzerlegung. I.*, Math. Ann. **113** (1937), 600--619.

[105] F. Rellich, *Perturbation theory of eigenvalue problems*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.

[106] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Mitgetheilt durch R. Dedekind), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen **13** (1868), 133–152.

[107] B. Riemann, *On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry* (translated by W. K. Clifford), Nature **8** (1873), 14–17, 36–37.

[108] F. Schur, *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen*, Math. Ann. **27** (1886), 537-567.

[109] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2*, 3rd Edition, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1999.

[110] J. Stallings, *The piecewise-linear structure of Euclidean space*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58** (1962), 481–488.

[111] N. Steenrod, *The topology of fiber bundle*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

[112] C. H. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, J. Differ. Geom. **25** (1987), 363–430.

[113] J. Tits, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*, Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. **29** (1955).

[114] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2011.

[115] O. Veblen, J. Whitehead, *A set of axioms for differential geometry*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **17** (1931), 551–561.

[116] O. Veblen, J. Whitehead, *The foundations of differential geometry*, Cambridge University Press, 1932.

[117] A. G. Walker, *Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **1** (1950), 69–79.

[118] H. C. Wang, *Two-point homogeneous spaces*, Annals of Math. **55** (1952), 177–191.

[119] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, Inc., 1972.

[120] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, 6th Edition, AMS Chelsea Publishing, 2011.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

Адамар, Жак, 30
Адамс, Џон, 59
Ајнштајн, Алберт, 136
аксиома
друга пребројивости, 7, 221
прва пребројивости, 221
алгебра
Лијева, 45
Александров, Павел, 7
Андрејић, Владица, 128, 167, 168, 176, 177, 178, 179, 182, 185, 186, 188, 192, 204, 205, 206, 210, 215, 216, 217, 218
Антић, Мирослава, iv
атлас, 11, 4
гладак, 11
комплетан, 5
комплетан раслојења, 52
раслојења, 52
тополошки, 4
база
локална топологије, 220
пребројива, 7
раслојења, 52
сопствена, 223
топологије, 220
уопштена локална топологије, 220
Берже, Марсел, 85
Бесе, Артур, 136, 201, 203
Биркхоф, Герет, 153
Бјанки, Луиђи, 119
Блажић, Новица, 168
блок
Жорданов, 226
реални Жорданов, 228
Бокан, Неда, 168
Бољај, Јанош, 1
Борел, Емил, 222
Бот, Раул, 58
Браувер, Лојцен, 222
брзина, 93
јединична, 94
криве, 93
Брозос-Васкез, Мигуел, 192
Бусеман, Херберт, 153
Вајнберг, Стивен, 124
Вајнгартен, Јулијус, 147
Вајтхед, Хенри, 2
Ванг, Хсиен Чунг, 153
Вандермонд, Александар-Теофил, 165
Ванхеке, Ливен, 203
варијација
кроз геодезијске, 141
Васкез-Абал, Марија Елена, 161
Васкез-Лорензо, Рамон, iv, 157, 161, 199, 203, 205
Веблен, Освалд, 2
вектор
брзине, 93
временски, 73
дефинитан, 73
изотропан, 73
јединичан, 73
просторан, 73
сопствени, 222
тангентни, 29
уопштени сопствени, 224
вектори
ортогонални, 73
ортонормирани, 74
Вијет, Франсоа, 229
Вилмор, Томас Џејмс, 162, 202
Вит, Ернст, 77
Витнијева сума, 54
Витни, Хеслер, 54
вишеструкост, 223
агеометријска, 223
алгебарска, 223
конјугације, 145
влакно, 52
Вокер, Артур, 79
Волф, Џозеф, 152, 153

вредност
комплексна сопствена, 226
регуларна, 42
сопствена, 222
Галије, Жан Анри, iv
Гарсија-Рио, Едуардо, iv, 157, 161, 167, 199, 203, 205
Гаус, Карл Фридрих, 1
геодезијска
крива, 106
максимална, 107
радијална, 110
геометрија
псеудо-Риманова, 83
Гилки, Питер, iv, 155, 162, 168, 178, 181, 201, 203
градијент, 85
Грам, Јорген Педерсен, 58
Грасман, Херман, 74
график, 8
Грај, Алфред, 162, 202
Громов, Михаил, iii
Грос, Гал, iv
група
изометрија, 83
изотропије, 87
Лијева, 20
линеарна, 12, 20
Лоренцова, 92
гурање
векторског поља, 49
тангентног вектора, 48
Дахцер, Маркос, iv, 133
Дедекинд, Рихард, 1
дејство
глатко, 87
групе, 87
слободно, 87
транзитивно, 87
дефинитност, 72
негативна, 72
позитивна, 72
дивергенција, 133
димензија
атласа, 4
карте, 3
многострукости, 11
Дирихле, Лежен, 39
дистрибуција, 56
дифеоморфизам, 3
између многострукости, 20
локални, 35
диференцијал, 32, 60
диференцирање, 44
у тачки, 29
Дједоне, Жан, 10
Доналдсон, Сајмон, 23
дужина
вектора, 73
лука, 93
еквиваленција
конформна, 88
Екман, Бено, 59
елемент
дужински, 80
ендоморфизам, 222
дијагонализабилан, 223
Еуклид из Александрије, 1
затворење, 220
знак
хиперповрши, 150
Иванова, Рајна, 155, 181
идентитет
Бјанкијев, 119
други Бјанкијев, 121
Јакобијев, 45, 121, 240
контракован Бјанкијев, 136
први Бјанкијев, 119
Ричијев, 139
извод, 240
коваријантни, 98
коваријантни дуж криве, 104
Лијев, 70
парцијални, 30
потпун коваријантни, 98
тензорског поља, 68
изометрија, 83
линеарна, 75
локална, 83
изоморфизам
музички, 85
раслојења, 54
раслојења над, 54
имерзија, 35
псеудо-Риманова, 83
индекс
Витов, 77
квадратног векторског простора, 75
псеудо-Риманове многострукости, 78
скаларног производа, 75
Инсел, Арнолд, 222
исцрпљивање, 11

Јакобијан, 33
Јакоби, Карл, 33
једначина
Гаусова, 148, 149
Јакобијева, 141
Кодаци–Мајнарди, 148
Кодацијева, 148
Ричијева, 148
једначине
локалне геодезијске, 107
карактер
узрочни, 73
Кармо, Манфредо до, iv
Карпентер, Пол, 162, 201
карта
раслојења, 52
скупа, 3
тополошког простора, 8
центрирана, 3
Картан, Ели, 151
карте
глатко сагласне, 11
компатибилне, 3
кришка, 41
сагласне, 3, 11
Като, Тосио, 234
Кејли, Артур, 153
Кентанс, Жоселин, iv
Кервер, Мишел, 23, 58
Ким, Ђихун, 169
Клајн, Феликс, 78
Кларк, Пит, iv
класа
функције, 3
Клифорд, Вилијам Кингдон, 2
клица, 30
ковектори
тангентни, 60
Кодаци, Делфино, 148
кодимензија, 39
коиндекс
подмногострукости, 150
компактност, 221
локална, 222
компатибилност
Јакобијевих оператора, 125
комплексификација
векторског простора, 226
ендоморфизма, 226
комплемент
ортогонални, 73
комплетност
геодезијска, 107, 114
компонента
повезаности, 221
компоненте
тензорског поља, 66
комутатор, 45
коначност
локална, 10
конвергенција, 220
конексија, 98
контракција, 67
конус
изотропни, 75
координате, 3
нормалне, 110
хомогене, 15
Косил, Жан-Луј, 101
Коши, Огистен Луј, 115
Крајник, Маријус, 220
Крамер, Габријел, 20
крива, 93
допуштена, 93
минимизујућа, 113
регуларна, 93
кривина
главна, 150
секциона, 125
скаларна, 135
Кристофел, Елвин, 99
круг
велики, 149
кугла
геодезијска, 113
еуклидска, 9
јединична, 21
нормална, 113
тангентна, 113
Кулкарни, Равиндра, 132, 133
Купели, Демир Нури, iv, 157, 161, 167, 199, 203, 205
Курдика, Кшиштоф, 238
Лајбниц, Готфрид Вилхелм, 29
Лапласијан, 134
Лаплас, Пјер-Симон, 134
Лебег, Анри, 93
Леви-Чивита, Тулио, 101
лема
Адамарова, 30, 239
Гаусова, 112
о лепљењу глатких пресликавања, 19
Урисонова, 26

Лијева заграда, 45
Линделоф, Ернст, 107
Ли, Софус, 20
Ли, Џефри, iv
Ли, Џон, iv
Лобачевски, Николај, 1
Лоренц, Хендрик, 78
Лукић, Катарина, 178, 179, 182, 188
Мајерс, Самнер, 83
Мајнарди, Гаспаре, 148
Мајнренкен, Екхард, iv
Маклорен, Колин, 239
Маљцев, Анатолиј, 230
матрица
    Грамова, 72
    Жорданова, 226
    Јакобијан, 33
    Јакобијева, 33
    реална Жорданова, 228
Мацујама, Јошио, 169
Мерино, Еугенио, 192
метла
    бесконачна, 221
метрика, 78
    Вокерова, 79
    еуклидска, 79
    Клајнова, 78
    Лоренцова, 78
    неутрална, 78
    округла, 87
    производ, 83
    Риманова, 78, 82
метрике
    конформне, 88
Милнор, Џон, 23, 58
Минковски, Херман, 79
многострукост, 11, 7
    Ајнштајнова, 136
    амбијентна, 39
    глатка, 11
    глобално Жордан-Осерманова, 155
    глобално Осерманова, 155
    две-тачке хомогена, 152
    диференцијална, 11
    изотропна, 87
    Јакоби-дијагонализабилна, 156
    један-корен, 204
    Клајнова, 78
    корен, 195
    Лоренцова, 78
    Осерманова, 155
    паралелизабилна, 55
    производ, 14
    псеудо-Риманова, 78
    Риманова, 78
    Риманова Осерманова, 154
    супер-Ајнштајнова, 202
    тачка по тачка
        Жордан-Осерманова, 155
    тачка по тачка Осерманова, 155
    тополошка, 7
    хомогена, 87
    штајн, 200
многострукости
    дифеоморфне, 20
    изометричне, 83
    хомеоморфне, 20
модел
    Поинкареов кугла, 89
    Поинкареов полупростор, 91
Моиз, Едвин, 23
Морита, Шигејуки, iv
Николајевски, Јури, 154, 169, 178, 194, 198
Номицу, Кацуми, 133
норма
    вектора, 73
    квадратна, 73
носач, 17
Ојлер, Леонард, 86
околина, 220
    координатна, 3
    нормална, 110
    потпуно нормална, 111
    уопштена, 220
О'Нил, Барет, iv
оператор
    афини кривине, 124
    Јакобијев, 124
    косоадјунгован, 123
    кососиметричан, 123
    кривине, 118
    облика, 147, 150
    паралелног померања, 105
    поларизован Јакобијев, 124
    редукован Јакобијев, 125
    самоадјунгован, 123
    симетричан, 123
орбита, 87
Осерман, Роберт, iii, 154
особина
    локална, 221
Пак, ЂонгХјонг, 169
паракомпактност, 10

параметри
конјуговани, 145
параметризација
дужином лука, 94
локална, 3
уназад, 93
унапред, 93
Парусињски, Адам, 234
Паунеску, Лауренцију, 238
Пикар, Шарл, 107
повезаност, 221, 98
компатибилна са метриком, 105
Леви-Чивита, 101
локална, 221
локално путна, 221
метричка, 100
нормална, 147
путна, 221
симетрична, 100
стандардна, 98
повисилица, 85
повлачење, 63
коваријантног тензора, 67
ковекторског поља, 63
подмногострукост, 39
кришка, 40
отворена, 12
потопљена, 40
потпуно геодезијска, 149
псеудо-Риманова, 82
регуларна, 40
Риманова, 82
смештена, 40
подраслојење, 56
подређеност, 25
подржано, 17
компактно, 17
подскуп
компактан, 221
повезан, 221
путно повезан, 221
релативно компактан, 221
Поинкаре, Жил Анри, 2
покретни репер
глобални, 55
координатни, 55
локални, 55
локални ортонормирани, 80
покривач, 221
отворен, 221
полином
карактеристични, 223
минимални, 224
растављив, 223
поља
f-везана векторска, 49
поље
варијационо векторско, 141
векторско, 44
векторско дуж криве, 103
Јакобијево, 141
ковекторско, 61
координатно векторско, 44
нормално векторско, 143
нормално Јакобијево, 143
паралелно векторско, 104
паралелно тензорско, 98
продуживо векторско, 103
тангентно векторско, 142
тензорско, 64
померање
паралелно, 105
потапање, 35
потпокривач, 221
потпростор
инваријантан, 223
негативно дефинитан, 74
недегенерисан, 74
нормалан, 73
ортогонални, 73
позитивно дефинитан, 74
потпуно изотропан, 77
циклични, 223
права
дугачка, 7
са очима, 6
правац
главни, 150
пресликавање
базно, 54
глатко, 19
глатко између многострукости, 18
глатко у тачки, 18, 19
глобално тангентно, 48
двопараметарско, 111
експоненцијално, 109
константног ранга, 34
конформно, 88
непрекидно, 220
пуног ранга, 35
тангентно, 32
принцип
дуалности, 176
производ

ермитски скаларни, 230
комплексни скаларни, 230
псеудо-Риманов, 83
симетричан, 68
скаларни, 72
тензорски, 65
уврнути, 83
унутрашњи, 72
пројекција
нормална, 146
раслојења, 52
стереографска, 13
тангентна, 146
хиперболичка стереографска, 89
простор
анти-де Ситеров, 92
де Ситеров, 92
ермитски квадратни векторски, 230
еуклидски, 12, 79
квадратни векторски, 72
количнички, 15
компактан, 221
комплексни квадратни векторски, 230
комплексни пројективни, 16
константне кривине, 132
котангентни, 60
локално еуклидски, 4
локално компактан, 222
локално повезан, 221
локално путно повезан, 221
локално симетричан, 151
Минковског, 79
нормалан, 220
нормални, 146
повезан, 221
псеудо-еуклидски, 79
псеудохиперболички, 92
путни, 94
путно повезан, 221
раслојења, 52
реални пројективни, 15
регуларан, 220
са скаларним производом, 72
са унутрашњим производом, 72
симетричан, 151
сопствени, 222
тангентни, 29
тополошки, 220
унитаран, 230
уопштени сопствени, 224, 227
Хаусдорфов, 6, 220
простори
хомеоморфни, 220
профињење, 10
псеудосфера, 92
раван
тангентна, 125
радикал, 74
Радон, Јохан, 59
разбијање
интервала, 93
јединице, 25
Рајнер, Армин, 234
Ракић, Зоран, 167, 176, 178, 179, 182, 192, 194
ранг
константан, 57
пресликавања, 34
раслојења, 52
симетричног простора, 152
хомоморфизма раслојења, 57
раслојење
амбијентно тангентно, 146
векторско, 52
временско јединично тангентно, 154
котангентно, 61
нормално, 146
производ, 53
просторно јединично тангентно, 154
рестрикција, 53
тангентно, 43, 53
тривијално, 54
растојање
Риманово, 94
релација
Хурвицова, 58
Релих, Франц, 234
репараметризација
допуштене криве, 93
криве, 93
монотона, 93
репрезентација
изотропна, 87
координатна, 18
Риман, Бернхард, 1
Ринов, Вили, 115
Ричи-Курбастро, Грегорио, 135, 148
Сакери, Ђовани, 1
Сван, Ендру Франсис, 203
својство

Шурово, 201
сегмент
део по део регуларни, 93
регуларни криве, 93
сечење
векторског раслојења, 55
нула, 55
тангентног раслојења, 44
сигнатура, 75
потпростора, 77
Силвестеров закон инерције, 75
Силвестер, Џејмс, 75
симбол
Кристофелов, 99
симетрија
геодезијска, 151
симетричан део, 68
синусоида
тополошка, 221
систем
локални координатни, 3
Ситер, Вилем де, 92
скуп
затворен, 220
количнички, 14
отворен, 220
пребројив, 219
пребројиво бесконачан, 219
скуп нивоа
регуларан, 42
смештање, 38
тополошко, 38
снизилица, 84
Спивак, Мајкл, 2
стабилизатор, 87
Сталингс, Џон, 23
Стинрод, Норман, 60, 83
структура
глатка, 11
стандардна глатка, 12
субмерзија, 35
сфера, 13, 9
геодезијска, 113
нормална, 113
тангентна, 113
Таубс, Клифорд, 23
тачка
изолована, 220
критична, 42
регуларна, 42
тачке
конјуговане, 145
Тејлор, Брук, 30
тензор, 64
алгебарски кривине, 122
анти-Клифордов, 184
антисиметричан, 67
временски Жордан-Осерманов, 155
временски Осерманов, 155
Жордан-Осерманов, 155
Јакоби-дијагонализабилан, 155
Јакоби-дуалан, 176
Јакоби-пропорционалан, 215
квази-Клифордов, 178
Клифордов, 178
коваријантни, 64
контраваријантни, 64
корен, 195
кривине, 119
метрички, 78
облика, 147
Осерманов, 155
полу-Клифордов, 182
потпуно Јакоби-дуалан, 176
просторно Жордан-Осерманов, 155
просторно Осерманов, 155
Ричијев, 135
симетричан, 67
слабо Јакоби-дуалан, 176
штајн, 162
теорема
Дирихлеова, 39, 240
Кејли–Хамилтон, 224
о инваријантности димензије, 5, 32, 222
о инваријантности домена, 222
о инверзној функцији, 35, 240
о константном рангу, 36
основна алгебре, 226
о чешљању јежа, 58
спектрална, 232
Тејлорова, 30
Хајне–Борел, 222
Хопф–Ринов, 115
Титс, Жак, 153
Тожеиро, Руј, iv
топологија, 220
атласа, 4
количничка, 220
релативна, 220
торзија, 100
торус, 14
траг

тензора, 86
тривијализација, 54
локална, 54
Ту, Лоринг, iv
убрзање, 106
улагање, 38
унутрашњост, 220
Урисон, Павел, 26
услов
Хаусдорфов, 6
Ух, Јунхи, 169
фамилија
Клифордова, 178
Фијалкоу, Арон, 169
флаша
Клајнова, 86
форма
билинеарна, 72
друга основна, 147
ермитска, 230
Жорданова нормална, 228
квадратна, 230
недегенерисана, 72
сесквилинеарна, 230
симетрична, 72
скаларна друга основна, 147
формула
Вајнгартенова, 147
Гаусова, 147
Косилова, 101
Фреше, Морис Рене, 2
Фридберг, Лоренс, 222
Фридберг, Стивен, 222
Фридман, Мајкл, 23
функција
глатка, 3
глатка на многострукости, 16
глатка у тачки многострукости, 16
диференцијабилна, 3
дужине лука, 94
карактеристична, 19
координатна, 3
неаналитичка, 24
преласка, 3
угаона, 36
Хурвиц–Радон, 59
џомбаста, 24
Хајам, Омар, 1
Хајне, Хајнрих, 222
Хаусдорф, Феликс, 2
Хелгасон, Сигурдур, 153
Хесе, Лудвиг Ото, 99
Хесијан, 99
хиперповрш, 40
псеудо-Риманова, 150
хипотеза
Осерманова, 154
хомеоморфизам, 220, 3
хомоморфизам
раслојења, 54
раслојења над, 54
Хопф, Хајнц, 115
Хурвиц, Адолф, 58, 59
Цермело, Ернст, 7
Чирнхаус, Еренфрид Валтер фон, 234
Чи, Ђуо-Шин, 154, 176, 199
Шмит, Ерхард, 58
Шур, Фридрих, 131