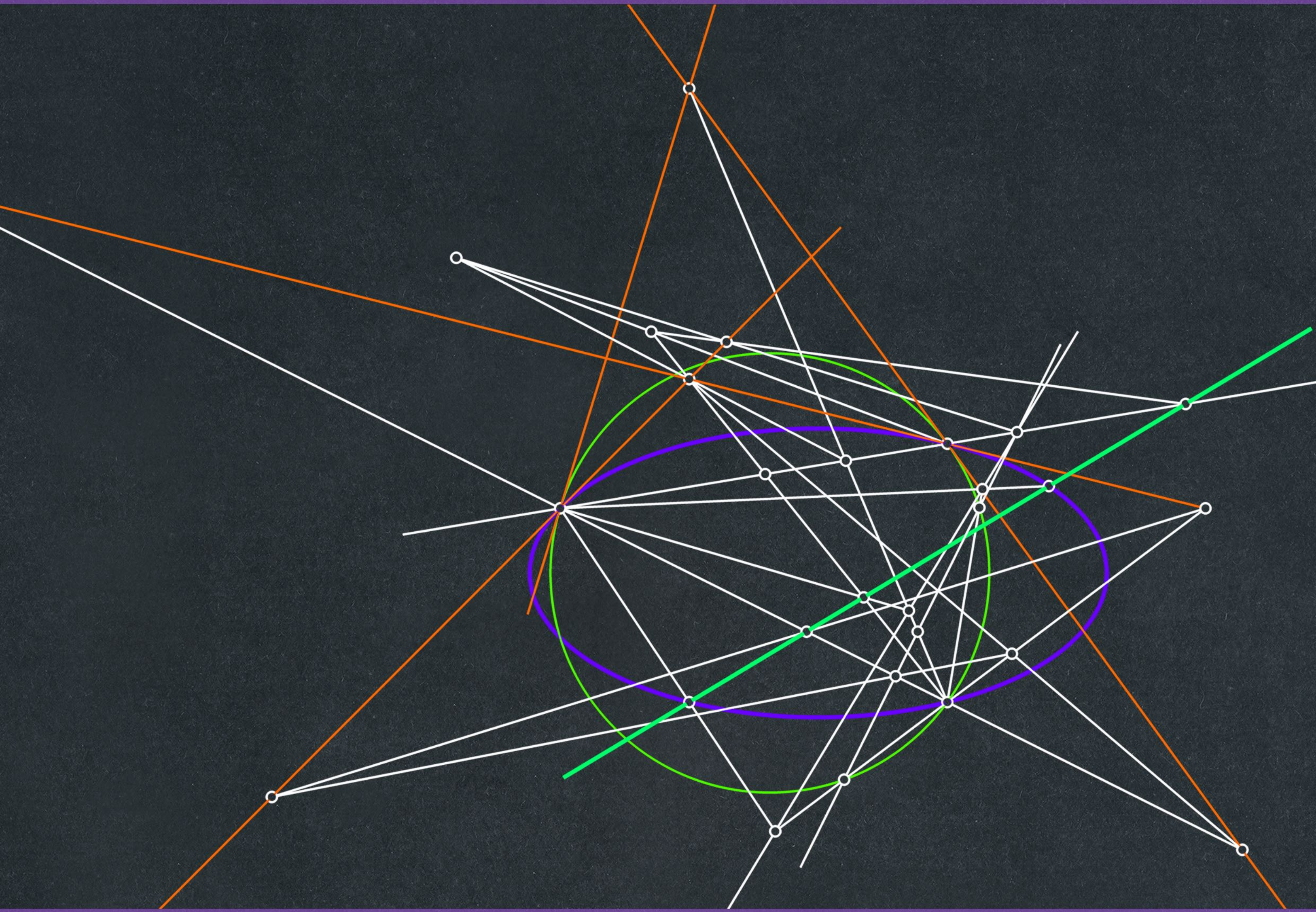


НИЖА

ГЕОМЕТРИЈА

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА
ПРОЈЕКТИВНА ГЕОМЕТРИЈА
АФИНА ГЕОМЕТРИЈА

ВЛАДИЦА АНДРЕЈИЋ

Владица Андрејић

НИЖА ГЕОМЕТРИЈА

Аналитичка геометрија
Пројективна геометрија
Афина геометрија

БЕОГРАД, 13.11.2024

ПРЕДГОВОР

Ова књига настала је на основу вишегодишњег искуства које је аутор стекао држећи предавања и вежбе на Математичком факултету у Београду. По тренутно важећој акредитацији намењена је студентима који прате курсеве Геометрија 1, Геометрија 4 и Геометрија 5.

Два од неколико најзначајнијих догађаја у историји геометрије догодила су се касних тридесетих година 17. века у Француској. Један је откриће и систематска употреба координата за коју су заслужни, независно један од другог, Декарт[1] [24] и Ферма[2] [30]. Координате су омогућиле интензивну употребу алгебре и анализе у основама и развоју геометрије, те је тако настала аналитичка геометрија. Други догађај је прво изучавање фигура које су перспективно инваријантне за шта је заслужан Дезарг[3] [22], а што је даље условило настанак пројективне геометрије.

Предмет изучавања ове књиге су аналитичка, пројективна и афина геометрија.

Пројективна геометрија базирана је на уџбенику *Пројективна геометрија равни* [3]. Геометрију пројективне равни заснивамо синтетички тако што постепено уводимо аксиоме и строго формално доказујемо одговарајуће теореме. Паралелно се служимо аналитичким методама да бисмо посматрана својства демонстрирали у најважнијем специјалном случају реалне пројективне равни.

Секције које су означене симболом ⊛ садрже материјал који је уско специјализован или доста напредан, те се може прескочити приликом првог (или другог) читања.

Књига садржи велики број слика које су креиране помоћу програма GCLC.

у Београду 2021.
В. Андрејић

[1] René Descartes (1596–1650), француски филозоф и математичар
[2] Pierre de Fermat (1601–1665), француски математичар и правник
[3] Girard Desargues (1591–1661), француски математичар и инжењер

САДРЖАЈ

Глава 1

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Елементарна геометрија (која се учи у школи) бави се основним геометријским концептима као што су тачке, праве и равни, одакле се даље изводе компликованији концепти као што су растојање, угао, крива и површ. Она се заснива на визуелном утиску, а особине геометријских објеката формулише кроз аксиоме, несумњиве истине (које не захтевају доказ) до којих стижемо интуицијом. Из тих аксиома, логичко дедуктивним аргументима се изводе разне теореме које углавном такође имају упориште у визуелном утиску. Систематизација геометрије кулминира у Еуклидовим[1] *Елементима* који су вековима сматрани за модел савршене математичке теорије.

Са друге стране, аналитичка геометрија се суштински бави тим истим геометријским објектима, при чему је разлика у методи изучавања. Аналитичка геометрија се базира на алгебарским методама, односно на нумеричком опису геометријских објеката и њихових особина. Прелазак са геометријског описа на нумерички остварује се увођењем координатног система. Основна идеја је да се тачке простора представљају координатама, док се остали геометријски објекти (праве, равни, криве, површи) описују једначинама. Дакле, геометријски објекти изражени су нумеричким информацијама, а испитивање њихових међусобних односа углавном се своди на решавање система једначина.

Сматра се да је основе модерне аналитичке геометрије поставио Рене Декарт када је 1637. године објавио есеј под називом *Геометрија*, као један од три есеја његове *Расправе о методи* [24]. Међутим, вреди напоменути да је и Пјер де Ферма такође развијао аналитичку геометрију, иако је његов рад тек постхумно објављен [30].

1.1 Вектори у геометрији

У овој књизи, основа за увођење аналитичке геометрије је еуклидска раван или еуклидски простор $\mathbb{E}$, што је простор са којим се сусрећемо у свакодневном животу. Дакле, симбол $\mathbb{E}$, осим што означава скуп тачака (дводимензионог или тродимензионог) еуклидског простора, имплицитно подразумева и све оне чињенице елементарне геометрије на које смо навикли, а које ћемо користити без доказа (при чему се докази свакако могу извести из аксиома).

Вектор у еуклидској геометрији често замишљамо као дуж са стрелицом, односно као усмерену дуж. Међутим, строга дефиниција појма вектора је нешто компликованија. Уобичајено, полазимо од скупа $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ уређених парова тачака еуклидског простора $\mathbb{E}$, при чему обично посматрамо просторе димензије два (раван) или три (простор). Елементи скупа $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ су ***двотачке***, а за њих уводимо релацију еквиполенције на следећи начин. Кажемо да је двотачака $(A, B) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ у релацији ***еквиполен-***

[1] Еуклид из Александрије, Εὐκλείδης (3. и 4. век п.н.е), грчки математичар

ције са двотачком $(C,D) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ уколико дужи AD и BC имају заједничко средиште, што означавамо са $(A,B) \sim (C,D)$.

Добро је познато да је четвороугао паралелограм ако и само ако му се дијагонале полове, те ова дефиниција каже да су двотачке (A,B) и (C,D) у релацији уколико је $ABDC$ паралелограм, при чему лепо покрива и дегенерисане случајеве кад су све четири тачке колинеарне (дефиниција паралелограма подразумева да су његова темена различите тачке, као и да се праве одређене његовим страницама не преклапају).

Може се рећи и да су двотачке (A,B) и (C,D) у релацији ако постоји транслација простора $\mathbb{E}$ која тачку A пресликава у тачку C, а тачку B пресликава у тачку D. У сваком случају суштина је да су двотачке (A,B) и (C,D) у релацији уколико имају једнаке дужине и једнак смер.

Дужина двотачке (A,B) одређена је релацијом подударности дужи и једнака је дужини дужи AB. Ако је $A \neq B$, са $[A,B)$ означавамо полуправу чији је почетак тачка A и која садржи тачку B, а ***смер*** двотачке (A,B) одређује полуправа $[A,B)$, односно њена паралелност. Паралелност полуправих је заправо почетна паралелност која се уводи у апсолутној геометрији, а можемо рећи да су две полуправе $[A,B)$ и $[C,D)$ паралелне уколико су праве AB и CD паралелне, при чему су B и D са исте стране праве AC ако је $C \notin AB$, односно унија тих полуправих је такође полуправа ако је $C \in AB$. Другим речима, уколико имамо паралелност правих AB и CD, при чему све четири наведене тачке нису колинеарне, исти смер подразумева да је четвороугао $ABDC$ трапез.

Лема 1.1. *Уведена релација еквиполенције је релација еквиваленције.*

Доказ. Рефлексивност и симетричност је очигледна из дефиниције, док је транзитивност последица транзитивности подударности дужи и транзитивности паралелности полуправих у еуклидском простору. □

Релација еквиполенције раставља скуп $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ на којем је дефинисана на дисјунктне подскупове које називамо класама еквиваленције. Свака класа еквиваленције састоји се од двотачака које су све међусобно у релацији, што нам омогућава да уведемо појам вектора као што је то урадио Белавитис[2] 1835. године [7]. ***Вектор*** је класа еквиваленције добијена сечењем скупа свих двотачака $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ по релацији еквиполенције.

Вектор, односно класа еквиваленције, којем припада двотачка (A,B) једноставно обележавамо са

$$\overrightarrow{AB} = [(A,B)] = \{(X,Y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} : (X,Y) \sim (A,B)\}$$

и кажемо да је (A,B) један ***вектор представник*** вектора $\overrightarrow{AB}$. Посебно се истиче вектор чији је вектор представник двотачка (A,A), зовемо га ***нула вектор*** и обележавамо са

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}.$$

Норма (***дужина***, ***интензитет***) вектора $\overrightarrow{v}$ је ненегативан реални број $\|\overrightarrow{v}\|$ који је једнак дужини његовог вектора представника. Како двотачке у оквиру исте

[2] Giusto Bellavitis (1803–1880), италијански математичар и сенатор

класе еквиваленције имају једнаке дужине то је норма вектора $\overrightarrow{v}$ добро дефинисана и једнака је дужини дужи XY, где је $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{XY}$. Очигледно нула вектор има норму једнаку нули ($\|\overrightarrow{0}\| = 0$) и то је једини такав вектор. Сви остали вектори су ***ненула вектори*** и они поред норме имају и смер који их карактерише.

Смер ненула вектора је смер његовог вектора представника. Кажемо да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ***истог смера*** уколико су полуправе $[A, B)$ и $[C, D)$ паралелне. Нешто блажи услов захтева само паралелност правих AB и CD, те тада кажемо да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ***истог правца***. За векторе истог правца кажемо и да су ***колинеарни***, при чему додатно по конвенцији сматрамо да је нула вектор колинеаран са сваким вектором. Ако су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ истог правца, али не и истог смера, кажемо да су они ***супротног смера***.

На основу претходно успостављених веза није тешко закључити да важи следеће основно тврђење које једнозначно одређује векторе, а које је у складу са нашом геометријском интуицијом.

Теорема 1.2. *Ненула вектор је једнозначно одређен нормом и смером.*

Вектор је класа еквиваленције релације еквиполенције, а скуп свих вектора на еуклидском простору $\mathbb{E}$ означавамо са

$$\mathcal{V} = (\mathbb{E} \times \mathbb{E})/_{\sim} = \{\overrightarrow{XY} : (X, Y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}\}.$$

На скупу $\mathcal{V}$ можемо увести операцију сабирања и операцију множења скаларом, али најпре нам је потребан пар помоћних тврђења.

Лема 1.3. *За сваку тачку $A \in \mathbb{E}$ и сваки вектор $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$ постоји јединствена тачка $B \in \mathbb{E}$ таква да је $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.*

Доказ. Ако је $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ за неке $C, D \in \mathbb{E}$, тада је тачка B јединствена тачка која је (централно) симетрична тачки C у односу на средиште дужи AD. □

Лема 1.4. *$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ако и само ако је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Доказ. Очигледна последица симетрије у дефиницији релације еквиполенције. □

По Леми 1.3 сваки вектор можемо изразити преко вектора представника који почиње произвољном тачком, те следећа дефиниција даје збир и за свака два произвољна вектора. ***Збир вектора*** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ је вектор

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Ова дефиниција је добра јер за $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$, по Леми 1.4 имамо $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, одакле је $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, што опет по Леми 1.4 даје $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, и коначно $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$.

Умножак вектора $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$ скаларом $\alpha \in \mathbb{R}$ је вектор $\alpha \cdot \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$ чија норма износи

$$\|\alpha \cdot \overrightarrow{v}\| = |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{v}\|,$$

док за $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ важи да су вектори $\overrightarrow{v}$ и $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$ истог смера у случају $\alpha > 0$, односно супротног смера у случају $\alpha < 0$.

Претходна дефиниција најпре одређује норму за $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$, те уколико је она нула (за $\alpha = 0$ или $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$), једнозначно имамо $\alpha \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Иначе ($\alpha \neq 0$ и $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$) је $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$ ненула вектор коме описујемо смер, те је једнозначно одређен на основу Теореме

1.2. У сваком случају вектор $\alpha \cdot \vec{v}$, односно краће $\alpha\vec{v}$, једнозначно је одређен што нам даје операцију множења вектора скаларом.

У специјалном случају множења са $\alpha = -1$, уводимо ознаку $-\vec{v} = (-1)\cdot\vec{v}$, и кажемо да је вектор $-\vec{v}$ ***супротан*** вектору $\vec{v}$. На пример, вектор $\overrightarrow{XY}$ је супротан вектору $\overrightarrow{YX}$. Збир два вектора већ имамо на располагању, док се разлика може дефинисати увођењем кратке ознаке, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

По дефиницији, вектори $\vec{u}$ и $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ су истог правца (за $\vec{u} \neq \vec{0}$ и $\alpha \neq 0$), али важи и обрат. За векторе истог правца $\vec{u}$ и $\vec{v}$ постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $\vec{v} = \alpha\vec{u}$. Наиме, како су дати ненула вектори истог правца, у случају да су истог смера можемо поставити $\alpha = \|\vec{v}\|/\|\vec{u}\|$, односно $\alpha = -\|\vec{v}\|/\|\vec{u}\|$ у случају различитог смера, при чему ће се Теорема 1.2 побринути за остало. Тако за колинеарне векторе важи да је један од њих једнак скаларном умношку другог.

Овако дефинисане операције сабирања вектора и множења вектора скаларом су основне операције на скупу $\mathcal{V}$, а испоставља се да скуп $\mathcal{V}$ са тим операцијама има структуру векторског простора.

Теорема 1.5. *Скуп $\mathcal{V}$ је векторски простор, односно за векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ и скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:*

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}; \tag{1.1}$$
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \tag{1.2}$$
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}; \tag{1.3}$$
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}; \tag{1.4}$$
$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \tag{1.5}$$
$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}; \tag{1.6}$$
$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}; \tag{1.7}$$
$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}. \tag{1.8}$$

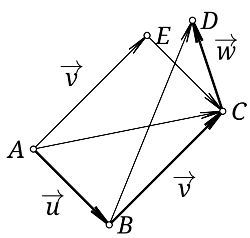
Доказ. Нека је $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (сваки вектор има свој вектор представник). По Леми 1.3 (за тачку B и вектор $\vec{v}$) постоји C тако да је $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, а затим и D тако да је $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$.

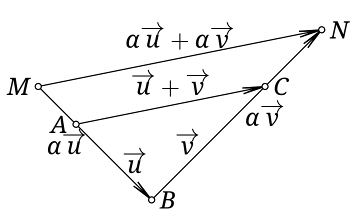
Асоцијативност (1.1) добијамо директним рачуном:

$$\begin{aligned}\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.\end{aligned}$$

За комутативност (1.2) по Леми 1.3 уводимо тачку E тако да је $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, те по Леми 1.4 имамо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$. Сада је $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{u}$.

Неутрални елемент (1.3) $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ и инверзни елемент (1.4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ се лако виде.





За дистрибутивност у односу на сабирање вектора (1.6) уводимо тачку M тако да је $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{u}$ (по Леми 1.3 тако да је $\overrightarrow{BM} = -\alpha\overrightarrow{u}$) и тачку N тако да је $\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{v}$ (поново Лема 1.3). Ако $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ нису колинеарни по обрнутој Талесовој[3] теореми (видети слику) имамо паралелност правих AC и MN, као и одговарајући однос дужина дужи потребних за $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AC}$, односно важи $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$. Ако су $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ колинеарни, тада је $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$, те се доказ своди на преостале ставке (1.5), (1.7) и (1.8).

Дистрибутивност у односу на сабирање скалара (1.5) одмах важи у случајевима $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $\alpha+\beta = 0$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. У супротном доказ се изводи из дефиниције сабирања дискусијом по знаковима скалара α, β и $\alpha + \beta$.

Компатибилност (1.7) очигледно важи за $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. У супротном, због $\|\alpha(\beta\overrightarrow{u})\| = |\alpha| \cdot \|\beta\overrightarrow{u}\| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \|\overrightarrow{u}\| = |\alpha\beta| \cdot \|\overrightarrow{u}\| = \|(\alpha\beta)\overrightarrow{u}\|$, вектори $\alpha(\beta\overrightarrow{u})$ и $(\alpha\beta)\overrightarrow{u}$ имају исту норму, али и исти смер (јер $\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta)$), те су по Теореми 1.2 они једнаки.

Јединични елемент (1.8) је број $1 \in \mathbb{R}$ у складу са дефиницијом множења скаларом и Теоремом 1.2. $\square$

Подсетимо се неких ствари из линеарне алгебре. За скуп ненула вектора $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ кажемо да је ***линеарно независан*** уколико $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$ за $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ повлачи $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. У супротном кажемо да је он ***линеарно зависан*** и тада се неки од вектора може изразити као линеарна комбинација осталих. Максималан број линеарно независних вектора векторског простора је ***димензија*** векторског простора, а за те векторе се каже да чине ***базу*** векторског простора.

Теорема 1.6. *Димензија векторског простора $\mathcal{V}$ једнака је димензији еуклидског простора $\mathbb{E}$.*

Доказ. Нека је $\mathbb{E}$ раван ($\dim\mathbb{E} = 2$). Како у равни постоје три неколинеарне тачке K, L и M, то су вектори $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{KM}$ неколинеарни, те су они и линеарно независни. Нека су $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ произвољни ненула вектори из равни. Поставимо тачке $A, B, P, Q \in \mathbb{E}$ тако да је $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BQ}$. Ако су праве AP и BQ паралелне то су вектори $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ колинеарни и самим тим линеарно зависни. У супротном праве AP и BQ се секу и постоји пресечна тачка C. Вектори $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$ су колинеарни као и вектори $\overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{BC}$, те постоје скалари $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такви да важи $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{BC} = \beta\overrightarrow{BQ}$. Одавде добијамо $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{w} - \alpha\overrightarrow{v}$, те су вектори $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ линеарно зависни, што доказује да је $\dim\mathcal{V} = 2$.

Нека је $\mathbb{E}$ простор ($\dim\mathbb{E} = 3$). Како у простору постоје четири некопланарне тачке K, L, M и N, то су вектори $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KN}$ некопланарни, а како је димензија равни једнака два то су они линеарно независни. Претпоставимо да постоји четири линеарно независних вектора $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OD}$. Из линеарне независности, OAB чини раван π, а OCD чини раван τ. Ако су равни π и τ паралелне то су једнаке ($O \in \pi \cap \tau$), вектори су копланарни и самим тим линеарно зависни. У супротном се π и τ секу по правој $p \ni O$ и постоји тачка $O \neq E \in p = \pi \cap \tau$. Вектор $\overrightarrow{OE}$ је у равни π, те $\overrightarrow{OE} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, али и у равни τ, одакле $\overrightarrow{OE} = \gamma\overrightarrow{w} + \delta\overrightarrow{x}$. Добијамо $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} - \gamma\overrightarrow{w} - \delta\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, где сви коефицијенти нису нула (иначе је $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0}$, али и $E \neq O$) те су вектори линеарно зависни, што доказује да је $\dim\mathcal{V} = 3$. $\square$

[3] Талес из Милета, Θαλῆς (6. и 7. век п.н.е.), грчки филозоф и математичар

1.2 Векторска алгебра

Угао између два ненула вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ је мањи од углова између полуправих $[OA)$ и $[OB)$, односно
$$\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \measuredangle AOB \in [0, \pi],$$
при чему Лема 1.3 омогућава да се појам угла прошири за произвољна два вектора. ***Скаларни производ*** вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ је број
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}.$$

Уколико је $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ кажемо да су вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ (међусобно) ***ортогонални*** и пишемо $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, што се дешава кад је $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ или $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ или $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi/2$. Основне особине скаларног производа видимо у наредној теореми.

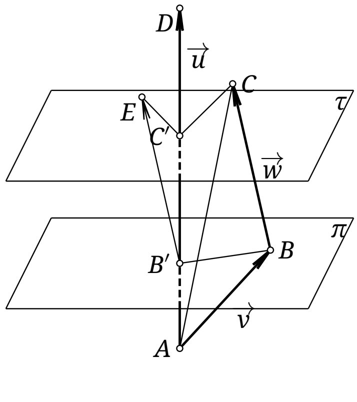
Теорема 1.7. *За векторе $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи*
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}; \tag{1.9}$$
$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}; \tag{1.10}$$
$$(\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}); \tag{1.11}$$
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geqslant 0; \tag{1.12}$$
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}. \tag{1.13}$$

Доказ. Директно из дефиниције следи комутативност (1.9), као и позитивна дефинитност (1.12) и (1.13). Компатибилност (1.11) се лако рачуна:
$$\begin{aligned}(\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} &= \|\alpha\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\measuredangle(\alpha\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\\ &= |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}).\end{aligned}$$

Преостаје доказати дистрибутивност (1.10). Поставимо векторе представнике тако да важи $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD}$. Уведимо равни π и τ такве да важи $B \in \pi \perp AD$ и $C \in \tau \perp AD$, док B' и C' дефинишемо као нормалне пројекције тачака B и C на праву AD, односно $\{B'\} = \pi \cap AD$ и $\{C'\} = \tau \cap AD$.

Из правоуглог троугла $AB'B$ можемо издвојити $\|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot |\cos\measuredangle(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})|$, што нас мотивише да покажемо
$$(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{AB'}.$$

Из $\|(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u}\| = |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \cdot \|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\||\cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{AB'}\|$, посматрани вектори имају једнаке норме, али и једнаке смерове због $\operatorname{sgn}(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \operatorname{sgn}(\cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$, те су једнаки.



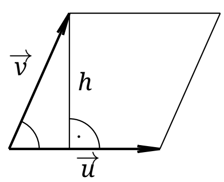
Сасвим слично правоугли троугао $AC'C$ даје $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC})\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2\overrightarrow{AC'}$, док је за изражавање вектора $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC})\cdot\vec{u}$ боље посматрати $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{B'E})\cdot\vec{u}$, где је E тачка дата са $\overrightarrow{B'E}=\overrightarrow{BC}$, одакле лако следи $E\in\tau$. Правоугли троугао $B'C'E$ даје $(\vec{u}\cdot\overrightarrow{B'E})\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2\overrightarrow{B'C'}$.

Обједињавањем претходних резултата, из формуле $\|\vec{u}\|^2\overrightarrow{AB'}+\|\vec{u}\|^2\overrightarrow{B'C'} = \|\vec{u}\|^2\overrightarrow{AC'}$ добијамо $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{u}+(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{u} = (\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}))\cdot\vec{u}$, те коначно уз употребу (1.5) важи $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$. □

Векторски производ уводимо као бинарну операцију која ће векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$ придружити вектор. Природно је захтевати да резултујући вектор буде ортогоналан на оба дата вектора. Уколико су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линеарно независни, они разапињу раван, а резултујући вектор имаће правац нормале на ту раван. Како је правац нормале једнозначно одређен само у тродимензионом векторском простору, то векторски производ уводимо искључиво у случају $\dim\mathcal{V}=3$.

Како постоји бесконачно много вектора ортогоналних на $\vec{u}$ и $\vec{v}$, фиксирањем норме ћемо их прилично рестриковати. Природно је захтевати да норма буде једнака површини $\mathcal{P}(\vec{u},\vec{v})$ паралелограма којег разапињу вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Висина тог паралелограма која одговара основици одређеној са $\vec{u}$ износи $h=\|\vec{v}\|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$, те је

$$\mathcal{P}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\cdot h = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v}).$$



Након овога за резултујући вектор остају две могућности, пошто у оквиру правца имамо два различита смера, што можемо решити увођењем појма оријентације. Нека је $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ произвољна уређена база од $\mathcal{V}$. Посматрајмо с врха вектора $\vec{z}$ обилазак од вектора $\vec{x}$ ка вектору $\vec{y}$ краћим путем. Уколико је тај обилазак у математички позитивном смеру (супротан смеру казаљке на сату) кажемо да је база ***десно оријентисана***. У супротном обилазак је у математички негативном смеру и кажемо да је база ***лево оријентисана***. На овај начин све уређене базе од $\mathcal{V}$ деле су у две класе еквиваленције на десно оријентисане и лево оријентисане.

Избором привилеговане базе одређује се оријентација и она је по дефиницији ***позитивна***. Најчешће се за привилеговану базу узима нека десно оријентисана база, при чему су онда десно оријентисане позитивне, а лево оријентисане негативне. Користећи оријентацију долазимо до једнозначно одређеног резултујућег вектора.

Векторски производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је вектор $\vec{u}\times\vec{v}$ са следећим особинама. Норма вектора $\vec{u}\times\vec{v}$ износи $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$. Ако је $\|\vec{u}\times\vec{v}\|\neq 0$, вектор $\vec{u}\times\vec{v}$ је ортогоналан на векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$, али такав да је база $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v})$ позитивно оријентисана.

Норму смо бирали тако да је $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \mathcal{P}(\vec{u},\vec{v})$. Како је $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})=0$ само у случајевима $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{v}=\vec{0}$, $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})=0$ и $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})=\pi$, то је $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ ако и само ако су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ колинеарни, а тада и немамо паралелограм разапнут са $\vec{u}$ и $\vec{v}$, односно његова површина је нула. У супротном $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно независни, ортогоналност одређује правац за $\vec{u}\times\vec{v}$, док оријентација додатно одређује смер.

Како дијагонала дели паралелограм на два подударна троугла имамо мотив да практично израчунамо површину троугла са

$$\mathcal{P}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|.$$

Теорема 1.8. *За векторе* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ *и скалар* $\alpha \in \mathbb{R}$ *важи*

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}); \tag{1.14}$$

$$(\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}); \tag{1.15}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}. \tag{1.16}$$

Доказ. Антикомутативност (1.14) стандардно добијамо по Теореми 1.2, јер норма и правац вектора су очигледно једнаки, док је смер постављен како треба. За (1.15) смер је очигледно једнак (или су нула вектори), те остаје само норма:

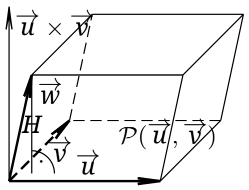
$$\begin{aligned}\|(\alpha \vec{u}) \times \vec{v}\| &= \|\alpha \vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \measuredangle(\alpha \vec{u}, \vec{v}) = |\alpha| \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= |\alpha| \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\alpha(\vec{u} \times \vec{v})\|.\end{aligned}$$

Доказ формуле (1.16) оставићемо за касније јер је тако једноставније. □

Мешовити производ вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ је број

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Геометријска интерпретација мешовитог производа може се видети посматрањем паралелепипеда којег разапињу вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$.



Како је $H = \|w\| \cdot |\cos \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})|$ висина паралелепипеда која одговара страни коју образују вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$, то имамо

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| |\cos \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})| = \mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot H,$$

што је даље једнако запремини тог паралелепипеда и отуда следећа теорема.

Теорема 1.9. *Запремина паралелепипеда којег разапињу вектори* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *и* $\vec{w}$ *једнака је*

$$\mathcal{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.$$

Практичан проблем може бити рачунање запремине тетраедра. Како се паралелепипед дели на две подударне призме, а призма има три пута већу запремину од пирамиде, то у паралелепипед можемо сместити шест тетраедара и зато је запремина тетраедра $ABCD$ једнака

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|.$$

Мешовити производ се такође лепо понаша у односу на уведене операције.

Теорема 1.10. *За векторе* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in \mathcal{V}$ *и скалар* $\alpha \in \mathbb{R}$ *важи*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]; \tag{1.17}$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]; \tag{1.18}$$

$$[\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]; \tag{1.19}$$

$$[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}]. \tag{1.20}$$

Доказ. Ако формуле (1.14) и (1.15) скаларно помножимо са $\overrightarrow{w}$ добијамо (1.17) и (1.19). Циклично померање (1.18) је последица Теореме 1.9 по којој су лева и десна страна једнаке по апсолутној вредности, док је знак једнак због једнаке оријентације на циклично помереној бази. Дистрибутивност (1.20) је последица (1.16), али смо тај доказ прескочили. Међутим, важи и обрат, јер како је $(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{x})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}]$ по формули (1.10) једнако $(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{x})\cdot\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{x})\cdot\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}] + [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}]$, то је (1.20) последица претходно доказаног (1.18). □

Из доказане особине (1.20) за свако $\overrightarrow{x}$ важи $[\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}] - [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}] - [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}] = 0$, што по дефиницији мешовитог производа и Теореми 1.7 доноси

$$\Big(((\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}) - (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}) - (\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})\Big)\cdot\overrightarrow{x} = 0.$$

За конкретно $\overrightarrow{x} = ((\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}) - (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}) - (\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$ добијамо $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{x}\|^2 = 0$ и отуда следи $((\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}) - (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}) - (\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$, што коначно доказује (1.16) чији смо доказ раније прескочили.

Двоструки векторски производ заправо је векторско множење примењено два пута заредом, односно облик $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}$. Основна идеја је да добијемо експлицитну формулу за рачунање овог израза. У случају да су вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ колинеарни то је $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ и самим тим $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, те ћемо претпоставити да су $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ линеарно независни. Тада је $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, те вектори $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$ чине једну базу векторског простора $\mathcal{V}$. Посматрајмо израз $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u}$ који расписујемо у наведеној бази

$$(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}).$$

Скаларним множењем са вектором $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$ који је нормалан на $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u}$, на $\overrightarrow{u}$ и на $\overrightarrow{v}$, одмах добијамо $\gamma\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|^2 = 0$, односно $\gamma = 0$, те имамо

$$(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}. \tag{1.21}$$

Векторским множењем са $\overrightarrow{u}$, из (1.21) је $((\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{u}) = \alpha(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{u}) + \beta(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u})$, односно

$$((\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{u} = -\beta(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}).$$

Пажљивим посматрањем вектора на левој страни претходног израза који је једнак двоструком векторском производу међусобно ортогоналних вектора $((\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\perp\overrightarrow{u}$, те $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{u})$ можемо закључити да је истог смера као и вектор $-(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$, што нам даје $\beta > 0$. Са друге стране, упоређујући норме леве и десне стране имамо

$$\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|\cdot\|\overrightarrow{u}\|^2 = \|((\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{u}\| = \|-\beta(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\| = |\beta|\cdot\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|,$$

одакле је $|\beta| = \|\overrightarrow{u}\|^2$ и самим тим, због $\beta > 0$ добијамо $\beta = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Скаларним множењем са $\overrightarrow{u}$, из (1.21) добијамо $0 = \alpha(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}) + \beta(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})$, одакле следи да је $\alpha\|\overrightarrow{u}\|^2 = -\|\overrightarrow{u}\|^2(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$ и коначно $\alpha = -(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$. Заменом α и β у (1.21) имамо

$$(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u} = -(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}, \tag{1.22}$$

док нам симетрија по $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ даје $(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{u}$, односно

$$(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{v}. \tag{1.23}$$

Преостаје да у рачун укључимо и вектор $\overrightarrow{w}$ који се такође може расписати у нашој бази са $\overrightarrow{w} = \mu\overrightarrow{u} + \nu\overrightarrow{v} + \xi(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$. Применом особина векторског производа из Теореме

1.8, користећи формуле (1.22) и (1.23), као и чињеницу да је $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$, добијамо

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \mu((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) + \nu((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}) + \xi((\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v}))\\ &= -\mu(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} + \mu(\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v} - \nu(\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{u} + \nu(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}\\ &= -(\mu(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{v}))\vec{u} + (\mu(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \nu(\vec{u} \cdot \vec{v}))\vec{v}.\end{aligned}$$

Међутим, скаларним множењем једначине $\vec{w} = \mu\vec{u} + \nu\vec{v} + \xi(\vec{u} \times \vec{v})$ са $\vec{u}$ и $\vec{v}$ добијамо $\vec{w} \cdot \vec{u} = \mu(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{u})$, односно $\vec{w} \cdot \vec{v} = \mu(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{v})$, те имамо двоструки векторски производ $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}$ у виду експлицитне формуле.

Преостаје провера добијене формуле у случају линеарно зависних вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, где постављањем $\vec{v} = \kappa\vec{u}$ очигледно важи $\vec{0} = -(\vec{w} \cdot (\kappa\vec{u}))\vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{u})\kappa\vec{u}$, што комплетира наредну теорему.

Теорема 1.11. *За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ важи*

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}. \tag{1.24}$$

1.3 Координате

Ако је $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n})$ база векторског простора $\mathcal{V}$ тада за свако $\vec{x} \in \mathcal{V}$ постоје једнозначно одређени скалари $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ такви да је $\vec{x} = x_1\vec{v_1} + \ldots + x_n\vec{v_n}$ и они су ***координате вектора*** $\vec{x}$ у датој бази. Координате вектора $\vec{x}$ обично записујемо као уређену n-торку $(x_1, \ldots, x_n)$, што успоставља бијекцију између простора $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$.

Два вектора су једнака ако и само ако имају једнаке координате у односу на исту базу. Из особина Теореме 1.5 лако видимо да је координата суме вектора једнака суми одговарајућих координата, као и да је координата умношка вектора скаларом једнака производу скалара и одговарајуће координате.

Испитајмо како функционише векторска алгебра у координатама, те посматрамо векторски простор $\mathcal{V}$ димензије три. Из линеарне алгебре познат је Грам-Шмитов поступак ортогонализације који од произвољне базе векторског простора који је снабдевен скаларним производом прави ортонормирану базу. Нека је $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ нека ортонормирана база векторског простора $\mathcal{V}$. Тада је

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij},$$

где је δ_{ij} Кронекеров симбол и износи 1 за $i = j$, односно 0 за $i \neq j$.

Нека су $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ и $\vec{y} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3}$ произвољни вектори из $\mathcal{V}$. На основу Теореме 1.7 имамо

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(\sum_i x_i\vec{e_i}\right) \cdot \left(\sum_j y_j\vec{e_j}\right) = \sum_{i,j} x_i y_j (\vec{e_i} \cdot \vec{e_j}) = \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_i x_i y_i.$$

Дакле, у ортонормираној бази важи

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

док саму координату x_i вектора $\vec{x}$ можемо добити скаларним множењем са одговарајућим базним вектором, $\vec{x} \cdot \vec{e_i} = x_i$.

Да бисмо израчунали векторски производ неопходна је оријентација, те стандардно претпостављамо да је ортонормирана база $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ позитивно оријентисана. Вектор $\vec{e_1} \times \vec{e_2}$ има норму $\|\vec{e_1} \times \vec{e_2}\| = \|\vec{e_1}\|\|\vec{e_2}\| = 1$, али и правац ортогоналан и на $\overrightarrow{e_1}$ и на $\overrightarrow{e_2}$, што је правац вектора $\overrightarrow{e_3}$. Како је $\|\overrightarrow{e_3}\| = 1$, а база $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ позитивно оријентисана, то је јасно да важи $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$. Сасвим слично добијамо цикличне једначине $\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$. Ако променимо редослед множења, то по (1.14) имамо $\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}$, док множење линеарно зависних вектора даје нулу, $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$.

Користећи особине из Теореме 1.8 лако је израчунати

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} &= \left(\sum_i x_i \overrightarrow{e_i}\right) \times \left(\sum_j y_j \overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{i,j} x_i y_j (\overrightarrow{e_i} \times \overrightarrow{e_j}) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\overrightarrow{e_1} + (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{e_2} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overrightarrow{e_3} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3},
\end{aligned}$$

што одговара формалној детерминанти

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

која се лако памти.

Мешовити производ $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}]$ рачунамо по дефиницији $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z}$, те ако додатно поставимо $\overrightarrow{z} = z_1\overrightarrow{e_1} + z_2\overrightarrow{e_2} + z_3\overrightarrow{e_3}$, по претходно установљеном је

$$[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3,$$

што се такође може лако запамтити као детерминанта

$$[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Не умањујући општост претпоставимо да радимо у тродимензионом векторском простору $\mathcal{V}$. Координате вектора $\overrightarrow{x} \in \mathcal{V}$ у односу на базу $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ простора $\mathcal{V}$ чини уређена тројка (x_1, x_2, x_3) за коју је $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$. Природно се намеће питање везе између координата уколико дође до промене базе. Нека је $e' = (\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'})$ нова база простора $\mathcal{V}$. Нови базни вектори су вектори простора $\mathcal{V}$ и самим тим могу се изразити у старој бази e,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_1'} &= \gamma_{11}\overrightarrow{e_1} + \gamma_{21}\overrightarrow{e_2} + \gamma_{31}\overrightarrow{e_3}, \\
\overrightarrow{e_2'} &= \gamma_{12}\overrightarrow{e_1} + \gamma_{22}\overrightarrow{e_2} + \gamma_{32}\overrightarrow{e_3}, \\
\overrightarrow{e_n'} &= \gamma_{1n}\overrightarrow{e_1} + \gamma_{2n}\overrightarrow{e_2} + \gamma_{33}\overrightarrow{e_3},
\end{aligned}$$

те се одговарајући коефицијенти γ_{ij} могу уписати у колоне матрице

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

која се зове ***матрица преласка*** са базе e на базу e', а пређашња веза се може матрично записати са

$$e' = e \cdot \Gamma.$$

Ако произвољан вектор $\vec{x}$ изразимо на два различита начина можемо видети везу између старих и нових координата.

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e_i} = \sum_j x'_j \vec{e'_j} = \sum_j x'_j \left(\sum_i \gamma_{ij} \vec{e_i} \right) = \sum_i \left(\sum_j \gamma_{ij} x'_j \right) \vec{e_i},$$

одакле за свако i имамо $x_i = \sum_j \gamma_{ij} x'_j$, што су управо тражене везе између наших координата. Уколико старе координате обележимо са $X = (x_1, x_2, x_3)^\intercal$, а нове са $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)^\intercal$ систем добијених једначина имаће матрични облик $X = \Gamma \cdot X'$, односно

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Уколико су базе e и e' ортонормиране можемо рачунати скаларни производ $\vec{e'_i} \cdot \vec{e_j}$ на два начина

$$\begin{aligned} \vec{e'_i} \cdot \vec{e_j} &= (\sum_k \gamma_{ki} \vec{e_k}) \cdot \vec{e_j} = \sum_k \gamma_{ki} (\vec{e_k} \cdot \vec{e_j}) = \sum_k \gamma_{ki} \delta_{kj} = \gamma_{ji} \\ &= \vec{e'_i} \cdot (\sum_k \gamma'_{kj} \vec{e'_k}) = \sum_k \gamma'_{kj} (\vec{e'_i} \cdot \vec{e'_k}) = \sum_k \gamma'_{kj} \delta_{ik} = \gamma'_{ij}, \end{aligned}$$

где су γ'_{ij} елементи матрице преласка са базе e' на e, односно матрице Γ^{-1}. Одавде закључујемо да важи $\gamma_{ji} = \gamma'_{ij}$, односно $\Gamma^{-1} = \Gamma^\intercal$, што значи да је матрица преласка Γ са ортонормиране базе на ортонормирану базу ортогонална. Додатно видимо да важи

$$1 = \det E = \det(\Gamma \cdot \Gamma^{-1}) = \det(\Gamma \cdot \Gamma^\intercal) = \det(\Gamma) \cdot \det(\Gamma^\intercal) = (\det(\Gamma))^2,$$

тако да је за њу $\det \Gamma = \pm 1$.

Положај тачке може се описати тако што одаберемо неку тачку $O \in \mathbb{E}$, коју зовемо ***координатни почетак***, а затим свакој тачки $M \in \mathbb{E}$ придружимо једнозначно одређен вектор $\overrightarrow{OM} \in \mathcal{V}$, који зовемо ***вектор положаја тачке*** M.

Координатни систем (O, e) састоји се од тачке O и неке базе $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ простора $\mathcal{V}$. ***Координате тачке*** M су координате вектора положаја $\overrightarrow{OM}$ у односу на задату базу e. Ако су вектори базе јединични кажемо да је координатни систем ***Декартов***, а ако су међусобно управни кажемо да је он ***правоугли***.

До координата те исте тачке у новом координатном систему (O', e') долазимо транслацијом координатног почетка, односно користимо $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$. Ако векторе распишемо као производ базе и колоне координата имамо $eX = eP + e'X'$, где колона P представља координате тачке O' у бази e. Како је $e' = e\Gamma$ то је $eX = eP + e\Gamma X'$, односно $X = P + \Gamma X'$. Координате тачке X у старом систему једнаке су збиру координата тачке O' у старој бази и координатама тачке X у новој бази умножених са матрицом преласка са старе базе на нову:

$$[X]_{Oe} = [O']_{Oe} + \Gamma_{e \to e'} \cdot [X]_{O'e'}.$$

1.4 Права и раван

Као што је познато из аксиома еуклидске геометрије, права је објекат који је једнозначно одређен са две различите тачке. Нека је права p одређена тачкама $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. Тачка X припада правој p (тачке A, B и X су колинеарне) ако су вектори $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{AB}$ колинеарни, односно уколико постоји скалар $\kappa \in \mathbb{R}$ такав да је $\overrightarrow{AX} = \kappa\overrightarrow{AB}$. Претходна једначина гласи $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \kappa(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, одакле изједначавањем координата добијамо $x_i - a_i = \kappa(b_i - a_i)$ за $i = 1, 2, 3$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ одређује правац праве, те је права једнозначно одређена тачком (рецимо $A \in p$) и тим правцем. Ако правац, односно вектор $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ заменимо са (v_1, v_2, v_3), добијамо ***параметарске једначине праве***

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \kappa v_1, \\ x_2 &= a_2 + \kappa v_2, \\ x_3 &= a_3 + \kappa v_3. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Правац праве p краће обележавамо са $\overrightarrow{u_p} = (v_1, v_2, v_3)$ и он је једнозначно одређен до на множење ненула скаларом. Када параметар κ прође скуп реалних бројева претходне једначине описују све тачке $X(x_1, x_2, x_3)$ са праве p.

Из параметарских једначина (1.25) елиминацијом параметра κ, заправо његовим изражавањем, добијамо ***канонске једначине праве***

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3}. \tag{1.26}$$

Канонске једначине (1.26) су заправо скраћени запис параметарских једначина (1.25), те се дозвољава да неки од бројева v_i буде нула (али не сви).

Раван је по аксиомама одређена са три неколинеарне тачке A, B и C, али је можемо одредити тачком A и са два линеарно независна вектора $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(u_1, u_2, u_3)$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AC}(v_1, v_2, v_3)$. Тачка X припада равни ако се њен вектор положаја у односу на тачку A може видети као линеарна комбинација вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, односно ако постоје скалари κ и λ тако да је $\overrightarrow{AX} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Расписивањем ове једначине у координатама добијамо ***параметарске једначине равни***,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \kappa u_1 + \lambda v_1, \\ x_2 &= a_2 + \kappa u_2 + \lambda v_2, \\ x_3 &= a_3 + \kappa u_3 + \lambda v_3. \end{aligned}$$

Међутим, раван се лакше може записати уколико линеарну комбинацију вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ заменимо вектором нормале, односно са $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Вектор нормале равни α краће обележавамо са $\overrightarrow{n_\alpha}$ и он је такође једнозначно одређен до на множење ненула скаларом. Сада је $\kappa\vec{u} + \lambda\vec{v} \perp \vec{n}$, одакле следи ***векторска једначина равни***

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0. \tag{1.27}$$

Векторску једначину можемо расписати са $(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{n} = 0$ и погледати координате. Ако су координате тачака $A(a_1, a_2, a_3)$ и $X(x_1, x_2, x_3)$, а вектора $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ добијамо једначину равни

$$n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0. \tag{1.28}$$

Ако израчунамо слободни члан $n_4 = -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$ имамо линеарну једначину

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0, \tag{1.29}$$

што је ***општа једначина равни***.

Посматрајмо сада дводимензиони векторски простор, односно дешавања у равни. По узору на причу из простора, можемо написати параметарске једначине праве рестриковане за једну димензију: $x_1 = a_1 + \kappa v_1$, $x_2 = a_2 + \kappa v_2$. Множењем прве једначине са v_2, друге са v_1 и њиховим одузимањем добијамо $x_1v_2 - x_2v_1 = a_1v_2 - a_2v_1$.

Уколико уведемо нове ознаке $n_1 = v_2, n_2 = -v_1$ и $n_3 = -(a_1v_2 - a_2v_1)$, добијамо ***општу једначину праве у равни*** која гласи:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0. \tag{1.30}$$

До ове једначине може се доћи и на други начин. На пример, права у равни је одређена тачком $A(a_1, a_2)$ и вектором нормале $\overrightarrow{n}(n_1, n_2)$, те по узору на једначину равни у простору (1.27) имамо векторску једначину

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$

Упоређивањем тако добијених једначина можемо закључити да ако је (v_1, v_2) вектор правца праве онда је њен вектор нормале $\overrightarrow{n}(n_1, n_2)$ сразмеран вектору $(v_2, -v_1)$.

Општа једначина праве (1.30) је важна јер се свака права у равни може изразити на такав начин. Са друге стране, у случају да је $n_2 \neq 0$ (односно $v_1 \neq 0$) читаву једначину (1.30) можемо поделити са n_2 и добити ***експлицитну једначину праве***

$$x_2 = kx_1 + n,$$

где је $k = -n_1/n_2$ и $n = -n_3/n_2$. Не треба испустити из вида да праве са константним x_1 немају овакав облик. Број k зове се ***коефицијент праве*** и једнак је тангенсу угла који права гради са позитивним делом x_1 осе.

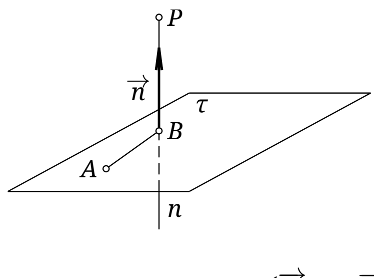
1.5 Растојања и углови

Вратимо се на тродимензиони простор у којем имамо раван τ задату линеарном једначином (1.29), $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$. Ако нека тачка има координате $P(p_1, p_2, p_3)$ можемо се упитати колико износи растојање тачке P од равни τ.

Поставимо праву n кроз тачку P тако да је нормална на раван τ. Нека је B подножје те нормале, односно тачка таква да је $\{B\} = n \cap \tau$. Растојање између две тачке једнако је норми вектора који је њима одређен, те је

$$d(P, \tau) = \inf_{X \in \tau} d(P, X) = \inf_{X \in \tau} \|\overrightarrow{PX}\|.$$

Међутим, $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BX}$ при чему је $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{BX}$, те скаларни производ (Питагорина теорема) даје $\|\overrightarrow{PX}\|^2 = \|\overrightarrow{PB}\|^2 + \|\overrightarrow{BX}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{PB}\|^2$, што значи да се инфимум достиже у тачки B и важи $d(P, \tau) = \|\overrightarrow{PB}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$.



Нека је $\overrightarrow{n}(n_1, n_2, n_3)$ вектор правца праве n ($\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_n}$) и вектор нормале равни τ ($\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n_\tau}$). Како се тачке B и P налазе на правој n то су вектори $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{n}$ колинеарни, те је косинус угла између њих 1 или -1, одакле важи $|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{n}| = \|\overrightarrow{BP}\| \cdot \|\overrightarrow{n}\|$. Са друге стране, $B \in \tau$, те из једначине (1.27) важи $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, где је $A(a_1, a_2, a_3)$ нека тачка равни τ. То нам даје

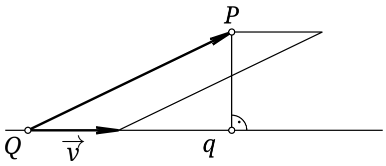
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{n} &= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{n} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{n} = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 - a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3,\end{aligned}$$

а како је $n_4 = -a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3$ због $A \in \tau$, имамо $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4$. Обједињавањем резултата добијамо $\|\overrightarrow{BP}\| \cdot \|\overrightarrow{n}\| = |p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4|$, а како важи $\|\overrightarrow{n}\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$, то добијамо следећу теорему.

Теорема 1.12. *Растојање тачке $P(p_1, p_2, p_3)$ од равни $\tau\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$ износи*

$$d(P, \tau) = \frac{|p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Претпоставимо да је права q одређена тачком Q и правцем $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_q}$. Ако поставимо паралелограм који разапињу вектори $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{v}$ тада се растојање тачке P од праве q може видети као његова висина и површину тог паралелограма можемо изразити на два начина, геометријски $\mathcal{P}(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{v}\| \cdot d(P, q)$ и алгебарски $\mathcal{P}(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{v}\|$. Изједначавањем површина добијамо наредну теорему.



Теорема 1.13. *Растојање тачке P од праве q која има правац $\overrightarrow{v}$ и садржи тачку Q износи*

$$d(P, q) = \frac{\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Наравно, ако имамо конкретне координате $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ и $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$, претходну теорему, можемо експлицитно расписати са

$$d(P, q) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 - q_1 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Растојање тачке од праве у равни може се посматрати као блажа варијанта претходних теорема. Наиме, растојање тачке $P(p_1, p_2)$ од праве $l\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у равни, поистовећујемо са растојањем тачке $(p_1, p_2, 0)$ од равни $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у простору, јер се оба растојања реализују дуж исте нормале. Применом Теореме 1.12 добијамо одговарајуће тврђење.

Теорема 1.14. *Растојање тачке $P(p_1, p_2)$ од праве $l\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у равни износи*

$$d(P, l) = \frac{|p_1n_1 + p_2n_2 + n_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

Мимоилазне праве су праве у простору које не припадају једној равни, односно нити се секу нити су паралелне. Познато је да за две мимоилазне праве постоји тачно једна права која их сече и нормална је на њих. Та права назива се ***заједничка нормала*** мимоилазних правих.

Конструкција заједничке нормале за мимоилазне праве p и q може се извршити на следећи начин. Како заједничка нормала мора бити нормална и на правац праве p и на правац праве q то мора бити нормална на раван π која садржи p, а паралелна је са q и на раван τ која садржи q, а паралелна је са p. Све потенцијалне нормале налазиће се у равни која садржи p и нормална је на раван π, као и у равни која садржи q и нормална је на раван τ, те је самим тим заједничка нормала пресек тих двеју равни.

Растојање између мимоилазних правих реализује се баш дуж заједничке нормале. Наиме, ако је MN заједничка нормала за праве $p \ni M$ и $q \ni N$, то за $X \in p$ и $Y \in q$ важи $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{NY} + \overrightarrow{MN}$, те из $\overrightarrow{XM}, \overrightarrow{NY} \perp \overrightarrow{MN}$ следи $\|\overrightarrow{XY}\|^2 = \|\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{NY}\|^2 + \|\overrightarrow{MN}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{MN}\|^2$ и коначно $d(p,q) = \inf_{X \in p, Y \in q} \|\overrightarrow{XY}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$.

Поставља се питање како експлицитно израчунати $d(p,q)$, ако је права p одређена тачком P и правцем $\overrightarrow{u_p}$, а права q одређена тачком Q и правцем $\overrightarrow{u_q}$, при чему имамо на располагању координате тих датих елемената. Ако посматрамо паралелепипед одређен векторима $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{u_p}$ и $\overrightarrow{u_q}$ није тешко закључити да заједничка нормала MN заправо представља висину тог паралелепипеда у односу на базу коју разапињу $\overrightarrow{u_p}$ и $\overrightarrow{u_q}$. Запремину паралелепипеда можемо рачунати на два начина, геометријски $\mathcal{V}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}) = \|\overrightarrow{u_p} \times \overrightarrow{u_q}\| \cdot d(p,q)$ и алгебарски $\mathcal{V}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}) = |[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}]|$, те коначно важи

$$d(p,q) = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}]|}{\|\overrightarrow{u_p} \times \overrightarrow{u_q}\|}.$$

Угао је један од основних појмова у геометрији. Угао између полуправих је већ разматран у дефиницији угла између два вектора, док преостаје да једначинама интерпретирамо угао између две праве, угао између праве и равни, као и угао између две равни.

Угао између две праве p и q је мањи од углова које одређују њихове полуправе, те је тако $\measuredangle(p,q) \in [0, \pi/2]$. Скаларни производ вектора праваца правих се може разликовати до на знак, јер су углови $\measuredangle(p,q)$ и $\measuredangle(\overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q})$ једнаки или суплементни, те је тако

$$|\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{u_q}| = \|\overrightarrow{u_p}\| \cdot \|\overrightarrow{u_q}\| \cdot \cos \measuredangle(p,q).$$

Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене ортогоналне пројекције на раван α. Тај угао, или њему суплементан, видимо у правоуглом троуглу који чине хипотенуза $\overrightarrow{u_p}$ и наспрамна катета $\overrightarrow{n_\alpha}$ и отуда

$$|\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_\alpha}| = \|\overrightarrow{u_p}\| \cdot \|\overrightarrow{n_\alpha}\| \cdot \sin \measuredangle(p,\alpha).$$

Угао између две равни α и β једнак је углу између њихових нормала, те је зато

$$|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}| = \|\overrightarrow{n_\alpha}\| \cdot \|\overrightarrow{n_\beta}\| \cdot \cos \measuredangle(\alpha,\beta).$$

1.6 Поларне координате

У овој глави ограничићемо се на раван, односно дводимензиони простор. Најједноставнији објекат после праве је круг. ***Круī*** је скуп свих тачака равни подједнако удаљених од неке тачке. Ознаку $k(S,r)$ користићемо за круг чије су тачке на растојању r од тачке S, при чему кажемо да је S ***ценūар*** круга k, а r његов ***ӣолуӣречник***.

Јасно је да се круг $k(S,r)$ може описати са $\|\overrightarrow{SX}\| = r$, те ако је произвољна тачка круга $X(x_1,x_2)$, а његов центар $S(s_1,s_2)$, добијамо једначину

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 = r^2.$$

На пример, јединични центрирани (центар му је у координатном почетку) круг $k(O,1)$ има једначину $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Круг се може записати и у параметарском облику, а једноставна параметризација круга $k(O,1)$ гласи $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \sin\theta$, за $\theta \in [0, 2\pi)$.

Правоугли Декартов координатни систем који стандардно користимо је најједноставнији, али и најпогоднији за изражавање линеарних елемената (права, раван).

Међутим, за неке квадратне елементе (на пример круг) погодније је користити другачији координатни систем.

Поларни координатни систем је координатни систем у равни ($\dim \mathbb{E} = 2$) који карактерише тачка $O \in \mathbb{E}$ коју зовемо ***пол*** и полуправа $[Ox_1)$ са почетком у O коју зовемо ***оса***. Тачка $X \in \mathbb{E}$ различита од O једнозначно је одређена растојањем $r > 0$ од пола ($r = d(O, X)$) и оријентисаним углом θ који полуправа $[OX)$ заклапа са осом $[Ox_1)$. ***Поларне координате*** чини уређен пар (r, θ), при чему угао θ одговара било ком од углова $\theta + 2n\pi$ за цео број n. Тачку O описује само $r = 0$ и у том случају угао θ не постоји.

Веома важна је веза поларног са правоуглим Декартовим координатним системом. Ако га поставимо тако да се пол O поклопи са координатним почетком, а поларну осу поклопимо са x_1 осом имамо везу

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta.$$

Обратне везе је такође лако исписати. Увек је

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

док у зависности од тога да ли је $x_1 \neq 0$ или $x_2 \neq 0$ можемо писати

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x_2}{x_1}, \quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{x_1}{x_2}.$$

На пример, за $x_1 \neq 0$ можемо записати експлицитну формулу

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn}(x_1)).$$

Приметимо да јединични центрирани круг $k(O, 1)$, који у правоуглом Декартовом систему има једначину $x_1^2 + x_2^2 = 1$, у поларном координатном систему има веома једноставну једначину $r = 1$.

Геометријске трансформације равни су пресликавања равни $\mathbb{E}$ на саму себе. Оне геометријске трансформације које не померају тачку O могу се једноставно изразити у поларном координатном систему са полом O. Погледајмо шта су слике неке тачке (r, θ) при неким познатим трансформацијама.

Слика при ротацији око тачке O за угао α је тачка $(r, \theta + \alpha)$. Централна симетрија са центром O даје слику $(r, \theta + \pi)$. Осна симетрија у односу на x_1 даје слику $(r, -\theta)$. Осна симетрија у односу на праву кроз O која је под углом α у односу на x_1 даје слику $(r, 2\alpha - \theta)$. Хомотетија са центром O и коефицијентом $k > 0$ даје слику (kr, θ).

Поларне координате могу нам олакшати пут ка једначинама неких трансформација у правоуглим Декартовим координатама. На пример, поменута ротација око тачке O за угао α представља пресликавање $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha)$ у поларним координатама. Ако је то пресликавање у правоуглим Декартовим координатама записано са $(x_1, x_2) \mapsto (x_1', x_2')$, лако добијамо једначине

$$\begin{aligned} x_1' &= r'\cos\theta' = r\cos(\theta + \alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_2' &= r'\sin\theta' = r\sin(\theta + \alpha) = r(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha) = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha, \end{aligned}$$

те добијамо једначине ротације

$$x_1' = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, \quad x_2' = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha. \tag{1.31}$$

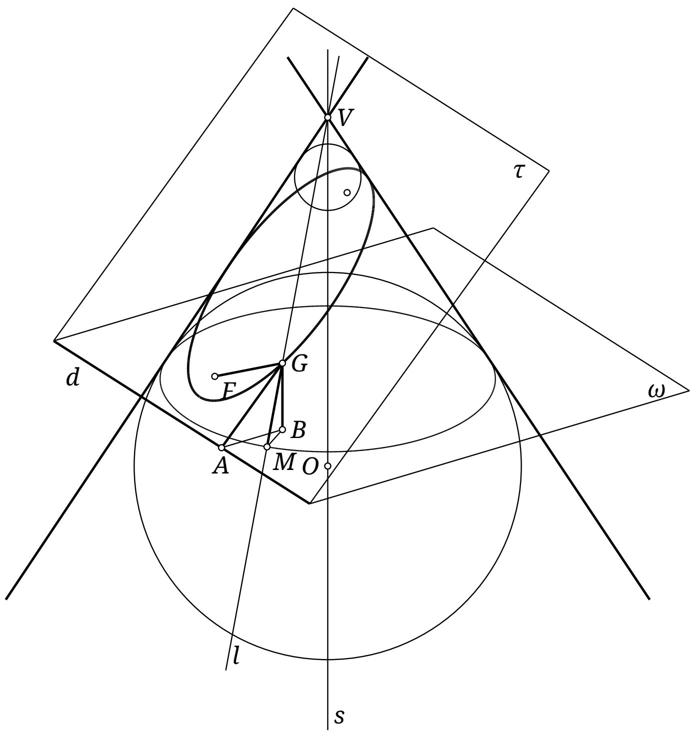
1.7 Конике

Посматрајмо праве l и s у простору које се секу под оштрим углом у тачки V. ***Прави кружни конус*** добија се ротацијом праве l око s, односно у питању је унија правих кроз V које са s заклапају баш онолики (оштар) угао колики l заклапа са s. Права s назива се ***оса***, тачка V је ***врх***, док су права l као и њене слике у ротацији ***изводнице*** правог кружног конуса.

Конусни пресек је пресек правог кружног конуса и неке равни. Случај кад раван садржи врх V је дегенерисан и у питању може бити само тачка V, једна изводница или две изводнице. Нама најинтересантнији случај дешава се кад раван не пролази кроз врх нити је нормална на осу (јер ако јесте у пресеку добијамо круг), а такви пресеци називају се ***конике***.

Нека је $\mathcal{K}$ прави кружни конус са осом s, врхом V и изводницом l, а τ произвољна раван која не садржи V и није нормална на s. Није тешко показати да постоји сфера σ која је уписана у $\mathcal{K}$ и која додирује раван τ. Штавише, у општем случају (елипса, хипербола) постоје две такве сфере, али ако је раван τ паралелна некој изводници (случај параболе) постоји само једна таква сфера. Ове сфере се зову ***Данделинове сфере***[4] и омогућавају нам да једноставно докажемо веома лепе особине које конике поседују.

Сфера σ додирује конус $\mathcal{K}$ по неком кругу и нека је ω раван у којој се тај круг налази. Раван ω је очигледно нормална на s, за разлику од равни τ, те се оне секу по правој $d = \omega \cap \tau$. Посматрајмо конику $\Gamma = \mathcal{K} \cap \tau$ и $G \in \Gamma$ произвољну тачку са ње. Нека је A подножје нормале из G на d, а B подножје нормале из G на ω. Продор праве VG кроз ω означимо са M, а важно је приметити да се M налази на кругу из равни ω.



Како је угао између равни ω и равни τ једнак $\measuredangle GAB$, из правоуглог троугла ABG рачунамо растојање тачке G од праве d са

$$d(G, d) = \|\overrightarrow{GA}\| = \frac{\|\overrightarrow{GB}\|}{\sin \measuredangle(\omega, \tau)}.$$

[4] Germinal Pierre Dandelin (1794–1847), француски математичар

Са друге стране, како је GB нормално на ω то је и паралелно са s, одакле следи да је угао $\measuredangle BGM = \measuredangle(s, VM)$ једнак углу између s и било које изводнице, односно $\measuredangle(s, l)$. Тангентни одсечци на сферу су међусобно подударни, те имамо подударне дужи GF и GM, где је F додирна тачка сфере σ и равни τ, $\{F\} = \tau \cap \sigma$. Из правоуглог троугла MBG следи

$$d(G, F) = \|\overrightarrow{GM}\| = \frac{\|\overrightarrow{GB}\|}{\cos \measuredangle(s, l)}.$$

Обједињавањем претходних једначина добијамо одговарајући однос

$$\frac{d(G, F)}{d(G, d)} = \frac{\|\overrightarrow{GM}\|}{\|\overrightarrow{GA}\|} = \frac{\sin \measuredangle(\omega, \tau)}{\cos \measuredangle(s, l)} = e,$$

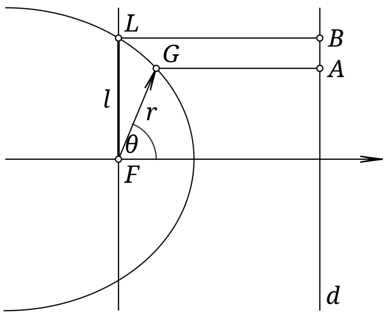
који не зависи од избора тачке G са конике Γ, јер фиксирањем конуса $\mathcal{K}$ и равни τ фиксирани су и углови $\measuredangle(\omega, \tau)$ и $\measuredangle(s, l)$, што доказује наредну теорему.

Теорема 1.15. *За сваку конику* Γ *у равни постоји тачка* F *и права* d *таква да је однос растојања произвољне тачке са конике од тачке* F*, односно од праве* d*, константан.*

Тачка F зове се ***жижа*** (или ***фокус***), права d зове се ***водиља*** (или ***директриса***), а број e је ***ексцентрицитет*** конике. Ексцентрицитет конике је по дефиницији строго позитиван, а испоставља се да вредност 1 разлучује три типа коника на следећи начин. Коника је за $0 < e < 1$ ***елипса***, за $e = 1$ ***парабола***, за $e > 1$ ***хипербола***.

Иако смо конике дефинисали као објекте у тродимензионом простору, оне се суштински налазе у равни. Теорема 1.15 омогућава да без коришћења треће димензије изведемо једначине коника у равни.

Испоставља се да је до једначина лакше доћи у поларном координатном систему. Поставимо координатни систем тако да је жижа F пол, док је поларна оса полуправа са почетком F која је нормална на директрису d и сече је. Са L означимо једну од пресечних тачака конике Γ и праве кроз F паралелне директриси и нека је $l = d(F, L)$. Посматрајмо произвољну тачку са конике $G \in \Gamma$ која је са исте стране праве d као и тачка F. Нека је A подножје нормале из G, а B подножје нормале из L на праву d.



Ако су (r, θ) поларне координате тачке G, тада важи

$$r = d(F, G) = e \cdot d(G, A) = e(d(L, B) - r \cdot \cos\theta) = l - er\cos\theta,$$

одакле добијамо поларну једначину конике

$$r = l - er\cos\theta, \tag{1.32}$$

што се може записати и са

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}.$$

Уколико поставимо одговарајући правоугли Декартов координатни систем (који има почетак у полу, а поларна оса се преклапа са осом x_1), једноставно долазимо до једначина конике. Квадрирањем једначине (1.32) уз стандардне везе $x_1 = r\cos\theta$ и $x_2 = r\sin\theta$, добијамо

$$x_1^2 + x_2^2 = (l - ex_1)^2,$$

што се може расписати са

$$(1-e^2)x_1^2 + 2elx_1 + x_2^2 = l^2. \tag{1.33}$$

Приметимо да је неопходно извршити дискусију по томе да ли је $1-e^2 = 0$. У случају да је $e \neq 1$ важи

$$x_1^2 + 2x_1\frac{el}{1-e^2} + \frac{x_2^2}{1-e^2} = \frac{l^2}{1-e^2},$$

одакле је

$$\left(x_1 + \frac{el}{1-e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1-e^2} = \frac{l^2}{1-e^2} + \frac{e^2l^2}{(1-e^2)^2} = \frac{l^2}{(1-e^2)^2}.$$

Претходна једначина нас мотивише да уведемо доста згоднији координатни систем који добијамо транслацијом за вектор $(-el/(1-e^2), 0)$, јер тада $x_1 + el/(1-e^2)$ постаје ново x_1, док се x_2 не мења. У том новом координатном систему претходна једначина гласи

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{1-e^2} = \frac{l^2}{(1-e^2)^2},$$

односно

$$\frac{x_1^2}{\frac{l^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{x_2^2}{\frac{l^2}{(1-e^2)}} = 1.$$

Ако уведемо ознаке

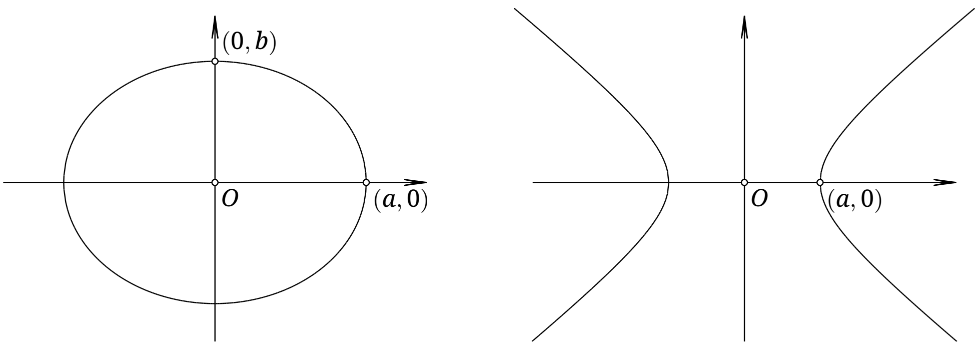
$$a = \frac{l}{|1-e^2|}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{|1-e^2|}},$$

долазимо до одговарајуће канонске једначине

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \operatorname{sgn}(1-e^2)\frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Разматран случај ($e \neq 1$) решава проблем елипсе ($e < 1$) и хиперболе ($e > 1$), где канонске једначине редом гласе

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

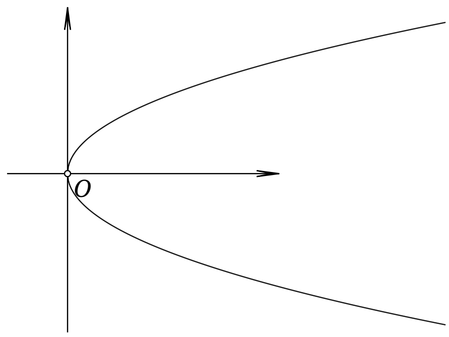


Преостаје случај параболе, који карактерише услов $e = 1$ у почетној дискусији. Једначина (1.33) тада гласи $2lx_1 + x_2^2 = l^2$, што се може записати са

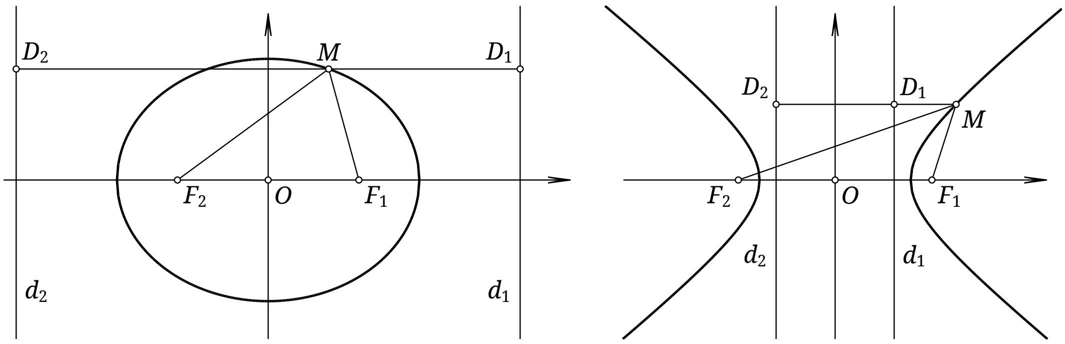
$$x_2^2 = 2l\left(\frac{l}{2} - x_1\right).$$

Додатна изометријска трансформација која представља осну симетрију равни у односу на праву $x_1 = l/4$ мења $l/2 - x_1$ новим x_1, док се x_2 не мења. Коначно, у новом координатном систему једначина параболе добија свој канонски облик

$$x_2^2 = 2lx_1.$$



Елипсе и хиперболе имају две жиже и две директрисе. Жиже елипсе налазе се између директриса, док су у случају хиперболе директрисе између жижа. По Теореми 1.15 за сваку од жижа важи да је однос растојања тачке од жиже и од директрисе једнак ексцентрицитету.



Нека је M произвољна тачка са елипсе или хиперболе Γ и нека су F_1 и F_2 жиже чије су одговарајуће директрисе d_1 и d_2. Нека су тачке $D_1 \in d_1$ и $D_2 \in d_2$ подножја нормала из M на d_1 и d_2. Из особине коника важи $d(M, F_i) = e \cdot d(M, d_i) = e \cdot d(M, D_i)$ за $i = 1, 2$. У случају елипсе ова растојања сабирамо и добијамо

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) = e(d(M, D_1) + d(M, D_2)) = e \cdot d(D_1, D_2) = e \cdot d(d_1, d_2),$$

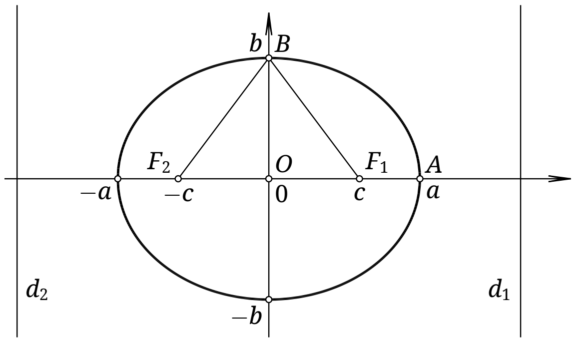
док их у случају хиперболе одузимамо

$$|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = e|d(M, D_1) - d(M, D_2)| = e \cdot d(D_1, D_2) = e \cdot d(d_1, d_2).$$

Десна страна претходних једначина је константа јер не зависи од избора $M \in \Gamma$, те добијамо наредну теорему.

Теорема 1.16. *Збир растојања сваке тачке елипсе до њених жижа је константа. Апсолутна вредност разлике растојања сваке тачке хиперболе до њених жижа је константа.*

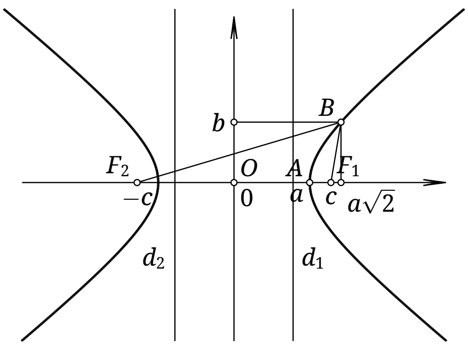
Претходна теорема може послужити да израчунамо ексцентрицитет e преко основних параметара конике (који се виде у канонској једначини). Растојање (било које) жиже од центра конике зове се ***линеарни ексцентрицитет*** и обично обележава са c. Приликом извођења канонских једначина коника имали смо транслацију за вектор $(-el/(1-e^2), 0)$, која помера жижу из координатног почетка, те добијамо везу између линеарног и обичног ексцентрицитета, $c = |el/(1-e^2)| = el/|1-e^2| = ea$. Како за ексцентрицитет важи $e = c/a$, најпре рачунамо везу између бројева a и b из канонске једначине (такозвани велики и мали полупречник) и броја c, али је неопходно дискутовати случајеве.



Ако је коника елипса која има канонску једначину $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, а постављена тако да важи $a > b$, тада су њене жиже $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$. Теорему 1.16 примењујемо на темена елипсе, односно на тачке $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ са конике које се налазе на осама. Са једне стране је $d(A, F_1) + d(A, F_2) = (a - c) + (a + c) = 2a$, док са друге стране важи $d(B, F_1) + d(B, F_2) = 2\sqrt{b^2 + c^2}$, одакле добијамо $c^2 = a^2 - b^2$. Тако долазимо до тражених веза,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Важно је напоменути да се у случају $a < b$ жиже налазе на x_2-оси (а не на x_1-оси), односно имају облик $(0, \pm c)$, док је $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Уколико објединимо случајеве можемо рећи да важи $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ Уз стандардно $e = c/a$



Сасвим слично решава се случај хиперболе $x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 1$. Теме $A(a, 0)$ свакако користимо, али како x_2-оса не сече хиперболу, друга тачка са хиперболе је компликованија, рецимо $B(a\sqrt{2}, b)$. Овако имамо $|d(A, F_1) - d(A, F_2)| = |(c - a) - (c + a)| = 2a$, али и доста компликованије

$$|d(B, F_1) - d(B, F_2)| = \left| \sqrt{(a\sqrt{2} - c)^2 + b^2} - \sqrt{(a\sqrt{2} + c)^2 + b^2} \right|.$$

Применом Теореме 1.16 на тачке A и B, те квадрирањем добијамо

$$4a^2 = (a\sqrt{2} - c)^2 + b^2 + (a\sqrt{2} + c)^2 + b^2 - 2\sqrt{(a\sqrt{2} - c)^2 + b^2}\sqrt{(a\sqrt{2} + c)^2 + b^2},$$

одакле следи

$$4a^2 = 4a^2 + 2c^2 + 2b^2 - 2\sqrt{(2a^2 + c^2 + b^2)^2 - (2ac\sqrt{2})^2},$$

што повлачи
$$c^2+b^2=\sqrt{(2a^2+c^2+b^2)^2-8a^2c^2}.$$
Квадрирањем претходне једначине добијамо
$$c^4+2c^2b^2+b^4=4a^4+c^4+b^4+4a^2c^2+4a^2b^2+2c^2b^2-8a^2c^2,$$
што даје $4a^4-4a^2c^2+4a^2b^2=0$, одакле дељењем са $4a^2\neq 0$ имамо $c^2=a^2+b^2$. Тако долазимо до важних веза у случају хиперболе,
$$c=\sqrt{a^2+b^2},\qquad e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}.$$

1.8 Криве другог реда

Крива другог реда је скуп тачака равни $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину
$$f(x_1,x_2)=0, \tag{1.34}$$
где је f полином другог степена по x_1 и x_2 са реалним коефицијентима. Другим речима, важи
$$f(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1+2a_{23}x_2+a_{33}, \tag{1.35}$$
где су $a_{11},a_{12},a_{22},a_{13},a_{23},a_{33}\in\mathbb{R}$, при чему је $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0$ (постоји барем један квадратни члан). Циљ којем тежимо је класификација кривих другог реда, односно желимо да геометријски опишемо све могуће скупове тачака који задовољавају једначину (1.34).

Уколико постоји члан $a_{12}\neq 0$, то геометријски значи да је крива некако искошена у постојећем координатном систему. Идеја је да потражимо нови координатни систем у којем ће она бити исправљена, односно нема члан a_{12}. То можемо постићи ротацијом координатног система око координатног почетка за неки угао $\theta\in\mathbb{R}$ (односно ротацијом тачака око координатног почетка за угао $-\theta$), при чему нам једначине ротације (1.31) омогућавају везу
$$x_1=x_1'\cos\theta-x_2'\sin\theta,\quad x_2=x_1'\sin\theta+x_2'\cos\theta. \tag{1.36}$$

На овај начин, једначина криве (1.34) (у пакету са (1.35)) се ротацијом трансформише у нову једначину
$$a_{11}'{x_1'}^2+2a_{12}'x_1'x_2'+a_{22}'{x_2'}^2+2a_{13}'x_1'+2a_{23}'x_2'+a_{33}'=0, \tag{1.37}$$
где је $2a_{12}'=-2a_{11}\cos\theta\sin\theta+2a_{12}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2a_{22}\cos\theta\sin\theta$. Одавде је
$$a_{12}'=a_{12}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+(a_{22}-a_{11})\cos\theta\sin\theta,$$
што због тригонометријских формула $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$ и $2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$ постаје
$$a_{12}'=a_{12}\cos 2\theta+(a_{22}-a_{11})\frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

Потребно нам је такво θ које ће анулирати коефицијент a_{12}', али из претходне једначине је очигледно да се то дешава за
$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$$

Приметимо да овде немамо проблем дељења нулом, јер је у случају $a_{12} = 0$ крива већ исправљена, те је непотребно ротирати. Дакле, ако координатни систем заротирамо за угао

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \tag{1.38}$$

око координатног почетка, једначина (1.34) прелази у једначину (1.37) за коју имамо $a'_{12} = 0$. На овај начин уклонили смо један коефицијент једначине криве, те даље посматрамо криву чија једначина има општи облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \tag{1.39}$$

Како више нема микс члана, променљиве x_1 и x_2 су раздвојене, те за $i = 1, 2$ уколико је $a_{ii} \neq 0$, можемо посматрати израз $a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i$. Тада се стандардно извлачи a_{ii} испред заграде, у којој се креира потпун квадрат на следећи начин

$$a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i = a_{ii}\left(x_i^2 + 2x_i\frac{a_{i3}}{a_{ii}} + \left(\frac{a_{i3}}{a_{ii}}\right)^2\right) - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}} = a_{ii}\left(x_i + \frac{a_{i3}}{a_{ii}}\right)^2 - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}}.$$

Овога пута транслирамо x_i координату са $x'_i = x_i + a_{i3}/a_{ii}$, што суштински уклања коефицијент уз x_i, односно анулира a_{i3}. Наравно, уколико нема квадрата због $a_{ii} = 0$ тада већ имамо један коефицијент мање.

Веома је важно да су трансформације које примењујемо изометријске трансформације, односно да оне чувају дужину дужи, или еквивалентно скаларни производ. Због тога је било битно извући a_{ii} испред заграде у претходном кораку. У сваком случају ротација и транслација јесу изометријске трансформације и то су прва два корака у третману којим криву доводимо до канонског облика.

На раније описан начин, из опште једначине (1.39) уклањамо још два коефицијента, али је неопходно дискутовати случајеве. Уколико оба квадратна коефицијента нису нула, $a_{11}a_{22} \neq 0$, тада транслација $x_1 = x'_1 - a_{13}/a_{11},\ x_2 = x'_2 - a_{23}/a_{22}$ елиминише линеарне коефицијенте из једначине (1.39) која након тога добија облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0. \tag{1.40}$$

У првој варијанти квадратни коефицијенти су истог знака, $a_{11}a_{22} > 0$, те дискутујемо знак од a_{33}. Ако се знакови разликују, $a_{11}a_{33} < 0$, уводимо $a = \sqrt{-a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{-a_{33}/a_{22}}$, одакле добијамо

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,}$$

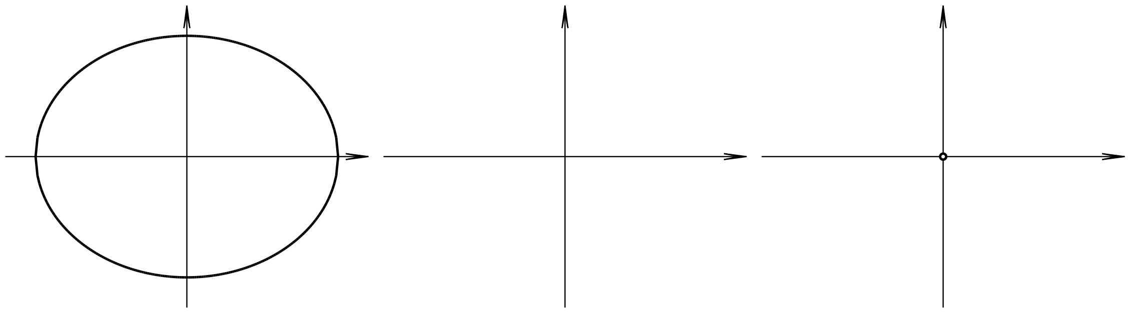
што је канонска једначина **елипсе**. У овом случају додатно можемо захтевати услов $a \geqslant b > 0$ (посебно за $a = b$ имамо круг као специјални случај елипсе), јер у супротном изометријска трансформација $x_1 = x'_2,\ x_2 = x'_1$ је осна рефлексија у односу на праву $x_1 = x_2$ која окреће координате x_1 и x_2, те самим тим и бројеви a и b мењају места. Ако су сви коефицијенти истог знака, $a_{11}a_{33} > 0$, тада за $a = \sqrt{a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{a_{33}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1,}$$

а како збир квадрата никад није негативан, нема тачака које ће је задовољити. Ова крива је **празан скуп**, али суштински у питању је *имагинарна елипса*, што се види ако проблем посматрамо у комплексној равни. Преостаје случај $a_{33} = 0$ који за $a = 1$ и $b = \sqrt{a_{11}/a_{22}}$ даје једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0,}$$

коју испуњава само координатни почетак, те је у питању **тачка**. Проблем се може посматрати и у комплексној равни где је решење *пар имагинарних правих које се секу* баш у тој реалној тачки.



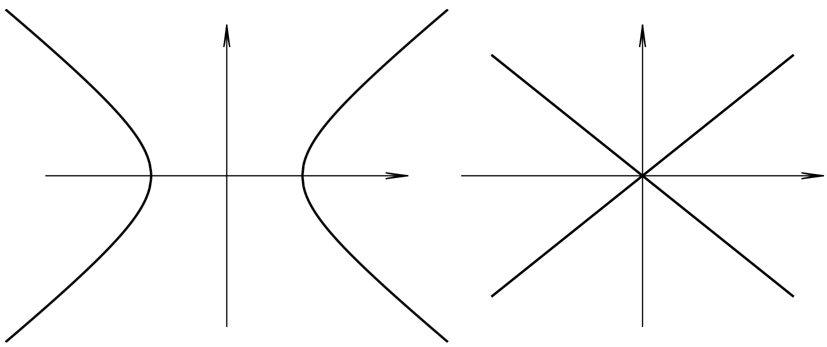
У другој варијанти квадратни коефицијенти су различитог знака, $a_{11}a_{22} < 0$, те дискутујемо знак од a_{33}. Ако је $a_{33} \neq 0$, не умањујући општост можемо претпоставити да важи $a_{11}a_{33} < 0$, јер иначе примена већ виђене осне рефлексије $x_1 = x_2',\ x_2 = x_1'$ размењује координатне осе, самим тим и квадратне коефицијенте. За $a = \sqrt{-a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{a_{33}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,}$$

што је канонска једначина **хиперболе**. У случају $a_{33} = 0$ за $a = 1$ и $b = \sqrt{-a_{11}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0,}$$

која представља **две праве које се секу**. Једначине тих правих су $x_1/a \pm x_2/b = 0$.



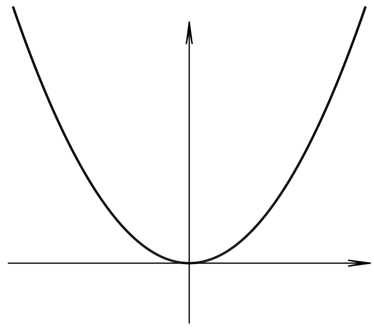
Овим смо исцрпели могућности из једначине (1.40) која је проистекла из услова $a_{11}a_{22} \neq 0$. Како испитујемо криву другог реда, она мора имати барем један квадратни члан, те преостаје случај кад је тачно један од квадратних коефицијената различит од нуле. Не умањујући општост, можемо претпоставити да је $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$, иначе, као и раније, користимо осну рефлексију да разменимо x_1 и x_2 осу. Тада транслација $x_1 = x_1' - a_{13}/a_{11},\ x_2 = x_2'$ елиминише коефицијент a_{13} и једначина (1.39) постаје

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \tag{1.41}$$

У првој варијанти имамо $a_{23} \neq 0$. Додатна транслација $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2' - a_{33}/(2a_{23})$ уклања слободан члан a_{33}, те једначина (1.41) добија облик $a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 = 0$. Једноставна смена $p = -a_{23}/a_{11}$ доноси

$$\boxed{x_1^2 = 2px_2,}$$

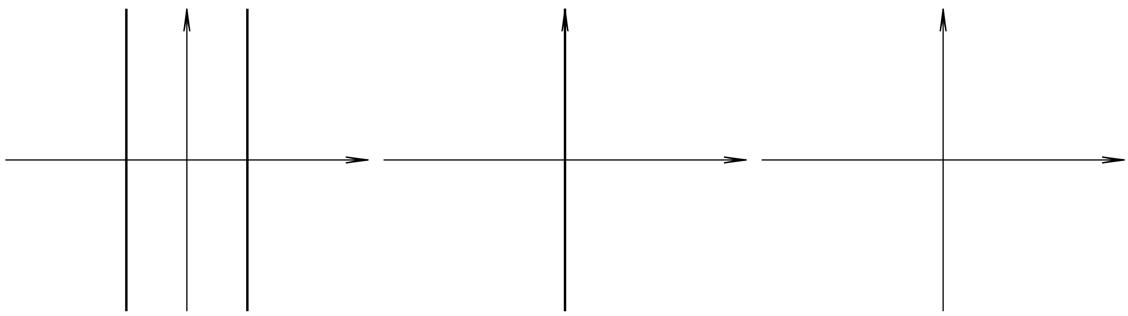
што је једначина **параболе**. Уколико је $p < 0$ додатно можемо окренути смер x_2 оси тако што применимо изометријску трансформацију $x_1 = x_1',\ x_2 = -x_2'$, која ће обезбедити канонско ограничење $p > 0$.



У последњој варијанти је $a_{23} = 0$. Једначина (1.41) је тада облика $a_{11}x_1^2 + a_{33} = 0$, односно

$$\boxed{x_1^2 = c,}$$

што дискутујемо по $c = -a_{33}/a_{11}$. Уколико је $c > 0$ у питању су **паралелне праве** $x_1 = \pm\sqrt{c}$, док $c = 0$ даје једну **праву** $x_1 = 0$. У случају $c < 0$ једначина нема решења, односно у питању је **празан скуп**, што у комплексној равни представља *две паралелне имагинарне праве*.



1.9 Инваријанте кривих другог реда

По дефиницији, крива другог реда задовољава једначину

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0,$$

која се може записати у матричном облику са

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_{33} = 0,$$

односно са

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ради лакшег записа, уводимо краће ознаке за матрице из претходних једначина на следећи начин,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Тада једначина криве гласи

$$\bar{X}^\intercal \bar{A} \bar{X} = 0,$$

док за квадратну форму важи

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = X^\intercal A X.$$

Приликом свођења криве на канонски облик најпре смо имали ротацију за угао (1.38) јер смо установили да она елиминише a_{12} и тако исправља криву. Овај геометријски поступак можемо посматрати алгебарски тако што ротацију схватимо као дијагонализацију симетричне матрице A. У ту сврху потребно је да испитамо сопствену структуру произвољне симетричне квадратне матрице A, при чему смо ову теорију из линеарне алгебре додатно разрадили у Секцији А.1.

По Леми А.2, свака сопствена вредност λ симетричне квадратне матрице A је реална ($\lambda \in \mathbb{R}$), а како важи $\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = 0$, то хомогена једначина $(A - \lambda\,\mathbb{1})V = 0$ има бесконачно много решења. Због тога, увек постоји сопствени вектор ($V \neq 0$) који одговара сопственој вредности λ. Међутим, он никад није једнозначно одређен, јер свако $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ генерише сопствени вектор αV. Често радимо са јединичним сопственим векторима, а добијамо их скалирањем једним од два могућа избора ($\alpha = 1/\|V\|$ или $\alpha = -1/\|V\|$) за αV, где је V неки пронађени сопствени вектор.

Посматрајмо симетричну квадратну матрицу A реда два из формуле (1.42). Ако су λ_1 и λ_2 нуле њеног карактеристичног полинома, тада је

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Ако матрица A има само једну сопствену вредност, $\lambda_1 = \lambda_2$, тада важи $a_{11} + a_{22} = 2\lambda_1$ и $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1^2$, одакле добијамо $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$. Из претходне једначине следи $a_{12} = 0$, те је матрица дијагонална, што геометријски значи да је крива већ исправљена и нема потребе за ротацијом.

Закључујемо да ако има потребе за ротацијом ($a_{12} \neq 0$), важи $\lambda_1 \neq \lambda_2$, те постоје јединични сопствени вектори који им одговарају, а они су по Леми А.3 међусобно ортогонални. Нека је $V = (v_1, v_2)$ јединични сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности λ_1, односно нека важи $AV = \lambda_1 V$ уз $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Тада је вектор $W = (-v_2, v_1)$ јединични и ортогоналан на V, те самим тим он мора бити сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_2, односно важи $AW = \lambda_2 W$.

Основна идеја је пронаћи ортонормирану базу која се састоји само из сопствених вектора и поставити те векторе у колоне матрице преласка. Конкретно, постављамо матрицу

$$M = (V|W) = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}$$

која има улогу матрице ротације из (1.36), што доноси трансформацију $X = MX'$. Квадратна форма након трансформације постаје $X^\intercal AX = (MX')^\intercal A(MX') = X'^\intercal(M^\intercal AM)X'$, односно зависи од нове симетричне матрице $A' = M^\intercal AM$. Како су V и W јединични и међусобно ортогонални, то је нова матрица дијагонална

$$A' = (V|W)^\intercal A(V|W) = (V|W)^\intercal(AV|AW) = (V|W)^\intercal(\lambda_1 V|\lambda_2 W) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

На овај начин смо прилично брзо дијагонализовали симетричну матрицу и тако исправили криву, јер квадратна форма $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ након трансформације постаје $\lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2$. Применом овог поступка тачно се зна како изгледа квадратни део једначине после ротације и не морамо га посебно рачунати. Коефицијенти који се појављују уз квадратне чланове исправљене криве нужно морају бити нуле карактеристичног полинома, а њихов редослед директно зависи од редоследа којим смо сопствене векторе стављали у матрицу преласка M.

Упознали смо трансформацију $X = MX'$, где је M матрица која се састоји из вектора неке ортонормиране базе. Таква матрица је ортогонална, за њу важи $MM^\intercal = \mathbb{1}$, те и $(\det M)^2 = 1$. Та трансформација квадратну форму $X^\intercal AX = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ преводи у $X'^\intercal A'X'$, где је $A' = M^\intercal AM$ симетрична матрица нове квадратне форме. Једноставан рачун за карактеристични полином нове матрице,

$$\begin{aligned}\chi_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda\,\mathbb{1}) = \det(M^\intercal AM - M^\intercal(\lambda\,\mathbb{1})M) = \det(M^\intercal(A - \lambda\,\mathbb{1})M)\\ &= \det M^\intercal \det(A - \lambda\,\mathbb{1}) \det M = (\det M)^2 \det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \chi_A(\lambda),\end{aligned}$$

показује да се карактеристични полином не мења приликом ове трансформације, односно да је њена инваријанта. Међутим, како су $\operatorname{tr} A$ и $\det A$ коефицијенти карактеристичног полинома

$$\chi_{A'}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A,$$

то су и траг и детерминанта матрице квадратне форме такође инваријанте.

Сасвим слично можемо посматрати симетричну матрицу $\overline{A}$ реда три коју смо дефинисали формулом (1.42) и трансформацију $\overline{X} = \overline{M}\overline{X}'$, где је

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{M}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

такође ортогонална матрица. Исти аргументи као раније обезбедиће инваријантност карактеристичног полинома,

$$\chi_{\overline{A}'}(\lambda) = \chi_{\overline{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + (\operatorname{tr}\overline{A})\lambda^2 - \frac{1}{2}((\operatorname{tr}\overline{A})^2 - \operatorname{tr}(\overline{A}^2))\lambda + \det\overline{A},$$

самим тим и његових коефицијената. Иако смо заинтересовани за детерминанту матрице криве другог реда, није неопходно да докажемо претходну формулу, јер се инваријантност директно види из $\det\overline{A}' = \det(\overline{M}^\intercal\overline{A}\overline{M}) = (\det\overline{M})^2\det\overline{A} = \det\overline{A}$. У сваком случају имамо добре разлоге да дефинишемо величине Δ, D и T на следећи начин,

$$\Delta = \det\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}, \quad D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}, \quad T = \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22},$$

јер су оне инваријанте трансформације која је одређена ортогоналном матрицом.

Најчешће се ова трансформација конкретизује као ротација

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\end{pmatrix},$$

коју смо већ видели у формули (1.36). Та ротација се види у матричним једначинама $X = MX'$ и $\overline{X} = \overline{M}\overline{X}'$, где су M и M' ортогоналне матрице дате са

$$M = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Промена матрице $\bar{A}$ приликом те ротације може се пажљиво израчунати у складу са једначином криве (1.37),

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11}\cos^2\theta + a_{22}\sin^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta,\\
a'_{12} &= a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a_{22} - a_{11})\cos\theta\sin\theta,\\
a'_{22} &= a_{11}\sin^2\theta + a_{22}\cos^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta,\\
a'_{13} &= a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta,\\
a'_{23} &= a_{23}\cos\theta - a_{13}\sin\theta,\\
a'_{33} &= a_{33},
\end{aligned}$$

одакле се додатно можемо уверити да су Δ, D и T инваријанте криве другог реда у односу на ротацију.

Свођење криве другог реда на канонски облик након ротације подразумевао је транслацију. Међутим, како се транслација не може приказати матрицом, преостаје нам да формуле транслације

$$x_1 = x'_1 + c_1, \quad x_2 = x'_2 + c_2,$$

заменимо у једначину криве, одакле у складу са једначином (1.37) добијамо

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22},\\
a'_{13} &= c_1a_{11} + c_2a_{12} + a_{13},\\
a'_{23} &= c_1a_{12} + c_2a_{22} + a_{23},\\
a'_{33} &= c_1^2a_{11} + 2c_1c_2a_{12} + c_2^2a_{22} + 2c_1a_{13} + 2c_2a_{23} + a_{33}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Из претходних формула видимо да се комплетна матрица квадратне форме сачувала, односно да важи $A' = A$, што одмах повлачи инваријантност трага ($T' = T$) и мале детерминанте ($D' = D$) за произвољну транслацију. Преостаје инваријантност за Δ што ћемо испитати коришћењем особина детерминанти да се чувају приликом елементарних операција (додавање врсте умножене неким скаларом на врсту или додавање колоне умножене неким скаларом на колону). Ако у оригиналној великој детерминанти Δ на трећу колону додамо прву колону множену са c_1 и другу колону множену са c_2, а затим на трећу врсту додамо прву врсту множену са c_1 и другу врсту множену са c_2 добијамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1a_{11} + c_2a_{12} + a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & c_1a_{12} + c_2a_{22} + a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & c_1a_{13} + c_2a_{23} + a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13}\\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23}\\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33}\end{vmatrix} = \Delta',$$

јер важи

$$\begin{aligned}
a'_{33} &= c_1^2a_{11} + 2c_1c_2a_{12} + c_2^2a_{22} + 2c_1a_{13} + 2c_2a_{23} + a_{33}\\
&= c_1(c_1a_{11} + c_2a_{12} + a_{13}) + c_2(c_1a_{12} + c_2a_{22} + a_{23}) + c_1a_{13} + c_2a_{23} + a_{33}.
\end{aligned}$$

На овај начин показали смо да су величине Δ, D и T заиста инваријанте како у односу на ротацију, тако и у односу на транслацију. Наравно, онда је то и карактеристични полином матрице квадратне форме, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D$.

Инваријанте које смо успоставили могу бити од велике користи приликом свођења криве на канонски облик. Међутим, оне нам омогућавају и да уз мало рачуна одредимо геометријски тип криве другог реда. Размотримо како делује процес класификације кривих другог реда у односу на инваријанте.

Класификација започиње ротацијом која исправља криву, односно елиминише члан a_{12}. Након ротације, уколико је $a_{11}a_{22} \neq 0$ врши се транслација која криву доводи на облик (1.40), $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0$. Инваријанте Δ, D и T се не мењају ротацијом и транслацијом, тако да њихове вредности израчунате за почетну криву морају бити једнаке новим вредностима, $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}$, $D = a_{11}a_{22}$, $T = a_{11} + a_{22}$. Карактеристични полином је такође инваријанта, а од раније знамо да њене нуле λ_1 и λ_2, као сопствене вредности матрице квадратне форме криве, одговарају вредностима a_{11} и a_{22}. Како овде разматрамо случај $D \neq 0$, то је $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$, док слободан члан можемо изразити са $a_{33} = \Delta/D$, што нас доводи до једначине,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{\Delta}{D} = 0.$$

У првој варијанти је $D = \lambda_1\lambda_2 > 0$, одакле добијамо $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn} T$ и $\operatorname{sgn}(\Delta/D) = \operatorname{sgn}\Delta$. Тада случај $\Delta T < 0$ даје елипсу, случај $\Delta T > 0$ даје празан скуп (имагинарна елипса), док случај $\Delta = 0$ даје тачку. У другој варијанти имамо $D = \lambda_1\lambda_2 < 0$, при чему је $\operatorname{sgn}(\Delta/D) = -\operatorname{sgn}\Delta$. Тада случај $\Delta \neq 0$ даје хиперболу, док случај $\Delta = 0$ даје две праве које се секу.

Преостаје нам да испитамо шта се дешава кад након почетне ротације имамо $a_{11}a_{22} = 0$, где неумањујући општост претпостављамо $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$. У првој варијанти имамо $a_{23} \neq 0$, где су инваријанте $T = a_{11} \neq 0$, $D = 0$ и $\Delta = -a_{11}a_{23}^2 \neq 0$, одакле је крива парабола са једначином $Tx_1^2 \pm 2\sqrt{-\Delta/T}x_2 = 0$.

У последњој варијанти имамо $a_{23} = 0$, где је једначина криве $a_{11}x_1^2 + a_{33} = 0$ за коју важи $D = 0$ и $\Delta = 0$, али се вредност a_{33} не може директно изразити преко преостале инваријанте T. Због тога је корисно увести следеће величине,

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad P = P_1 + P_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где важи

$$\frac{1}{2}((\operatorname{tr}\overline{A})^2 - \operatorname{tr}(\overline{A}^2)) = D + P_1 + P_2,$$

односно $\chi_{\overline{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (D + P)\lambda + \Delta$, одакле се види да је P полуинваријанта у смислу да је инваријанта само за ротацију, али не и за транслацију.

Полуинваријанта P омогућава да у случају $D = \Delta = 0$ расплетемо која могућност је у питању: пар паралелних правих, једна права или празан скуп. Приметимо да опција $a_{22} = 0$ због $0 = D = -a_{12}^2$ даје $a_{12} = 0$, док $0 = \Delta = -a_{11}a_{23}^2$ даје $a_{23} = 0$, што је могуће само за $P_1 = 0$. Сасвим слично, опција $a_{11} = 0$ је могућа само за $P_2 = 0$.

Геометријска интуиција нам говори да криву пресечемо произвољном правом и гледамо број пресечних тачака. Уколико је тај број два, онда имамо две паралелне праве, а уколико је тај број један, онда је у питању права. Случај без пресечних тачака је компликованији, јер осим празног скупа, могуће је да смо погодили баш правац праве која припада кривој, те зато нисмо нашли пресек. За $a_{22} \neq 0$, пресек криве и праве $x_1 = 0$ даје квадратну једначину $a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$ која има дискриминанту $4a_{23}^2 - 4a_{22}a_{33} = -4P_1$, док за $a_{11} \neq 0$, пресек криве и праве $x_2 = 0$ даје једначину $a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1 + a_{33} = 0$ која има дискриминанту $4a_{13}^2 - 4a_{11}a_{33} = -4P_2$. Напоменимо да се аномалија која настаје кад погодимо правац праве која припада кривој не дешава у случају квадратне једначине.

Уколико је $P_1 < 0$ или $P_2 < 0$, једначина пресека је квадратна са позитивном дискриминантом, те криву представљају две паралелне праве. Уколико је $P_1 > 0$ или $P_2 > 0$, једначина пресека је квадратна са негативном дискриминантом, те добијамо две паралелне имагинарне праве. Приметимо да из претходних закључака $P_1P_2 < 0$ није опција, те је $P = 0$ ако и само ако је $P_1 = P_2 = 0$, а тада је барем једна једначина пресека квадратна са нула дискриминантом, те је крива заправо права. Сумирајући резултате имамо две паралелне праве за $P < 0$, једну праву за $P = 0$ и празан скуп за $P > 0$.

Овако смо комплетирали резултате класификације кривих другог реда помоћу инваријанти, а добро је имати на уму наредну табелу.

$D : \Delta$	$\Delta \neq 0$ недегенерисане криве	$\Delta = 0$ дегенерисане криве
$D > 0$	елипса за $\Delta T < 0$ празан скуп за $\Delta T > 0$	тачка
$D < 0$	хипербола	две праве које се секу
$D = 0$	парабола	две паралелне праве за $P < 0$ права за $P = 0$ празан скуп за $P > 0$

1.10 Центар, тангента, дијаметар

Центар неке криве је њен центар симетрије. Ако крива Γ има центар C то значи да за свако $X \in \Gamma$ важи $Y \in \Gamma$, где је Y централно симетрична тачка тачки X, односно $\overrightarrow{CX} = -\overrightarrow{CY}$. Природно питање које се поставља је које криве другог реда имају центар и како га одредити уколико он постоји.

Приметимо да симетрична тачка тачки $X(x_1, x_2)$ у односу на потенцијални центар $C(c_1, c_2)$ јесте $Y(2c_1 - x_1, 2c_2 - x_2)$. Уколико би центар криве био координатни почетак, тачка Y би имала много згоднији запис, $(-x_1, -x_2)$. Зато уводимо транслацију координатног система, $x_1 = x_1' + c_1$, $x_2 = x_2' + c_2$, где центар криве постаје тачка $(0, 0)$. Тако крива која у оригиналном координатном систему има једначину

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0,$$

у новом транслираном координатном систему добија једначину

$$g(x_1, x_2) = a_{11}'x_1^2 + 2a_{12}'x_1x_2 + a_{22}'x_2^2 + 2a_{13}'x_1 + 2a_{23}'x_2 + a_{33}' = 0,$$

при чему важе везе

$$a_{13}' = c_1a_{11} + c_2a_{12} + a_{13}, \quad a_{23}' = c_1a_{12} + c_2a_{22} + a_{23}, \tag{1.44}$$

које смо раније израчунали у (1.43).

У новом координатном систему, по дефиницији центра, $g(x_1, x_2) = 0$ повлачи $g(-x_1, -x_2) = 0$. Због тога, за сваку тачку (x_1, x_2) криве која је дата једначином $g(x_1, x_2) = 0$ и има центар $(0, 0)$, важи $0 = g(x_1, x_2) - g(-x_1, -x_2) = 4a_{13}'x_1 + 4a_{23}'x_2$, односно

$$a_{13}'x_1 + a_{23}'x_2 = 0. \tag{1.45}$$

Уколико је (1.45) једначина праве, онда наша крива мора бити подскуп те праве. Нема много кривих другог реда које су подскуп праве, то су права, тачка и празан скуп, те њих посебно испитујемо. Није тешко приметити да права има бесконачно центара (свака тачка са ње), тачка има један центар (сама та тачка), док празан скуп за центар има сваку тачку равни.

У супротном, крива другог реда није подскуп праве те једначина (1.45) није једначина праве, што је могуће само у случају да важи $a_{13}' = a_{23}' = 0$. Везе из (1.44), доносе ***једначине центра*** у оригиналном координатном систему,

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13} &= 0, \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Са друге стране, лако је проверити да ако ове једначине важе, крива $g(x_1, x_2) = 0$ има центар у $(0, 0)$, односно да крива $f(x_1, x_2) = 0$ има центар у (c_1, c_2). Једначине центра могу се лако запамтити у облику који укључује парцијалне изводе,

$$f'_{x_1}(c_1, c_2) = 0, \quad f'_{x_2}(c_1, c_2) = 0,$$

јер вредност функције f у центру мора достићи екстремну вредност, те су изводи дуж било ког правца једнаки нули. У сваком случају, једначине центра показују да је проналажење центра криве другог реда еквивалентно решавању линеарне матричне једначине $AX = B$, која у расписаном облику гласи,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}.$$

Уколико је $D = \det A \neq 0$, матрица A је инвертибилна и једначина $AX = B$ има јединствено решење $X = A^{-1}B$. Због тога елипса, хипербола и две праве које се секу (криве другог реда са $D \neq 0$ које нису подскуп праве) имају тачно један центар. Једноставан рачун даје,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \end{pmatrix},$$

одакле се види да су координате тог јединственог центра

$$C\left(\frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}}, \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}} \right).$$

Преостаје случај $D = \det A = 0$ где је познато да једначина $AX = B$ нема јединствено решење. У случају матрице реда два (не важи за више редове) такође је познато да једначина има решење ако и само ако су обе Крамерове[5] детерминанте

$$D_1 = \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix},$$

једнаке нули. Ако детерминанту Δ развијемо по трећој колони добијамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

односно

$$\Delta = a_{13}D_1 + a_{23}D_2 + a_{33}D,$$

при чему је $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Одавде добијамо

$$D_1^2 = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 = a_{22}(a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{22}a_{13}^2) = -a_{22}(a_{13}D_1 + a_{23}D_2) = -a_{22}\Delta,$$
$$D_2^2 = (a_{12}a_{13} - a_{23}a_{11})^2 = a_{11}(a_{22}a_{13}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{11}a_{23}^2) = -a_{11}(a_{13}D_1 + a_{23}D_2) = -a_{11}\Delta,$$

одакле се може закључити да је $\Delta = 0$ ако и само ако је $D_1 = D_2 = 0$. То доказује да две паралелне праве ($D = \Delta = 0$) имају центар, самим тим и бесконачно много њих, док парабола ($D = 0, \Delta \neq 0$) нема центар.

Размотримо тангенте на криву другог реда Γ која је задата својом симетричном матрицом реда три. Ако за потребне колоне и матрицу криве уведемо следеће ознаке,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

[5] Gabriel Cramer (1704–1752), швајцарски математичар

тада можемо рећи да тачка (x_1, x_2) припада Γ уколико важи $X^\intercal AX = 0$. Желимо да пронађемо тангенте на Γ које пролазе кроз тачку (p_1, p_2). Ако тражена тангента има правац (v_1, v_2), то она садржи тачке облика $(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2)$ за $t \in \mathbb{R}$. Овим тачкама одговарају колоне $P + tV$, те тачке које припадају и кривој и тангенти задовољавају једначину $(P + tV)^\intercal A(P + tV) = 0$. Како је $V^\intercal AP = (V^\intercal AP)^\intercal = P^\intercal AV$, то долазимо до једначине

$$(V^\intercal AV)t^2 + 2(P^\intercal AV)t + P^\intercal AP = 0.$$

Ако је $V^\intercal AV \neq 0$ у питању је квадратна једначина, а услов додира тангенте и криве даје двоструко решење, односно нула дискриминанту, одакле следи

$$(P^\intercal AV)^2 = (V^\intercal AV)(P^\intercal AP).$$

Уколико додатно претпоставимо да тачка (p_1, p_2) припада Γ, тада је $P^\intercal AP = 0$ и услов додира постаје $P^\intercal AV = 0$, што у расписаном облику гласи

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13})v_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23})v_2 = 0.$$

Због тога, ако је $f(x_1, x_2) = 0$ једначина криве другог реда Γ и (v_1, v_2) правац тангенте на Γ у тачки $(p_1, p_2) \in \Gamma$, тада важи $(f'_{x_1}(p_1, p_2))v_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))v_2 = 0$. Лако је приметити да права $(f'_{x_1}(p_1, p_2))x_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))x_2 = 0$ има баш тај правац, те нам преостаје да је паралелно померимо тако да прође кроз тачку (p_1, p_2), што нас доводи до једначине тангенте,

$$(f'_{x_1}(p_1, p_2))(x_1 - p_1) + (f'_{x_2}(p_1, p_2))(x_2 - p_2) = 0. \tag{1.46}$$

У општем случају тангента на криву (не нужно другог реда) може се тражити методама математичке анализе. Коефицијент правца тангенте на криву која је дата са $x_2 = f(x_1)$ у тачки (p_1, p_2) криве ($p_2 = f(p_1)$) једнак је првом изводу функције криве у p_1, односно $f'(p_1)$. Ако x_2 схватимо као функцију по x_1 и једначину $f(x_1, x_2) = 0$ диференцирамо по x_1 добијамо $2a_{11}x_1 + 2a_{12}(x_2 + x_1x_2') + 2a_{22}x_2x_2' + 2a_{13} + 2a_{23}x_2' = 0$, односно

$$(2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}) + (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23})x_2' = 0,$$

што се лакше може записати са $f'_{x_1}(x_1, x_2) + (f'_{x_2}(x_1, x_2))x_2' = 0$. Вредност извода x_2' у тачки p_1 једнака је коефицијенту правца тангенте на криву у тачки (p_1, p_2) са криве, те је зато права дата једначином $(f'_{x_1}(p_1, p_2))x_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))x_2 = 0$ баш тог правца, што потврђује наш резултат из једначине (1.46).

У случају да је $V^\intercal AV = a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 = 0$ нема квадратне једначине, те за $P^\intercal AV \neq 0$ можемо рећи да је друга пресечна тачка праве и криве (прва наступа за $t = 0$) у бесконачности (напишемо $t = 1/s$ и пустимо да s тежи ка нули). Тада за правац (v_1, v_2) важи

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-D}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{-a_{12} \mp \sqrt{-D}}.$$

То се никада не дешава у случају елипсе ($D > 0$). У случају параболе ($D = 0$), решење се своди на један правац који је заправо правац осе параболе, што значи да праве паралелне оси имају само једну заједничку тачку са том параболом, а у питању нису тангенте. У случају хиперболе ($D < 0$) постоје два таква правца, а то су правци паралелни асимптотама хиперболе.

Конкретно, уколико посматрамо канонске једначине елипсе, хиперболе и параболе,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad x_2^2 = 2lx_1,$$

тангенте у тачки (p_1, p_2) са те криве гласе,

$$\frac{p_1x_1}{a^2} + \frac{p_2x_2}{b^2} = 1, \quad \frac{p_1x_1}{a^2} - \frac{p_2x_2}{b^2} = 1, \quad p_2x_2 = l(x_1 + p_1).$$

Асимптоте хиперболе су праве које додирују криву у бесконачности, односно оне се у бесконачности понашају као крива. Ако пођемо од канонске једначине хиперболе њене асимптоте можемо видети кроз једначину

$$0 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right).$$

Самим тим асимптоте на хиперболу су праве облика

$$x_2 = \pm\frac{b}{a}x_1.$$

Под ***дијаметром*** елипсе или хиперболе подразумевамо сваку праву која пролази кроз центар те криве. Ако искористимо једначине центра $f_{x_1}(c_1, c_2) = 0$ и $f_{x_2}(c_1, c_2) = 0$, можемо посматрати једначину

$$u_1 f_{x_1}(x_1, x_2) + u_2 f_{x_2}(x_1, x_2) = 0, \tag{1.47}$$

за произвољне реалне u_1 и u_2 који нису истовремено једнаки нули, $u_1^2 + u_2^2 > 0$. Како су парцијални изводи $f_{x_1}(x_1, x_2)$ и $f_{x_2}(x_1, x_2)$ линеарни по x_1 и x_2 то је једначина (1.47) највише линеарна. Прецизније, у расписаном облику једначина (1.47) гласи,

$$(u_1a_{11} + u_2a_{12})x_1 + (u_1a_{12} + u_2a_{22})x_2 + (u_1a_{13} + u_2a_{23}) = 0,$$

те она није линеарна ако и само ако важи

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Међутим, како посматрамо само елипсе и хиперболе, то имамо $\det A = D \neq 0$, те матрична једначина $AX = 0$ има јединствено решење $X = 0$, односно $u_1 = u_2 = 0$. Дакле, једначина (1.47) јесте линеарна и зато је у питању једначина неке праве. Са друге стране, центар криве (c_1, c_2) очигледно испуњава ту једначину, те је у питању права која пролази кроз центар. Закључујемо да једначина (1.47) описује дијаметре наше криве, а добијамо их тако што за u_1 и u_2 шетамо реалне бројеве који нису истовремено нула.

Посебну улогу за елипсу и хиперболу имају ***конјуговани дијаметри***. Ако изаберемо неки дијаметар, њему конјугован биће онај који се добија тако што покупимо средишта свих тетива паралелних почетном дијаметру. Конјугован дијаметар елипсе може се видети и као онај који има правац тангенте у тачкама у којима почетни дијаметар сече криву. Основна идеја је да је елипса уписана у паралелограм који чине два правца међусобно конјугованих дијаметара.

Теорема 1.17. *Дијаметар конјугован дијаметру са правцем (u_1, u_2) је дат једначином (1.47).*

Доказ. Нека је $P(p_1, p_2)$ тачка са криве и уједно тачка са праве која има правац (u_1, u_2), а пролази кроз центар $C(c_1, c_2)$. Конјугован дијаметар за дијаметар CP има правац тангенте на криву у тачки P. Тангенту смо израчунали у (1.46), те ако је паралелно померимо да прође кроз C имамо $(f_{x_1}(p_1, p_2))(x_1 - c_1) + (f_{x_2}(p_1, p_2))(x_2 - c_2) = 0$, што је једначина конјугованог дијаметра. У расписаном облику једначина гласи

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13})(x_1 - c_1) + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23})(x_2 - c_2) = 0,$$

што након груписања по p_1 и p_2 даје

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2)p_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2)p_2 \\ + (a_{13}x_1 - a_{13}c_1 + a_{23}x_2 - a_{23}c_2) = 0.$$

Из једначина центра, $a_{13} = -a_{11}c_1 - a_{12}c_2$ и $a_{23} = -a_{12}c_1 - a_{22}c_2$, након одговарајућих замена добијамо једначину конјугованог дијаметра

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13})p_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23})p_2 \\ - (a_{11}c_1 + a_{12}c_2)x_1 - a_{13}c_1 - (a_{12}c_1 - a_{22}c_2)x_2 - a_{23}c_2 = 0,$$

што после сређивања постаје

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13})(p_1 - c_1) + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23})(p_2 - c_2) = 0.$$

Почетни дијаметар CP има правац $(p_1 - c_1, p_2 - c_2) = (u_1, u_2)$, те претходна једначина гласи $u_1 f'_{x_1}(x_1, x_2) + u_2 f'_{x_2}(x_1, x_2) = 0$, што доказује тврђење. $\square$

Нека су сада k_1 и k_2 коефицијенти праваца међусобно конјугованих дијаметара. Дијаметар конјугован оном који има коефицијент правца k_1 је по претходној теореми $1 \cdot f'_{x_1} + k_1 \cdot f'_{x_2} = 0$, односно $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} + k_1a_{12}x_1 + k_1a_{22}x_2 + k_1a_{23} = 0$. Коефицијент правца ове праве је

$$k_2 = -\frac{a_{11} + k_1a_{12}}{a_{12} + k_1a_{22}},$$

те имамо $k_2(a_{12} + k_1a_{22}) + a_{11} + k_1a_{12} = 0$, односно

$$a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0,$$

што је формула за конјуговане правце.

1.11 Површи другог реда

За сада смо испитали криве другог реда које живе у дводимензионом простору, а сада повећавамо димензију за један. ***Површ другог реда*** је скуп свих тачака (x_1, x_2, x_3) тродимензионог простора које задовољавају једначину $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, где је f полином другог степена по променљивим x_1, x_2 и x_3, односно важи

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44},$$

где постоји барем један квадратни члан, $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 > 0$. Једначина површи другог реда може се записати помоћу матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix},$$

где у матричном запису имамо

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^\intercal AX + 2B^\intercal X + a_{44} = 0.$$

По узору на теорију кривих другог реда, желимо да ротацијом исправимо површ, при чему то радимо просторном ротацијом. Алгебарски, то значи дијагонализацију симетричне матрице A, те нам је потребна спектрална теорема (Теорема А.4).

Нека је P матрица преласка са старе базе e на нову базу e' из спектралне теореме, која се састоји од јединичних сопствених вектора матрице A. Промена базе даје $e' = e \cdot P$, док се координате мењају са $X = PX'$. Израз $X^{\mathsf{T}}AX + 2B^{\mathsf{T}}X + a_{44}$ после ове трансформације постаје $(PX')^{\mathsf{T}}A(PX') + 2B^{\mathsf{T}}PX' + a_{44}$, односно $X'^{\mathsf{T}}(P^{\mathsf{T}}AP)X' + 2(B^{\mathsf{T}}P)X' + a_{44}$. Нове улоге преузимају матрице $A' = P^{\mathsf{T}}AP$ и $B'^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}P$, при чему је

$$\begin{aligned} A' &= P^{\mathsf{T}}AP = P^{\mathsf{T}}A(E_1|E_2|E_3) = P^{\mathsf{T}}(AE_1|AE_2|AE_3) \\ &= (E_1|E_2|E_3)^{\mathsf{T}}(\lambda_1 E_1|\lambda_2 E_2|\lambda_3 E_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

дијагонална матрица, где на дијагонали имамо управо сопствене вредности матрице A. На овај начин ротирали смо координатни систем што нам је омогућило да исправимо површ, те је добијена једначина облика

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + 2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3 + a_{44} = 0.$$

Аналогно свођењу криве другог реда на канонски облик, на располагању имамо и транслацију која за $i = 1, 2, 3$, уколико је $\lambda_i \neq 0$, уклања коефицијент μ_i. Наиме, због

$$\lambda_i x_i^2 + 2\mu_i x_i = \lambda_i \left(x_i + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{\mu_i^2}{\lambda_i},$$

уводимо транслацију $x_i' = x_i + \mu_i/\lambda_i$ која елиминише μ_i из будућих једначина.

Класификацију површи другог реда радимо дискусијом по рангу матрице A. Претпоставимо најпре да је $\operatorname{rang}(A) = 3$, што значи да су све сопствене вредности различите од нуле, односно $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Након одговарајуће транслације добијамо једначину облика

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + p = 0.$$

У првој варијанти, квадратни коефицијенти (односно сопствене вредности почетне матрице) су истог знака, $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\lambda_3$, те дискутујемо знак од p. Ако се он разликује, $p\lambda_1 < 0$, уводимо смене $a = \sqrt{-p/\lambda_1}$, $b = \sqrt{-p/\lambda_2}$ и $c = \sqrt{-p/\lambda_3}$, те добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1,}$$

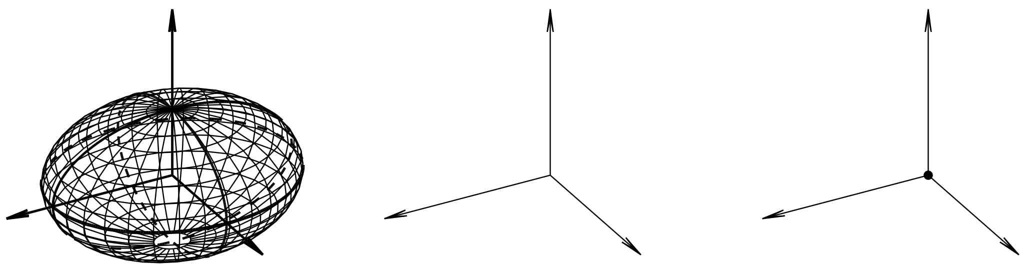
која представља ***елипсоид***. Ако су сви коефицијенти истог знака, $p\lambda_1 > 0$, тада за $a = \sqrt{p/\lambda_1}$, $b = \sqrt{p/\lambda_2}$ и $c = \sqrt{p/\lambda_3}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = -1,}$$

што је ***имагинарни елипсоид*** (празан скуп). Преостаје случај $p = 0$ који после уведених смена $a = \sqrt{\lambda_2\lambda_3}$, $b = \sqrt{\lambda_1\lambda_3}$ и $c = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ даје једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0,}$$

коју задовољава само координатни почетак, те је у питању ***тачка***.



У другој варијанти, квадратни коефицијенти нису сви истог знака, а без смањења општости можемо поставити $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = -\operatorname{sgn}\lambda_3$ јер иначе изометријом размењујемо одговарајуће координатне осе. Ако је $p\lambda_1 < 0$, за $a = \sqrt{-p/\lambda_1}$, $b = \sqrt{-p/\lambda_2}$ и $c = \sqrt{p/\lambda_3}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1,}$$

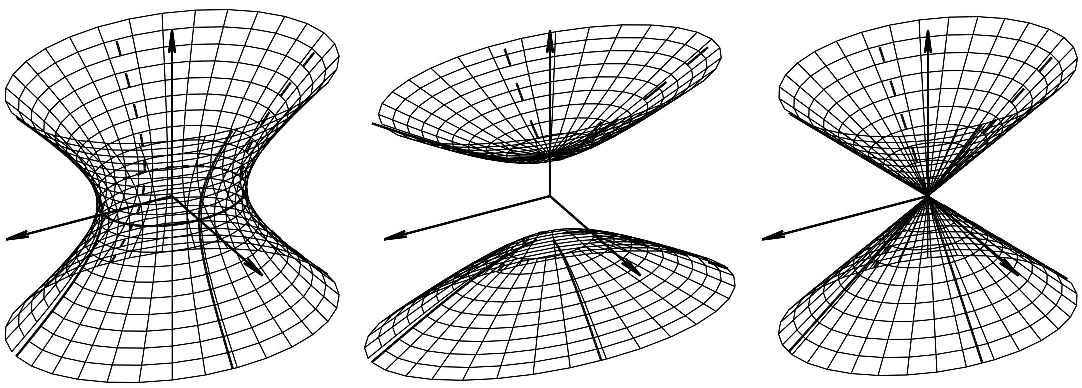
што је ***једноделни хиперболоид***. Уколико је $p\lambda_1 > 0$, за $a = \sqrt{p/\lambda_1}$, $b = \sqrt{p/\lambda_2}$ и $c = \sqrt{-p/\lambda_3}$ имамо

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1,}$$

што је ***дводелни хиперболоид***. Преостаје $p = 0$, где смене $a = \sqrt{-\lambda_2\lambda_3}$, $b = \sqrt{-\lambda_1\lambda_3}$ и $c = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ доводе до једначине

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0,}$$

која представља ***елиптички конус***.



Прелазимо на наредни велики случај, $\operatorname{rang}(A) = 2$. Не умањујући општост претпоставимо да је $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 = 0$. Претходно наведене транслације елиминисаће μ_1 и μ_2.

У првој варијанти је $\mu_3 \neq 0$, где додатна транслација $x_3' = x_3 + a_{44}/2\mu_3$ уклања слободан члан и доводи нас до једначине

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\mu_3 x_3 = 0,$$

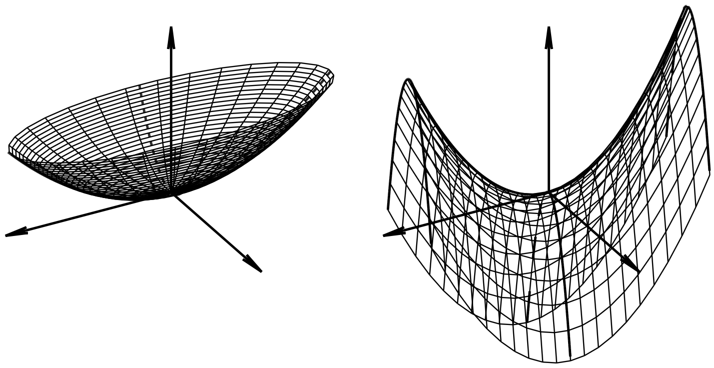
при чему додатно можемо обезбедити услов $\mu_3\lambda_1 < 0$, јер у супротном примењујемо изометрију $x_1' = x_1, x_2' = x_2, x_3' = -x_3$ која окреће смер x_3-осе. Уколико је $\lambda_1\lambda_2 > 0$, смене $a = \sqrt{-\mu_3/\lambda_1}$ и $b = \sqrt{-\mu_3/\lambda_2}$ доводе нас до једначине

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3,}$$

што је ***елиптички параболоид***. Други случај представља $\lambda_1\lambda_2 < 0$, где након смена $a = \sqrt{-\mu_3/\lambda_1}$ и $b = \sqrt{\mu_3/\lambda_2}$ добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3,}$$

што је ***хиперболички параболоид*** илити ***седло***.



У другој варијанти имамо $\mu_3 = 0$, односно једначину

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + p = 0,$$

уз $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Важно је приметити да ова једначина не садржи x_3, те смо је стога већ анализирали у класификацији кривих другог реда. Све што је било решење наше једначине у две димензије, сада се шири на трећу димензију за произвољну трећу координату, односно обухвата праве које су нормалне на Ox_1x_2 раван. Дакле, решење је цилиндрична површ (детаље можете видети у Секцији 1.12) чија је директриса већ виђена крива другог реда. Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,}$$

представља елипсу у равни, а цилиндар над елипсом је ***елиптички цилиндар***. Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1,}$$

представља имагинарну елипсу у равни, а цилиндар над тим је ***имагинарни елиптички цилиндар*** (празан скуп). Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0,}$$

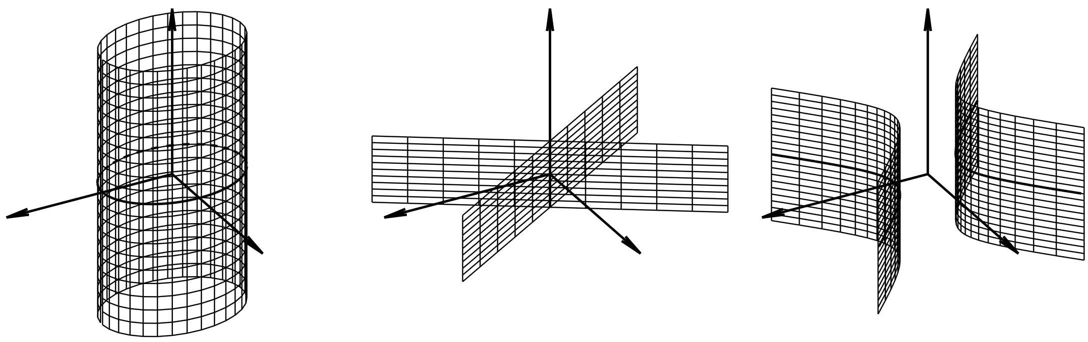
представља тачку у равни, а цилиндар над тачком је ***права***. Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0,}$$

представља две праве у равни које се секу, а цилиндар над тим су ***две равни које се секу***. Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,}$$

представља хиперболу у равни, а цилиндар над тим је ***хиперболички цилиндар***.



Преостаје да се испита последњи велики случај, $\operatorname{rang}(A) = 1$ (случај $\operatorname{rang}(A) = 0$ нема квадратне чланове, те једначина није другог степена). Овде имамо тачно једну сопствену вредност различиту од нуле, а не умањујући општост можемо претпоставити да је то λ_1. Након транслације дуж x_1-осе добијамо једначину облика

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3 + p = 0.$$

Преостаје нам да искористимо трансформације у равни Ox_2x_3, а основна идеја је да читав израз $2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3$ постане неко ново x_2 множено одговарајућим скаларом. Уколико је $\mu_2^2 + \mu_3^2 \neq 0$ у питању је ротација у равни Ox_2x_3 задата једначином

$$x_2' = \frac{\mu_2}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_2 + \frac{\mu_3}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_3,$$

односно њеним парњаком

$$x_3' = \frac{-\mu_3}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_2 + \frac{\mu_2}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_3.$$

Очигледна ротација елиминише једну од променљивих, а додатна транслација дуж преостале променљиве елиминише и слободан члан одакле је $\lambda_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_2 = 0$. Добили смо једначину облика

$$\boxed{x_1^2 = 2px_2,}$$

која представља параболу у равни, а цилиндар над тим је ***йараболички цилиндар***. Последњи случај наступа кад је $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 0$, односно кад је $x_1^2 = p$, те имамо дискусију по знаку од p. Једначина

$$\boxed{x_1^2 = a^2,}$$

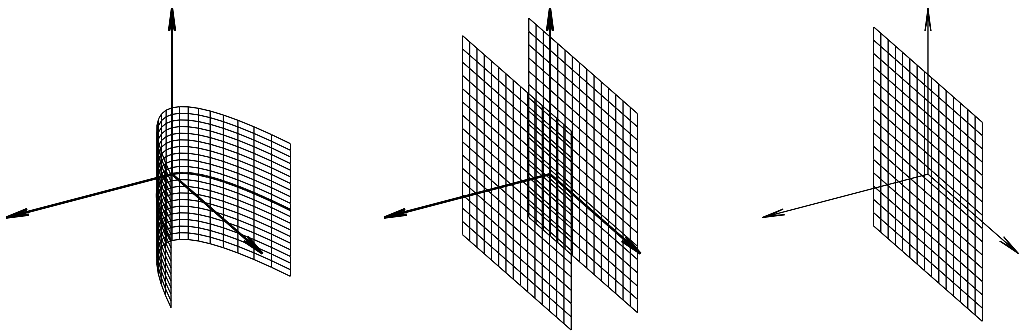
у равни представља две паралелне праве, а цилиндар над тим су ***две йаралелне равни***. Једначина

$$\boxed{x_1^2 = -a^2,}$$

у равни представља две имагинарне паралелне праве, а цилиндар над тим су ***две имаїинарне йаралелне равни*** (празан скуп). Једначина

$$\boxed{x_1^2 = 0,}$$

у равни представља праву, а цилиндар над правом је ***раван***.

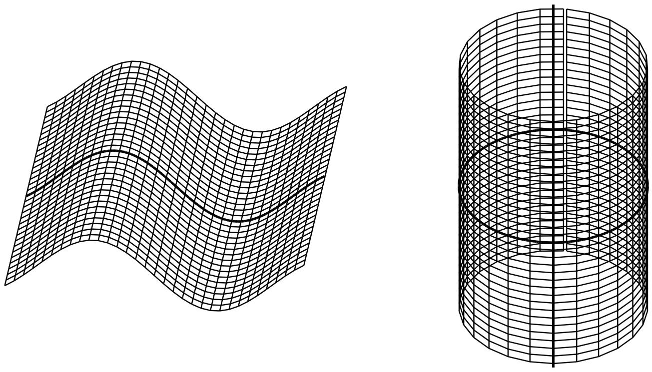


1.12 Праволинијске површи

Постоји пуно различитих начина да се направи површ у тродимензионом простору. ***Праволинијске површи*** су површи које можемо видети као унију правих, односно за њих важи да кроз сваку тачку површи пролази нека права која лежи на тој површи. Уобичајено постоји нека просторна крива коју зовемо ***директриса***, по којој се крећу праве које зовемо ***изводнице*** или ***генератрисе***, а праволинијска површ може се описати као скуп свих тачака које припадају тим изводницама.

Уколико изводница, крећући се по директриси све време остаје паралелна самој себи, онда она описује ***цилиндричну површ*** или ***цилиндар***. Дакле, цилиндар образује кретање неке праве која задржава фиксиран правац и при том сече директрису. Цилиндар је зато унија паралелних правих, а најчешће се за директрису узима крива која лежи у равни која није паралелна изводницама.

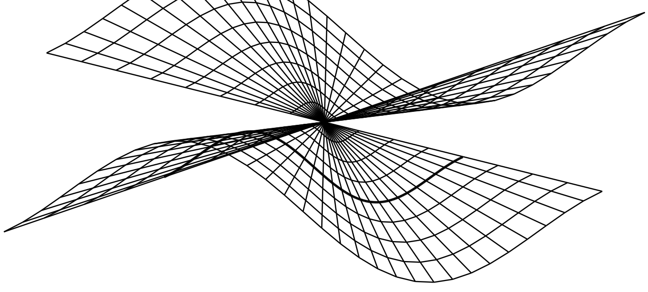
Приметимо да свака крива у равни дата једначином $f(x_1, x_2) = 0$ има одговарајућу цилиндричну површ која је дата том истом једначином у простору. Такав цилиндар за директрису има ту почетну криву, док су изводнице паралелне x_3-оси. Уколико за директрису поставимо елипсу, параболу или хиперболу, за цилиндричне површи редом добијамо елиптички цилиндар, параболички цилиндар или хиперболички цилиндар, што смо видели у класификацији површи другог реда.

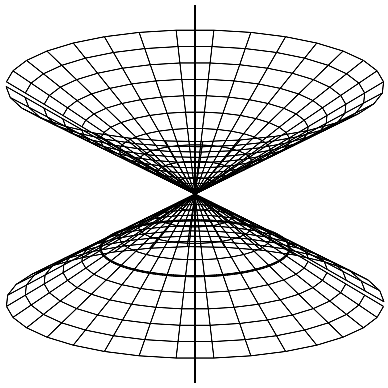


Посебан случај цилиндра је ***прави кружни цилиндар*** који добијамо ротацијом праве око њој паралелне праве. Карактерише га то да у пресеку са равни која је нормална на изводнице добијамо круг. За разлику од општег цилиндра, прави кружни цилиндар (као ротациона површ) има осу, те се у њега може уписати сфера. У питању је скуп свих тачака које су подједнако удаљене од његове осе, те нам од помоћи може бити Теорема 1.13. На пример, прави кружни цилиндар који има осу s (која садржи тачку S и има правац $\overrightarrow{u_s}$) и садржи тачку M, може се описати као скуп свих тачака X за које важи

$$\|\overrightarrow{SX} \times \overrightarrow{u_s}\| = \|\overrightarrow{SM} \times \overrightarrow{u_s}\|.$$

Уколико изводница, крећући се по директриси све време пролази кроз неку унапред фиксирану тачку, онда она описује ***конусну површ*** или ***конус***. Та заједничка тачка свих изводница зове се ***врх*** или ***теме*** конуса, а можемо рећи да је цилиндар специјални случај конуса који има врх у бесконачности.





Посебан случај конуса је прави кружни конус који добијамо ротацијом једне праве око друге, при чему се те праве секу под оштрим углом, а с њим смо се већ упознали у Секцији 1.7. За разлику од општег конуса, прави кружни конус има осу, а у пресеку са равни која је нормална на осу добијамо круг, те се у њега може уписати сфера.

Прави кружни конус је унија правих које у врху секу осу под константним углом. Међутим, да бисмо извели једначине, најзгодније је посматрати неку тачку S са осе, која је различита од врха V, те прави кружни конус описати као унију правих које пролазе кроз V, а које су на константном растојању од тачке S. Ако тај конус садржи тачку M, тада се скуп свих њених тачака X, захваљујући Теореми 1.13, односно површини троугла VSX, може изразити једначином

$$\frac{\|\overrightarrow{VS} \times \overrightarrow{VX}\|}{\|\overrightarrow{VX}\|} = \frac{\|\overrightarrow{VS} \times \overrightarrow{VM}\|}{\|\overrightarrow{VM}\|}.$$

Вратимо се на општи конус, где кад за директрису узмемо елипсу добијамо елиптички конус из класификације површи другог реда. Међутим, у класификацији нисмо видели параболички конус нити хиперболички конус, али то не значи да се неки од њих не крије тамо под другим именом. Ако за директрису узмемо неку криву другог реда, а врх не припада равни у којој се та крива налази, природно се поставља питање да ли ће одговарајући конус бити површ другог реда.

Размотримо како израчунати једначину конуса. Многе рачунске главобоље можемо избећи тако што врх транслирамо у координатни почетак, $V(0,0,0)$. Такође, раван τ у којој се налази директриса можемо заротирати тако да буде нормална на x_3-осу, те имамо једначине директрисе $f(x_1, x_2) = 0$, $x_3 = c$, где је $c = d(V, \tau) > 0$. За произвољну тачку $X(x_1, x_2, x_3)$ конуса постоји изводница кроз њу, која пролази кроз врх V и сече директрису у некој тачки $U(u_1, u_2, c)$, где је $f(u_1, u_2) = 0$. Колинеарност тачака V, X, U повлачи сразмерност вектора $\overrightarrow{VX}$ и $\overrightarrow{VU}$, одакле постоји скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ такав да имамо $(x_1, x_2, x_3) = \lambda(u_1, u_2, c)$. Одавде је $\lambda = x_3/c$, те за $x_3 \neq 0$ важи $u_1 = cx_1/x_3$ и $u_2 = cx_2/x_3$, што даје једначину конуса $f(cx_1/x_3, cx_2/x_3) = 0$. Ако је директриса крива другог реда, f је полином другог степена, и конус је одређен једначином

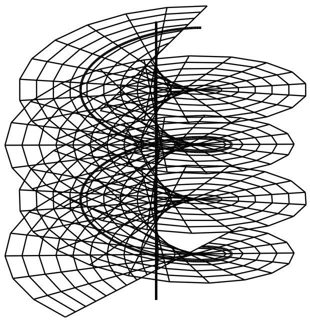
$$\frac{a_{11}c^2x_1^2 + 2a_{12}c^2x_1x_2 + a_{22}c^2x_2^2 + 2a_{13}cx_1x_3 + 2a_{23}cx_2x_3 + a_{33}x_3^2}{x_3^2} = 0.$$

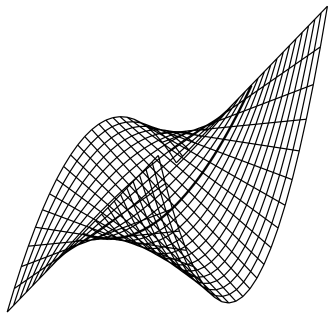
Након множења са x_3^2 заиста добијамо полином другог степена, односно једначину површи другог реда. Међутим, могуће је да услов $x_3 = 0$ искључи неке од правих, тако да је овакав конус само подскуп неке површи другог реда.

На пример, ако је директриса парабола или хипербола, одговарајућа једначина конуса након множења са x_3^2 биће једначина елиптичког конуса. Да би било јасније погледајмо геометријску интерпретацију овог феномена. Ако елиптички конус засечемо са равни тако да у пресеку добијемо параболу или хиперболу, а онда тај пресек узмемо за директрису конуса, при чему врх задржимо, добијамо нови конус који је очигледно подскуп почетног елиптичког конуса. Разлика је у томе што праве које се налазе у равни која садржи врх и паралелна је пресечној равни, никако не могу пресећи директрису, тако да оне нису укључене у нови конус. У случају параболе у питању је једна права, док у случају хиперболе постоје две такве праве. Дакле, параболички конус је елиптички конус без једне праве, док хиперболичком конусу фале две праве да би постао елиптички конус.

Још један од начина да се направи праволинијска површ је да осим директрисе фиксирамо праву коју зовемо ***оса*** и раван коју зовемо ***директорна раван***. Све тачке са правих које секу и осу и директрису, али тако да су паралелне директорној равни формирају површ коју зовемо ***коноидна површ*** или ***коноид***. За коноид кажемо да је ***прави коноид*** уколико му је оса нормална на директорну раван.

На пример, ако за директрису узмемо хеликс, као завојницу која је параметарски описана тачкама $(a\cos t, a\sin t, vt)$ за $t \in \mathbb{R}$, где су v и a фиксирани ненула скалари, а за осу x_3-осу, онда је одговарајући прави коноид површ коју зовемо ***хеликоид***. Параметарске једначине тог хеликода су $x_1 = r\cos t$, $x_2 = r\sin t$, $x_3 = vt$ за $t, r \in \mathbb{R}$.





Други пример добијамо ако поставимо параболу $x_3 = -x_2^2$, $x_1 = 1$ за директрису, док за осу узмемо x_2-осу. Параметарска репрезентација даје

$$X(u, v) = (1, u, -u^2) + v(-1, 0, u^2) = (1 - v, u, -(1 - v)u^2)$$

за $u, v \in \mathbb{R}$, што се може описати једначином $x_3 = -x_1 x_2^2$ и представља ***параболички коноид***.

Хеликоид и параболички коноид очигледно нису површи другог реда, али као коноиди свакако јесу праволинијске. Природно се поставља питање које од површи другог реда јесу праволинијске. Елиптички конус, као и сви могући цилиндри свакако јесу праволинијске површи. Са друге стране, за елипсоид, елиптички параболоид и дводелни хиперболоид постоји раван која их не сече, тако да оне очигледно нису праволинијске површи.

Преостају једноделни хиперболоид и хиперболички параболоид као најзанимљивији случајеви. Испоставља се да они не само да јесу праволинијске већ су двоструко праволинијске, односно кроз сваку тачку површи постоје две праве које леже на површи.

Погледамо како то рачунски изгледа. Пођимо од канонске једначине једноделног хиперболоида, која се лако може трансформисати у облик

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = \left(1 - \frac{x_2}{b}\right)\left(1 + \frac{x_2}{b}\right).$$

Одавде за свако $t \in \mathbb{R}$ имамо две линеарне једначине,

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c} = t\left(1 - \frac{x_2}{b}\right), \quad t\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = 1 + \frac{x_2}{b},$$

које испуњавају претходну канонску једначину. Геометријски то значи да пресечна права равни које одређују наше линеарне једначине лежи на једноделном хиперболоиду. За произвољну тачку $U(u_1, u_2, u_3)$, постоји јединствено t за које права из наше фамилије садржи U, а одређено је са

$$t = \left(\frac{u_1}{a} - \frac{u_3}{c}\right) : \left(1 - \frac{u_2}{b}\right) \quad \text{или} \quad t = \left(1 + \frac{u_2}{b}\right) : \left(\frac{u_1}{a} + \frac{u_3}{c}\right),$$

осим у случају $1 - u_2/b = 0 = u_1/a + u_3/c$ кад U припада правој са хиперболоида $1 - x_2/b = 0 = x_1/a + x_3/c$. Дакле, за сваку тачку са површи постоји одговарајућа права са површи која је наведеног типа. Сасвим слично можемо направити фамилију

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c} = t\left(1 + \frac{x_2}{b}\right), \quad t\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = 1 - \frac{x_2}{b},$$

где такође постоји јединствена права која садржи U или је то $1 + x_2/b = 0 = x_1/a + x_3/c$, што доказује да је једноделни хиперболоид двоструко праволинијска површ.

Случај хиперболичког параболоида се слично решева, јер се његова канонска једначина може трансформисати у

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 2x_3.$$

Одавде се могу направити две фамилије правих, прва

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 2t, \quad t\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = x_3,$$

и друга

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = tx_3, \quad t\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 2,$$

а као и раније, за произвољну тачку са површи у свакој од фамилија имамо јединствену праву која је садржи (или је то у другом случају права $x_3 = 0 = x_1/a + x_2/b$), те је и хиперболички параболоид двоструко праволинијска површ.

1.13 Сферна геометрија

Сферна геометрија је геометрија на дводимензионој површи сфере, а практичну примену има у навигацији и астрономији. Сферна геометрија илуструје математику коју би поседовала бића која живе на сфери. На пример, растојање између две тачке на сфери неће бити просто еуклидско растојање, већ дужина најкраће криве на сфери која повезује те две тачке.

Уколико посматрамо раван и сферу, постоји неколико могућности за њихов међусобни положај. У крајње неинтересантном случају раван ће промашити сферу. У супротном, раван и сфера имају заједничких тачака, где је прва могућност да се ради о само једној заједничкој тачки и тада је у питању тангентна раван на сферу. Преостаје могућност када се раван и сфера секу по кругу. Лако је приметити да је пресечни круг највећи када раван пролази кроз центар сфере. Такав круг са сфере, чији се центар поклапа са центром сфере, зовемо ***велики круг***. Географски примери су меридијани који су половине великог круга, док су све паралеле мали кругови, осим екватора који јесте велики круг.

Велики кругови добијају на значају када схватимо да се најкраће растојање између две тачке на сфери реализује баш по луку великог круга који их спаја. Криве на површи које минимизују растојања у геометрији се називају ***геодезијске***, те тако можемо рећи да су праве геодезијске у равни, а велики кругови геодезијске на сфери. Основни концепти у раванској геометрији су тачке и праве. Како на сфери немамо праве као такве, велики кругови као геодезијске су адекватна замена за њих.

Посматрамо најједноставнију сферу у тродимензионом простору, сферу полупречника један, са центром у координатном почетку,

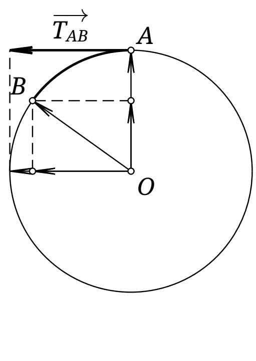
$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Сваку тачку са сфере $X \in \mathbb{S}^2$ можемо поистоветити са њеним вектором положаја у односу на центар сфере и уједно координатни почетак O, што је јединични вектор $\overrightarrow{OX}$. ***Сферни троугао*** ABC представљају тачке $A, B, C \in \mathbb{S}^2$, при чему захтевамо да су њихови вектори положаја, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ линеарно независни.

Разлог због којег уводимо овај додатни услов линеарне независности је да избегнемо двосмислености. Наиме, уколико су вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ линеарно зависни, то су тачке O, A, B, C копланарне, одакле следи да A, B, C припадају неком великом кругу. Аналогија са раванском геометријом је та да не можемо говорити о троуглу ABC уколико су тачке колинеарне.

За тачке A, B и C кажемо да су ***темена*** сферног троугла ABC. Важно је приметити да међу теменима нема антиподалних (дијаметрално супротних) тачака, јер ако су A и B антиподалне, то важи $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$, из чега следи линеарна зависност наших вектора положаја, што се коси са дефиницијом. То нам омогућава да једнозначно дефинишемо ***странице*** сферног троугла као краће лукове великих кругова који спајају темена. Дужине страница можемо обележити са $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{AC}$ и $c = \widehat{AB}$, а свакако важи $a, b, c \in (0, \pi)$.

Угао између страница сферног троугла природно је угао између одговарајућих тангенти у теменима. Покушајмо да одредимо тангенту у тачки A на страницу $\widehat{AB}$, односно да изразимо вектор $\overrightarrow{T_{AB}}$ који је нормалан на $\overrightarrow{OA}$ и налази се у равни великог круга OAB. Једнозначну одређеност му можемо дати условом да је јединичан и „усмерен ка B“, односно да је угао који заклапа са $\overrightarrow{OB}$ оштар.



Први корак Грам-Шмитовог процеса ортогонализације директно одређује тражени вектор

$$\overrightarrow{T_{AB}} = \frac{\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}\|}. \tag{1.48}$$

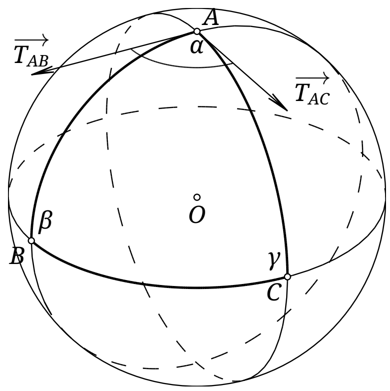
Како су вектори положаја $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ јединични имамо

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \cos \measuredangle AOB = \cos \widehat{AB}, \tag{1.49}$$

те проверавамо да ли $\overrightarrow{T_{AB}}$ испуњава наметнуте услове. Очигледно је $\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}$ нормалан на $\overrightarrow{OA}$ (скаларни производ нула) и припада равни OAB (као линеарна комбинација $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$). Како је $\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA})=1-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2=1-\cos^2\widehat{AB}>0$, то $\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}$ са $\overrightarrow{OB}$ заклапа оштар угао, а дељењем са његовом нормом добијамо јединични вектор $\overrightarrow{T_{AB}}$ који смо тражили. На овај начин долазимо до углова сферног троугла ABC које дефинишемо са

$$\alpha=\measuredangle\widehat{BAC}=\measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}},\overrightarrow{T_{AC}}),\quad \beta=\measuredangle\widehat{ABC}=\measuredangle(\overrightarrow{T_{BA}},\overrightarrow{T_{BC}}),\quad \gamma=\measuredangle\widehat{ACB}=\measuredangle(\overrightarrow{T_{CA}},\overrightarrow{T_{CB}}),$$

при чему такође важи $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$.



Везе између страница и углова сферног троугла можемо добити ако пажљиво размотримо тангентни вектор $\overrightarrow{T_{AB}}$ из формуле (1.48). Из формуле (1.49) смо имали $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\widehat{AB}$, одакле добијамо

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}\|^2&=\|\overrightarrow{OB}-\cos\widehat{AB}\cdot\overrightarrow{OA}\|^2\\&=\|\overrightarrow{OB}\|^2-2\cos\widehat{AB}(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA})+\cos^2\widehat{AB}\cdot\|\overrightarrow{OA}\|^2\\&=1-2\cos^2\widehat{AB}+\cos^2\widehat{AB}=1-\cos^2\widehat{AB}=\sin^2\widehat{AB}.\end{aligned}$$

Како је $\widehat{AB}\in(0,\pi)$, имамо $\sin\widehat{AB}>0$ и отуда $\|\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}\|=\sin\widehat{AB}$. Одавде једначина (1.48) постаје

$$\overrightarrow{T_{AB}}=\frac{\overrightarrow{OB}-(\cos\widehat{AB})\overrightarrow{OA}}{\sin\widehat{AB}},$$

одакле добијамо

$$\overrightarrow{OB}=(\cos\widehat{AB})\overrightarrow{OA}+(\sin\widehat{AB})\overrightarrow{T_{AB}}.$$

Сасвим слично (рецимо пермутацијом темена) важи и

$$\overrightarrow{OC}=(\cos\widehat{AC})\overrightarrow{OA}+(\sin\widehat{AC})\overrightarrow{T_{AC}}.$$

Скаларним множењем ових једначина добијамо

$$\cos\widehat{BC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=((\cos\widehat{AB})\overrightarrow{OA}+(\sin\widehat{AB})\overrightarrow{T_{AB}})\cdot((\cos\widehat{AC})\overrightarrow{OA}+(\sin\widehat{AC})\overrightarrow{T_{AC}}),$$

те како је $\overrightarrow{OA}$ ортогонално и на $\overrightarrow{T_{AB}}$ и на $\overrightarrow{T_{AC}}$ добијамо

$$\cos\widehat{BC}=(\cos\widehat{AB})(\cos\widehat{AC})\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+(\sin\widehat{AB})(\sin\widehat{AC})\overrightarrow{T_{AB}}\cdot\overrightarrow{T_{AC}}.$$

Како је $\overrightarrow{T_{AB}}\cdot\overrightarrow{T_{AC}}=\|\overrightarrow{T_{AB}}\|\cdot\|\overrightarrow{T_{AC}}\|\cdot\cos\measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}},\overrightarrow{T_{AC}})=\cos\measuredangle\widehat{BAC}$ коначно добијамо ***основну теорему сферне геометрије*** у виду формуле

$$\cos\widehat{BC}=\cos\widehat{AB}\cos\widehat{AC}+\sin\widehat{AB}\sin\widehat{AC}\cos\measuredangle\widehat{BAC}.$$

Основна теорема сферне геометрије је пандан косинусној теореми еуклидске геометрије, те и њу можемо звати ***косинусна теорема***. Ако искористимо раније уведене ознаке за странице и углове сферног троугла, косинусну теорему можемо записати на следећи начин.

Теорема 1.18. *За сферни троугао важи* $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.

Симпатично је уочити пандан Питагорине теореме који наступа у случају да је угао α прав и тада је $\cos a = \cos b \cos c$.

Да бисмо пронашли пандан који одговара синусној теореми, из косинусне теореме можемо изразити угао,

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

а затим израчунати

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha &= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c},\end{aligned}$$

одакле је

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}.$$

Како је десна страна израза симетрична по a, b и c, то добијамо ***синусну теорему*** за сферни троугао.

Теорема 1.19. *За сферни троугао важи* $\dfrac{\sin a}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin \beta} = \dfrac{\sin c}{\sin \gamma}$.

Алтернативни доказ синусне теореме можемо добити тако што на геометријски начин изразимо угао $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}}, \overrightarrow{T_{AC}})$. Посматрајмо угао $\measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})$. Вектори $\overrightarrow{T_{AB}}$, $\overrightarrow{T_{AC}}$, $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ су очигледно нормални на $\overrightarrow{OA}$ и зато припадају једној равни, на пример тангентној равни у тачки A на сферу. Са друге стране $\overrightarrow{T_{AB}}$ припада равни OAB и самим тим нормалан је на $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$, а сасвим слично $\overrightarrow{T_{AC}}$ припада равни OAC и нормалан је на $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$. Закључујемо да су $\measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}}, \overrightarrow{T_{AC}})$ и $\measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})$ углови са нормалним крацима у једној равни, те су они једнаки или суплементни, и зато имају једнаке синусе

$$\sin \measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}}, \overrightarrow{T_{AC}}) = \sin \measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}).$$

Посматрајмо сада вектор $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})$. Ако двоструки векторски производ рачунамо по формули (1.24) Теореме 1.11 добијамо

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) &= (\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}))\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}))\overrightarrow{OA} \\ &= -[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}]\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Овако можемо израчунати његову норму, $\|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})\| = |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \mathcal{V}$, где је $\mathcal{V}$ запремина паралелепипеда који је генерисан векторима $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Са друге стране, норму векторског производа можемо рачунати са

$$\|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})\| = \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| \cdot \|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})\| \cdot \sin \measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}).$$

Како је $\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OA}\|\cdot\|\overrightarrow{OB}\|\cdot\sin\widehat{AB} = \sin\widehat{AB}$ и $\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\| = \sin\widehat{AC}$, то обједињавањем са претходним добијамо

$$\mathcal{V} = \|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\times(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})\| = \sin\widehat{AB}\sin\widehat{AC}\sin\measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}},\overrightarrow{T_{AC}}).$$

Ако пређемо на скраћене ознаке за странице и углове сферног троугла имамо

$$\mathcal{V} = \sin c\sin b\sin\alpha,$$

а како се $\mathcal{V}$ не мења пермутовањем темена, то одмах можемо дописати још две једначине

$$\mathcal{V} = \sin a\sin c\sin\beta,$$
$$\mathcal{V} = \sin b\sin a\sin\gamma,$$

те изједначавањем добити већ изведену синусну теорему за сферни троугао.

Размотримо поново основну теорему сферне геометрије, односно косинусну теорему (Теорема 1.18),

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha.$$

Није тешко приметити да се у њој крију адиционе тригонометријске формуле, како за косинус збира, тако и за косинус разлике, што нас мотивише да запишемо

$$\cos a = \cos(b+c) + \sin b\sin c(\cos\alpha + 1),$$
$$\cos a = \cos(b-c) + \sin b\sin c(\cos\alpha - 1).$$

Како је $\sin b > 0$, $\sin c > 0$, $(\cos\alpha + 1) > 0$ и $(\cos\alpha - 1) < 0$, то из претходних једначина важе неједнакости

$$\cos(b+c) < \cos a < \cos(b-c).$$

Функција cos је опадајућа на интервалу $(0,\pi)$, тако да у случају $b + c \leqslant \pi$ добијамо $b + c > a$. Наравно, неједнакост $b + c > a$ важи и у преосталом случају $b + c > \pi$ јер је свакако $a < \pi$. Са друге стране је $|b - c| \in (0,\pi)$, те како је функција cos ту опадајућа, следи $|b - c| < a$. Добијене неједнакости можемо објединити са

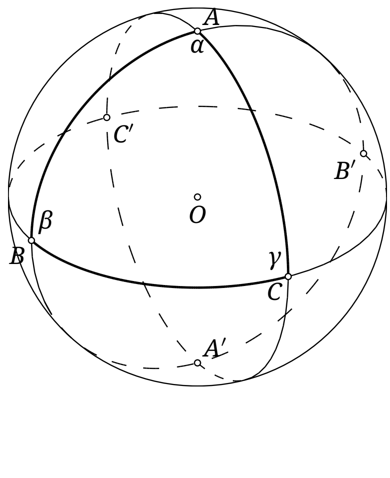
$$|b-c| < a < b + c,$$

што представља ***неједнакост троугла*** у изворном облику.

Сасвим слично, из $\cos(b+c) < \cos a = \cos(2\pi - a)$ можемо закључити да важи $b + c < 2\pi - a$ јер косинус расте на $(\pi, 2\pi)$, док за $b + c < \pi$ неједнакост сама по себи важи. На овај начин добили смо неједнакост за збир страница у сферном троуглу,

$$a + b + c < 2\pi.$$

На сфери можемо рачунати површине неких једноставних фигура. ***Сферни двоугао*** је фигура на сфери која је ограничена са два велика полукруга који су под углом θ. Читава сфера је двоугао за угао $\theta = 2\pi$, а знамо да њена површина износи $\mathcal{P}(2\pi) = 4\pi$. Како је површина сферног двоугла $\mathcal{P}(\theta)$ директно сразмерна углу θ, лако можемо закључити да је коефицијент сразмерности једнак 2, односно $\mathcal{P}(\theta) = 2\theta$.



Посматрајмо сферни троугао ABC и три велика круга који одређују његове странице. Ако у игру укључимо одговарајуће антиподалне тачке A', B', C' видимо да велики кругови деле читаву сферу на 8 области, односно 8 сферних троуглова: $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, $\triangle AB'C$, $\triangle ABC'$, $\triangle A'B'C$, $\triangle A'BC'$, $\triangle AB'C'$, $\triangle A'B'C'$. Ако искористимо везе са двоугловима,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle A'BC) &= \mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}(\triangle AB'C') + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'),\\
\mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle AB'C) &= \mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(\triangle A'BC') + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'),\\
\mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle ABC') &= \mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}(\triangle A'B'C) + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'),
\end{aligned}$$

након сумирања добијамо

$$2\mathcal{P}(\alpha) + 2\mathcal{P}(\beta) + 2\mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}(2\pi) + 2\mathcal{P}(\triangle ABC) + 2\mathcal{P}(\triangle A'B'C').$$

Применом формуле $\mathcal{P}(\theta) = 2\theta$ и захваљујући томе што су антиподални троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ подударни, те истих површина, имамо $4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4\mathcal{P}(\triangle ABC)$, односно

$$\mathcal{P}(\triangle ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Напоменимо да је ову формулу још 1603. године открио Томас Хериот[6]. Како је површина троугла увек позитивна, директна последице је да збир углова у сферном троуглу увек мора бити већи од π,

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Ако пођемо од произвољног сферног троугла ABC, можемо конструисати нови сферни троугао који је блиско повезан са њим на следећи начин. Знамо да велики круг који спаја темена B и C дели сферу на две хемисфере, од којих једна садржи теме A, а пол те хемисфере означимо са A'. Дакле, уколико је велики круг кроз B и C екватор, а теме A на северној хемисфери, онда је A' северни пол, а слично можемо дефинисати тачке B' и C'. За нови троугао $A'B'C'$ кажемо да је ***поларан*** троуглу ABC, а наведене релације можемо записати на следећи начин,

$$\begin{aligned}
\widehat{A'A} &< \pi/2, & \widehat{A'B} &= \pi/2, & \widehat{A'C} &= \pi/2,\\
\widehat{B'A} &= \pi/2, & \widehat{B'B} &< \pi/2, & \widehat{B'C} &= \pi/2,\\
\widehat{C'A} &= \pi/2, & \widehat{C'B} &= \pi/2, & \widehat{C'C} &< \pi/2,
\end{aligned}$$

које га једнозначно одређују. Из симетрије претходних једначина лако можемо закључити да важи и обрат, односно да је троугао ABC поларан троуглу $A'B'C'$.

Испоставља се да су странице поларног троугла у блиској вези са угловима оригиналног троугла. Посматрајмо пресек $\widehat{B'C'}$ са великим круговима одређеним луковима $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$ и нека су то тачке D и E. Приметимо да важи $\alpha = \widehat{DE}$, као и $\widehat{DC'} = \pi/2$, $\widehat{EB'} = \pi/2$. Сада је $a' = \widehat{B'C'} = \widehat{EB'} + \widehat{DC'} - \widehat{DE} = \pi - \alpha$. То можемо извести за све странице поларног троугла, као и обратно јер је поларан троугао поларном троуглу онај оригиналан, што нам даје следеће везе:

$$\alpha + a' = \beta + b' = \gamma + c' = \alpha' + a = \beta' + b = \gamma' + c = \pi.$$

Изведене једначине за поларни троугао омогућавају да из већ познатих једнакости и неједнакости добијамо нове. На пример, изведене неједнакости $a + b + c < 2\pi$ и $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ су еквивалентне. Такође можемо погледати суплемент косинусне теореме која сада гласи

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

[6] Thomas Harriot (1560–1621), енглески астроном и математичар

Глава 2

ПРОЈЕКТИВНА ГЕОМЕТРИЈА

Пројективна геометрија проистекла је из практичног проблема геометријске (линеарне) перспективе у уметности, а која подразумева цртање илузије просторне дубине, онако како то реално видимо. Геометријска перспектива заснива се на природном закону да се удаљавањем од посматрача ликови смањују сразмерно удаљености. И математичари и уметници били су заинтересовани за принципе ове технике, те су почели да изучавају основе које стоје иза њих. Уметници су били заинтересовани за паралелне праве које конвергирају и секу се у недогледу, док је математичаре занимала теорија која ће обухватити те принципе.

Пројективна геометрија вуче корене из ране ренесансе у Италији, када је откривена геометријска перспектива, што је оставило далекосежне последице на развој сликарства ренесансе. За изумитеља геометријске перспективе сматра се Брунелески[1], али заслуге носи и његов савременик Алберти[2] који је анализирао природу сликања и истраживао елементе перспективе и композиције.

Дезарга можемо сматрати оснивачем пројективне геометрије. Он је увео појам бесконачно далеке тачке, иако се тај појам независно појавио раније код Кеплера[3] у [45, стр. 93]. Дезарг је написао књигу о перспективи, као и књигу о конусним пресецима [22], а поставио је и славну теорему која носи његово име. Његов рад на коникама утицао је на Паскала[4] да као шеснаестогодишњак постави веома значајну теорему. Приличан допринос пројективној геометрији 17. века дао је и Ла Ир[5].

Дезаргова књига о конусним пресецима [22] сматра се за његову најважнију књигу, као и за прву књигу из пројективне геометрије уопште. Она није била намењена продаји, штампана је у само 50 примерака који су били подељени његовим пријатељима, али су убрзо ишчезли. Било је потребно да прође два века да једна од копија (коју је направио Ла Ир) буде поново пронађена. Додатно, Дезарговом раду је недостајала јасноћа изражавања, тако да многи нису могли у потпуности да разумеју његове идеје. Бољем разумевању свакако није допринело то што је уместо многих математичких термина користио ботаничке изразе (палма, стабло, дрво, пањ, …[18]). Све то утицало је да Дезаргов рад не буде превише цењен ван круга његових пријатеља и колега. Кад ту додамо успешан развој аналитичке геометрије и заокупљеност математичара овом дисциплином, не чуди превише што је пројективна геометрија остала нетакнута више од века.

За даљи развој пројективне геометрије заслужан је Монж[6] који је крајем 18. века издвојио нацртну геометрију као посебну математичку дисциплину и може се ре-

[1]Filippo Brunelleschi (1377–1446), италијански архитекта, вајар и инжењер
[2]Leon Battista Alberti (1404–1472), италијански архитекта, сликар и филозоф
[3]Johannes Kepler (1571–1630), немачки астроном и математичар
[4]Blaise Pascal (1623–1662), француски математичар, физичар и филозоф
[5]Philippe de La Hire (1640–1718), француски математичар и астроном
[6]Gaspard Monge (1746–1818), француски математичар

ћи да је био први прави геометричар. Почетак 19. века донео је буђење и успон пројективне геометрије. Како наш визуелни свет има геометрију ближу пројективном неголи еуклидском простору, математичари су почели све више да верују у бесконачно далеке тачке, доживљавајући основне концепте геометрије као пројективне. Лепота и елеганција пројективне геометрије постепено је привукла геометричаре, који су похрлили у ту златну ризницу и брзо извукли најприступачније драгоцености. Неочекиване и заборављене геометријске идеје које су датирале из 17. века, али и оне из античког доба попут Папосове[7] теореме, поново су откривене и дубље истраживане.

Оснивач модерне пројективне геометрије био је Понселе[8], који је преузео идеје свог учитеља Монжа и разрадио их на вишем апстрактном нивоу. Он је 1822. године у свом чувеном *Трактату* [64] изучавао особине које остају инваријантне под пројекцијама, а његов рад садржи све основне идеје карактеристичне за пројективну геометрију, као што су хармонијска четворка, перспективитети, пројективитети, инволуција, а такође је увео бесконачно далеку праву дуж које се секу међусобно паралелне праве.

Пројективна геометрија постала је синоним за модерну геометрију 19. века, а у почетним деценијама главне улоге играли су геометричари из Француске и Немачке. Поред Понселеа, француску школу пројективних геометричара заступали су Карно[9], Сервоа[10], Жергон[11], Бријаншон[12] и Шал[13], док су Немачку представљали Мебијус[14], Штајнер[15], Пликер[16] и Штаут[17].

Значајна ствар у пројективној геометрији збила се касних двадесетих година 19. века када су уведене хомогене координате, за шта су сасвим независно заслужни Мебијус, Фојербах[18], Бобијије[19] и Пликер. Хомогене координате и њихова предност да лепо представљају бесконачно далеке тачке, омогућило је плодну примену аналитичке методе у пројективној геометрији. Пројективној геометрији тако се могло приступити на два начина, аналитички и синтетички.

Аналитичари су радо употребљавали аналитичке и алгебарске технике из других области математике, док су геометријске релације изражавали преко координата и једначина. Уводне радове у аналитичку пројективну геометрију дали су Мебијус и Пликер, а поред њих, у групу геометричара који су фаворизовали аналитички приступ спадају Шал, Кејли[20] и Салмон[21].

Синтетичари су били инспирисани Аполонијем[22] и заступали чисто геометријске методе. Водич им је била интуиција, а логика инструмент за строго формално резоновање, док су избегавали алгебру и мерења. Водећи геометричари који су фаворизовали синтетички приступ били су Понселе, Карно, Штајнер, Штаут и Кремона[23]. Штајнер је проучивши сву тада постојећу литературу у Европи, систематски и

[7]Папос из Александрије, Πάππος (3. век н.е.), грчки математичар
[8]Jean-Victor Poncelet (1788–1867), француски инжењер и математичар
[9]Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823), француски политичар, инжењер и математичар
[10]Francois-Joseph Servois (1767–1847), француски свештеник и математичар
[11]Joseph Diaz Gergonne (1771–1859), француски математичар
[12]Charles Julien Brianchon (1783–1864), француски математичар и хемичар
[13]Michel Chasles (1793–1880), француски математичар
[14]August Ferdinand Möbius (1790–1868), немачки математичар
[15]Jakob Steiner (1796–1863), швајцарски математичар
[16]Julius Plücker (1801–1868), немачки математичар и физичар
[17]Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867), немачки математичар
[18]Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834), немачки математичар
[19]Étienne Bobillier (1798–1840), француски математичар
[20]Arthur Cayley (1821–1895), британски математичар
[21]George Salmon (1819–1904), ирски математичар и теолог
[22]Аполоније из Пергама, Ἀπολλώνιος (3. век п.н.е.), грчки математичар и астроном
[23]Luigi Cremona (1830–1903), италијански математичар

синтетички изградио пројективну геометрију и поставио јој темеље као самосталној науци. Након тога, Штаут [71] је у потпуности прихватио строги приступ и покушао да теорију заснује само на аксиомама инциденције, док су његови претходници говорили о метрици, угловима и другим објектима који немају улогу у пројективној геометрији.

Шал, који се није либио да користи аналитички приступ и суштински био аналитичар, бранио је синтетички приступ. За њега се може рећи да је мислио аналитички, али је своје доказе излагао геометријски, што је био комбиновани приступ који су касније употребљавали и други математичари [46, стр. 850]. У комбиновани метод можемо укључити и оригиналност коју је испољио Ли[24], који је мислио синтетички док је резултате желео да презентује аналитички [73, стр. 54].

Еуклидови *Елементи* били су прва аксиоматизација математике. Међутим, тек пред крај 19. века, они су доживели строге преправке које су попуниле многе рупе у дефиницијама и доказима. Највећи утицај на математичку јавност у области аксиоматике остварио је Хилберт[25], написавши *Основе геометрије* [41]. Крајем 19. века развој пројективне геометрије био је готово потпуно заокружен захваљујући радовима које су дали Фано[26] и Пјери[27], а у којима су аксиоматски засновали пројективну геометрију по узору на Штаута.

За даље читање и продубљивање знања и историје пројективне геометрије препоручујемо следеће ауторе: Коксетер[28] [20], Хјуз[29] и Пајпер[30] [42], Хартсхорн[31] [38], Веблен [32] и Јанг[33] [76], Рихтер-Геберт[34] [67], Клајн[35] [46], Хејтинг[36] [40], Страум[37] [73].

Што се тиче развоја пројективне геометрије на подручју бивше Југославије, напоменимо да су први аутори били Ниче[38] [59] и Првановић[39] [66]. Још неки аутори на нашим просторима су: Митровић[40] [55], Бокан[41] и Вукмировић[42] [11]. Међутим, концептуално и суштински, можемо препоручити *Пројективну геометрију* коју је написао Палман[43] [60].

Што се тиче практичне примене пројективне геометрије у задацима, на нашим просторима постоји неколико збирки задатака. За синтетички приступ може се консултовати Алимпић[44], Бокан и Шнајдер[45] [2], а за аналитички Вукмировић и Станић[46] [75].

[24]Marius Sophus Lie (1842–1899), норвешки математичар
[25]David Hilbert (1862–1943), немачки математичар
[26]Gino Fano (1871–1952), италијански математичар
[27]Mario Pieri (1860–1913), италијански математичар
[28]Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003), британско-канадски математичар
[29]Daniel R Hughes (1927–2012), америчко-британски математичар
[30]Fred C Piper, британски математичар
[31]Robin Hartshorne (1938), амерички математичар
[32]Oswald Veblen (1880–1960), амерички математичар
[33]John Wesley Young (1879–1932), амерички математичар
[34]Jürgen Richter-Gebert (1963), немачки математичар
[35]Morris Kline (1908–1992), амерички геометричар
[36]Arend Heyting (1898–1980), холандски математичар и логичар
[37]Eldar Jens Straume (1946), норвешки геометричар
[38]Vilko Niče (1902–1987), хрватски геометричар
[39]Милева Првановић (1929–2016), српска геометричарка
[40]Милан Митровић, српски математичар
[41]Неда Бокан (1947), српска геометричарка
[42]Срђан Вукмировић (1971), српски геометричар
[43]Dominik Palman (1924–2006), хрватски геометричар
[44]Бранка Алимпић (1935), српска математичарка
[45]Загорка Шнајдер (1926–2003), српска математичарка
[46]Зоран Станић (1975), српски математичар

2.1 Аксиоматски метод

Развој математике неизбежно је пратила човекова жеља да систематизује сопствена знања. Ова тенденција посебно је упечатљива код античких Грка, где кулминира систематизацијом геометрије у Еуклидовим *Елементима*. Грчки математичари су геометрију постепено претварали у аксиоматску теорију, која код Еуклида достиже свој коначни облик. Много векова његови *Елементи* сматрани су за модел савршене математичке теорије, а тек пред крај 19. века, доживели су строге преправке које су попуниле многе рупе у дефиницијама и доказима.

У теорији нове појмове уводимо ***дефиницијама***, чиме их описујемо преко неких већ познатих појмова. На самом почетку *Елемената*, Еуклид покушава да дефинише све геометријске појмове којима ће се бавити. Међутим, у питању нису строге дефиниције већ само кратка објашњења елементарних геометријских појмова, изложена са намером да у свести читаоца створе интуитивне представе [53, стр. 41]. Да бисмо спречили зачаран круг (дефинисање једног појма преко другог, а тог другог преко првог, те тако у круг) неке појмове морамо прихватити као основне и њих не дефинишемо. Основне појмове делимо у две класе, на основне објекте (као што су тачке, праве, равни) и основне релације између тих објеката (као што су инциденција, између, подударност).

Тврђење у аксиоматској теорији је исказ у којем се јављају само основни појмови теорије као и логички појмови. Аксиоматски метод се користи да пружи поуздане и објективне разлоге зашто је нека хипотеза о математичким објектима истинита. Он се заснива на логичко дедуктивној аргументацији која утврђује ***доказе*** за нека тврђења у теорији коју посматрамо. Докази тврђења су аргументи базирани на истинитости претходно доказаних тврђења, али како та претходна тврђења такође захтевају претходно доказана тврђења, морамо избећи бесконачни регрес (бесконачна хијерархија нових и нових тврђења неопходних за доказивање оних претходних). Због тога теорију заснивамо на основним тврђењима која не захтевају доказ и зовемо их ***аксиоме*** теорије. Дакле, тврђење важи ако је у питању аксиома или уколико је дедуктивно изведено из аксиома, те тада кажемо да је оно ***теорема*** (или ***лема*** уколико јој је примарна улога да установи значајан корак у доказу неке будуће теореме).

Основни појмови у аксиоматској теорији остају непрецизирани, док аксиоме можемо сматрати њиховим имплицитним дефиницијама. Свако окружење у којем основни појмови имају интерпретацију у којој све аксиоме теорије важе зовемо ***модел*** те теорије. Историјски, барем неки модели аксиоматске теорије претходе теорији. На пример, Еуклид је желео да избегне произвољност у интерпретацији основних појмова јер није могао да дозволи да тачке, праве и равни буду интерпретиране било како другачије до онако како је то чињено у Платоновој[47] Академији [53, стр. 43].

Међутим, у модерној аксиоматици која потиче од Хилберта, аксиома се више не посматра као несумњива истина до које стижемо интуицијом. Поента је да ми не изучавамо објекте, већ релације између објеката у којима се види сама суштина математичког концепта. Према томе, геометријска аксиоматизација подразумева уклањање било какве зависности од објеката реалног света са којима је првобитно могла бити повезана. Хилберт је, ако је веровати његовом ученику Блументалу[48], под утицајем апстрактног погледа на геометријске појмове изјавио да математичар мора увек бити у стању да уместо *тачке, праве и равни*, говори *столови, столице и кригле за пиво* [9, стр. 402–403].

[47] Платон, Πλάτων (4. и 5. век п.н.е), грчки филозоф и беседник
[48] Ludwig Otto Blumenthal (1876–1944), немачки математичар

Наравно, овакав апстрактни приступ није уклонио слике из геометријских књига. Ако је књига добро написана слике могу бити изостављене без губитка доследности. Оне нису од суштинске важности, а њихов главни циљ је да нам олакшају памћење, праћење и разумевање сложених доказа. Са друге стране, слике увек прете да нас наведу на погрешан пут некоректном употребом просторне интуиције. Морамо бити јако обазриви због ове опасности која је проузроковала многе грешке чак и у одличним радовима из аксиоматике [40, стр. 4].

Уколико изведемо неку теорему у некој аксиоматској теорији, ми смо такође доказали теореме одговарајуће почетној у свим моделима теорије. На овај начин аксиоматски метод нам дозвољава огромну уштеду на доказима. Свака теорема у теорији је тачна у сваком моделу теорије, али тврђење може бити тачно у неком моделу, а да није у питању теорема. Посебну пажњу у књизи обратићемо на моделе теорије што оправдавају следеће особине аксиома на које се често фокусирамо.

За аксиоматску теорију кажемо да је ***непротивречна*** уколико се из ње не може извести логичка контрадикција, односно уколико не постоји неко тврђење за које су и оно и његова негација теореме у тој теорији. Најлакши начин да докажемо непротивречност теорије је да обезбедимо неки њен модел. За аксиому кажемо да је ***независна*** уколико се не може доказати ни оповргнути из осталих аксиома теорије. Аксиоматска теорија је ***независна*** уколико је свака од њених аксиома независна. Независност аксиоме уобичајено се доказује конструкцијом модела у којем важе све аксиоме осим те. Уколико се свако тврђење у теорији или његова негација могу доказати кажемо да је теорија ***потпуна***. Дакле, у потпуној теорији не постоји тврђење које можемо додати на систем аксиома и тако добити непротивречну теорију. Уколико су свака два модела аксиоматске теорије изоморфна (суштински, постоји само један модел теорије) кажемо да је она ***категорична***. Категорична теорија је обавезно потпуна, али обрнуто не мора да важи. У неким ситуацијама категоричност није захвална особина јер се теорија не може даље уопштавати.

2.2 Аксиоме пројективне равни

Пројективну геометрију равни заснивамо као аксиоматску теорију, те најпре уводимо основне појмове. Посматрамо два основна скупа и њих обележавамо са $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$. Елементе скупа $\mathcal{T}$ зовемо ***тачке*** и обележавамо великим латиничним словима: $A, B, C, D, \ldots$ док елементе скупа $\mathcal{P}$ зовемо ***праве*** и обележавамо малим латиничним словима: $a, b, c, d, \ldots$ Између ових скупова уводимо основну релацију $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{P}$ коју зовемо ***релација инциденције***.

Реченица „*Тачка A је инцидентна са правом p*“ има симболички запис $A\mathcal{I}p$ или $(A, p) \in \mathcal{I}$, а еквивалентно можемо рећи „*Права p је инцидентна са тачком A*“ или записати $p\mathcal{I}A$. Често се по узору на интуитивну раван, уколико не постоји могућност забуне, користи интуитивни начин изражавања. На пример, претходне реченице можемо исказати са „*Тачка A лежи на правој p*“ или „*Тачка A припада правој p*“, у ознаци $A \in p$, односно са „*Права p пролази кроз тачку A*“ или „*Права p садржи тачку A*“, у ознаци $p \ni A$.

Уколико тачка A није инцидентна са правом p, можемо писати $A\not{\mathcal{I}}p$ или $(A, p) \notin \mathcal{I}$. Та негација се интуитивно може исказати убацивањем речце „не“ на одговарајуће место (*не лежи*, *не припада*, *не пролази кроз*, *не садржи*), односно записати $A \notin p$.

Из полазних појмова дефиницијама можемо добити нове изведене појмове. Ако постоји заједничка права са којом су инцидентне неке тачке, онда за те тачке кажемо да су ***колинеарне***. Ако постоји заједничка тачка са којом су инцидентне неке праве, онда за те праве кажемо да су ***конкурентне***. Често наглашавамо ту заједничку тачку или преко ње правдамо конкурентност правих, те кажемо да су праве

конкурентне у тој заједничкој тачки.

Законитости које важе између основних појмова у геометрији описују се аксиомама. Уобичајено је да се најпре поставе аксиоме инциденције (аксиоме везе) које описују основне особине релације инциденције. У свакој геометрији је такође уобичајено да се најпре постави следећа аксиома.

Аксиома 2.1. *Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите тачке.*

Ова аксиома заправо је обједињење прве две Хилбертове аксиоме. Прве, која каже да постоји права која пролази кроз две различите тачке, и друге, по којој не постоји више од једне такве праве. За различите тачке A и B, јединствену праву из Аксиоме 2.1 која их садржи зовемо ***спојница тачака*** A и B и обележавамо са $A \vee B$. Тако смо добили ***операцију спајања*** која двема различитим тачкама додељује одговарајућу праву, њихову спојницу.

Непосредна последица Аксиоме 2.1 је да праву одређују било које две њене тачке, односно ако су C и D различите тачке праве $A \vee B$, тада су A и B тачке праве $C \vee D$. Такође важи да две различите праве не могу имати више од једне заједничке тачке, односно са две различите праве може бити инцидентна највише једна тачка. Додатно, можемо рећи да су сваке две тачке колинеарне.

Упечатљива одлика пројективне геометрије је симетрија у улогама које играју тачке и праве у дефиницијама и теоремама. Овде до изражаја долази апстрактни поглед на аксиоматску геометрију, те овој симетрији можемо приступити кроз језик. Свако тврђење у пројективној равни (исказ који укључује тачке, праве и инциденцију између њих) може се модификовати тако што речи тачка и права замене места, при чему се евентуално изврше потребне граматичке корекције.

Дуално тврђење неком тврђењу је тврђење које се добија заменом речи тачка и права у почетном тврђењу. Прецизније речено, реч „тачка“ мења се речју „права“, а реч „права“ мења се речју „тачка“. Важно је напоменути да уколико тврђење садржи додатне термине морамо извршити и додатне промене у складу са њиховим дефиницијама. На пример, за добијање дуалног тврђења морамо у почетном тврђењу узајамно заменити речи „лежи на“ са „пролази кроз“, „припада“ са „садржи“, а „колинеарно“ са „конкурентно“. Симетрија између скупова $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ коју смо најавили види се кроз такозвани Принцип дуалности.

Тврђење 2.1 (Принцип дуалности). *Ако је неко тврђење теорема, онда је њему дуално тврђење такође теорема.*

Принцип дуалности је метатеорема јер је заправо пре теорема о математици неголи теорема унутар саме математике. Другим речима, Принцип дуалности је теорема о теоремама. Доказ ове веома јаке теореме врши се провером дуалних тврђења за све аксиоме у теорији, које свакако важе уколико је Принцип дуалности на снази. Ако је неко тврђење теорема, то за њега постоји доказ изведен из аксиома. Уколико читав доказ преведемо дуално, добијамо доказ дуалног тврђења расписан преко дуала аксиома, које се даље расписују преко самих аксиома, одакле следи да је дуално тврђење теорема.

Претходна дискусија говори да Принцип дуалности важи ако и само ако је дуал сваке аксиоме валидан. Како желимо да Принцип дуалности стално имамо на располагању, погледајмо како гласи дуал Аксиоме 2.1 и уведимо га као нову аксиому.

Аксиома 2.2. *Постоји јединствена тачка која је инцидентна са две различите праве.*

Подсетимо се апсолутне геометрије равни, у којој се уводи појам паралелности, где кроз тачку ван праве постоји права која не сече почетну праву. У еуклидској равни постоји тачно једна таква права (Плејферова[49] аксиома), док у хиперболичкој

[49]John Playfair (1748–1819), шкотски научник и математичар

равни имамо бар две такве праве (аксиома Лобачевског[50]). Међутим, у пројективној равни такве праве не постоје, јер Аксиома 2.2 каже да се сваке две различите праве секу, што уједно значи и да нема паралелних правих.

Напоменимо да се Аксиома 2.2 може ослабити тако да гарантује само егзистенцију заједничке тачке јер јединственост онда следи из раније поменуте особине Аксиоме 2.1. Међутим, како желимо упечатљив поглед на Принцип дуалности одлучили смо да као аксиому ипак задржимо директан дуал Аксиоме 2.1.

За различите праве p и q, јединствену тачку из Аксиоме 2.2 која им припада зовемо ***сецишūе ūравих*** (пресечна тачка) p и q и обележавамо са $p \wedge q$. Тако смо добили ***оūерацију сечења*** која двема различитим правама додељује одговарајућу тачку, њихово сециште. Приметимо да су спајање и сечење дуалне операције, односно да су спојница и сециште дуални појмови.

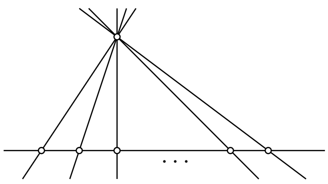
Како празни скупови, $\mathcal{T} = \mathcal{P} = \mathcal{I} = \emptyset$ очигледно испуњавају обе аксиоме, потребна нам је аксиома која гарантује егзистенцију основних објеката од којих можемо почети постепено да градимо теорију.

Аксиома 2.3. *Посūоје чеūири ūачке међу којима нема ūри колинеарне.*

Аксиома 2.3 служи да поред већ наведених празних скупова елиминише још неке неинтересантне случајеве. Уколико важи Аксиома 2.1 и Аксиома 2.2, али не и Аксиома 2.3, кажемо да је у питању ***деīенерисана ūројекūивна раван***, а једноставном претрагом по могућим случајевима, испоставља се да граде две суштински различите фамилије.

Прва фамилија дегенерисаних равни представља се тачком T која није инцидентна са правом p, тако да постоји произвољан (не нужно коначан) скуп Λ и колинеарне тачке T_α за $\alpha \in \Lambda$ инцидентне са p, као и праве које су спојнице тачке T са сваком од тачака T_α. Строго формално ову фамилију можемо записати са

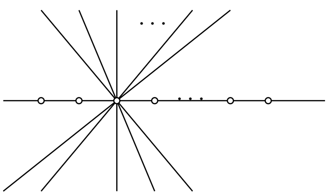
$$\mathcal{T} = \{T\} \cup \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{T_\alpha\}, \quad \mathcal{P} = \{p\} \cup \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{p_\alpha\}, \quad \mathcal{I} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{(T, p_\alpha), (T_\alpha, p_\alpha), (T_\alpha, p)\}.$$



Приметимо да је број тачака равни из ове фамилије једнак броју правих, те је њој дуална раван истог типа.

Друга фамилија дегенерисаних равни представља се са два произвољна скупа индекса Λ и Σ, тако да су све тачке T_α за $\alpha \in \Lambda$ колинеарне, а све праве p_β за $\beta \in \Sigma$ конкурентне. Формално можемо записати

$$\mathcal{T} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{T_\alpha\}, \quad \mathcal{P} = \bigcup_{\beta\in\Sigma} \{p_\beta\}, \quad \mathcal{I} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{(T_\alpha, p)\} \cup \bigcup_{\beta\in\Sigma} \{(T, p_\beta)\}, \text{ за неко } T \in \mathcal{T}, p \in \mathcal{P}.$$



[50]Николай Иванович Лобачевский (1792–1856), руски математичар

Посебно, у случају $\Lambda = \emptyset \neq \Sigma$ имамо само једну праву, односно $\mathcal{P} = \{p\}, \mathcal{T} = \mathcal{I} = \emptyset$, док у случају $\Lambda \neq \emptyset = \Sigma$ имамо само једну тачку $\mathcal{T} = \{T\}, \mathcal{P} = \mathcal{I} = \emptyset$, те већ виђено $\mathcal{T} = \mathcal{P} = \mathcal{I} = \emptyset$ за $\Lambda = \Sigma = \emptyset$.

Пројективна раван је модел система $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ који испуњава Аксиоме 2.1, 2.2 и 2.3. Систем тачака и правих са релацијом инциденције који испуњава наведене аксиоме је пројективна раван, а како смо укључили Аксиому 2.3 можемо рећи да је она недегенерисана. Размотримо какав утицај на Принцип дуалности има увођење нове аксиоме. Како су Аксиома 2.1 и Аксиома 2.2 једна другој дуалне остаје провера да ли важи дуал Аксиоме 2.3, односно да ли постоје четири праве међу којима нема три конкурентне.

Како по Аксиоми 2.3 постоје тачке A, B, C, D међу којима нема три колинеарне, оне су све различите. По Аксиоми 2.1 постоје праве $A{\vee}B$, $B{\vee}C$, $C{\vee}D$, $D{\vee}A$, а испоставља се да оне испуњавају тражене услове. Претпоставимо супротно, да међу њима постоје три конкурентне, те нека су, не умањујући општост, $A{\vee}B$, $B{\vee}C$ и $C{\vee}D$ инцидентне са неком тачком S. Ако је $S = B$, због $S\mathcal{I}(C{\vee}D)$ имамо колинеарне B, C, D. Иначе је $S \neq B$, одакле из $S\mathcal{I}(A{\vee}B)$ и $S\mathcal{I}(B{\vee}C)$ добијамо $A{\vee}B = S{\vee}B = B{\vee}C$, те су колинеарне A, B, C. Овом контрадикцијом показали смо да ако је $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ пројективна раван, онда је то и $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{I})$, што доказује Принцип дуалности.

Теорема 2.2. *У пројективној равни важи Принцип дуалности.*

Принцип дуалности је веома користан, можемо га механички применити на свако тврђење у теорији и тако добити нове резултате. Некад је резултат еквивалентан почетној теореми, некад њеном обрату, али често је у питању нов резултат, тако да у принципу можемо сматрати да се на овај начин број теорема удвостручује. Код увођења нових аксиома увек имамо у виду Принцип дуалности (Тврђење 2.1), те ћемо за сваку нову аксиому испитивати њен дуал.

Откриће Принципа дуалности везује се за двадесете године 19. века и два имена. Принцип дуалности први је експлицитно поставио Жергон у [34] који је уједно и увео термин дуалност да би означио везу између оригиналне и њој дуалне теореме. Са друге стране, Понселе је нешто раније увидео дуалност у вези пола и поларе изучавајући конике, о чему је писао у [64], а онда формулисао општији метод у [65]. Између њих двојице уследио је дуг и непријатан спор по питању приоритета на откриће Принципа дуалности. Са становишта модерне аксиоматике Принцип дуалности је прилично очигледна ствар, али док је пројективна геометрија била у повоју није било коректне формалне теорије, те је тада дуалност била далеко од очигледног.

2.3 Интуитивна пројективна раван

Еуклидски простор, који познајемо из елементарне геометрије, обједињује како очигледне, тако и оне неочигледне геометријске особине објеката који постоје у стварном свету око нас. Еуклидска раван тако представља раван дводимензиони простор који даје сложен и прилично добар опис стварног света заснован на нашем геометријском опажању и искуству. Међутим, постојање паралелних правих оповргава Аксиому 2.2, тако да еуклидска раван свакако није пројективна раван.

Еуклидска раван укључује приличан број ствари које можемо да меримо, попут растојања, углова и површина. Ако се одрекнемо те метричке структуре и задржимо само концепт инциденције, остаје нам лепа и нетривијална геометрија афине равни. Нека је $\mathbb{E} = (\mathcal{T}_{\mathbb{E}}, \mathcal{P}_{\mathbb{E}}, \mathcal{I}_{\mathbb{E}})$ еуклидска афина раван, где су $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ тачке, $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ праве, а $\mathcal{I}_{\mathbb{E}}$ њена релација инциденције.

Реализација пројективне равни врши се кроз модел који испуњава уведене аксиоме инциденције. Како основни проблем еуклидске равни лежи у Аксиоми 2.2, потребно је измислити неке „имагинарне“ тачке у којима ће се сећи паралелне праве. То можемо остварити тако што за тачке нове равни прогласимо праменове правих у равни $\mathbb{E}$. Иако на први поглед ова конструкција делује прилично апстрактно, прамен конкурентних правих које се секу у некој тачки из $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ природно се може поистоветити са том тачком. У еуклидској равни праменови правих се јављају у два облика, односно осим праменова конкурентних правих постоје и праменови паралелних правих, што је додатак који оживљава Аксиому 2.2.

Дакле, тачке нове равни су праменови правих у $\mathbb{E}$, праве смо задржали, док нову релацију инциденције уводимо на природан начин. Неки прамен правих, као тачка нове равни, биће инцидентан са правом уколико је садржи, односно ако је та права једна од правих из почетног прамена. Свакој правој у овој конструкцији придружујемо додатну тачку која представља прамен правих паралелних са њом. Тако су паралелне праве инцидентне са заједничком таквом тачком за коју кажемо да је ***бесконачна тачка*** (***бесконачно далека тачка*** [55], ***бескрајно далека тачка*** [66], ***неизмерно далека тачка*** [59], ***идеална тачка***, ***неправа тачка*** [60]).

Свака права $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}$, осим регуларних тачака које јој припадају, садржи и бесконачну тачку $\infty_{[p]}$, где је $[p]$ класа еквиваленције свих правих паралелних са p. Додатно уводимо ***бесконачну праву*** која садржи све бесконачне тачке, а коју уобичајено обележавамо са u_∞. Овако дефинисане основне скупове и релације можемо формализовати са

$$\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}_{\mathbb{E}} \cup \bigcup_{p\in\mathcal{P}_{\mathbb{E}}} \{\infty_{[p]}\}, \quad \mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_{\mathbb{E}} \cup \{u_\infty\}, \quad \mathcal{I}_\infty = \mathcal{I}_{\mathbb{E}} \cup \bigcup_{p\in\mathcal{P}_{\mathbb{E}}} \{(\infty_{[p]}, p), (\infty_{[p]}, u_\infty)\}.$$

Да ли овако конструисан интуитивни модел $\mathbb{EP}^2 = (\mathcal{T}_\infty, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{I}_\infty)$ заиста испуњава све аксиоме пројективне равни?

Како постоје два типа тачака (обичне и бесконачне), за различите тачке из Аксиоме 2.1 дискутујемо три случаја. Ако су обе тачке из $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ то по еуклидској аксиоми постоји јединствена права из $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ која је са њима инцидентна. Та права је по дефиницији и права из $\mathcal{P}_\infty$ која их садржи, док их додатна права u_∞ не садржи, јер је инцидентна само са бесконачним тачкама. Ако је једна тачка $A \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}$, а друга $\infty_{[p]}$ за неко $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}$, то по Плејферовој аксиоми постоји јединствена еуклидска права q кроз A која је паралелна са p, односно $\infty_{[p]} = \infty_{[q]}$. Коначно, ако су обе тачке бесконачне, јединствена права кроз њих је очигледно u_∞, док све остале праве садрже само једну бесконачну тачку.

За различите праве из Аксиоме 2.2 такође имамо дискусију. Ако су обе праве p и q еуклидске и међусобно паралелне, њима одговара јединствена тачка $\infty_{[p]} = \infty_{[q]}$. Ако су обе праве еуклидске и нису паралелне, онда имају обичан еуклидски пресек и то је јединствена тачка. Пресек праве u_∞ и еуклидске праве p је јединствена тачка $\infty_{[p]}$.

За испуњење Аксиоме 2.3 довољно је једноставно изабрати четири темена произвољног квадрата, те она очигледно важи. Испитали смо све три аксиоме и самим тим показали да је интуитивна пројективна раван $\mathbb{EP}^2 = (\mathcal{T}_\infty, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{I}_\infty)$ заиста пројективна раван.

Теорема 2.3. *Интуитивни модел* $\mathbb{EP}^2$ *јесте пројективна раван.*

Аксиоме 2.1, 2.2 и 2.3 чине минимални скуп аксиома пројективне равни, а касније уводимо друге аксиоме које пројективну раван повезују са њеним геометријским пореклом. Напоменимо да нам у анализи интуитивног модела $\mathbb{EP}^2$ нису биле потребне све аксиоме еуклидске геометрије, већ само аксиоме инциденције са Плејферовом аксиомом јер смо еуклидску раван посматрали као афину раван. Приметимо да је еуклидска геометрија равни само један подскуп пројективне геометрије равни. Интуитивни модел $\mathbb{EP}^2$ нам зато омогућава да задатке из еуклидске равни пребацимо у пројективну раван, тамо их решимо, те на крају закључке вратимо назад у еуклидску раван, што је процедура коју обилато користимо у задацима.

Историјски, концепт бесконачне тачке потиче са почетка 17. века. Прво се појавио код Кеплера [45, стр. 93] који 1604. помиње да парабола има две жиже од којих је једна бесконачно далека, а налази се у пресеку правих паралелних оси. Дезарг [22] је 1639. у свом делу писао како паралелне праве имају заједнички завршетак на бесконачној удаљености.

2.4 Аналитичка пројективна раван

Иако се бесконачна права интуитивне пројективне равни (проширене еуклидске равни) $\mathbb{EP}^2$ јавља на специфичан начин, њена унутрашња природа не разликује се од оне коју имају остале праве. Конструкција те пројективне равни на другачији начин показује да се праве геометријски не разликују. Основна идеја конструкције је да посматрамо тродимензиони векторски простор, те да тачке пројективне равни буду праве које пролазе кроз координатни почетак, а да праве буду равни које пролазе кроз координатни почетак. Најважнији случај тиче се векторског простора над пољем реалних бројева, али како конструкција пролази за произвољно поље, држаћемо се уопштене приче.

Нека је $\mathbb{F}$ произвољно поље. Посматрајмо $\mathbb{F}^3$, скуп свих уређених тројки елемената из $\mathbb{F}$, који има структуру тродимензионог векторског простора над $\mathbb{F}$. За произвољно ненула $x \in \mathbb{F}^3$, праву кроз координатни почетак која садржи x описује скуп $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{F}\}$, што је векторски потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије један. Сасвим слично, за линеарно независне x и y из $\mathbb{F}^3$, раван кроз координатни почетак која их садржи описује скуп $\{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{F}\}$, а он је векторски потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије два. Овај дводимензиони потпростор садржи једнодимензионе потпросторе облика $\mathrm{Span}\{\lambda x + \mu y\}$, где су λ и μ фиксирани скалари, при чему различит избор λ и μ који су у истом односу одређују исти потпростор.

Строго формално основне елементе пројективне равни над пољем $\mathbb{F}$ можемо дефинисати на следећи начин:

$\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ представља једнодимензионе потпросторе од $\mathbb{F}^3$;
$\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ представља дводимензионе потпросторе од $\mathbb{F}^3$;
Инциденција $U\mathcal{I}_{\mathbb{F}}V$ значи да је $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ потпростор од $V \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$.

Конкретну координатну репрезентацију векторских потпростора од $\mathbb{F}^3$ добијамо као класу уређених тројки ненула вектора из $\mathbb{F}^3$ које сечемо по релацији сразмерности $\propto$. У питању је релација еквиваленције $\propto$, за коју важи $(x_1, x_2, x_3) \propto (y_1, y_2, y_3)$ ако и само ако постоји ненула скалар $\lambda \in \mathbb{F}$ такав да је $y_i = \lambda x_i$ за $i \in \{1, 2, 3\}$. Скуп свих класа еквиваленције ове релације означимо са

$$\mathcal{K} = \mathbb{F}^3 \setminus \{0\} /_{\propto} = \mathbb{F}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \Big/ \mathbb{F} \setminus \{0\}.$$

Ако је потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије један, он је генерисан неким ненула вектором (x_1, x_2, x_3). Скуп тачака је $\mathcal{T}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$, а уколико $A \in \mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ има вектор представник (x_1, x_2, x_3) кажемо да тачка A има ***хомогене координате*** $(x_1 : x_2 : x_3)$.

Потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије два је облика $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3 : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0\}$ за неки ненула вектор нормале $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{F}^3$ који је једнозначан до на сразмерност. Овако се успоставља бијекција између дводимензионих и једнодимензионих векторских потпростора од $\mathbb{F}^3$, што нам омогућава да праве такође видимо као скуп $\mathcal{P}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$, а уколико $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ има вектор нормале (u_1, u_2, u_3) кажемо да права p има ***хомогене координате*** $[u_1 : u_2 : u_3]$.

Скупове $\mathcal{T}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$ треба схватити као дисјунктне копије простора $\mathcal{K}$. За рад у аналитичком моделу погодно је увести ознаке за вектор представник елемента из $\mathcal{K}$, јер он одређује његове хомогене координате. Вектор представник тачке или праве обележаваћемо стрелицом изнад. На пример, $\overrightarrow{X}$ означава неки вектор представник тачке X, док $\overrightarrow{x}$ означава неки вектор представник праве x. Како тачке и праве имају много вектора представника (сви они су међусобно сразмерни), уколико је битно који од њих смо фиксирали, то ћемо посебно нагласити. Повратак са вектора на тачку или праву можемо извести користећи угласте заграде за класу еквиваленције, на пример важи $[\overrightarrow{X}] = X$, односно $[\overrightarrow{x}] = x$.

Векторе можемо уједно сматрати и колона матрицама, што нам омогућава да неке изразе или системе једначина једноставно запишемо у матричном облику. При том на располагању имамо стандардну векторску алгебру у тродимензионом векторском простору из Секције 1.2 (скаларни, векторски и мешовити производ).

Преостаје испитати релацију инциденције $\mathcal{I}_{\mathbb{F}}$. Једнодимензиони простор $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ садржан је у дводимензионом простору $V \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ ако је U један од праваца у V, што се дешава кад је U нормалан на вектор нормале од V. Тако је тачка $A = (x_1 : x_2 : x_3) \in \mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ инцидентна са правом $p = [u_1 : u_2 : u_3] \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ и пишемо $A\mathcal{I}_{\mathbb{F}}p$ ако и само ако је $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{p} = 0$, што је еквивалентно са $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, односно са $(\overrightarrow{p})^{\intercal}\overrightarrow{A} = (\overrightarrow{A})^{\intercal}\overrightarrow{p} = 0$.

Овако смо описали аналитички модел пројективне равни $\mathbb{FP}^2 = (\mathcal{T}_{\mathbb{F}}, \mathcal{P}_{\mathbb{F}}, \mathcal{I}_{\mathbb{F}})$, што доказујемо провером уведених аксиома. Нека су $A = (a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_1 : b_2 : b_3)$ различите тачке из Аксиоме 2.1. Права $p = [u_1 : u_2 : u_3]$ инцидентна је и са A и са B ако и само ако важи $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{p} = 0$ и $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{p} = 0$, што се може матрично записати са

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица са леве стране је ранга два јер се састоји од линеарно независних вектора $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$ који су уписани у врсте. Самим тим, простор решења матричне хомогене једначине је потпростор димензије један, те постоји јединствена права $[u_1 : u_2 : u_3]$ са траженим особинама.

Проверили смо Аксиому 2.1, а сасвим слично, из дуалних симетрија, проверавамо Аксиому 2.2. Што се тиче Аксиоме 2.3, лако је приметити да међу тачкама $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ и $(1:1:1)$ нема три колинеарне.

Овим смо показали да свако поље $\mathbb{F}$ генерише један аналитички модел пројективне равни $\mathbb{FP}^2 = (\mathcal{T}_{\mathbb{F}}, \mathcal{P}_{\mathbb{F}}, \mathcal{I}_{\mathbb{F}})$, што нам омогућава да повежемо геометрију са алгебром и тако многе резултате добијемо директним рачуном. Није лоше напоменути да претходни рачун пролази и за произвољно тело $\mathbb{F}$, тако што посматрамо $\mathbb{F}^3$ као модул над $\mathbb{F}$ и његове подмодуле, што ћемо разматрати касније (видети Теорему 2.51).

Теорема 2.4. *Аналитички модел $\mathbb{FP}^2$ је пројективна раван за свако поље $\mathbb{F}$.*

Пројективна раван над пољем $\mathbb{F}$ је аналитичка пројективна раван $\mathbb{FP}^2$, док се у литератури среће и ознака $PG(2, \mathbb{F})$. Провера аксиома за $\mathbb{FP}^2$ може се конкретизовати до краја, односно можемо прецизно изразити две основне операције генерисане аксиомама, операцију спајања $\vee$ и операцију сечења $\wedge$.

Нека су $A = (a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_1 : b_2 : b_3)$ различите тачке у $\mathbb{FP}^2$. Како су тачке A и B инцидентне са правом $p = A \vee B$, то је $\overrightarrow{p}$ нормално и на $\overrightarrow{A}$ и на $\overrightarrow{B}$, те има правац њиховог векторског производа, што нас доводи до формуле $\overrightarrow{A \vee B} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$, док конкретан рачун даје

$$p = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right].$$

Наравно, како су тачке A и B различите то су $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$ линеарно независни, те њихов векторски производ није нула вектор и самим тим не постоји могућност да добијемо непостојећу праву $[0 : 0 : 0]$.

Сасвим слично, нека су $p = [p_1 : p_2 : p_3]$ и $q = [q_1 : q_2 : q_3]$ различите праве у $\mathbb{FP}^2$. Како су праве p и q инцидентне са тачком $A = p \wedge q$, то је $\overrightarrow{A}$ нормално и на $\overrightarrow{p}$ и на $\overrightarrow{q}$, те је $\overrightarrow{p \wedge q} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$, док конкретан рачун даје

$$A = \left(\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right).$$

Дакле, и спајање и сечење се реализују као векторски производ. Како тај резултат често користимо у рачуну, записаћемо га у виду следеће леме.

Лема 2.5. *За различите тачке A и B у $\mathbb{FP}^2$ важи $\overrightarrow{A \vee B} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$. За различите праве p и q у $\mathbb{FP}^2$ важи $\overrightarrow{p \wedge q} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$.*

Разне аналитичке пројективне равни $\mathbb{FP}^2$ добијамо заменом конкретног поља уместо $\mathbb{F}$. За $\mathbb{F}$ можемо узети поље $\mathbb{C}$ комплексних бројева или $\mathbb{Q}$ рационалних бројева и добити одговарајуће пројективне равни $\mathbb{CP}^2$ и $\mathbb{QP}^2$. Међутим, најчешће за $\mathbb{F}$ постављамо поље $\mathbb{R}$ реалних бројева, што нас доводи до ***реалне пројективне равни*** $\mathbb{RP}^2 = (\mathcal{T}_\mathbb{R}, \mathcal{P}_\mathbb{R}, \mathcal{I}_\mathbb{R})$. Увођењем координатног система, односно хомогених координата, боље можемо схватити раније уведену интуитивну пројективну раван $\mathbb{EP}^2$ (додавање бесконачних тачака и бесконачне праве на еуклидску раван) на чист алгебарски начин.

Еуклидска раван $\mathbb{E}$ се помоћу координатне репрезентације идентификује са $\mathbb{R}^2$. Наиме, свакој тачки из $\mathbb{E}$ се придружује $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, док се свака права састоји из тачака $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$. Међутим, третирање праве као јединственог објекта, а не као скупа тачака, доводи нас до њене репрезентације преко параметара (u_1, u_2, u_3). Напоменимо да $(0, 0, 1)$ овде не представља праву јер тада наведена једначина гласи $1 = 0$.

Посматрајмо $\mathbb{E}$ као раван смештену у еуклидски простор $\mathbb{R}^3$. То може бити раван дата једначином $x_3 = 1$, где свакој тачки еуклидске равни (x_1, x_2) одговара вектор $(x_1, x_2, 1)$. Нека је (x_1, x_2, x_3) вектор из $\mathbb{R}^3$. Ако му последња компонента није једнака нули ($x_3 \neq 0$) можемо га поистоветити са једнодимензионим потпростором који је њиме разапнут, а он сече смештену еуклидску раван у $(x_1/x_3, x_2/x_3, 1)$, односно у тачки $(x_1/x_3, x_2/x_3) \in \mathbb{E}$.

Преостали вектори су облика $(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$. Ако пођемо од тачке $(p_1, p_2) \in \mathbb{E}$ и пратимо праву са правцем (k_1, k_2) добијамо векторе облика $(p_1 + tk_1, p_2 + tk_2, 1)$. Ови вектори сразмерни су векторима $(p_1/t + k_1, p_2/t + k_2, 1/t)$, при чему кад t тежи ка $+\infty$ или $-\infty$, наш вектор тежи ка $(k_1, k_2, 0)$. Самим тим, вектори облика $(x_1, x_2, 0)$ одговарају бесконачним тачкама, или конкретније, $(x_1, x_2, 0)$ је бесконачна тачка која одговара правој чији је правац (x_1, x_2).

Једначина праве у хомогеним координатама постаје $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Пресек са еуклидском равни $x_3 = 1$ даје једначину праве у равни $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$. Једини тип вектора коме не одговара права је она са $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \neq 0$, кад једначина после дељења са u_3 постаје $x_3 = 0$. У питању је права са хомогеним координатама $[0 : 0 : 1]$ која садржи све бесконачне тачке, те је у питању бесконачна права.

Хомогене координате су откривене касних двадесетих година 19. века, а занимљиво је да је до њих независно дошло чак четири математичара. Мебијусова оригинална формулација хомогених координата појавила се у [56], где је увео координатни систем у којем је позиција тачке одређена центром масе (барицентром) система који се састоји од три темена троугла. Бобилије је у [10] први употребио трилинеарне координате у којима је позиција тачке одређена релативним односима растојања од три странице троугла и тако дошао до хомогених координата. Фојербах је хомогене координате увео у својој књизи [31], његов приступ био је геометријски уместо механички, при чему је у три димензије покрио оно што је Мебијус урадио у равни. Сва тројица математичара су до својих резултата дошла сасвим независно и симултано, односно 1827. године. Нешто касније, Пликер је дошао до хомогених координата, али за разлику од својих претходника он је њима приступио на потпуно нов начин разрадивши методологију посматрања праве као елемента, а свој координатни систем описао је у [63].

2.5 Координатизација пројективне равни ⊛

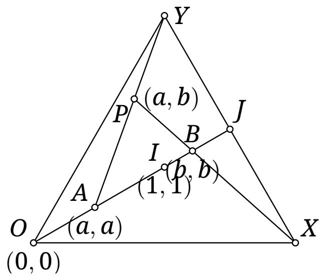
По Теореми 2.4 аналитичка раван $\mathbb{FP}^2$ је једна пројективна раван за свако поље $\mathbb{F}$. Природно се поставља питање обрата овог тврђења. Да ли је свака пројективна раван аналитичка? Може ли се свака пројективна раван координатизовати?

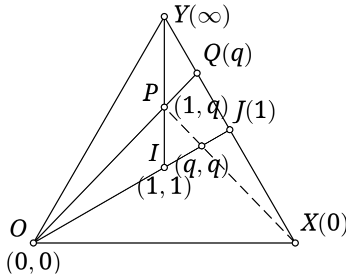
У циљу да опишемо конкретне пројективне равни и евентуално одредимо кад су неке две пројективне равни изоморфне можемо се послужити координатизацијом. Користимо скуп симбола $\mathbb{K}$ који је исте кардиналности као скуп свих тачака сем једне које су инцидентне некој правој, тако да постављамо $0, 1 \in \mathbb{K}$ уз $0 \neq 1$. За опис искључене тачке често користимо апстрактни елемент ∞ који не припада $\mathbb{K}$.

Полазимо од четворотеменика $OXYI$ чију егзистенцију у пројективној равни гарантује Аксиома 2.3. Основна идеја је имитација хомогених координата у равни $\mathbb{FP}^2$ тако да темена уоченог четворотеменика буду базне тачке: $O(0:0:1)$, $X(0:1:0)$, $Y(1:0:0)$, $I(1:1:1)$. Праву $X \vee Y$ третирамо као бесконачну, а ради лакших ознака користимо дехомогенизовану варијанту координата $(x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_1/x_3, x_2/x_3)$ за $x_3 \neq 0$, односно $(x_1 : x_2 : 0) \mapsto (x_1/x_2)$ за $x_2 \neq 0$.

Уведимо тачку $J = (O \vee I) \wedge (X \vee Y)$ и нека је τ бијекција која повезује тачке инцидентне правој $O \vee I$, без тачке J (коју третирамо као бесконачну), са елементима скупа $\mathbb{K}$, тако да је $\tau(O) = 0$ и $\tau(I) = 1$. Скуп $\mathbb{K}$ омогућава да се координате уведу у целокупној равни.

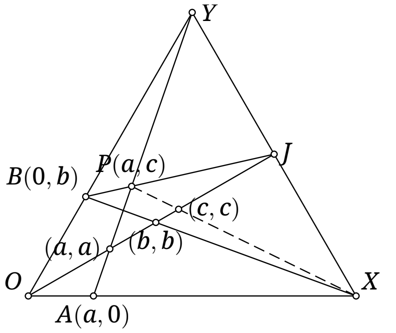
Најпре координатизујемо саму праву $O \vee I$ тако што тачкама $P \neq J$ додељујемо координате $(\tau(P), \tau(P))$. Права $X \vee Y$ представља бесконачну праву, тако да тачке P ван ње чине афину раван, те уколико је $A = (P \vee Y) \wedge (O \vee I)$ и $B = (P \vee X) \wedge (O \vee I)$, тачки P додељујемо координате $(\tau(A), \tau(B))$, што уопштава претходну координатизацију. На овај начин свакој „коначној“ тачки доделили смо две афине координате, односно уређен пар из $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Бесконачним тачкама Q са праве $X \vee Y$ додељујемо само једну координату (q) из $\mathbb{K}$, уколико смо по претходном тачки $P = (Q \vee O) \wedge (Y \vee I)$ доделили координате $(1, q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Преостаје бесконачна тачка Y којој додељујемо (∞) и тиме комплетирамо координатизацију пројективне равни у којој различите тачке добијају различите координате.

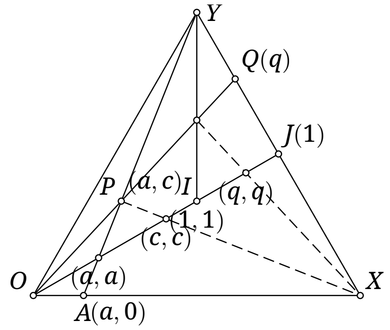




Координатизацију правих уводимо тако да складно прати већ уведене координате тачака. Ако права p није инцидентна са Y онда имамо $p \wedge (X \vee Y) = (a)$ и $p \wedge (O \vee Y) = (0, b)$, те правој p додељујемо координате $[a, b]$. У супротном је права p инцидентна са Y, те правој $X \vee Y$ додељујемо $[\infty]$, док иначе имамо $p \wedge (O \vee X) = (a, 0)$ и правој p додељујемо $[a]$.

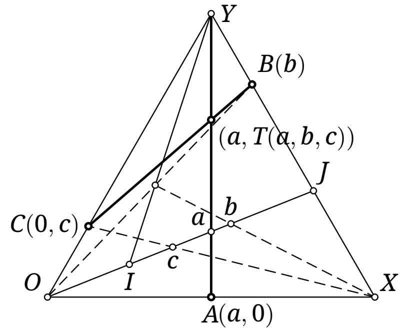
Основна идеја је да геометријске особине преведемо у алгебарске, а онда да приметимо што више алгебарских структура на скупу $\mathbb{K}$. Особине пројективне равни омогућавају да на скупу $\mathbb{K}$ уведемо операцију сабирања на следећи начин. За тачке $A(a, 0)$ и $B(0, b)$, тачка $P = (A \vee Y) \wedge (B \vee J)$ ће имати координате облика (a, c), при чему дефинишемо $a + b = c$. Пажљивим изучавањем ове дефиниције сабирања можемо приметити да је $0 \in \mathbb{K}$ неутрал за сабирање, као и да сваки елемент из $\mathbb{K}$ поседује и леви и десни инверз за сабирање, што ћемо доказати касније у Леми 2.8.





На скупу $\mathbb{K}$ уводимо и операцију множења тако што за тачке $A(a, 0)$ и $Q(q)$, тачка $P = (A \vee Y) \wedge (O \vee Q)$ има координате облика (a, c), при чему дефинишемо $a \cdot q = c$. Сасвим слично претходном, пажљивим посматрањем можемо приметити да се множење нулом и множење јединицом понаша на уобичајени начин, као и да сваки елемент из $\mathbb{K}$, сем нуле, поседује и леви и десни инверз за множење.

У аналитичкој равни $\mathbb{FP}^2$, све праве се могу описати као скупови тачака које задовољавају линеарну једначину $y = x \cdot q + c$. Нажалост, сабирање и множење које смо дефинисали не мора нужно да опише све праве на такав начин. Због тога скуп тачака праве описујемо тернарном операцијом $T \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ коју уводимо на следећи начин. За тачке $A(a, 0)$, $C(0, c)$ и $B(b)$ уводимо тачку $(A \vee Y) \wedge (C \vee B)$ која има координате (a, d), при чему дефинишемо $T(a, b, c) = d$.



Приметимо да за $c = 0$ имамо $C = O$, те је $T(a, b, 0) = a \cdot b$, док за $b = 1$ имамо $B = J$, те је $T(a, 1, c) = a + c$. Зато уведено сабирање и множење представљају специјалне случајеве тернарне операције T. Директно из дефиниције следи да је тачка (x, y) инцидентна са спојницом $[b, c]$ тачака $(0, c)$ и (b) ако и само ако је $y = T(x, b, c)$, тако да важи

$$T(a, b, c) = d \Leftrightarrow (a, d) \mathcal{I} [b, c].$$

Овако геометријске особине претварамо у алгебарске. Испитајмо $T(a, b, c)$ за неке посебне $a, b, c \in \mathbb{K}$. Из $[1] \wedge [b, 0] = (1, b)$ следи $T(1, b, 0) = b$. Из $[a] \wedge [1, 0] = (a, a)$ следи $T(a, 1, 0) = a$. Из $[0] \wedge [b, c] = (0, c)$ следи $T(0, b, c) = c$. Из $[a] \wedge [0, c] = (a, c)$ је $T(a, 0, c) = c$.

Јединствена сецишта и спојнице (које нам омогућавају Аксиоме 2.1 и 2.2) дају додатне алгебарске особине за $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Из $((a,d)\vee(b))\wedge[0] = (0,y)$ имамо јединствено y такво да је $T(a,b,y) = d$. За $a \neq c$ из $[a,b]\wedge[c,d] = (x,y)$ имамо јединствено x за које је $T(x,a,b) = T(x,c,d)$. Коначно, за $a \neq c$ имамо $((a,b)\vee(c,d))\wedge[0] = (0,y)$ и $((a,b)\vee(c,d))\wedge[\infty] = (x)$, што даје јединствено (x,y) такво да је и $T(a,x,y) = b$ и $T(c,x,y) = d$. Претходни резултати нас мотивишу да уведемо појам (раванског) тернарног прстена.

Тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$ чини скуп $\mathbb{K} \ni \{0,1\}$ са тернарном операцијом $T\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ која задовољава следеће особине:

$$(\forall a \in \mathbb{K}) T(1,a,0) = T(a,1,0) = a; \tag{2.1}$$
$$(\forall a, c \in \mathbb{K}) T(0,a,c) = T(a,0,c) = c; \tag{2.2}$$
$$(\forall a, b, d \in \mathbb{K})(\exists! y \in \mathbb{K}) T(a,b,y) = d; \tag{2.3}$$
$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{K})(a \neq c) \Rightarrow (\exists! x \in \mathbb{K}) T(x,a,b) = T(x,c,d); \tag{2.4}$$
$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{K})(a \neq c) \Rightarrow (\exists! (x,y) \in \mathbb{K}^2)(T(a,x,y) = b) \wedge (T(c,x,y) = d). \tag{2.5}$$

Претходна дискусија показује да сваки четворотеменик $OXYI$ у пројективној равни преко координата генерише тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$, што можемо формулисати као теорему.

Теорема 2.6. *Нека је пројективна раван координатизована скупом* $\mathbb{K}$. *Ако је* T *дефинисано са* $T(a,b,c) = d \Leftrightarrow (a,d)\mathcal{I}[b,c]$ *онда је* $(\mathbb{K}, T)$ *тернарни прстен.*

Међутим, важи и обрат овог тврђења, што нам омогућава да из тернарног прстена конструишемо конкретну пројективну раван.

Теорема 2.7. *Сваки тернарни прстен* $(\mathbb{K}, T)$ *генерише пројективну раван* $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ *на следећи начин.*

$$\mathcal{T} = \bigcup_{a,b\in\mathbb{K}} (a,b) \cup \bigcup_{a\in\mathbb{K}} (a) \cup (\infty)$$
$$\mathcal{P} = \bigcup_{a,b\in\mathbb{K}} [a,b] \cup \bigcup_{a\in\mathbb{K}} [a] \cup [\infty]$$
$$\mathcal{I} = \bigcup_{a,b,c\in\mathbb{K}} ((a, T(a,b,c)), [b,c]) \cup \bigcup_{a,b\in\mathbb{K}} ((a,b),[a]) \cup \bigcup_{a,b\in\mathbb{K}} ((a),[a,b])$$
$$\cup \bigcup_{a\in\mathbb{K}} ((a),[\infty]) \cup \bigcup_{a\in\mathbb{K}} ((\infty),[a]) \cup \bigcup_{a\in\mathbb{K}} ((\infty),[\infty])$$

Доказ. Потребно је проверити да овако дефинисно $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ испуњава аксиоме пројективне равни. Аксиому 2.1 проверавамо дискусијом по различитим типовима тачака. Ако су тачке (a,b) и (c,d) са $a \neq c$, по (2.5) постоји јединствено $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ тако да је $T(a,x,y) = b$ и $T(c,x,y) = d$, што је еквивалентно са $(a,b)\mathcal{I}[x,y]$ и $(c,d)\mathcal{I}[x,y]$, односно $[x,y]$ је њихова јединствена спојница. Тачке (a,b) и (a,d) су очигледно инцидентне са $[a]$, а евентуална додатна инциденција са $[x,y]$ значила би $b = T(a,x,y) = d$ што је немогуће за различите тачке. Свака права инцидентна са (c) је или $[\infty]$ или облика $[c,d]$ за неко $d \in \mathbb{K}$, тако да заједничка права инцидентна са (a,b) мора бити $[c,d]$ где је d јединствено решење једначине $T(a,c,d) = b$ из (2.3). Како свака права различита од $[\infty]$ која је инцидентна са (∞) има облик $[c]$ за неко $c \in \mathbb{K}$, то је јединствена спојница за (a,b) и (∞) права $[a]$, а за (a) и (∞) права $[\infty]$. Коначно, тачке (a) и (b) очигледно имају јединствену спојницу $[\infty]$.

Слично вршимо проверу Аксиоме 2.2, при чему је довољно анализирати само егзистенцију, јер ће јединственост сецишта донети Аксиома 2.1. Ако су праве $[a,b]$ и

$[c,d]$ са $a \neq c$, по (2.4) постоји јединствено $x \in \mathbb{K}$ тако да је $T(x,a,b) = T(x,c,d)$ одакле имамо јединствено сециште $(x, T(x,a,b)) = (x, T(x,c,d))$. Праве $[a,b]$ и $[a,d]$ су инцидентне са (a). Тачка (x,y) инцидентна са $[a,b]$ и $[c]$ мора да испуни $T(x,a,b) = y$ и $x = c$, те је у питању јединствено сециште $(c, T(c,a,b))$. Праве $[a,b]$ и $[\infty]$ инцидентне су са (a), док су праве $[a]$ и $[\infty]$, односно $[a]$ и $[b]$, инцидентне са (∞).

Тачке $(0,0), (0), (\infty), (1,1)$ очигледно чине четворотеменик, што проверава Аксиому 2.3 и комплетира доказ. □

У тернарном прстену бинарне операције сабирања и множења не морају бити унапред дефинисане, али их зато можемо накнадно увести са $a + b = T(a,1,b)$ и $a \cdot b = T(a,b,0)$. Под ***квазиīруūом*** $(S,*)$ подразумевамо непразан скуп S са бинарном операцијом $*$ тако да за $a,b \in S$ једначина $a * x = b$ има јединствено решење $x \in S$ и једначина $y * a = b$ има јединствено решење $y \in S$. Квазигрупу која има неутрал (елемент $e \in S$ са особином $e * x = x * e = x$ за свако $x \in S$) зовемо ***ūеūља***. Може се показати да услови дефиниције повлаче да $(\mathbb{K},+)$ и $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ имају структуру петље.

Лема 2.8. *Ако је* $(\mathbb{K},T)$ *ūернарни ūрсūен ūада су* $(\mathbb{K},+)$ *и* $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ *ūеūље.*

Доказ. За свако $a \in \mathbb{K}$ из (2.1) имамо $0 + a = T(0,1,a) = a$ и $a + 0 = T(a,1,0) = a$, што значи да је 0 неутрал за сабирање. По (2.3) (користећи (2.1)) имамо јединствено решење x једначине $T(a,1,x) = a + x = b$. По (2.4) (користећи (2.1) и (2.2)) имамо јединствено решење x једначине $T(x,1,a) = x + a = b = T(x,0,b)$. Овим смо доказали да је $(\mathbb{K},+)$ петља са неутралом 0.

Што се множења тиче, морамо најпре показати затвореност операције $\cdot$ у $\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Ако бисмо имали $x \neq 0, y \neq 0$ и $T(x,y,0) = x \cdot y = 0 = T(x,0,0)$, по (2.4) (јер $y \neq 0$) имамо јединствено решење за x, што је контрадикторно са тим да $x = 0$ јесте очигледно решење. За свако $a \in \mathbb{K}$ из (2.1) имамо $1 \cdot a = T(1,a,0) = a$ и $a \cdot 1 = T(a,1,0) = a$, што значи да је 1 неутрал за множење. Из (2.5) за $a \neq 0$ једначине $T(a,x,y) = b$ и $T(0,x,y) = y = 0$ имају јединствено заједничко решење $(x,y) = (x,0)$ и зато постоји јединствено решење x за $T(a,x,0) = a \cdot x = b$ По (2.4) за $a \neq 0$ имамо јединствено решење x једначине $T(x,a,0) = x \cdot a = b = T(x,0,b)$. Овим смо доказали да је $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ петља са неутралом 1. □

Претходна лема даје неке особине структуре $(\mathbb{K},+,\cdot)$ која је изведена из тернарног прстена $(\mathbb{K},T)$, али напоменимо да у општем случају он није прстен у традиционалном алгебарском смислу. Не можемо много тога рећи о алгебри у тернарном прстену. Међутим, када наметнемо одређене геометријске услове за пројективну раван, ствари се мењају на боље и добијамо лепе алгебарске услове за тернарни прстен. Све се чини много лепше у случају да додатно важи $T(a,b,c) = a \cdot b + c$, а за такав тернарни прстен кажемо да је ***линеаран***.

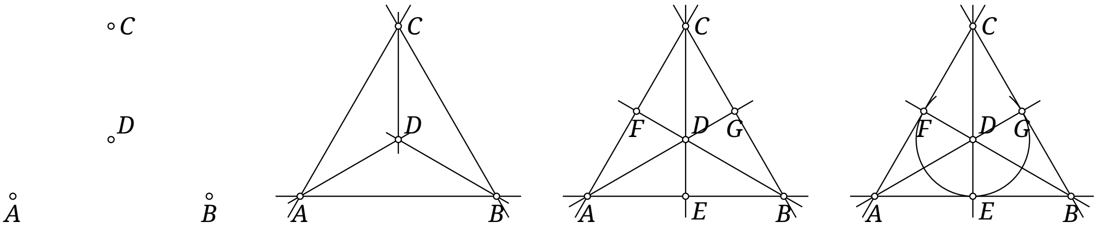
Историјски, тернарни прстен је 1943. године открио Хал[51] [36]. Међутим, дефиниција коју смо изложили није оригинална Халова, већ модификација која се временом усталила као стандардна. Модификације су могуће и у самој координатизацији, те иако ми користимо Халов метод, постоје и друге методе, на пример незнатну разлику има Пикерт[52] [62], док је метод који су изложили Хјуз и Пајпер [42] другачији.

2.6 Коначна пројективна раван

Концепт пројективне равни заснован на уведене три аксиоме инциденције је прилично општи. Интуитивни модел $\mathbb{EP}^2$ је само једна од могућности, док је питање

[51] Marshall Hall (1910–1990), амерички математичар
[52] Günter Pickert (1917–2015), немачки математичар

комплетне класификације свих могућих пројективних равни прилично далеко од људског разумевања. Пројективна раван не мора да има бесконачан број елемената, а природно се поставља питање како изгледа најмања могућа пројективна раван, односно она која има најмање тачака.



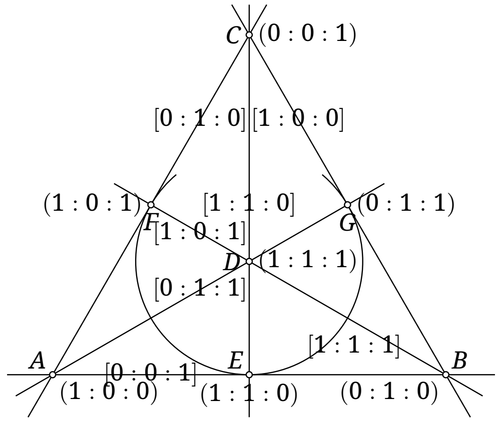
Аксиома 2.3 гарантује езгистенцију тачака A, B, C, D, међу којима нема три колинеарне. Оне су различите јер иначе две исте са произвољном трећом јесу колинеарне. По Аксиоми 2.1 сваки пар тих тачака одређује јединствену спојницу, што генерише укупно 6 различитих правих. Аксиома 2.2 захтева да сваки пар различитих правих има јединствено сециште. Постоје тачно три сецишта која недостају и то су $E = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$, $F = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$ и $G = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$, што гарантује нове три тачке E, F и G. Поновна примена Аксиоме 2.1 захтева постојање нових правих $E \vee F$, $E \vee G$ и $F \vee G$ које се разликују од почетних шест, али могу бити исте međусобно. Како свакако имамо бар једну нову праву, број правих не може бити мањи од 7, као ни број тачака. Најједноставније је поставити E, F и G тако да буду колинеарне, чиме се комплетира пројективна раван. Оваква конструкција има 7 тачака и 7 правих, а једноставно се проверава да испуњава све три аксиоме. Тако конструисану минималну пројективну раван називамо ***Фаноова раван***.

Фаноова раван је име добила по „оцу коначне геометрије“ који је у свом раду [29] први конструисао коначни тродимензиони пројективни простор са 15 тачака, 35 правих и 15 равни, тако да свака права садржи тачно 3 тачке, док су све равни заправо Фаноове равни са 7 тачака.

Коначна пројективна раван је пројективна раван $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ за коју су скупови $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ коначни. Најлакше је добијамо као специјалан случај аналитичке пројективне равни $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ кад поље $\mathbb{F}$ заменимо неким коначним пољем. Најједноставнији примери коначних поља су проста поља (минимална потпоља која садрже јединицу). За сваки прост број p имамо скуп целих бројева по модулу p,

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z} \big/ p\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

где сваки елемент $a \neq 0$ захваљујући малој Фермаовој теореми има мултипликативни инверз a^{p-2}, те је $\mathbb{Z}_p$ поље. Минимално поље $\mathbb{Z}_2$ има само два елемента (0 и 1), а њему одговара аналитичка пројективна раван $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$.



Ако пажљиво нацртамо слику, лако можемо препознати да је $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$ управо претходно дефинисана Фаноова раван. Свака права Фаноове равни садржи тачно три тачке, а можемо показати да је то минималан број тачака на правој у свакој пројективној равни.

Лема 2.9. *Свака права пројективне равни инцидентна је са бар три тачке.*

Доказ. Нека је $p \in \mathcal{P}$ произвољна права која је инцидентна са највише две тачке. Аксиома 2.3 утврђује постојање четири тачке међу којима нема три колинеарне. Нека је A тачка која није инцидентна са p (постоје бар две такве тачке), а нека су B, C и D преостале. Праве $A \vee B$, $A \vee C$ и $A \vee D$ инцидентне су са A, међусобно су различите и различите од p. Због тога су сецишта $p \wedge (A \vee B)$, $p \wedge (A \vee C)$ и $p \wedge (A \vee D)$ три различите тачке инцидентне са правом p, што је контрадикција. □

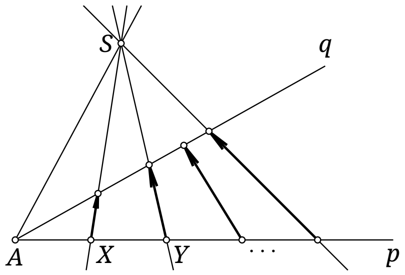
Принцип дуалности из Теореме 2.2 омогућава да без доказа поставимо нову теорему која је дуална некој већ доказаној теореми. Директна примена на Лему 2.9 доноси нам њен дуал.

Лема 2.10. *Свака тачка пројективне равни инцидентна је са бар три праве.*

У Фаноовој равни, свака права инцидентна је са тачно три тачке, а свака тачка инцидентна је са тачно три праве. Појављивање истих бројева није случајно, о чему говори наредна лема.

Лема 2.11. *За коначну пројективну раван постоји константа k, таква да је свака права инцидентна са тачно k тачака, док је свака тачка инцидентна са тачно k правих.*

Доказ. Нека је p права која је инцидентна са тачно k тачака. Нека је $q \neq p$ произвољна права и $A = p \wedge q$. По Леми 2.10 постоји права $r \mathcal{I} A$ различита од p и q, док по Леми 2.9 постоји тачка $S \mathcal{I} r$ различита од A. Свака тачка X инцидентна са p генерише тачку $(X \vee S) \wedge q$ инцидентну са правом q. Ако за неке тачке X и Y инцидентне са p важи $(X \vee S) \wedge q = (Y \vee S) \wedge q$, било би $X \vee S = Y \vee S$ $(= ((X \vee S) \wedge q) \vee S)$ и одатле $X = Y$. Различите тачке са p генеришу различите тачке са q, као и обратно, те је и права q инцидентна са тачно k тачака.



Нека је S произвољна тачка. Како све праве нису конкурентне (јер дуално, све тачке по Аксиоми 2.3 нису колинеарне), то постоји права p која није инцидентна са S. Свака тачка X инцидентна са p генерише праву $X \vee S$, али и обратно, јер свака права инцидентна са S мора да има сециште са p. Одавде следи да ако је p инцидентна са тачно k тачака, то је S инцидентна са тачно k правих. □

Претходна лема помаже да лако израчунамо број елемената коначних скупова $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$. ***Ред коначне пројективне равни*** је број за један мањи од броја тачака инцидентних са сваком правом, односно то је број $r = k - 1$ где је k број из Леме 2.11. Ако је r ред коначне пројективне равни, онда је број тачака на свакој правој $r + 1$, што је и број правих кроз сваку тачку. Свака од $r + 1$ правих које пролазе кроз произвољну тачку садржи додатних r тачака. Све ове тачке су различите, иначе би неке од тих правих поред почетне тачке имале још једно сециште, тако да укупан број тачака износи $(r+1)r+1$, односно r^2+r+1.

Лема 2.12. *Коначна пројективна раван реда r садржи r^2+r+1 тачака и r^2+r+1 правих.*

Размотримо поново коначна поља или Галоаова[53] поља како се још називају. Број елемената коначног поља зовемо ***ред поља***, а $\mathbb{Z}_p$ за просто p је пример поља реда p. Нека је $\mathbb{F}_r$ коначно поље реда r, а $\mathbb{F}_r\mathbb{P}^2$ одговарајућа аналитичка пројективна раван из Теореме 2.4. Број тачака те равни износи $(r^3-1)/(r-1) = r^2+r+1$, што се може оправдати тиме да има r^2 класа еквиваленције са векторима представницима $(x, y, 1)$ за произвољно $x, y \in \mathbb{F}_r$, затим r класа са представницима $(x, 1, 0)$ за произвољно $x \in \mathbb{F}_r$, као и једну класу са представником $(1, 0, 0)$. Дакле, ред аналитичке пројективне равни једнак је реду коначног поља од којег раван потиче.

Коначно поље реда r постоји ако и само ако му је ред степен простог броја, односно ако је $r = p^k$ за прост број p и природан број k. Додатно, сва коначна поља датог реда су међусобно изоморфна, тако да се за поље реда $r = p^k$ могу користити недвосмислене ознаке $\mathbb{F}_r$ или $GF(r)$. За сваки степен простог броја $r = p^k$ постоји $f(x)$, иредуцибилни полином степена k, при чему поље реда r добијамо сечењем прстена $\mathbb{Z}_p[x]$ свих полинома над $\mathbb{Z}_p$ по идеалу генерисаним са $f(x)$, односно $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p[x]/f(x)$ је поље реда p^k.

На природно питање који су могући редови за коначне пројективне равни прилично је тешко дати прецизан одговор. Оно што за сада знамо је да ред коначне пројективне равни може бити сваки степен простог броја $r = p^k$. Како постоји коначно поље реда r, аналитичка раван која му одговара је такође реда r. Међутим, иако не постоји коначно поље реда које није степен простог броја то не мора да значи да не постоји коначна пројективна раван тог реда, јер постоје пројективне равни које нису индуковане пољем, односно нису све пројективне равни аналитичке. Са друге стране, до сада није позната ниједна пројективна раван која за ред нема степен простог броја, што је разлог да се верује да су то једини дозвољени редови.

2.7 Латински квадрати ⊛

Коначне пројективне равни могу се повезати са латинским квадратима, а за детаљну анализу латинских квадрата позивамо читаоца да прочита неке књиге из комбинаторике попут оне које су написали ван Линт[54] и Вилсон[55] [48].

Под ***квадратом*** реда n, подразумевамо пресликавање $L\colon V \times K \to S$, односно уређену четворку $(V, K, S; L)$, где су V, K и S коначни скупови од n елемената. Елементи скупа V су ***врсте***, елементи скупа K су ***колоне***, а елементи скупа S су ***симболи*** квадрата. Кажемо да је квадрат ***латински*** уколико једначина $L(i, j) = x$ има јединствено решење $j \in K$ за свако $i \in V$, $x \in S$, као и јединствено решење $i \in V$ за свако $j \in K$, $x \in S$.

Појам латинског квадрата потиче од Ојлера[56] који је за симболе из скупа S користио латинска слова, те отуда и име. Латински квадрат се уобичајено записује као квадратна матрица чији улаз у врсти i и колони j одговара симболу $L(i, j)$, при чему има особину да се сваки симбол појављује тачно једном у свакој врсти и свакој колони.

[53] Évariste Galois (1811–1832), француски математичар
[54] Jacobus Hendricus van Lint (1932–2004), холандски математичар
[55] Richard Michael Wilson (1945), амерички математичар
[56] Leonhard Euler (1707–1783), швајцарски математичар и физичар

A	B	C	D	E
B	D	A	E	C
C	E	D	B	A
D	A	E	C	B
E	C	B	A	D

Пример латинског квадрата реда 5 имамо на слици горе, а вреди напоменути да су популарни примери класичне судоку загонетке које су латински квадрати реда 9. Често се сви скупови поистовете, односно постави се $V = K = S = S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, при чему латински квадрат постаје квазигрупа S_n са бинарном операцијом $\circ$, где је $x \circ y = L(x, y)$. Специјално, латинске квадрате можемо добити као табелу неке групе.

За два квадрата $L_1 \colon V \times K \to S$ и $L_2 \colon V \times K \to T$ са истим скуповима врста и колона, кажемо да су ***ортогонална*** уколико за сваки уређен пар $(s, t) \in S \times T$ постоји јединствено $(x, y) \in V \times K$ тако да је $L_1(x, y) = s$ и $L_2(x, y) = t$. Ортогоналност два квадрата може се представити једначином $S \times T = \{(L_1(x, y), L_2(x, y)) : (x, y) \in V \times K\}$, али је то најбоље илустровати на примеру. Посматрајмо два латинска квадрата реда 4 и преклопимо их један преко другог, на следећи начин.

A	K	Q	J
K	A	J	Q
Q	J	A	K
J	Q	K	A

$+$

$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$

$\to$

$A\spadesuit$	$K\heartsuit$	$Q\diamondsuit$	$J\clubsuit$
$K\diamondsuit$	$A\clubsuit$	$J\spadesuit$	$Q\heartsuit$
$Q\clubsuit$	$J\diamondsuit$	$A\heartsuit$	$K\spadesuit$
$J\heartsuit$	$Q\spadesuit$	$K\clubsuit$	$A\diamondsuit$

Нови квадрат добијен суперпозицијом има све различите симболе, односно уређене парове оригиналних симбола, што значи да су почетна два латинска квадрата ортогонална. Квадрат добијен суперпозицијом два ортогонална латинска квадрата зовемо ***грчко-латински квадрат***, а термин такође потиче од Ојлера који је за симболе из S користио латинска, док је за симболе из T користио грчка слова. Ојлер је оригинално објавио два рада на тему грчко-латинских квадрата. У свом кратком раду из 1776. године [26] он је посматрао магичне квадрате који су у блиској вези са грчко-латинским квадратима, док је у другом, прилично опширном раду из 1779. године [27], изучавао егзистенцију грчко-латинских квадрата.

Поставља се природно питање о томе колико латинских квадрата конкретног реда можемо направити тако да су свака два међусобно ортогонална. На пример, за ред $n = 4$ можемо поћи од латинског квадрата који формира Клајнова група $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а онда пермутацијама врсти добити још два латинска квадрата.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Једноставном провером можемо установити да смо овако добили три међусобно ортогонална латинска квадрата реда 4, а испоставља се да је у питању теоретски максимум.

Лема 2.13. *Не постоји више од $n - 1$ међусобно ортогоналних латинских квадрата реда n.*

Доказ. Нека су $L_1, \ldots, L_n$ међусобно ортогонални латински квадрати реда n. Како су квадрати латински то за свако $i \in S_n$ постоји $s_i \in S_n$ тако да важи $L_i(1, s_i) = L_i(2, 1)$ (разноликост прве врсте), при чему је $s_i \neq 1$ (разноликост прве колоне). У случају да је $s_i = s_j = s$ било би $(L_i(2,1), L_j(2,1)) = (L_i(1,s_i), L_j(1,s_j))$, те због $(2,1) \neq (1,s)$, квадрати L_i и L_j нису ортогонални. Дакле, за $i \neq j$ важи $s_i \neq s_j$, при чему је $s_i \neq 1$, што противречи Дирихлеовом[57] принципу. □

Теоретски максимум се достиже у случају коначног поља $\mathbb{F}$ реда n, где за свако $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ можемо конструисати $L_a(x,y) = ax + y$. Овако направљени квадрати ($n-1$ њих) су латински јер тада имамо $L_a(x_1,y) = ax_1 + y \neq ax_2 + y = L_a(x_2,y)$ за $x_1 \neq x_2$, као и $L_a(x,y_1) = ax + y_1 \neq ax + y_2 = L_a(x,y_2)$ за $y_1 \neq y_2$. Додатно, уколико претпоставимо $(L_{a_1}(x_1,y_1), L_{a_2}(x_1,y_1)) = (L_{a_1}(x_2,y_2), L_{a_2}(x_2,y_2))$, то добијамо $a_1(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0$ и $a_2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0$, те отуда $(a_1 - a_2)(x_1 - x_2) = 0$, што даје $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Тако је $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$, што значи да су наши квадрати међусобно ортогонални.

За систем од $n-1$ међусобно ортогоналних латинских квадрата реда n кажемо да је ***комплетан***, док њиховом суперпозицијом добијамо квадрат који зовемо ***хипер-грчко-латински квадрат***. Међутим, креирање међусобно ортогоналних латинских квадрата не може ићи произвољно. На пример, за латински квадрат

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

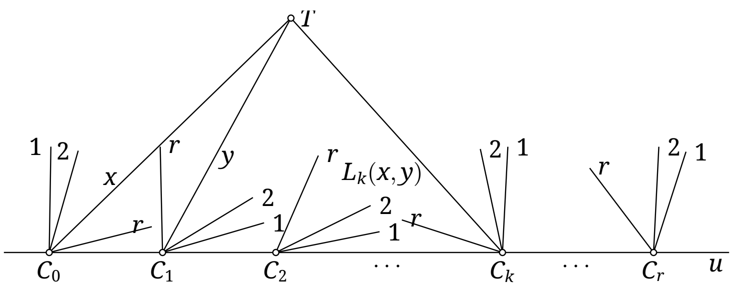
не постоји латински квадрат реда 4 који је са њим ортогоналан.

Некада је погодно увести два нова квадрата реда n са $L_+(x,y) = x$ и $L_-(x,y) = y$, што су у случају реда $n = 4$ наредни квадрати.

$$L_+ = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad L_- = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Ови додатни квадрати нам омогућавају да проверавамо само ортогоналност јер оригинални квадрати су латински ако и само ако су ортогонални и на L_+ и на L_-.

Латинске квадрате можемо геометријски повезати са коначним пројективним равнима на следећи начин. Нека је $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ коначна пројективна раван реда r. Нека је $u \in \mathcal{P}$ произвољна права, а $C_0, C_1, \ldots, C_r$ све тачке инцидентне са њом. Постоји r правих инцидентних са C_i различитих од u, и нумеришемо их са $p(i,1)$, $p(i,2)$,..., $p(i,r)$, тако да је $f_i(p(i,j)) = j$. За произвољну тачку $T \not{\mathcal{I}} u$ посматрамо са њом инцидентне праве: $T \vee C_0$, $T \vee C_1$,..., $T \vee C_r$, те нека је $f_0(T \vee C_0) = x$ и $f_1(T \vee C_1) = y$. За свако $k \in \{2,3,\ldots,r\}$ постављамо $L_k(x,y) = f_k(T \vee C_k)$ и посматрамо особине овако дефинисаног пресликавања $L_k \colon S_r \times S_r \to S_r$.



Ако је $L_k(x_1,y) = L_k(x_2,y)$, тада су тачке $p(0,x_1) \wedge p(1,y)$ и $p(0,x_2) \wedge p(1,y)$ инцидентне са правом $p(k, L_k(x_1,y)) = p(k, L_k(x_2,y))$, као и са правом $p(1,y)$, тако да по Аксиоми 2.2

[57] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), немачки математичар

имамо $x_1 = x_2$. Сасвим слично, ако је $L_k(x,y_1) = L_k(x,y_2)$, тада су тачке $p(0,x) \wedge p(1,y_1)$ и $p(0,x) \wedge p(1,y_2)$ инцидентне са правом $p(k, L_k(x,y_1)) = p(k, L_k(x,y_2))$, као и са правом $p(0,x)$, одакле имамо $y_1 = y_2$. Због тога је L_k латински квадрат.

Ако је $(L_j(x_1,y_1), L_k(x_1,y_1)) = (L_j(x_2,y_2), L_k(x_2,y_2))$, тада су и тачка $p(0,x_1) \wedge p(1,y_1)$ и тачка $p(0,x_2) \wedge p(1,y_2)$ инцидентне са правом $p(j, L_j(x_1,y_1)) = p(j, L_j(x_2,y_2))$, као и са правом $p(j, L_k(x_1,y_1)) = p(j, L_k(x_2,y_2))$, али како је $u = C_j \vee C_k$, то мора бити $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Овим смо доказали да су L_j и L_k међусобно ортогонални латински квадрати за различите $j,k \in \{2,3,\ldots,r\}$.

Дакле, егзистенција коначне пројективне равни реда r повлачи егзистенцију $r-1$ међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r. Овај резултат нас наводи да повежемо латинске квадрате са координатизацијом, односно тернарним прстеном. Наредна лема мало упрошћава дефиницију тернарног прстена у случају коначне пројективне равни.

Лема 2.14. *Услов* (2.5) *из дефиниције тернарног прстена* $(\mathbb{K}, T)$ *је сувишан за коначно* $\mathbb{K}$.

Доказ. Услов (2.5) из дефиниције каже да за $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ са $a \neq c$ постоји јединствено $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ тако да је $T(a,x,y) = b$ и $T(c,x,y) = d$. Уколико $(x,y) \mapsto (b,d)$ није бијекција на $\mathbb{K}^2$ имали бисмо $T(a,x,y) = T(a,x',y')$ и $T(c,x,y) = T(c,x',y')$ за неке $(x,y) \neq (x',y')$ што за $x = x'$ противречи услову (2.3), а за $x \neq x'$ противречи услову (2.4). □

Користећи везу између ортогоналних латинских квадрата и тернарног прстена у могућности смо да докажемо теорему коју је 1938. поставио Боус[58] у [8].

Теорема 2.15 (Боус). *Пројективна раван реда r постоји ако и само ако постоји комплетан систем међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r.*

Доказ. Ако постоји тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$ за $\mathbb{K} = \{0,1,\ldots,r-1\}$, можемо конструисати ортогоналне латинске квадрате са $L_k(i,j) = T(k,i,j)$ за $k \neq 0$. За $T(k,i,x) = T(k,i,y)$ по (2.3) следи $x = y$ одакле су симболи у колонама различити. Из (2.2) следи да је $k = 0$ решење једначине $T(k,x,j) = T(k,y,j)$, те друго решење због (2.4) повлачи $x = y$, одакле су симболи у врстама различити, те су сви конструисани квадрати латински. Ако $T(x,a,b) = T(x,c,d)$ има два решења онда из (2.5) следи $a = c$, а затим из (2.3) добијамо и $b = d$, односно $(a,b) = (c,d)$, те су наши квадрати ортогонални. Дакле, ако постоји пројективна раван реда r, по Теореми 2.6 постоји тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$ реда r, и одатле комплетан систем међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r. Напоменимо да је ово само другачији доказ тврђења које смо претходно показали геометријски.

Размотримо обрат. Претпоставимо да имамо комплетан систем међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r. Пермутација симбола у латинском квадрату оставиће квадрат латинским, а очигледно не утиче ни на ортогоналност, тако да можемо користити такозвану ***нормалну форму*** у којој сви квадрати имају идентичну прву врсту коју чине редом бројеви $0,1,\ldots,r-1$. Пермутација врсти, истовремено на свим квадратима, такође не утиче на ортогоналност, тако да их можемо дотерати да први од њих има прву колону коју такође чине редом бројеви $0,1,\ldots,r-1$. Остале квадрате можемо нумерисати тако да им је редни број једнак елементу на позицији $(1,0)$. Дакле, почетни услов је еквивалентан егзистенцији комплетног система $L_1, L_2, \ldots, L_{r-1} \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r, где је $\mathbb{K} = \{0,1,2,\ldots,r-1\}$, при чему је $L_a(0,j) = j$, $L_1(j,0) = j$ и $L_a(1,0) = a$ за свако $j \in \mathbb{K}$ и $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Докажимо да тернарни прстен лако добијамо са $T(a,b,c) = L_a(b,c)$ за $a \neq 0$ уз неопходно $T(0,b,c) = c$. Услови (2.1) и (2.2) очигледно важе директном провером. Услов (2.3) важи јер како је L_a латински то једначина $T(a,b,y) = L_a(b,y) = d$

[58] Raj Chandra Bose (1901–1987), индијски математичар

има јединствено решење y. Услов (2.4) важи јер ортогоналност квадрата гарантује да једначина $L_x(a,b) = T(x,a,b) = T(x,c,d) = L_x(c,d)$ има јединствено решење x. Како је $\mathbb{K}$ коначан скуп, (2.5) не морамо проверавати због Леме 2.14, те је $(\mathbb{K}, T)$ заиста тернарни прстен. Коначно, по Теореми 2.7, тернарни прстен генерише пројективну раван истог реда. □

Најмањи број који није степен простог броја је $r = 6$, тако да по Теореми 2.15 питање егзистенције коначне пројективне равни реда 6 је еквивалентно егзистенцији 5 међусобно ортогоналних латинских квадрата реда 6. Међутим, испоставља се да заправо не постоје ни два ортогонална латинска квадрата реда 6, односно не постоји грчко-латински квадрат реда 6.

Легенда каже да је Катарина Велика[59] поставила Ојлеру проблем 36 официра. Официри долазе из 6 пукова и имају 6 различитих чинова (један официр сваког чина из сваког пука) и потребно их је разместити на табли 6 са 6 тако да свака врста и свака колона садржи официра сваког чина, као и официра сваког пука. Очигледно је да решење овог проблема подразумева грчко-латински квадрат реда 6. Ојлер је проблем разматрао 1779. у [27] и убедио себе да је то немогуће, али није имао никакав записан доказ. У преписци из 1842. године, Шумахер[60] је писао Гаусу[61], да је његов ученик Клаусен[62] доказао да ортогонални латински квадрати реда 6 не постоје [33].

За први сачуван коректан доказ овог проблема заслужан је Тари[63] [74]. Његов доказ из 1901. био је прилично дугачак, јер је посматрао 9408 посебних случајева које је појединачно разматрао [47]. Вреди напоменути да је 1984. Стинсон[64] у [70] дао кратак доказ овог тврђења. У сваком случају број 6 је историјски први број за који је доказано да не може бити ред коначне пројективне равни.

2.8 Егзистенција коначних равни ⊛

Коначне пројективне равни реда n могу се представити помоћу матрица. ***Матрица инциденције*** је квадратна бинарна матрица реда n^2+n+1 (због Леме 2.12), где су праве представљене врстама, а тачке колонама, тако да врста i има 1 у колони j уколико је права која одговара врсти i инцидентна са тачком којој одговара колона j, у супротном на тој позицији стоји 0. На пример, Фаноовој равни одговара следећа матрица инциденције.

$$\begin{array}{|ccccccc|}
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Врсте матрице инциденције можемо схватити као векторе. Како су две различите праве инцидентне са тачно једном заједничком тачком (Аксиома 2.2) то је скаларни производ две различите врсте једнак 1. Дуално, како су две различите тачке инцидентне са тачно једном правом (Аксиома 2.1) то је скаларни производ две различите колоне једнак 1. Скаларни производ врсте, односно колоне, са самом собом

[59] Екатерина II Алексеевна (1729–1796), руска царица
[60] Heinrich Christian Schumacher (1780–1850), немачко-дански астроном
[61] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), немачки математичар
[62] Thomas Clausen (1801–1885), дански математичар и астроном
[63] Gaston Tarry (1843–1913), француски математичар
[64] Douglas Robert Stinson (1956), канадски математичар

једнак је броју тачака инцидентних са правом, односно броју правих инцидентних са тачком, што је у нашем случају $n+1$. Уколико матрицу инциденције означимо са A, наведене особине скаларног производа врста, односно колона, дају једначину

$$AA^\intercal = A^\intercal A = n\mathbb{1} + J, \tag{2.6}$$

где је $\mathbb{1}$ јединична матрица, а J матрица која се састоји само од јединица. На пример, једначина (2.6) омогућава да лако срачунамо детерминанту матрице инциденције A. Ако одузмемо прву врсту од свих осталих врсти, а затим додамо све колоне на прву колону, добијамо

$$\begin{aligned}\det(A^\intercal A) &= \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ -n & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (n+1)^2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (n+1)^2 n^{n^2+n},\end{aligned}$$

односно

$$\det A = \pm(n+1)n^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

Да бисмо повезали коначне пројективне равни са матрицом инциденције биће нам потребни неки стари резултати из теорије бројева које смо истакли у Секцији А.2.

Претпоставимо да постоји коначна пројективна раван реда n и нека је A њена матрица инциденције. По Леми 2.12 број тачака у равни је $N = n^2+n+1$, што је онда ред квадратне матрице A. Нека је $X = (x_1, \ldots, x_N)$ вектор са рационалним улазима и нека је $Z = (z_1, \ldots, z_N)$ такав да важи $Z = AX$, односно вредности z_i се добијају као линеарне комбинације вредности x_j. Применом једначине (2.6) добијамо

$$Z^\intercal Z = X^\intercal A^\intercal AX = X^\intercal(n\mathbb{1} + J)X = nX^\intercal X + X^\intercal JX,$$

те како је $Z^\intercal Z = z_1^2 + \ldots + z_N^2$, $X^\intercal X = x_1^2 + \ldots + x_N^2$ и $X^\intercal JX = (x_1 + \ldots + x_N)^2$, имамо

$$z_1^2 + \ldots + z_N^2 = n(x_1^2 + \ldots + x_N^2) + (x_1 + \ldots + x_N)^2.$$

У случају да је $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ имамо $N \equiv 3 \pmod 4$, односно $N+1$ је дељив са 4. Како сабирке желимо да поделимо у четворке додајемо nx_{N+1}^2 на обе стране једначине. Лагранжева[65] теорема о четири квадрата (Лема А.6) нам омогућава да уведемо замену $n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$ и тако добијемо

$$\begin{aligned} z_1^2 + \ldots + z_N^2 + nx_{N+1}^2 &= (x_1 + \ldots + x_N)^2 \\ &+ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)\left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \ldots + (x_{N-2}^2 + x_{N-1}^2 + x_N^2 + x_{N+1}^2)\right). \end{aligned}$$

По Леми А.5 производ збира четири квадрата је збир четири квадрата, одакле следи

$$z_1^2 + \ldots + z_N^2 + nx_{N+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{N+1}^2 + (x_1 + \ldots + x_N)^2,$$

где y_i линеарно зависе од x_j. Међутим, како је веза из Леме А.5 бијективна то линеарно повезујемо и x_j преко y_i, те како се z_k линеарно изражавају преко x_j коначно имамо да z_k линеарно зависе од y_i, при чему су коефицијенти рационални.

[65] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), италијанско-француски математичар и астроном

Наредну идеју спроводимо у N корака. На кораку i изражавамо y_i као линеарну комбинацију од $y_{i+1}, \dots, y_{N+1}$ са рационалним коефицијентима тако да важи $y_i^2 = z_i^2$. То радимо тако што најпре узимамо изражавање за z_i преко $y_1, \dots, y_{N+1}$, те како смо у претходних $i-1$ корака добили изражено $y_1, \dots, y_{i-1}$, можемо добити z_i као линеарну комбинацију од $y_i, \dots, y_{N+1}$. Нека је $z_i = c_i y_i + \dots + c_{N+1} y_{N+1}$ за неке рационалне бројеве $c_i, \dots, c_{N+1}$. У случају $c_i \neq 1$ постављамо $y_i = (c_{i+1} y_{i+1} + \dots + c_{N+1} y_{N+1})/(1-c_i)$, што даје $z_i = y_i$, док је иначе $c_i = 1$ те тада постављамо $y_i = -(c_{i+1} y_{i+1} + \dots + c_{N+1} y_{N+1})/2$, што даје $z_i = -y_i$. У сваком случају добијамо $y_i^2 = z_i^2$.

Након ових N корака добили смо изражавање за $y_1, \dots, y_N$ и y_{N+1} као слободан параметар, односно $y_1, \dots, y_N$ су неки рационални умношци од y_{N+1}, али линеарна веза са почетка каже да су то такође и $x_1, \dots, x_{N+1}$. Како смо обезбедили $y_1^2 = z_1^2, y_2^2 = z_2^2, \dots, y_N^2 = z_N^2$, после сређивања наша једначина постаје

$$nx_{N+1}^2 = y_{N+1}^2 + (x_1 + \dots + x_N)^2,$$

где је $x_{N+1} = q_1 y_{N+1}$ и $x_1 + \dots + x_N = q_2 y_{N+1}$ за неке рационалне бројеве q_1 и q_2. Како је y_{N+1} произвољно, поставићемо га на најмањи заједнички садржалац од имениоца бројева q_1 и q_2, да бисмо добили целе бројеве x_{N+1} и $x_1 + \dots + x_N$. Коначно, проблем се своди на решавање једначине $nx^2 = y^2 + z^2$ у скупу целих бројева, где по Леми А.7, n мора бити збир два квадрата. То комплетира теорему коју су 1949. доказали Брук[66] и Рајзер[67] [14].

Теорема 2.16 (Брук–Рајзер). *Уколико постоји пројективна раван реда r за $r \equiv 1, 2 \pmod 4$ тада је r збир два квадрата.*

Позитиван одговор на егзистенцију коначних пројективних равни реда r имали смо у случају да је r степен простог броја (на пример $\mathbb{F}_r\mathbb{P}^2$), а сада имамо теорему која даје негативан одговор, на пример решава случајеве $r = 6, 14, 21, 22, \dots$ Као последицу имамо да број облика $8n + 6$ не може бити ред пројективне равни.

Питање егзистенције пројективних равни реда r је превише компликовано јер поред већ наведених решен је једино случај $r = 10$. Наиме, Лам[68], Тиел[69] и Сверч[70] су 1989. на лукав начин искористили исцрпљујућу претрагу рачунара и добили компјутерски доказ да коначна пројективна раван реда 10 не постоји [49, 51]. Напоменимо да су и даље остали отворени случајеви $r = 12, 15, 18, 20, 24, \dots$

2.9 Дезаргово тврђење

Под ***фигуром*** подразумевамо било који скуп тачака и правих пројективне равни. Ако у игру укључимо и релацију инциденције између тачака и правих неке фигуре добијамо ***конфигурацију***. У складу са Аксиомама 2.1 и 2.2, конфигурација има својство да постоји највише једна права инцидентна са две различите тачке, као и да постоји највише једна тачка која је инцидентна са две различите праве. ***Геометријска конфигурација*** је конфигурација код које је свака права инцидентна са константним бројем тачака, а свака тачка инцидентна са константним бројем правих. Ако је константа за број тачака на правој једнака константи за број правих кроз тачку онда је у питању ***симетрична геометријска конфигурација***.

Неке фигуре и конфигурације имају посебну важност. ***Низ тачака*** чине све тачке инцидентне са неком правом. Низ тачака инцидентних са правом p обележавамо

[66]Richard Hubert Bruck (1914–1991), амерички математичар
[67]Herbert John Ryser (1923–1985), амерички математичар
[68]Clement W H Lam , канадски математичар
[69]Larry H Thiel, канадски програмер
[70]Stan Swiercz, канадски програмер

са (p) и кажемо да је права p носилац низа (p). Дуална фигура низу тачака је ***прамен правих***, а чине га све праве инцидентне са неком тачком. Прамен правих инцидентних са тачком A обележавамо са (A) и кажемо да је тачка A носилац прамена (A).

Један од разлога што за низ тачака користимо ознаку (p) уместо самог p је тај што често радимо са прилично апстрактним конструкцијама (попут конструкције аналитичке равни $\mathbb{FP}^2$), где је незгодно писати инциденцију са $P \in p$. Захваљујући новој ознаци можемо писати чисто скуповно $P \in (p)$, уместо да инсистирамо на запису $P\mathcal{I}p$.

Фигура која се састоји од n тачака међу којима нема три колинеарне, и свих спојница њима одређеним, зове се ***(потпуни) n-теменик***. Фигура која се састоји од n правих међу којима нема три конкурентне, и свих сецишта њима одређеним, зове се ***(потпуни) n-страник***. Тачке ових фигура зовемо ***темена***, док праве зовемо ***странице***, како за n-теменик, тако и за n-страник. Напоменимо да су n-теменик и n-страник међусобно дуалне фигуре, али како n-теменик има n темена и $n(n-1)/2$ страница, а n-страник има $n(n-1)/2$ темена и n страница, то су они једнаки само у случају $n = 3$.

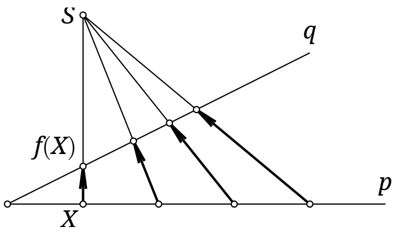
Најчешће радимо са случајевима $n \in \{3, 4, 5, 6\}$. Фигура која се састоји од три неколинеарне тачке и три неконкурентне праве које су њима одређене зове се ***тротеменик*** (n-теменик за $n = 3$), а та иста фигура зове се и ***тространик*** (n-страник за $n = 3$). ***Четворотеменик*** (n-теменик за $n = 4$) је фигура која се састоји од четири тачке од којих никоје три нису колинеарне, а она има четири темена и шест страница. Приметимо да Аксиома 2.3 заправо гарантује постојање четворотеменика. ***Четвоространик*** (n-страник за $n = 4$) је њему дуална фигура, а има четири странице и шест темена. Фигуре у случају $n = 5$ зовемо ***петотеменик*** и ***петостраник***, а у случају $n = 6$, ***шестотеменик***, односно ***шестостраник***.

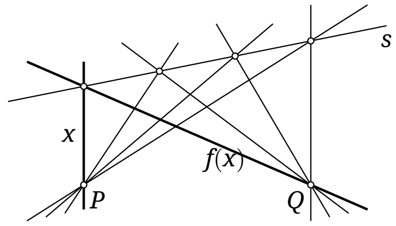
Осим потпуних n-теменика и n-страника имамо потребу да дефинишемо и нешто рестриктивније фигуре. ***Прост n-теменик*** је фигура $T_1T_2 \dots T_n$ која се састоји од n тачака $T_1, T_2, \dots, T_n$ датих у одређеном цикличном редоследу тако да сваке три узастопне нису колинеарне и од n правих $T_1{\vee}T_2, T_2{\vee}T_3, \dots, T_n{\vee}T_1$ које су спојнице узастопних тачака. Њему дуална фигура зове се ***прост n-страник***, а евидентно је да је он исто што и прост n-теменик. Тачке, односно праве, простог n-теменика ће и даље бити темена, односно странице. За две странице простог n-страника које су инцидентне са истим теменом кажемо да су ***суседне***, као и за два темена простог n-теменика која су инцидентна са истом страницом. За два темена T_i и T_j простог $2n$-теменика $T_1T_2 \dots T_{2n}$ кажемо да су ***насрамна*** уколико је $|i - j| = n$.

Низ тачака и прамен правих су једнодимензиони објекти између којих природно можемо увести основна пресликавања по узору на доказ Леме 2.11. Нека је p права, а S тачка која није инцидентна са p. Посматрајмо низ (p) и прамен (S). Прамен (S) можемо видети као скуп свих спојница $S{\vee}X$, где су X тачке из низа (p). Важи и дуално, низ (p) можемо видети као скуп свих сецишта $p{\wedge}x$, где су x праве из прамена (S). На овај начин успостављену бијекцију између низа (p) и прамена (S) зовемо ***перспективитет*** (или перспективно пресликавање). Са $(p)\doublebarwedge(S)$ обележавамо перспективитет $f\colon (p) \to (S)$ дат са $f(X) = S{\vee}X$, док са $(S)\doublebarwedge(p)$ обележавамо њему инверзан перспективитет $f\colon (S) \to (p)$ дат са $f(x) = p{\wedge}x$.

У питању су основна пресликавања пројективне геометрије и уобичајено радимо са њиховим композицијама. Да бисмо компоновали два перспективитета неопходно је да се преклопи домен првог са кодоменом другог. Тада добијамо композицију као пресликавање код кога су и домен и кодомен истог типа (низ тачака или прамен правих). Овакво пресликавање такође зовемо ***перспективитет***, али у том случају наводимо у односу на шта је оно перспективитет.

Перспективитет $(p)\overset{S}{\doublebarwedge}(q)$ је пресликавање $f\colon (p) \to (q)$ дато са $f(X) = (S{\vee}X){\wedge}q$, што је заправо композиција $((S)\doublebarwedge(q)) \circ ((p)\doublebarwedge(S))$, при чему $S \in \mathcal{T}$ није инцидентно са $p, q \in \mathcal{P}$. Кажемо да је $(p)\overset{S}{\doublebarwedge}(q)$ перспективитет низа (p) на низ (q) у односу на ***центар перспективе*** S, а основна одлика је колинеарност тачака X, $f(X)$ и S.





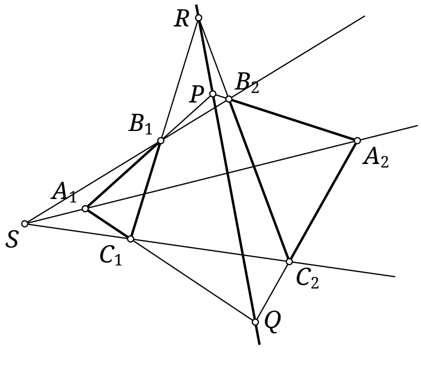
Сасвим слично постављамо дуалну дефиницију. Перспективитет $(P)\overset{s}{\doublebarwedge}(Q)$ је пресликавање $f\colon (P) \to (Q)$ дато са $f(x) = (s \wedge x) \vee Q$, што је композиција $((s)\doublebarwedge(Q)) \circ ((P)\doublebarwedge(s))$, при чему $s \in \mathcal{P}$ није инцидентно са $P, Q \in \mathcal{T}$. Кажемо да је $(P)\overset{s}{\doublebarwedge}(Q)$ перспективитет прамена (P) на прамен (Q) у односу на ***осу перспективе*** s, а њена основна особина је конкурентност правих x, $f(x)$ и s.

Перспективитети из претходних дефиниција се са низова тачака и праменова правих могу уопштити на фигуре. За две фигуре кажемо да су ***перспективне у односу на тачку*** (центар) S ако постоји бијективно пресликавање такво да су сваке две одговарајуће тачке заједно са S колинеарне. За две фигуре кажемо да су ***перспективне у односу на праву*** (осу) s ако постоји бијективно пресликавање такво да су сваке две одговарајуће праве заједно са s конкурентне.

Изузетан значај у пројективној геометрији има Дезаргова теорема о два тротеменика која су у перспективном положају. Занимљиво је да Дезарг заправо никад није објавио своју теорему, а њено прво појављивање везано је за практичну књигу о перспективи коју је 1648. објавио Дезаргов пријатељ и ученик Бос[71] [12].

Тврђење 2.17 (Дезаргово тврђење). *Ако су два тротеменика перспективна у односу на неку тачку, онда су они перспективни у односу на неку праву.*

Дезаргово тврђење заправо каже да ако два тротеменика имају центар, онда они имају и осу. У расписаном облику ово тврђење гласи: „Ако су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ такви да су праве $A_1 \vee A_2$, $B_1 \vee B_2$ и $C_1 \vee C_2$ конкурентне, тада су тачке $(A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, $(A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $(B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$ колинеарне."



Још је рано да ово знаменито Дезаргово тврђење зовемо теорема, јер оно се не може доказати коришћењем досадашњих аксиома (Аксиоме 2.1, 2.2 и 2.3). Оно важи у (тродимензионом) пројективном простору (видети Теорему 2.24), али не увек када је оперативни простор само пројективна раван, што ћемо ускоро показати.

Дезаргова раван је пројективна раван у којој важи Дезаргово тврђење. Конфигурација Дезарговог тврђења састоји се од десет тачака и десет правих, при чему је

[71] Abraham Bosse (1604–1676), француски уметник

свака права инцидентна са три тачке, а свака тачка инцидентна са три праве, те је у питању симетрична геометријска конфигурација. Она има много симетрија јер улога различитих тачака није фиксирана, односно било која од десет тачака може се узети за центар перспективе два тротеменика. Тврђење дуално Дезарговом зовемо Обрнуто Дезаргово тврђење.

Тврђење 2.18 (Обрнуто Дезаргово тврђење). *Ако су два тространика перспективна у односу на неку праву, онда су они перспективни у односу на неку тачку.*

Испоставља се да је Обрнуто Дезаргово тврђење (Тврђење 2.18) директна последица самог Дезарговог тврђења (Тврђење 2.17).

Теорема 2.19. *У Дезарговој равни важи Обрнуто Дезаргово тврђење.*

Доказ. Нека су тространици који су перспективни у односу на праву заправо тротеменици B_1B_2P и C_1C_2Q, те су тачке $S = (B_1 \vee B_2) \wedge (C_1 \vee C_2)$, $A_1 = (B_1 \vee P) \wedge (C_1 \vee Q)$ и $A_2 = (B_2 \vee P) \wedge (C_2 \vee Q)$ колинеарне. Добијамо да су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективни у односу на S, те су по Дезарговом тврђењу тачке $P = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, $Q = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $R = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$ колинеарне, одакле следи да су праве $B_1 \vee C_1$, $B_2 \vee C_2$ и $P \vee Q$ конкурентне у R, што је и требало доказати. □

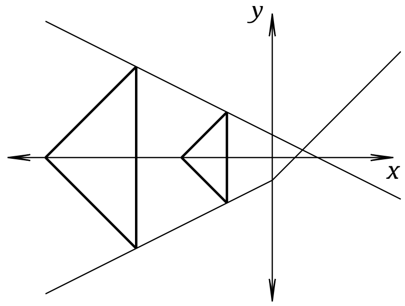
Како је тространик исто што и тротеменик, то се Дезаргово тврђење може третирати на следећи начин: „Два тротеменика су перспективна у односу на неку тачку ако и само ако су перспективна у односу на неку праву." Захваљујући Теореми 2.19, Принцип дуалности из Теореме 2.2 остаје на снази.

Теорема 2.20. *У Дезарговој равни важи Принцип дуалности.*

Међутим, испоставља се да постоје пројективне равни које нису Дезаргове. Елегантан пример не-Дезаргове равни 1902. је предложио Молтон[72] [57], а ми приказујемо једну варијацију на ту тему. ***Молтонову раван*** добијамо модификацијом проширене еуклидске равни $\mathbb{EP}^2 = (\mathcal{T}_\infty, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{I}_\infty)$. Задржаћемо тачке из $\mathcal{T}_\infty$, као и праве из $\mathcal{P}_\infty$ које су вертикалне ($x = n$) или имају непозитиван нагиб ($y = kx+n$, за $k \leqslant 0$). Што се тиче правих из $\mathcal{P}_\infty$ са позитивним нагибом ($y = kx + n$, за $k > 0$), задржаћемо стандардну инциденцију само на њеном делу где је $x \leqslant 0$, као и за њену бесконачну тачку, док ћемо за $x > 0$ удвостручити нагиб. Нове праве су тако изломљене праве описане једначином

$$y = \begin{cases} kx + n & \text{за } x \leqslant 0 \\ 2kx + n & \text{за } x > 0 \end{cases}$$

(за $k > 0$), при чему је изломљена права инцидентна са бесконачном тачком која одговара правој $y = kx + n$ из $\mathcal{P}_\infty$. Није тешко проверити да је овако конструисана Молтонова раван заиста пројективна раван.



[72]Forest Ray Moulton (1872–1952), амерички астроном

За конкретне тачке $A_1(-1,1)$, $B_1(-1,-1)$, $C_1(-2,0)$, односно $A_2(-3,2)$, $B_2(-3,-2)$, $C_2(-5,0)$ имамо троуглове $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ са паралелним страницама $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Како се паралелне праве секу у бесконачним тачкама, а све бесконачне тачке леже на бесконачној правој u_∞, то су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективни у односу на осу u_∞. Међутим, они нису перспективни у односу на неки центар јер праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 нису конкурентне, што се лако проверава (видети слику). Дакле, у Молтоновој равни не важи Обрнуто Дезаргово тврђење, те по Теореми 2.19 не важи ни Дезаргово тврђење, односно Молтонова раван није Дезаргова раван.

Како Дезаргова конфигурација захтева десет тачака, у Фаноовој равни једноставно нема довољно тачака за контрапример, те Дезаргово тврђење тривијално важи. Штавише, све коначне пројективне равни реда $r \leqslant 8$ су Дезаргове. Међутим, постоје три различите не-Дезаргове равни реда девет, што су и најмањи контрапримери, а свака од њих има 91 тачку и 91 праву [78].

2.10 Пројективни простор

Иако смо пре свега заинтересовани за пројективне равни није лоше да аксиоматски уведемо и појам пројективног простора. Циљ је демонстрирати да Дезаргово тврђење јесте природна особина пројективне равни уколико је она смештена у пројективни простор. Аксиоматизација пројективног простора није лак задатак, морамо додати неке аксиоме, а неке модификовати. Уводимо још један основни скуп $\mathcal{R}$ чији су елементи *равни*, а ту су релације инциденције како између тачака и равни, тако и између правих и равни. За тачке које су инцидентне са истом равни кажемо да су ***компланарне***, док су у супротном ***некомпланарне***. Аксиоме инциденције пројективног простора можемо увести на следећи начин:

$$\text{Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите тачке;} \tag{2.7}$$
$$\text{Постоји јединствена раван која је инцидентна са три неколинеарне тачке;} \tag{2.8}$$
$$(\forall p \in \mathcal{P})(\forall \alpha \in \mathcal{R})((p \not{\mathcal{I}} \alpha) \Rightarrow (\exists! A \in \mathcal{T})(A \mathcal{I} p) \wedge (A \mathcal{I} \alpha)); \tag{2.9}$$
$$(\forall A \in \mathcal{T})(\forall \alpha \in \mathcal{R})((\exists p \in \mathcal{P})(A \mathcal{I} p) \wedge (p \mathcal{I} \alpha)) \Rightarrow A \mathcal{I} \alpha; \tag{2.10}$$
$$\text{Постоје четири некопланарне тачке међу којима нема три колинеарне;} \tag{2.11}$$
$$\text{Свака права инцидентна је са бар три тачке.} \tag{2.12}$$

Под (2.7) налази се Аксиома 2.1, тако да можемо задржати ознаку за спојницу $X \vee Y$ кад год су тачке X и Y различите. У пројективном простору нема места за Аксиому 2.2 јер две различите праве се секу само ако су инцидентне са истом равни. Овај проблем решавамо са (2.9) где гарантујемо егзистенцију и јединственост пресечне тачке праве и равни (која је не садржи). Задржаћемо ознаку и за сециште, тако да ћемо ту заједничку тачку праве p и равни α која са њом није инцидентна обележити са $\alpha \wedge p$.

Додатна особина Аксиоме 2.2 била је да ограничи димензију пројективне равни на два, док (2.9) на сличан начин ограничава димензију пројективног простора на три. Систем аксиома који је изложио Хартсхорн у [38] гарантује само егзистенцију заједничке тачке праве и равни, због чега уводи нову аксиому по којој су две равни инцидентне са бар једном заједничком правом. Такав приступ прилично компликује доказе, пре свега доказ наредне леме која је овако директна последица јединствености из (2.9).

Лема 2.21. *Ако је раван инцидентна са две различите тачке онда је она инцидентна са њиховом спојницом.*

Раван је нови појам који је по (2.8) једнозначно одређен са три неколинеарне тачке. Раван коју једнозначно одређују тачке X, Y и Z обележавамо са (XYZ) кад год су те тачке неколинеарне. Како смо увели равни, самим тим инциденцију између тачака и равни, односно између правих и равни, неопходна нам је транзитивност релације инциденције коју видимо у (2.10).

Аксиому 2.3 која нам је гарантовала езгистенцију основних појмова модификујемо са (2.11), тако да и даље постоји четворотеменик, међутим он је овде просторан, односно његова темена су некопланарна. Како нам је потребан и копланаран четворотеменик додајемо (2.12), што је раније била Лема 2.9.

Лема 2.22. *Свака раван инцидентна је са четири тачке међу којима нема три колинеарне.*

Доказ. Нека су A, B, C, D некопланарне тачке из (2.11) међу којима нема три колинеарне. Оне морају бити различите, а како нису све инцидентне са равни α, претпоставимо $D\not{\mathcal{I}}\alpha$. Тада је $(A\vee D)\not{\mathcal{I}}\alpha$, јер иначе (2.10) из $(A\vee D)\mathcal{I}\alpha$ са $D\mathcal{I}(A\vee D)$ повлачи $D\mathcal{I}\alpha$. Сада по (2.9) постоји тачка $A' = \alpha\wedge(A\vee D)$, а сасвим слично постоје и тачке $B' = \alpha\wedge(B\vee D)$ и $C' = \alpha\wedge(C\vee D)$. Претпоставимо да су тачке A', B', C' колинеарне. Тачке A', B', D су неколинеарне (иначе су са њима колинеарне и A, B, C), те постоји раван $(A'B'D)$. Она је по Леми 2.21 инцидентна са $A'\vee B'$, самим тим по (2.10) и са тачком C'. По Леми 2.21 раван $(A'B'D)$ је даље инцидентна са $D\vee A'$, $D\vee B'$ и $D\vee C'$, самим тим по (2.10) и са A, B, C. Дакле, A, B, C, D су инцидентне са α и самим тим копланарне, што је контрадикција. Овим смо доказали да је произвољна раван α инцидентна са три неколинеарне тачке A', B', C'. По (2.12) можемо изабрати нове тачке $A''\mathcal{I}(A'\vee C')$ и $B''\mathcal{I}(B'\vee C')$ те добити четворотеменик $A'A''B'B''$ чија су темена инцидентна са α. □

Лема 2.23. *Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите равни.*

Доказ. Нека су α и β различите равни. По Леми 2.22 постоје неколинерне тачке A, B, C које су инцидентне са α. По (2.8) све оне нису инцидентне са β, те нека је $C\not{\mathcal{I}}\beta$, што повлачи $(A\vee C)\not{\mathcal{I}}\beta$ и $(B\vee C)\not{\mathcal{I}}\beta$, одакле постоје тачке $M = \beta\wedge(A\vee C)$ и $N = \beta\wedge(B\vee C)$. Коначно, Лема 2.21 даје заједничку праву $M\vee N$. □

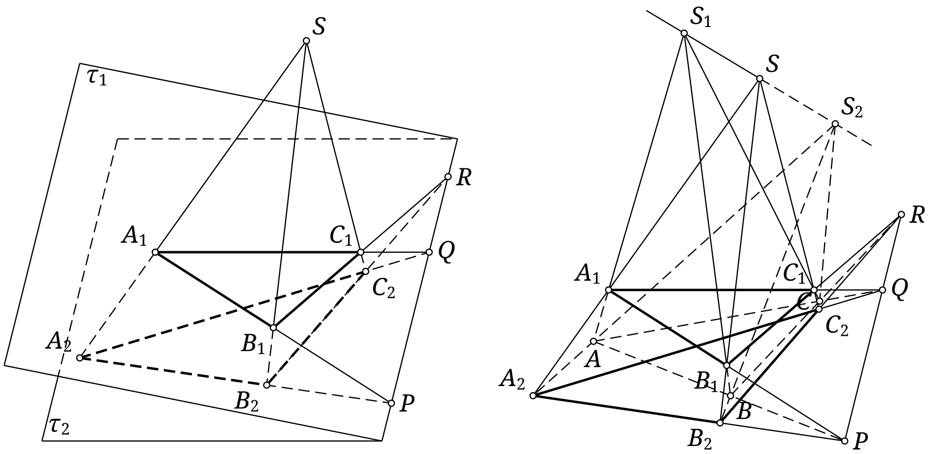
Основна идеја је да свака раван пројективног простора чини пројективну раван у смислу дефиниције. Ако је $A \neq B$ са $A\mathcal{I}\alpha$ и $B\mathcal{I}\alpha$, тада по (2.7) постоји спојница $A\vee B$, која је по Леми 2.21 инцидентна са α, што проверава Аксиому 2.1. Нека је $p \neq q$ са $p\mathcal{I}\alpha$ и $q\mathcal{I}\alpha$. По (2.11) постоји тачка $A\not{\mathcal{I}}\alpha$. Нека је раван $\beta = (ABC)$, где су B и C тачке из (2.12) инцидентне са p. Како $q\not{\mathcal{I}}\beta$, то постоји тачка $S = \beta\wedge q$. За $S\not{\mathcal{I}}p$ имали бисмо $\beta = (SBC) = \alpha$, што доказује да је S заједничка тачка са којом су инцидентне p и q, те проверава Аксиому 2.2. Како је Аксиома 2.3 већ проверена у Леми 2.22 свака раван пројективног простора јесте пројективна раван. Додатно, у пројективном простору важи Дезаргово тврђење.

Теорема 2.24. *Раван пројективног простора је Дезаргова раван.*

Доказ. Већ смо показали да је свака раван пројективног простора једна пројективна раван, тако да можемо користити постојећу ознаку $p\wedge q$ за сециште, кад год су p и q различите праве инцидентне са истом равни. Преостаје нам да докажемо Дезаргово тврђење.

Нека је тачка S центар перспективе тротеменика $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, те нека је $\tau_1 = (A_1B_1C_1)$ и $\tau_2 = (A_2B_2C_2)$. У првом (и једноставнијем) случају претпоставимо $\tau_1 \neq \tau_2$. Праве $A_1\vee B_1$ и $A_2\vee B_2$ инцидентне су са равни (SA_1B_1) и зато имају сециште $P = (A_1\vee B_1)\wedge(A_2\vee B_2)$. Сасвим слично добијамо тачке $Q = (A_1\vee C_1)\wedge(A_2\vee C_2)$ и $R = (B_1\vee C_1)\wedge(B_2\vee C_2)$. Како су тачке P, Q, R инцидентне и са τ_1 и са τ_2, по Леми 2.21

су инцидентне и са њиховом јединственом пресечном правом из Леме 2.23, те морају бити колинеарне.



У случају $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ бирамо праву инцидентну са S која није инцидентна са τ, а онда тачке S_1 и S_2 које су са њом инцидентне. Како је $S = (A_1{\vee}A_2){\wedge}(S_1{\vee}S_2)$, то су копланарне A_1, A_2, S_1, S_2 и постоји сециште $A = (S_1{\vee}A_1){\wedge}(S_2{\vee}A_2)$. Сасвим слично постоје сецишта $B = (S_1{\vee}B_1){\wedge}(S_2{\vee}B_2)$ и $C = (S_1{\vee}C_1){\wedge}(S_2{\vee}C_2)$. Раван (ABC) је различита од τ, те можемо применити већ доказани случај теореме кад су равни тротеменика различите. Како су праве $A{\vee}A_1$, $B{\vee}B_1$ и $C{\vee}C_1$ инцидентне са S_1, то су тачке $P_1 = (A{\vee}B){\wedge}(A_1{\vee}B_1)$, $Q_1 = (A{\vee}C){\wedge}(A_1{\vee}C_1)$ и $R_1 = (B{\vee}C){\wedge}(B_1{\vee}C_1)$ колинеарне. Како су праве $A{\vee}A_2$, $B{\vee}B_2$ и $C{\vee}C_2$ инцидентне са S_2, то су тачке $P_2 = (A{\vee}B){\wedge}(A_2{\vee}B_2)$, $Q_2 = (A{\vee}C){\wedge}(A_2{\vee}C_2)$ и $R_2 = (B{\vee}C){\wedge}(B_2{\vee}C_2)$ колинеарне. Тачке P_1 и P_2 су инцидентне и са правом $A{\vee}B$ и са равни $A_1A_2B_1B_2$, одакле мора бити $P_1 = P_2 = (A_1{\vee}B_1){\wedge}(A_2{\vee}B_2)$. Сасвим слично важи $Q_1 = Q_2 = (A_1{\vee}C_1){\wedge}(A_2{\vee}C_2)$ и $R_1 = R_2 = (B_1{\vee}C_1){\wedge}(B_2{\vee}C_2)$. Коначно, тачке $P_1 = P_2$, $Q_1 = Q_2$ и $R_1 = R_2$ су инцидентне и са τ и са (ABC), те су колинеарне (Лема 2.21 и Лема 2.23). □

2.11 Пројективитети

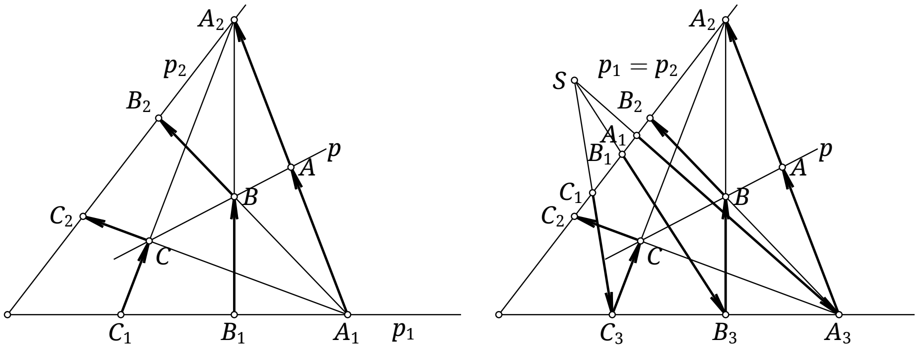
Перспективитети из уведених дефиниција су бијективна пресликавања чији су домени и кодомени низови тачака или праменови правих. ***Пројективитет*** је композиција коначно много перспективитета, а обележавамо га ознаком $(x)\barwedge(y)$, где су (x) и (y), домен и кодомен, једнодимензиони објекти (низови тачака или праменови правих). Како често радимо са композицијама неких пројективитета (што свакако морају бити пројективитети), то је добро увести нотацију у виду ланца, где се преклапају одговарајући кодомени и домени суседних пресликавања. На пример, композицију $((y)\barwedge(z)) \circ ((x)\barwedge(y))$ можемо једноставније записати са $(x)\barwedge(y)\barwedge(z)$, док је $(p)\doublebarwedge(S)\doublebarwedge(q)$ заправо $(p)\overset{S}{\doublebarwedge}(q)$.

Теорема 2.25. *Постоји пројективитет који различите тачке A_1, B_1, C_1 праве p_1, пресликава редом у различите тачке A_2, B_2, C_2 праве p_2.*

Доказ. Размотримо најпре случај $p_1 \neq p_2$. Бићемо пажљиви јер желимо да покријемо све могуће пројективне равни. На пример, у Фаноовој равни свака права има тачно три тачке, те све тачке са правих p_1 и p_2 морају бити укључене, док сециште $p_1{\wedge}p_2$ мора бити како једна од тачака A_1, B_1, C_1, тако и једна од A_2, B_2, C_2. Како је највише два слова из $\{A, B, C\}$ укључено у $p_1{\wedge}p_2$, то претпостављамо $A_1 \neq p_1{\wedge}p_2 \neq A_2$, иначе пермутујемо слова A, B и C. Овако смо обезбедили $A_1 \not\mathcal{I} p_2$, $A_2 \not\mathcal{I} p_1$ и $A_1 \neq A_2$, што омогућава егзистенцију тачака $B = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$ и $C = (A_1 \vee C_2) \wedge (A_2 \vee C_1)$, као и тачке $A = (A_1 \vee A_2) \wedge (B \vee C)$ са праве $p = B \vee C$. Тражени пројективитет је композиција

$$(p_1) \overset{A_2}{\doublebarwedge} (p) \overset{A_1}{\doublebarwedge} (p_2)$$

јер за њега важи $(A_1, B_1, C_1) \mapsto (A, B, C) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$.



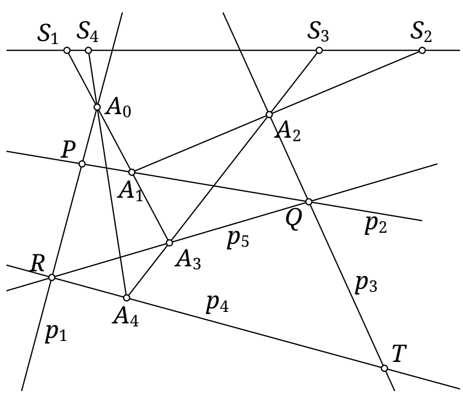
Преостао је случај $p_1 = p_2$. Довољно је изабрати произвољну праву $p_3 \neq p_1$ и тачку S ван p_1 и p_3, те у игру укључити перспективитет $f = (p_1) \overset{S}{\doublebarwedge} (p_3)$. Како је $p_3 \neq p_2$, по већ доказаном постоји пројективитет $(p_3) \barwedge (p_2)$ који слика $(f(A_1), f(B_1), f(C_1)) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$, те је тражени пројективитет композиција $(p_1) \overset{S}{\doublebarwedge} (p_3) \barwedge (p_2)$. $\square$

У доказу претходне теореме видели смо пројективитет који се успоставља између три пара одговарајућих елемената као композицију два (ако су носиоци различити) или три (ако су носиоци исти) перспективитета. Ова особина генерално важи у Дезарговој равни, односно сваки пројективитет може се написати као композиција два (за различите носиоце) или три (за исте носиоце) перспективитета.

Лема 2.26. *У Дезарговој равни, за конкурентне праве p_1, p_2, p_3, композиција перспективитета $(p_1) \doublebarwedge (p_2) \doublebarwedge (p_3)$ је перспективитет.*

Доказ. Нека су праве p_1, p_2, p_3 конкурентне у тачки T, те $f_1 = (p_1) \overset{S_1}{\doublebarwedge} (p_2)$ и $f_2 = (p_2) \overset{S_2}{\doublebarwedge} (p_3)$. За тачке $A, B \in (p_1) \setminus \{T\}$, поставимо $A_1 = f_1(A)$, $A_2 = f_2(A_1)$ и $B_1 = f_1(B)$, $B_2 = f_2(B_1)$. Посматрајмо тротеменике AA_1A_2 и BB_1B_2. Како су $A \vee B = p_1$, $A_1 \vee B_1 = p_2$ и $A_2 \vee B_2 = p_3$ конкурентне, то је T центар перспективе тротеменика. По Дезарговом тврђењу они имају осу перспективе s на којој су тачке $S_1 = (A \vee A_1) \wedge (B \vee B_1)$, $S_2 = (A_1 \vee A_2) \wedge (B_1 \vee B_2)$ и $(A \vee A_2) \wedge (B \vee B_2)$. Дакле $A \vee A_2$, $B \vee B_2$ и $S_1 \vee S_2$ су конкурентне, те је $f_2 \circ f_1$ перспективитет са центром $(A \vee A_2) \wedge (S_1 \vee S_2)$. $\square$

Лема 2.27. *У Дезарговој равни, композиција перспективитета $f = (p_1) \doublebarwedge (p_2) \doublebarwedge (p_3)$ може се раставити на композицију перспективитета $f = (p_1) \doublebarwedge (p_4) \doublebarwedge (p_3)$, где је p_4 произвољна права која није инцидентна са $p_1 \wedge p_3$ и није спојница $X \vee f(X)$ за неко $X \in (p_1)$.*



Доказ. Нека је $f = (p_1)\overset{S_1}{\doublebarwedge}(p_2)\overset{S_2}{\doublebarwedge}(p_3)$, а p_4 произвољна права која испуњава услове леме. Означимо $P = p_1 \wedge p_2$, $Q = p_3 \wedge p_2$, $R = p_1 \wedge p_4$, $T = p_3 \wedge p_4$ и нека је $p_5 = R \vee Q$. За произвољно $A_0 \in (p_1)$ нека је $A_2 = f(A_0)$ и $A_3 = (A_0 \vee S_1) \wedge p_5$. Како су p_5, p_2, p_3 конкурентне у Q, то по Леми 2.26 имамо $f = (p_1)\overset{S_1}{\doublebarwedge}(p_5)\overset{S_1}{\doublebarwedge}(p_2)\overset{S_2}{\doublebarwedge}(p_3) = (p_1)\overset{S_1}{\doublebarwedge}(p_5)\overset{S_3}{\doublebarwedge}(p_3)$, где је $S_3 = (S_1 \vee S_2) \wedge (A_2 \vee A_3)$. Како су p_1, p_5, p_4 конкурентне у R, то по Леми 2.26 имамо $f = (p_1)\overset{S_1}{\doublebarwedge}(p_5)\overset{S_3}{\doublebarwedge}(p_4)\overset{S_3}{\doublebarwedge}(p_3) = (p_1)\overset{S_4}{\doublebarwedge}(p_4)\overset{S_3}{\doublebarwedge}(p_3)$, где је $S_4 = (S_1 \vee S_3) \wedge (A_0 \vee A_4)$, при чему је $A_4 = (A_3 \vee S_3) \wedge p_4$. □

Лема 2.28. *У Дезарговој равни, сваки пројективитет између два различита низа тачака који је композиција три перспективитета је композиција два перспективитета.*

Доказ. Нека је $f = (p_1)\overset{S_1}{\doublebarwedge}(p_2)\overset{S_2}{\doublebarwedge}(p_3)\overset{S_3}{\doublebarwedge}(p_4)$ и $p_1 \neq p_4$. По Леми 2.26, за конкурентне p_1, p_2, p_3 је $f = (p_1)\doublebarwedge(p_3)\overset{S_3}{\doublebarwedge}(p_4)$, док за конкурентне p_2, p_3, p_4 имамо $f = (p_1)\overset{S_1}{\doublebarwedge}(p_2)\doublebarwedge(p_4)$. Ако p_1, p_3, p_4 нису конкурентне, узимамо праву q која је инцидентна са $p_3 \wedge p_4$ и примењујемо Лему 2.27 по којој је $f = (p_1)\doublebarwedge(q)\doublebarwedge(p_3)\overset{S_3}{\doublebarwedge}(p_4)$, а како су q, p_3, p_4 конкурентне по Леми 2.26 је $f = (p_1)\doublebarwedge(q)\doublebarwedge(p_4)$. Сасвим слично радимо ако p_1, p_2, p_4 нису конкурентне. □

Теорема 2.29. *У Дезарговој равни, сваки пројективитет између два различита низа тачака је композиција два перспективитета.*

Доказ. Пројективитет је композиција перспективитета. Вишеструком применом Леме 2.28 композиције од три перспективитета редукујемо на композиције два перспективитета. Једини проблем представља композиција $(p_1)\doublebarwedge(p_2)\doublebarwedge(p_3)\doublebarwedge(p_4)\doublebarwedge(p_5)$, где је $p_1 = p_4$ и $p_2 = p_5$. Тада користимо Лему 2.27 за $(p_1)\doublebarwedge(p_2)\doublebarwedge(p_3) = (p_1)\doublebarwedge(q)\doublebarwedge(p_3)$, где је $q \neq p_5$ и можемо применити Лему 2.28. □

Као директну последицу Теореме 2.29 имамо следећу теорему.

Теорема 2.30. *У Дезарговој равни, сваки пројективитет је композиција највише три перспективитета.*

Напоменимо да сам концепт пројективитета потиче од Понселеа [64], док је $\barwedge$ као ознаку за пројективитет први увео Штаут [71]. Ознака $\doublebarwedge$ за перспективит појавила се касније, а за њу је заслужан Веблен [76].

2.12 Аналитичка пројективна права

Посматрајмо аналитичку пројективну раван $\mathbb{FP}^2 = (\mathcal{T}_\mathbb{F}, \mathcal{P}_\mathbb{F}, \mathcal{I}_\mathbb{F})$ индуковану пољем $\mathbb{F}$. Нека су A и B две различите тачке из $\mathcal{T}_\mathbb{F}$ дате својим хомогеним координатама. Природно се поставља питање како описати све тачке са спојнице $A \vee B$. Тачка C припада правој $A \vee B$ ако и само ако је $(\overrightarrow{A \vee B}) \cdot \overrightarrow{C} = 0$, а како по Леми 2.5 важи $\overrightarrow{A \vee B} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$, добијамо услов $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{C} = 0$, односно $[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}] = 0$, где је $[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}] = \det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})$ мешовити производ вектора. Кад $\overrightarrow{C}$ распишемо у бази $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ добијамо следећу лему.

Лема 2.31. *Важи $C \in (A \vee B)$ ако и само ако је $\overrightarrow{C} = \mu\overrightarrow{A} + \nu\overrightarrow{B}$ за неке $\mu, \nu \in \mathbb{F}$ без $\mu = 0 = \nu$.*

Аналитичку пројективну праву чине све тачке инцидентне са неком правом из $\mathbb{FP}^2$ и обележавамо је са $\mathbb{FP}^1$. Координатни систем на правој $A \vee B$ уводимо тако што фиксирамо векторе представнике $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$, после чега Лема 2.31 произвољну тачку C праве $A \vee B$ једнозначно, до на множење скаларом, изражава са $\overrightarrow{C} = \mu\overrightarrow{A} + \nu\overrightarrow{B}$ за неке

$\mu, \nu \in \mathbb{F}$ који нису истовремено нула. Тако добијамо хомогене параметре $(\mu : \nu)$ тачке C у односу на конкретне векторе представнике $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$ тачака A и B.

Дуално, за две различите праве p и q, произвољна права r кроз тачку $p \wedge q$ може се изразити као вектор $\overrightarrow{r} = \xi \overrightarrow{p} + \zeta \overrightarrow{q}$ за неке $\xi, \zeta \in \mathbb{F}$ који нису истовремено нула. То нам даје хомогене параметре $(\xi : \zeta)$ праве r у односу на конкретне векторе представнике $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ правих p и q.

Често имамо потребу да из хомогених параметара $(\mu : \nu)$ (који нису једнозначно одређени) уклонимо неодређеност, што нас доводи до природног пресликавања

$$(\mu : \nu) = \left(\frac{\mu}{\nu} : 1\right) \mapsto \frac{\mu}{\nu}.$$

Тако се тачке $(\mu : \nu)$ аналитичке праве $\mathbb{FP}^1$ са $\nu \neq 0$ поистовећују са елементима поља $\mathbb{F}$. Преостала тачка $(\mu : 0) = (1 : 0)$ је налик бесконачној тачки из интуитивне равни и њој додељујемо симбол ∞. Ово доводи до проширења поља $\bar{\mathbb{F}} = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$, где дефинишемо пресликавање $*\colon \mathbb{FP}^1 \to \bar{\mathbb{F}}$ са $(\mu : \nu)^* = \mu/\nu$ које зовемо ***дехомогенизација***.

У свакој аналитичкој пројективној равни $\mathbb{FP}^2$ природно важи Дезаргово тврђење.

Теорема 2.32. *Аналитичка пројективна раван је Дезаргова раван.*

Доказ. Нека су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективни у односу на центар S којем фиксирамо вектор представник $\overrightarrow{S}$. Како је S на правој $A_1 \vee A_2$, то постоје $\overrightarrow{A_1}$ и $\overrightarrow{A_2}$, тако да је $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2}$ (у питању су вектори представници $\mu\overrightarrow{A_1}$ и $\nu\overrightarrow{A_2}$ из Леме 2.31). Слично, постоје одговарајући вектори тако да важи $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}$, односно $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_2}$. Из једнакости $\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2} = \overrightarrow{S}$ важи $\overrightarrow{A_1} - \overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{A_2} = \overrightarrow{P}$. Применимо ли Лему 2.31 на тачку $P = [\overrightarrow{P}]$ добијамо $P\mathcal{I}(A_1 \vee B_1)$ (због $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{A_1} - \overrightarrow{B_1}$) и $P\mathcal{I}(A_2 \vee B_2)$ (због $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{A_2}$), те је $P = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$. Сасвим слично из $\overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2} = \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_2} = \overrightarrow{S}$ имамо $\overrightarrow{B_1} - \overrightarrow{C_1} = \overrightarrow{C_2} - \overrightarrow{B_2} = \overrightarrow{Q}$ и важи $Q = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$, док из $\overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_2} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} = \overrightarrow{S}$ добијамо $\overrightarrow{C_1} - \overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{A_2} - \overrightarrow{C_2} = \overrightarrow{R}$ и важи $R = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$. Из претходних једначина добијамо $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{R} = (\overrightarrow{A_1} - \overrightarrow{B_1}) + (\overrightarrow{B_1} - \overrightarrow{C_1}) + (\overrightarrow{C_1} - \overrightarrow{A_1}) = \overrightarrow{0}$, то су по Леми 2.31 тачке P, Q, R колинеарне и чине осу перспективе тротеменика $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. □

Пројективитети су композиције перспективитета и рад на њима можемо наставити употребом хомогених координата. Како желимо да изведемо формуле пројективитета, најпре ћемо се позабавити перспективитетима. Нека су дате права s и тачка $S\not{\mathcal{I}}s$, те нека су A и B различите тачке низа тачака (s), а p и q различите праве прамена правих (S). Фиксирањем конкретних вектора представника $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$, односно $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$, одређујемо хомогене координатне системе на (s) и (S), при чему напомињемо да они сада имају координате дужине два, а не три као што је раније био случај.

Посматрајмо перспективитет $(s)\bar{\barwedge}(S)$ који тачку $X \in (s)$ слика у праву $x \in (S)$ тако да важи $x = X \vee S$, односно $X = x \wedge s$. Ако тачка X низа (s) има координате $(\mu : \nu)$, а права x прамена (S) има координате $(\xi : \zeta)$, то инциденција између њих $X\mathcal{I}x$ даје

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{X} = (\xi \overrightarrow{p} + \zeta \overrightarrow{q}) \cdot (\mu \overrightarrow{A} + \nu \overrightarrow{B}) = 0$$

Одавде добијамо однос

$$(\xi : \zeta) = ((-\overrightarrow{q} \cdot (\mu \overrightarrow{A} + \nu \overrightarrow{B})) : (\overrightarrow{p} \cdot (\mu \overrightarrow{A} + \nu \overrightarrow{B}))),$$

који можемо записати у матричном облику

$$\lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{A} & -\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{A} & \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Веза између вектора координата је једна линеарна трансформација дата матрицом

$$M = \begin{pmatrix} -\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{A} & -\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{A} & \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{B} \end{pmatrix},$$

чија је детерминанта

$$\begin{aligned} \det(M) &= (\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{B})(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{A}) - (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{B})(\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{A}) = ((\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{p} - (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{q}) \cdot \overrightarrow{A} \\ &= (\overrightarrow{B} \times (\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q})) \cdot \overrightarrow{A} = [\overrightarrow{B}, \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}, \overrightarrow{A}] = [\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}] \\ &= (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \cdot (\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}) = \overrightarrow{A \vee B} \cdot \overrightarrow{p \wedge q} = \overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{S}. \end{aligned}$$

Из $S \not\mathcal{I} s$ добијамо $\det(M) = \overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{S} \neq 0$, те је матрица M регуларна и обратна веза $(\mu : \nu)$ преко $(\xi : \zeta)$ дата је њој инверзном матрицом M^{-1}. Самим тим основни перспективитет у $\mathbb{FP}^2$ је индукован регуларном линеарном трансформацијом. Како је пројективитет композиција коначно много таквих перспективитета онда је и он индукован регуларном линеарном трансформацијом.

Теорема 2.33. *Пројективитет у $\mathbb{FP}^2$ је индукован регуларном линеарном трансформацијом.*

Веза између хомогених координата (локалне координате у $\mathbb{FP}^1$) при пројективитету је једна регуларна квадратна матрица реда два са коефицијентима из $\mathbb{F}$, а важно је напоменути да због хомогености, матрице M и λM за $\lambda \neq 0$ представљају исти пројективитет.

Испитајмо промену координатног система. Нека је први координатни систем задат векторима $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$, а други векторима $\overrightarrow{P}$ и $\overrightarrow{Q}$, где су A, B, P, Q тачке из $\mathbb{FP}^1$. Произвољна тачка C може се изразити са $\overrightarrow{C} = \mu\overrightarrow{A} + \nu\overrightarrow{B}$, али и са $\overrightarrow{C} = \xi\overrightarrow{P} + \zeta\overrightarrow{Q}$. Како су P и Q тачке праве $A \vee B$ то постоје неки скалари α, β, γ, δ такви да је $\overrightarrow{P} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{Q} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$. Имамо $\mu\overrightarrow{A} + \nu\overrightarrow{B} = \overrightarrow{C} = \xi(\alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}) + \zeta(\gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}) = (\alpha\xi + \gamma\zeta)\overrightarrow{A} + (\beta\xi + \delta\zeta)\overrightarrow{B}$, одакле добијамо

$$\lambda \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Како су P и Q различите тачке то је $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ и промена координата је такође индукована регуларном матрицом.

Теорема 2.34. *Промена координата у $\mathbb{FP}^1$ је индукована регуларном линеарном трансформацијом.*

Последње две теореме говоре да је веза између хомогених координата како при пројективитету тако и при промени координатног система, индукована једном регуларном матрицом. Суштински ради се о истој ствари посматраној на два различита начина, а у питању су активни (пресликавање мења тачке, а оставља исти координатни систем) и пасивни (тачка остаје иста, али се мења координатни систем) приступ.

Теорема 2.35. *Нека су дати хомогени координатни системи за праве p и q из $\mathbb{FP}^2$. Постоји јединствено пресликавање индуковано регуларном линеарном трансформацијом које произвољне три различите тачке са p пресликава редом у произвољне три различите тачке са q.*

Доказ. Довољно је показати да постоји јединствено пресликавање индуковано регуларном линеарном трансформацијом које повезује базне хомогене координате $(1 : 0)$, $(0 : 1)$ и $(1 : 1)$ са три произвољне тачке $(\mu_1 : \nu_1)$, $(\mu_2 : \nu_2)$ и $(\mu_3 : \nu_3)$ неке праве. Тада можемо повезати базне хомогене координате са три тачке праве p регуларном матрицом M_1, као и са три тачке праве q регуларном матрицом M_2, одакле добијамо везу између тројки тачака са p и са q преко регуларне матрице $M_2 \circ M_1^{-1}$.

Тражена пројективна трансформација је облика

$$\lambda \begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Из $(1:0) \mapsto (\mu_1 : \nu_1)$ имамо $\lambda_1\mu_1 = m_{11}$ и $\lambda_1\nu_1 = m_{21}$, док из $(0:1) \mapsto (\mu_2 : \nu_2)$ имамо $\lambda_2\mu_2 = m_{12}$ и $\lambda_2\nu_2 = m_{22}$. Из последње везе, $(1:1) \mapsto (\mu_3 : \nu_3)$, добијамо једначине $\lambda_3\mu_3 = m_{11} + m_{12}$ и $\lambda_3\nu_3 = m_{21} + m_{22}$. Ових шест хомогених једначина са седам непознатих дају јединствено решење. На пример, можемо све почетне једначине сменити у последње две за $\lambda_3\mu_3 = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ и $\lambda_3\nu_3 = \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2$, што у матричном облику гласи

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} \mu_3 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Како су тачке $(\mu_1 : \nu_1)$ и $(\mu_2 : \nu_2)$ различите то је матрица везе регуларна и добијамо до на множење скаларом јединствено решење за λ_1, λ_2 и λ_3 кроз једначину

$$\frac{1}{\lambda_3} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_3 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} \begin{pmatrix} \nu_2\mu_3 - \mu_2\nu_3 \\ \mu_1\nu_3 - \nu_1\mu_3 \end{pmatrix},$$

одакле директно имамо улазне вредности почетне матрице

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \mu_1(\nu_2\mu_3 - \mu_2\nu_3) & \mu_2(\mu_1\nu_3 - \nu_1\mu_3) \\ \nu_1(\nu_2\mu_3 - \mu_2\nu_3) & \nu_2(\mu_1\nu_3 - \nu_1\mu_3) \end{pmatrix},$$

што завршава доказ. □

Претходна теорема омогућава да пројективитете у $\mathbb{FP}^2$ поистоветимо са регуларним квадратним матрицама реда два са коефицијентима у $\mathbb{F}$, посеченим по релацији сразмерности.

Теорема 2.36. *Пресликавање између једнодимензионих објеката у $\mathbb{FP}^2$ је пројективитет ако и само ако је оно индуковано регуларном линеарном трансформацијом хомогених координата.*

Доказ. По Теореми 2.33 сваки пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом, те преостаје обрат. Нека је f индуковано регуларном линеарном трансформацијом хомогених координата. Ако су A_1, B_1, C_1 различити елементи из домена од f (колинеарне тачке низа тачака или конкурентне праве прамена правих), одговарајуће различите (колинеарне или конкурентне) елементе из кодомена добијамо са $A_2 = f(A_1), B_2 = f(B_1), C_2 = f(C_1)$. По Теореми 2.25 постоји пројективитет који слика $(A_1, B_1, C_1) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$, а по Теореми 2.33, он је индукован регуларном линеарном трансформацијом хомогених координата чију јединственост гарантује Теорема 2.35, те је у питању баш f. □

Теореме 2.35 и 2.36 нам говоре да је пројективитет у $\mathbb{FP}^2$ једнозначно одређен са три пара одговарајућих елемената. То је особина коју зовемо ***Основна теорема пројективитета***, о чему ће касније бити речи (Тврђење 2.46).

2.13 Дворазмера

Наставимо са изучавањем хомогених координата на аналитичкој пројективној правој. Нека су A, B, C, D различите колинеарне тачке из $\mathbb{FP}^1$. За њихове векторе представнике хомогених параметара у неком координатном систему можемо посматрати израз

$$(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{D}) = \frac{\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{C})\det(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{D})}{\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{D})\det(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})}.$$

Вектори представници уведених тачака су облика $\alpha\overrightarrow{A}, \beta\overrightarrow{B}, \gamma\overrightarrow{C}, \delta\overrightarrow{D}$ за неке ненула скаларе $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$, при чему из $\det(\kappa\overrightarrow{X}, \lambda\overrightarrow{Y}) = \kappa\lambda\det(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ добијамо $(\alpha\overrightarrow{A}, \beta\overrightarrow{B}, \gamma\overrightarrow{C}, \delta\overrightarrow{D}) = (\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{D})$, што значи да почетни израз не зависи од избора вектора представника. За регуларну квадратну матрицу M реда два је

$$\det(M\overrightarrow{X}, M\overrightarrow{Y}) = \det(M(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})) = \det(M)\det(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}),$$

одакле следи $(M\overrightarrow{A}, M\overrightarrow{B}, M\overrightarrow{C}, M\overrightarrow{D}) = (\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{D})$. Промена координата је по Теореми 2.34 индукована регуларном линеарном трансформацијом, те почетни израз не зависи ни од избора координатног система, чиме смо обезбедили да је наредна дефиниција добра.

Нека су A, B, C, D различите тачке у $\mathbb{FP}^1$, тада је њихова ***дворазмера*** $(ABCD)$ скалар из $\mathbb{F}$ дат са

$$(ABCD) = \frac{\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{C})\det(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{D})}{\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{D})\det(\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})}. \tag{2.13}$$

По Теореми 2.33 пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом (као што је то и промена координата), тако да се дворазмера не мења приликом пројективитета.

Теорема 2.37. *Дворазмера је инваријанта пројективитета.*

Чест начин рачунања дворазмере је управо у координатном систему одређеним са $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$. Тада је одмах $\overrightarrow{A} = (1, 0)$ и $\overrightarrow{B} = (0, 1)$, док за $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{D} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$ имамо $\overrightarrow{C} = (\alpha, \beta)$ и $\overrightarrow{D} = (\gamma, \delta)$. Директан рачун по формули (2.13) даје

$$(ABCD) = \frac{\beta(-\gamma)}{\delta(-\alpha)} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma},$$

што је размера две размере и тако оправдава име дворазмера. Директно из (2.13) рачунамо дворазмере за пермутације тачака

$$\begin{aligned}
(CDAB) &= \frac{(-\beta)\gamma}{\alpha(-\delta)} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = (ABCD);\\
(BACD) &= \frac{(-\alpha)\delta}{(-\gamma)\beta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} = \frac{1}{(ABCD)};\\
(ACBD) &= \frac{1(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\delta\alpha} = 1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = 1 - (ABCD).
\end{aligned}$$

Редослед тачака посматране четворке је веома важан, а дворазмере свих пермутација можемо добити коришћењем претходних правила која ћемо пописати у наредној теореми.

Теорема 2.38. *За различите тачке A, B, C, D из $\mathbb{FP}^1$ важи:*

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA);$$
$$(BACD) = (ABCD)^{-1};$$
$$(ACBD) = 1 - (ABCD).$$

Коришћењем дехомогенизације $*: \mathbb{FP}^1 \to \bar{\mathbb{F}}$ лако можемо изразити дворазмеру са

$$(ABCD) = \frac{(A^* - C^*)(B^* - D^*)}{(A^* - D^*)(B^* - C^*)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} : \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}. \tag{2.14}$$

Одавде се види геометријски смисао дворазмере као однос одговарајућих растојања између тачака, или односа одговарајућих дужина дужи. Дворазмера је дефинисана за различите колинеарне тачке, тако да она не може бити једнака 0 или 1 (нити ∞), док су сви остали скалари на располагању, што показује следећа лема.

Лема 2.39. *За три различите тачке A, B, C у $\mathbb{FP}^1$ и скалар $a \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$ постоји јединствена тачка D таква да је $(ABCD) = a$.*

Доказ. Како вредност дворазмере не зависи од избора координатног система, поставимо га тако да почетне тачке имају базне координате: $A(1:0)$, $B(0:1)$ и $C(1:1)$. Ако тачка D има координате $(d:1)$, тада једноставан рачун даје $(ABCD) = d$, одакле следи да је тачка $D(a:1)$ једина која испуњава тражени услов. □

Уколико бисмо дворазмеру проширили на произвољне, не нужно различите, колинеарне тачке, за кодомен бисмо добили читав $\bar{\mathbb{F}}$. Наиме, у случају фиксираних различитих A, B, C имали бисмо $(ABCA) = \infty$, $(ABCB) = 0$ и $(ABCC) = 1$, што оправдава да ти скалари не могу бити вредности оригиналне дворазмере. Претходна лема омогућава да једноставно докажемо следећу теорему.

Теорема 2.40. *Нека су A, B, C, D и A', B', C', D' две четворке различитих колинеарних тачака у $\mathbb{FP}^2$. Тада постоји јединствен пројективитет са $(A, B, C, D) \mapsto (A', B', C', D')$ ако и само ако је $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

Доказ. Како је по Теореми 2.37 дворазмера инваријанта пројективитета то је један смер очигледан. Са друге стране, по Теореми 2.35 постоји јединствен пројективитет f који слика $(A, B, C) \mapsto (A', B', C')$. Уколико је $f(D) = X$, тада по Теореми 2.37 добијамо $(A'B'C'D') = (ABCD) = (A'B'C'X)$, одакле Лема 2.39 даје $D' = X$. □

Дворазмера је најстарија и најосновнија пројективна инваријанта. Значајно дело из античког доба је Књига 7 Папосовог *Зборника* које је цитирао Шал у свом *Историјском прегледу* [15] и тако скренуо пажњу на њега. Џонс[73] га је 1986. превео на енглески, а затим у коментарима показао како се Папосове леме повезују са модерном терминологијом [43], што недвосмислено говори о томе да је Папос био свестан концепта дворазмере и имплицитно га употребљавао. Варијанта дворазмере у сферној геометрији појављује се још раније у књизи *Сферика* коју је писао Менелај[74], док је вероватно и сам Еуклид знао за инваријантност дворазмере [18].

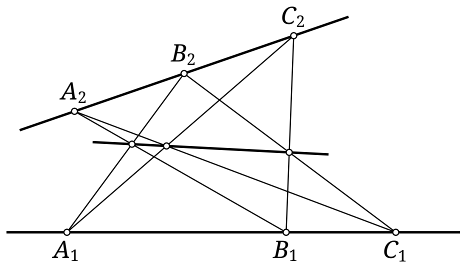
2.14 Папосово тврђење

Размотримо поново синтетички засновану пројективну раван. Посматрајмо наредно тврђење које је у еуклидској геометрији открио Папос [43] и познато је као Папосова теорема.

[73] Alexander Raymond Jones, амерички историчар математике

[74] Менелај из Александрије, Μενέλαος (1. и 2. век н.е.), грчки математичар и астроном

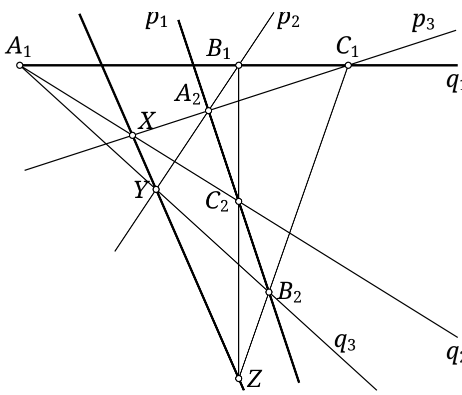
Тврђење 2.41 (Папосово тврђење). *Нека су p_1 и p_2 различите праве и нека су A_1, B_1, C_1 различите тачке инцидентне са p_1, а A_2, B_2, C_2 различите тачке инцидентне са p_2, тако да се све тачке разликују од $p_1 \wedge p_2$. Тада су сецишта $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке.*



Три пресечне тачке из Папосовог тврђења су заправо сецишта наспрамних страница простог шестотеменика $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Праву коју оне одређују називамо ***Папосова права***, а у општем случају она не пролази кроз $p_1 \wedge p_2$.

Папосова раван је пројективна раван у којој важи Папосово тврђење. Конфигурација Папосовог тврђења састоји се од девет тачака и девет правих, при чему свака права садржи три тачке, док се у свакој тачки секу три праве. Свака права те конфигурације може се узети за Папосову праву на којој леже три тачке, док преосталих шест тачака леже по три на две праве конфигурације. Папосово тврђење повлачи сопствени дуал, тако да има места за следећу теорему.

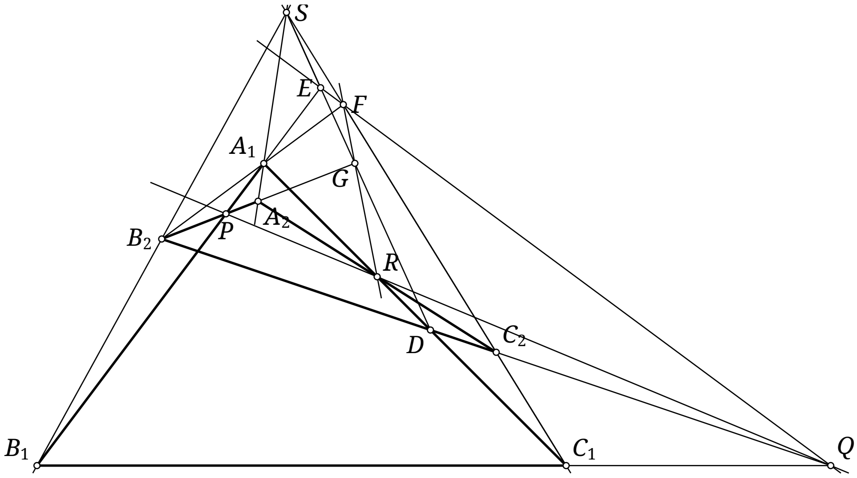
Теорема 2.42. *У Папосовој равни важи Принцип дуалности.*



Доказ. Нека су A_1 и A_2 различите тачке, те $p_1, p_2, p_3 \in (A_2)$ и $q_1, q_2, q_3 \in (A_1)$ тако да се међу њима не налази $A_1 \vee A_2$. Дефинишимо тачке $B_1 = p_2 \wedge q_1$, $B_2 = p_1 \wedge q_3$, $C_1 = p_3 \wedge q_1$ и $C_2 = p_1 \wedge q_2$. Тачке $A_1, B_1, C_1 \in (q_1)$ и $A_2, B_2, C_2 \in (p_1)$ испуњавају услове Папосовог тврђења и зато су $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1) = q_3 \wedge p_2$, $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1) = p_3 \wedge q_2$ и $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ колинеарне. Одавде видимо да су праве $(q_3 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge q_2)$, $B_1 \vee C_2 = (p_2 \wedge q_1) \vee (p_1 \wedge q_2)$ и $B_2 \vee C_1 = (p_1 \wedge q_3) \vee (p_3 \wedge q_1)$ конкурентне и зато важи тврђење дуално Папосовом. □

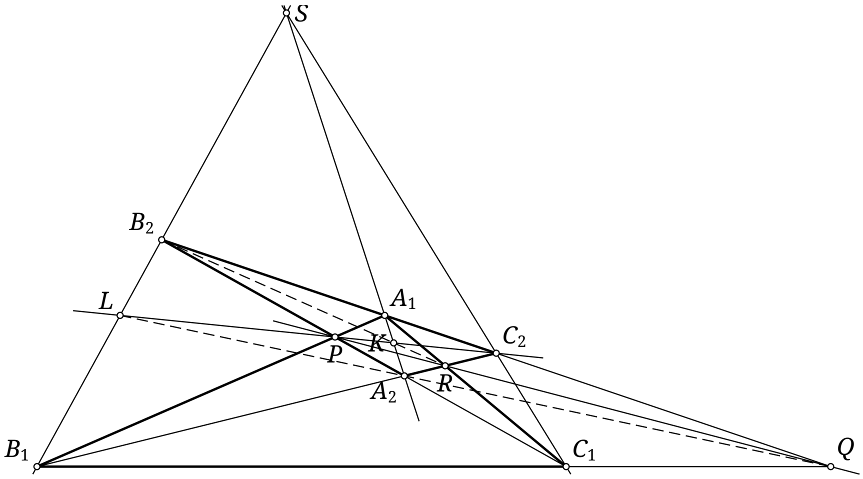
Испоставља се да је Папосово тврђење јаче од Дезарговог, што је резултат који је 1905. поставио Хесенберг[75] [39]. Нека су $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ тротеменици у Папосовој равни који су перспективни у односу на центар S. Потребно је доказати да су тачке $P = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, $Q = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$ и $R = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ колинеарне.

[75]Gerhard Hessenberg (1874–1925), немачки математичар



Нека је $D = (A_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$. Применимо Папосово тврђење на тројке S, B_1, B_2 и A_1, D, C_1, одакле су тачке $E = (S \vee D) \wedge (A_1 \vee B_1)$, Q и $F = (B_2 \vee A_1) \wedge (C_1 \vee S)$ колинеарне. Нова примена Папосовог тврђења на тројке S, A_1, A_2 и B_2, C_2, D каже да су колинеарне тачке F, R и $G = (A_2 \vee B_2) \wedge (D \vee S)$. Трећа примена Папосовог тврђења, овога пута на тројке A_1, B_2, F и G, E, D даје колинеарне тачке P, $Q = (B_2 \vee D) \wedge (E \vee F)$ (из прве примене) и $R = (A_1 \vee D) \wedge (F \vee G)$ (из друге примене), што је оса перспективе наших тротеменика.

Оригинални аргумент који смо навели садржи пропуст који је примећен пола века касније, када је Кронхајм[76] [21] комплетирао ову причу. Наиме, проблем настаје када не можемо да применимо Папосово тврђење јер је једна од тачака управо сециште двеју правих са којих узимамо тачке. Конкретно, прва примена Папосовог тврђења није могућа уколико је тачка D на правој $S \vee B_1$, што је даље еквивалентно томе да је $D = B_2$, односно да су A_1, B_2, C_1 колинеарне. Друга примена Папосовог тврђења није могућа уколико је тачка D на правој $S \vee A_1$, што је даље еквивалентно томе да је $D = A_1$, односно да су A_1, B_2, C_2 колинеарне. Зато Хесенбергов аргумент пролази уколико истовремено имамо неколинеарне A_1, B_2, C_1 и неколинеарне A_1, B_2, C_2, или те неколинеарности у некој пермутацији тачака.



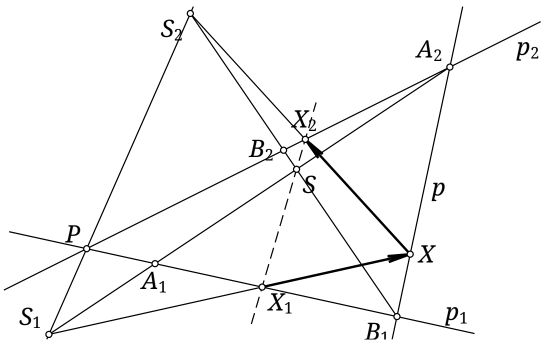
Међутим, преостаје случај када су колинеарне A_1, B_2, C_2, колинеарне B_1, A_2, C_2 и колинеарне C_1, A_2, B_2 (или у пермутацији колинеарне A_2, B_1, C_1, колинеарне B_2, A_1, C_1 и колинеарне C_2, A_1, B_1) што се не може добити као пермутација претходног случаја. Тада уводимо тачке $K = (S \vee A_1) \wedge (P \vee C_2)$ и $L = (S \vee B_1) \wedge (P \vee C_2)$. Примена Папосовог тврђења на тројке S, C_1, C_2 и P, B_1, A_1 даје колинеарне B_2, K, R, док примена Папосовог тврђења на тројке S, C_1, C_2 и P, A_1, B_1 даје колинеарне A_2, L, Q. Коначно, примена Папосовог тврђења на тројке K, A_1, A_2 и B_1, L, B_2 даје колинеарне P, R, Q.

[76] Arno Cronheim (1922–2005), немачко-амерички математичар

Теорема 2.43 (Хесенбергова теорема). *Папосова раван је Дезаргова раван.*

Даље се природно поставља питање под којим условима је неки пројективитет $f\colon (p_1)\barwedge(p_2)$, за $p_1 \neq p_2$, заправо перспективитет. Како сваки перспективитет $(p_1)\doublebarwedge(p_2)$ фиксира заједнички елемент $P = p_1 \wedge p_2$ имамо потребан услов. Да ли је услов $f(P) = P$ и довољан?

Ако истраживање вршимо у Папосовој равни, по Хесенберговој теореми (Теорема 2.43) она је Дезаргова и можемо искористити Теорему 2.29 по којој је сваки пројективитет облика $f = (p_1)\overset{S_1}{\doublebarwedge}(p)\overset{S_2}{\doublebarwedge}(p_2)$. Уколико су p_1, p, p_2 конкурентне, то је f перспективитет (Лема 2.26). Претпоставимо зато $P \notin (p)$, те постоје сецишта $B_1 = p_1 \wedge p$ и $A_2 = p \wedge p_2$ различита од P.



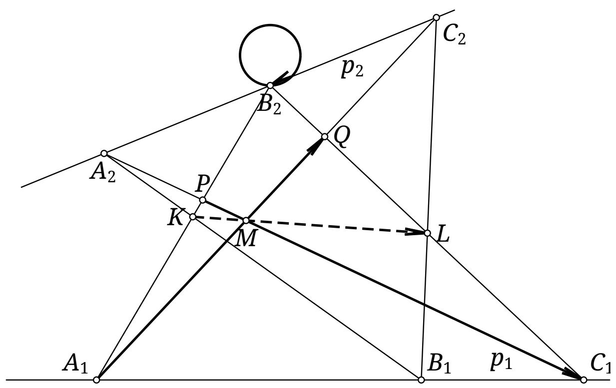
Нека су даље $B_2 = (B_1 \vee S_2) \wedge p_2$ и $A_1 = (A_2 \vee S_1) \wedge p_1$, односно такве да важи $f(A_1) = A_2$ и $f(B_1) = B_2$. Ако је f перспективитет $S = (A_1 \vee A_2) \wedge (B_1 \vee B_2)$ би морао бити његов центар. За произвољну тачку $X_1 \in (p_1)$ је $X = f_1(X_1) \in (p)$ и $X_2 = f_2(X) = f(X_1) \in (p_2)$. Из претпоставке $f(P) = P$ директно следи колинеарност тачака S_1, P, S_2, док примена Папосовог тврђења на тројке S_1, P, S_2 и $B_1, X, A_2 \in (p)$ даје колинеарне тачке X_1, X_2, S. Одавде свака спојница $X_1 \vee X_2$ пролази кроз S, односно S је центар и f јесте перспективитет. Самим тим у Папосовој равни важи следеће тврђење.

Тврђење 2.44 (Тврђење о перспективитету). *Пројективитет између два различита низа тачака је перспективитет ако и само ако фиксира заједнички елемент.*

Испоставља се да важи и обрат, односно Папосово тврђење и Тврђење о перспективитету су еквивалентна.

Лема 2.45. *Тврђења 2.41 и 2.44 су еквивалентна.*

Доказ. Преостаје нам да покажемо да Тврђење 2.44 повлачи Тврђење 2.41. Нека су p_1 и p_2 различите праве и нека су A_1, B_1, C_1 различите тачке инцидентне са p_1, а A_2, B_2, C_2 различите тачке инцидентне са p_2, тако да су све поменуте тачке различите од $p_1 \wedge p_2$. Сада је потребно доказати да су тачке $K = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $L = (B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $M = (C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне.



Уведимо тачке $P = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee C_1)$ и $Q = (C_1 \vee B_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$, те поставимо пројективитет са $f = (A_1 \vee B_2) \doublebarwedge (A_2) \overset{p_1}{\doublebarwedge} (C_2) \doublebarwedge (C_1 \vee B_2)$ за који важи

$$(A_1, K, P, B_2) \mapsto (A_1 \vee A_2, B_1 \vee A_2, C_1 \vee A_2, p_2) \mapsto (A_1 \vee C_2, B_1 \vee C_2, C_1 \vee C_2, p_2) \mapsto (Q, L, C_1, B_2).$$

Како f фиксира заједнички елемент B_2, он је перспективитет (Тврђење 2.44) и постоји центар S тако да је $f = (A_1 \vee B_2) \overset{S}{\doublebarwedge} (C_1 \vee B_2)$. Одавде су праве $A_1 \vee Q$, $K \vee L$ и $P \vee C_1$ конкурентне у S, те због $A_1 \vee Q = A_1 \vee C_2$ и $P \vee C_1 = A_2 \vee C_1$, следи $S = M$ и тачке K, L, M су колинеарне. □

По Теореми 2.25 постоји пројективитет f који слика $(A_1, B_1, C_1) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$, где су A_1, B_1, C_1 колинеарне тачке праве p_1, а A_2, B_2, C_2 колинеарне тачке праве $p_2 \neq p_1$. Природно се поставља питање да ли је такав пројективитет једнозначно одређен. Теорема 2.29 дозвољава да пројективитет f раставимо са $f = (p_1) \overset{S_1}{\doublebarwedge} (p) \overset{S_2}{\doublebarwedge} (p_2)$, при чему праву p можемо разноврсно бирати (Лема 2.27), на пример са $p = A_1 \vee B_2$ (уколико је $A_1 \neq p_1 \wedge p_2 \neq B_2$). Ако је g пројективитет који слика $(A_1, B_1, C_1) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$, тада можемо посматрати пројективитет $h = (p_1) \overset{g}{\barwedge} (p_2) \overset{S_2}{\doublebarwedge} (p)$ и перспективитет $(p_1) \overset{S_1}{\doublebarwedge} (p)$ који једнако сликају тројку (A_1, B_1, C_1). Међутим, ту је фиксиран заједнички елемент $p_1 \wedge p = A_1$, те је h перспективитет по Тврђењу 2.44. Центар перспективитета мора бити $(B_1 \vee h(B_1)) \wedge (C_1 \vee h(C_1)) = S_1$, одакле следи једнозначно $g = f$. Овако смо показали да у Папосовој равни важи следеће тврђење.

Тврђење 2.46 (Основно тврђење пројективитета). *Постоји јединствен пројективитет који различите колинеарне тачке A_1, B_1, C_1 пресликава редом у различите колинеарне тачке A_2, B_2, C_2.*

Основно тврђење пројективитета је појачање Теореме 2.25 која нам је гарантовала егзистенцију пројективитета, док сада на располагању имамо и јединственост. Испоставља се да важи и обрат, односно ако важи Основно тврђење пројективитета тада се налазимо у Папосовој равни.

Теорема 2.47. *Папосово тврђење, Тврђење о перспективитету и Основно тврђење пројективитета (Тврђења 2.41, 2.44 и 2.46) су еквивалентна у пројективној равни.*

Доказ. Преостало је доказати да Тврђење 2.46 повлачи Тврђење 2.44. Перспективитет свакако фиксира заједнички елемент. Нека је сада $f\colon (p) \barwedge (q)$ пројективитет који фиксира заједнички елемент $P = p \wedge q$, односно важи $f(P) = P$. Нека су A и B тачке са p различите од P, те $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$ њихове слике. Перспективитет $g\colon (p) \overset{S}{\doublebarwedge} (q)$ за $S = (A \vee A') \wedge (B \vee B')$ очигледно слика $(P, A, B) \xmapsto{g} (P, A', B')$, а како то ради и f, по Тврђењу 2.46 имамо $f = g$, те је f перспективитет. □

Доказали смо да су Папосово тврђење, Тврђење о перспективитету и Основно тврђење пројективитета међусобно еквивалентна у пројективној равни. Међутим, њих не можемо доказати у пројективној равни јер Папосово тврђење повлачи Дезаргово (Теорема 2.43), а знамо да оно у општем случају не важи (Молтонова раван). Због тога неко од тврђења узимамо као аксиому, на пример Папосово.

Аксиома 2.4 (Папосова теорема). *Важи Папосово тврђење (Тврђење 2.41).*

Напоменимо да уколико за аксиому узмемо Основно тврђење пројективитета, уз много мање муке можемо извести Папосово тврђење и поново имати целу теорију на располагању. Конкретно, довољно нам је само оно што смо записали у доказима Леме 2.45 и Теореме 2.47, док нам Леме 2.26, 2.27 и 2.28 нису неопходне.

Увођењем Аксиоме 2.4 заправо радимо у Папосовој равни, а три еквивалентна тврђења из Теореме 2.47 добијају статус теореме. Тако можемо говорити о Папосовој теореми, Теореми о перспективитету, Основној теореми пројективитета, а наравно последично (Теорема 2.43) и о Дезарговој теореми. По Теореми 2.42 у Папосовој равни важи Принцип дуалности, тако да одмах добијамо дуале наших теорема. У оригиналним теоремама пројективитет је успостављен између низова тачака, а у дуалним, између праменова правих. Како суштина остаје иста за теорему и њен дуал природно ћемо задржати име теореме.

Теорема 2.48 (Теорема о перспективитету). *Пројективитет (између низова или праменова) је перспективитет ако и само ако фиксира заједнички елемент.*

Теорема 2.49 (Основна теорема пројективитета). *Пројективитет је једнозначно одређен са три одговарајућа пара елемената.*

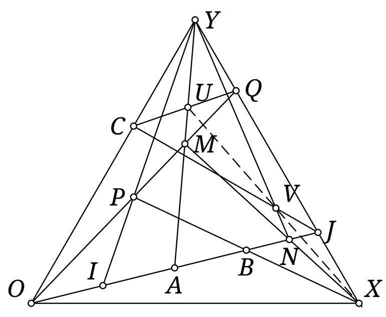
Што се тиче аналитичке пројективне равни $\mathbb{FP}^2$, раније смо из Теореме 2.35 и Теореме 2.36 констатовали да важи Основна теорема пројективитета, те самим тим важи и Папосова теорема. Дакле, аналитичка раван испуњава Аксиоме 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4.

Теорема 2.50. *Аналитичка пројективна раван* $\mathbb{FP}^2$ *је Папосова раван.*

2.15 Координатизација Дезаргове равни ⊛

Уколико на располагању имамо Дезаргову теорему, многе ствари у координатизацији описаној у Секцији 2.5 долазе на своје место. Желимо да испитамо алгебарску структуру $(\mathbb{K}, T)$ у случају Дезаргове равни, те најпре показујемо да је одговарајући тернарни прстен линеаран. Постављамо различите тачке $A(a,a)$, $B(b,b)$ и $C(0,c)$, те конструишемо

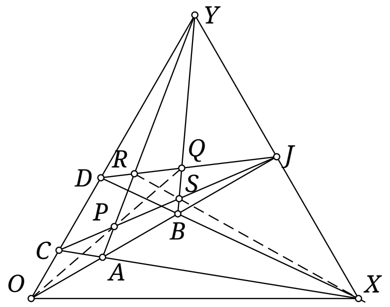
$$\begin{aligned} P(1,b) &= (X\vee B)\wedge(Y\vee I), & Q(b) &= (O\vee P)\wedge(X\vee Y),\\ U(a,T(a,b,c)) &= (C\vee Q)\wedge(A\vee Y), & M(a,a\cdot b) &= (O\vee Q)\wedge(A\vee Y),\\ N(a\cdot b,a\cdot b) &= (X\vee M)\wedge(O\vee I), & V(a\cdot b,a\cdot b+c) &= (N\vee Y)\wedge(C\vee J). \end{aligned}$$



Тротеменици CQJ и YMN су перспективни у односу на центар O, те имају осу коју чине $(C\vee Q)\wedge(Y\vee M)=U$, $(C\vee J)\wedge(Y\vee N)=V$, $(Q\vee J)\wedge(M\vee N)=X$. Како су X, $U(a,T(a,b,c))$ и $V(a\cdot b, a\cdot b+c)$ колинеарне то је $T(a,b,c)=a\cdot b+c$, односно T је линеарно. Линеарност тернарног прстена омогућава нам да избегнемо тернарну операцију T и да говоримо само о структури $(\mathbb{K},+,\cdot)$ јер имамо једнозначно одређено $T(a,b,c)=a\cdot b+c$.

Сабирање је комутативно, односно у $\mathbb{K}$ важи $a+b=b+a$. Постављамо различите тачке $A(a,a)$ и $B(b,b)$, те конструишемо

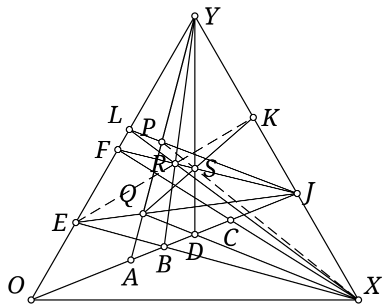
$$C(0,a)=(X\vee A)\wedge(O\vee Y), \qquad D(0,b)=(X\vee B)\wedge(O\wedge Y).$$



Тротеменици ABY и CDJ су перспективни у односу на центар X, те имају осу коју чине тачке $O = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$, $P(a, a+a) = (A \vee Y) \wedge (C \vee J)$ и $Q(b, b+b) = (B \vee Y) \wedge (D \vee J)$. Због колинеарности тачака O, P, Q, тротеменици YJP и DBQ су перспективни у односу на центар O, те имају осу коју чине тачке $X = (Y \vee J) \wedge (D \vee B)$, $R(a, a+b) = (Y \vee P) \wedge (D \vee Q)$, $S(b, b+a) = (J \vee P) \wedge (B \vee Q)$. Како су X, $R(a, a+b)$ и $S(b, b+a)$ колинеарне то је $a+b = b+a$, што доказује комутативност сабирања.

Сабирање је асоцијативно, односно у $\mathbb{K}$ важи $(a+b)+c = a+(b+c)$. Постављамо различите тачке $A(a,a)$, $B(b,b)$ и $C(c,c)$ које су различите од O, те конструишемо

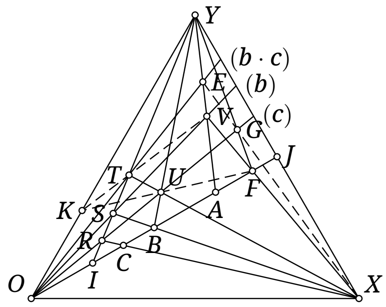
$$\begin{aligned} E(0,b) &= (X \vee B) \wedge (O \vee Y), & F(0,c) &= (X \vee C) \wedge (O \vee Y), \\ Q(a, a+b) &= (E \vee J) \wedge (A \vee Y), & D(a+b, a+b) &= (Q \vee X) \wedge (O \vee J) \\ S(a+b, (a+b)+c) &= (F \vee J) \wedge (D \vee Y). \end{aligned}$$



Тротеменици BXY и JQS су перспективни у односу на центар D, те имају осу коју чине тачке $E = (B \vee X) \wedge (J \vee Q)$, $R(b, b+c) = (B \vee Y) \wedge (J \vee S)$, $K = (X \vee Y) \wedge (Q \vee S)$. За $L(0, b+c) = (R \vee X) \wedge (O \vee Y)$, због колинеарности E, R, K, тротеменици LJR и YQK су перспективни у односу на центар E, те имају осу коју чине $P(a, a+(b+c)) = (L \vee J) \wedge (Y \vee Q)$, $X = (L \vee R) \wedge (Y \vee K)$, $S = (J \vee R) \wedge (Q \vee K)$. Како су тачке X, $S(a+b, (a+b)+c)$ и $P(a, a+(b+c))$ колинеарне, то добијамо $(a+b)+c = a+(b+c)$, што доказује асоцијативност сабирања.

Овим смо показали да се сабирање лепо понаша у Дезарговој равни, односно да је $(\mathbb{K}, +)$ једна комутативна група, те испитујемо понашање множења. Множење је асоцијативно, односно у $\mathbb{K}$ важи $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Постављамо различите тачке $A(a,a)$, $B(b,b)$ и $C(c,c)$ које су различите од O и I, те конструишемо

$$\begin{aligned} R(1,c) &= (X \vee C) \wedge (Y \vee I), & S(1,b) &= (X \vee B) \wedge (Y \vee I), \\ U(b, b \cdot c) &= (O \vee R) \wedge (B \vee Y), & T(1, b \cdot c) &= (X \vee U) \wedge (Y \vee I) \\ E(a, a \cdot (b \cdot c)) &= (O \vee T) \wedge (A \vee Y), & V(a, a \cdot b) &= (O \vee S) \wedge (A \vee Y) \\ F(a \cdot b, a \cdot b) &= (V \vee X) \wedge (O \vee J). \end{aligned}$$



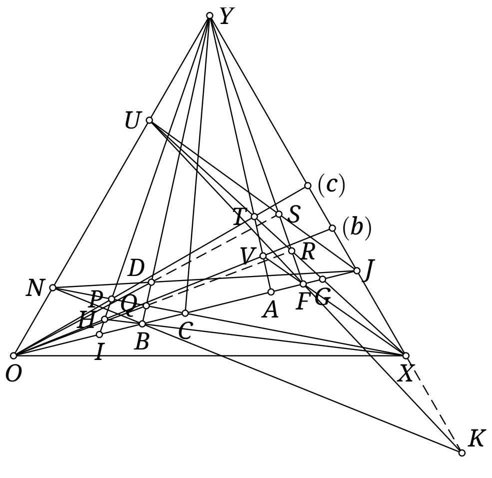
Тротеменици BUF и STV су перспективни у односу на центар X, те имају осу коју чине тачке $Y = (B \vee U) \wedge (S \vee T)$, $O = (B \vee F) \wedge (S \vee V)$, $K = (U \vee F) \wedge (T \vee V)$. Из колинеарности Y, O, K, тротеменици OTU и YVF су перспективни у односу на центар K, те имају осу коју чине $E = (O \vee T) \wedge (Y \vee V)$, $X = (T \vee U) \wedge (V \vee F)$, $G(a \cdot b, (a \cdot b) \cdot c) = (O \vee U) \wedge (Y \vee F)$. Како су тачке X, $E(a, a \cdot (b \cdot c))$ и $G(a \cdot b, (a \cdot b) \cdot c)$ колинеарне, то добијамо $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, што доказује асоцијативност множења.

Овим смо показали да се и множење лепо понаша у Дезарговој равни, односно да је $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ група. Из асоцијативности множења следи да су леви и десни инверзи за множење једнаки, што можемо даље користити. Преостаје да повежемо сабирање и множење кроз дистрибутивне законе.

Постављамо различите тачке $A(a, a)$, $B(b, b)$ и $C(c, c)$ које су различите од O и I, те конструишемо

$$\begin{aligned} Q(b, c) &= (X \vee C) \wedge (B \vee Y), & N(0, c) &= (X \vee C) \wedge (O \vee Y) \\ H(1, b) &= (X \vee B) \wedge (Y \vee I), & P(1, c) &= (X \vee C) \wedge (Y \vee I) \\ V(a, a \cdot b) &= (A \vee Y) \wedge (O \vee H), & F(a \cdot b, a \cdot b) &= (V \vee X) \wedge (O \vee I) \\ T(a, a \cdot c) &= (A \vee Y) \wedge (O \vee P), & U(0, a \cdot c) &= (X \vee T) \wedge (O \vee Y) \end{aligned}$$

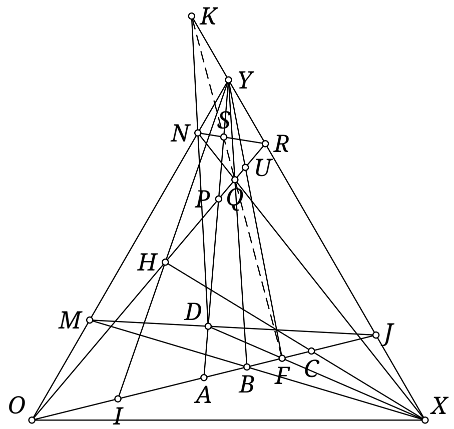
Након тога уводимо $R = (F \vee Y) \wedge (O \vee Q) = [a \cdot b] \wedge [b^{-1} \cdot c, 0] = (a \cdot b, a \cdot c)$, одакле су X, U, R колинеарне. Тротеменици NQB и URF су перспективни у односу на центар O, те имају осу коју чине $X = (N \vee Q) \wedge (U \vee R)$, $K = (N \vee B) \wedge (U \vee F)$, $Y = (Q \vee B) \wedge (R \vee F)$. Колинеарност X, K, Y даје тротеменике NJU и BYF који су перспективни у односу на центар K, те имају осу коју чине $D(b, b + c) = (N \vee J) \wedge (B \vee Y)$, $O = (N \vee U) \wedge (B \vee F)$, $S = (J \vee U) \wedge (Y \vee F)$. Одавде су праве $D \vee O = [b^{-1} \cdot (b + c), 0]$, $J \vee U = [1, a \cdot c]$, $Y \vee F = [a \cdot b]$ конкурентне у S. Са једне стране имамо $S = (J \vee U) \wedge (Y \vee F) = [1, a \cdot c] \wedge [a \cdot b] = (a \cdot b, a \cdot b + a \cdot c)$, док са друге стране имамо $S = (D \vee O) \wedge (Y \vee F) = [b^{-1} \cdot (b + c), 0] \wedge [a \cdot b] = (a \cdot b, a \cdot (b + c))$, одакле добијемо $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, што доказује десну дистрибутивност.



Постављамо различите тачке $A(a, a)$, $B(b, b)$ и $C(c, c)$ које су различите од O и I, те конструишемо

$$\begin{aligned} M(0,b) &= (X \vee B) \wedge (O \vee Y), & D(a,a+b) &= (A \vee Y) \wedge (M \vee J) \\ H(1,c) &= (X \vee C) \wedge (Y \vee I), & P(a,a \cdot c) &= (A \vee Y) \wedge (O \vee H) \\ Q(b,b \cdot c) &= (B \vee Y) \wedge (O \vee H), & N(0,b \cdot c) &= (X \vee Q) \wedge (O \vee Y) \\ R(c) &= (X \vee Y) \wedge (O \vee H), \end{aligned}$$

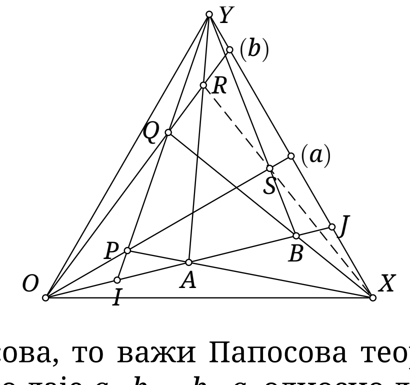
Тротеменици JYB и DNX су перспективни у односу на центар M, те имају осу коју чине $K = (J \vee Y) \wedge (D \vee N)$, $F(a+b, a+b) = (J \vee B) \wedge (D \vee X)$, $Q = (Y \vee B) \wedge (N \vee X)$. Колинеарност K, F, Q даје тротеменике YDF и RNQ који су перспективни у односу на центар K, те имају осу коју чине $S(a, a \cdot c + b \cdot c) = (Y \vee D) \wedge (R \vee N)$, $U(a+b, (a+b) \cdot c) = (Y \vee F) \wedge (R \vee Q)$, $X = (D \vee F) \wedge (N \vee Q)$. Како су X, $U(a+b, (a+b) \cdot c)$ и $S(a, a \cdot c + b \cdot c)$ колинеарне то имамо $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, што доказује леву дистрибутивност.



Доказали смо да је $(\mathbb{K}, +)$ комутативна група, да је $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ група, као и да важе леви и десни дистрибутивни закони, што значи да је $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ тело, односно да му до структуре поља фали само комутативност множења. Са друге стране за произвољно тело $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, аналитичку раван добијамо на исти начин као и у случају поља (Теорема 2.4), тако што посматрамо $\mathbb{K}^3$ као модул над $\mathbb{K}$ и његове подмодуле. Конкретан доказ се лако добија једноставном провером да је са $T(a,b,c) = a \cdot b + c$ задат један (линеаран) тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$ у смислу дефиниције, после чега се позивамо на Теорему 2.7.

Теорема 2.51. *Свака Дезаргова раван је аналитичка раван над неким телом.*

Преостаје комутативност множења. Поставимо различите тачке $A(a,a)$ и $B(b,b)$ које су различите од O и I. Нека је $P(1,a) = (A \vee X) \wedge (Y \vee I)$ и $Q(1,b) = (B \vee X) \wedge (Y \vee I)$. Уочимо два пара колинеарних тачака O, A, B и Y, Q, P, односно прост шестотеменик $OQBYAP$ који за сецишта наспрамних страница има тачке: $R(a, a \cdot b) = (O \vee Q) \wedge (Y \vee A)$, $X = (Q \vee B) \wedge (A \vee P)$, $S(b, b \cdot a) = (B \vee Y) \wedge (P \vee O)$.



Уколико је раван Папосова, то важи Папосова теорема и тачке X, $R(a, a \cdot b)$ и $S(b, b \cdot a)$ су колинеарне, што даје $a \cdot b = b \cdot a$, односно доказује комутативност множења. Уколико раван није Папосова, постоје тројке колинеарних тачака за које не важи Папосово тврђење, те можемо извршити координатизацију тако да то буду баш тачке простог шестотеменика $OQBYAP$, што доноси пар скалара за које не важи комутативност множења. Папосова раван је Дезаргова (Теорема 2.43), тако да тело $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ из Теореме 2.51 додатно добија комутативност множења и постаје поље.

Теорема 2.52. *Свака Папосова раван је аналитичка раван над неким пољем.*

Коначно смо у стању да илуструјемо неке примере пројективних равни које јесу Дезаргове, али нису Папосове. На основу Теорема 2.51 и 2.52 за то је довољно пронаћи неко тело које није поље. Класичан пример је тело кватерниона $\mathbb{H}$ које је 1843. године открио Хамилтон[77] [37]. Кватерниони $\mathbb{H}$ представљају алгебарско проширење комплексних бројева. У питању је четвородимензиони векторски простор над реалним бројевима (скуповно важи $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$) са базом $1, i, j, k$, где су i, j, k имагинарне јединице за које важи $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Дакле, аналитичка раван $\mathbb{HP}^2$ индукована телом $\mathbb{H}$ јесте Дезаргова, али није Папосова.

Међутим, коначни примери нису могући захваљујући Ведерберновој[78] теореми која каже да је свако коначно тело заправо поље. Ведерберн [77] је први поставио своју теорему 1905. године, али је оригинални доказ садржао пропуст који је исте године отклонио Диксон[79] [23]. За интересантан историјат и хронолошку листу доказа Ведербернове теореме можемо консултовати [61] и [1]. У сваком случају, као последицу добијамо наредну теорему.

Теорема 2.53. *Коначна пројективна раван је Папосова ако и само ако је Дезаргова.*

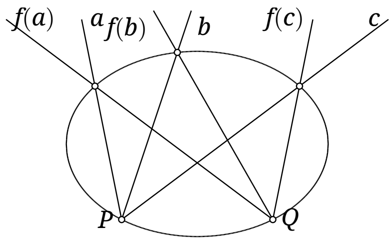
Доказ. По Теореми 2.43, Папосова раван јесте Дезаргова, тако да је потребно доказати обрнути смер. Ако је раван Дезаргова, по Теореми 2.51 она је аналитичка над неким телом. Како је то тело коначно, по Ведерберновој теореми оно је поље, а аналитичка пројективна раван над неким пољем је свакако Папосова (Теорема 2.50). □

Овде смо искористили алгебарске резултате да је коначност тела довољно јака да повуче комутативност множења. Међутим, можемо се упитати да ли до ове теореме можемо доћи геометријски. Нажалост, чисто геометријски доказ Теореме 2.53 није познат, а нешто најближе томе 2015. су објавили Бамберг[80] и Пентила[81] [6], који су у свом доказу користили само елементарне алгебарске резултате.

2.16 Конике Папосове равни

Конике се могу дефинисати на више различитих начина, који су углавном еквивалентни, а ми их уводимо у Папосовој равни, односно подразумевамо да важе Аксиоме 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4. Користимо пројективитет између праменова правих и тако постављамо ***Штајнерову дефиницију*** [72] на следећи начин. Нека је $f\colon (P) \barwedge (Q)$ пројективитет успостављен између праменова правих у Папосовој равни. ***Коника*** је скуп тачака које се налазе у пресеку одговарајућих правих при том пројективитету. Ако је $P \neq Q$ и f није перспективитет кажемо да је коника ***недегенерисана***.

[77] William Rowan Hamilton (1805–1865), ирски физичар, астроном и математичар
[78] Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882–1948), шкотски математичар
[79] Leonard Eugene Dickson (1874–1954), амерички математичар
[80] John Bamberg, аустралијски математичар
[81] Tim Penttila, математичар



Прецизније, пресек одговарајућих правих при пројективитету $f:(P)\overline{\wedge}(Q)$ значи да је X тачка конике ако постоји права l инцидентна са P, тако да је X инцидентно и са l и са $f(l)$. Уобичајено је $f(l)\neq l$ и тада су тачке конике сецишта $X=l\wedge f(l)$, али може се догодити да је $f(l)=l$, те је у том случају X свака од тачака инцидентна са l.

Ако је коника Γ одређена пројективитетом f то краће обележавамо са $f=(P)\overset{\Gamma}{\overline{\wedge}}(Q)$. Носиоци праменова свакако припадају коници, о чему говори наредна лема.

Лема 2.54. *Ако је* $f=(P)\overset{\Gamma}{\overline{\wedge}}(Q)$, *тада важи* $P,Q\in\Gamma$.

Доказ. За $P\neq Q$ права $P\vee Q$ се слика у праву прамена (Q), самим тим тачка Q је на обе праве, те и на коници. Слично, инверзна слика од $Q\vee P$ је у прамену (P) тако да и P припада коници. За $P=Q$ ствар је очигледна јер су све праве (и оригинали и слике) у истом прамену. □

Прочешљајмо дегенерисане случајеве конике, те нека је најпре Γ коника одређена перспективитетом $f=(P)\overset{s}{\overline{\wedge}}(Q)$ за $P\neq Q$. Како је тада $f(P\vee Q)=Q\vee P$ (Теорема 2.48), то све тачке низа $(P\vee Q)$ припадају Γ. Произвољна права l прамена (P), њена слика $f(l)$ и оса s су конкурентне праве, тако да преостале тачке конике Γ припадају низу (s). Конику у овом случају представљају две праве (које се наравно секу), $\Gamma=(s)\cup(P\vee Q)$.

У дегенерисаном случају $P=Q$ потребно је испитати број фиксних правих при пројективитету $f=(P)\overset{\Gamma}{\overline{\wedge}}(P)$. Ако f нема фиксних правих имамо $\Gamma=\{P\}$. Ако f има једну фиксну праву $p=f(p)$ онда је $\Gamma=(p)$. Ако f има две фиксне праве p и q онда имамо да је $\Gamma=(p)\cup(q)$. Ако f има бар три фиксне праве онда по Основној теореми пројективитета (Теорема 2.49) мора бити $f=\mathbb{1}$, све праве су фискне и зато $\Gamma=\mathcal{T}$. Из претходних дискусија можемо закључити да дегенерисане конике могу бити тачка, права, две праве (које се секу) или све тачке пројективне равни.

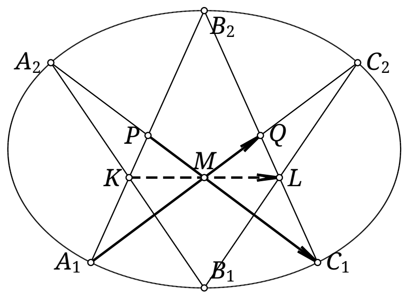
Лема 2.55. *Недегенерисана коника и права могу имати највише две заједничке тачке.*

Доказ. Нека је Γ недегенерисана коника одређена са $f=(P)\overset{\Gamma}{\overline{\wedge}}(Q)$ која са правом l има бар три заједничке тачке $X,Y,Z\in\Gamma\cap(l)$. Уколико l не садржи ни P ни Q, тада је $(P\vee X,P\vee Y,P\vee Z)\mapsto(Q\vee X,Q\vee Y,Q\vee Z)$. Како перспективитет $(P)\overset{l}{\overline{\wedge}}(Q)$ пресликава три елемента (X,Y,Z) на исти начин као и f, они су исти по Основној теореми пројективитета (Теорема 2.49), тако да је f перспективитет, односно Γ је дегенерисана. У супротном, права l садржи P или Q. Ако l садржи само једну од њих, рецимо P, тада преостале две тачке $X,Y\in\Gamma\cap(l)$ нарушавају бијективност јер $Q\vee Y=f(l)=Q\vee X$. Случај $l=P\vee Q$ уз додатно $X\in\Gamma\cap(l)$ даје $f(P\vee X)=Q\vee X$, одакле следи $f(P\vee Q)=P\vee Q$, те је f перспективитет по Теореми 2.48. □

По претходној леми уколико коника садржи све тачке праве, онда она мора бити дегенерисана. Међутим, постоје праве које са недегенерисаном коником имају тачно једну заједничку тачку. На пример, ако је $f=(P)\overset{\Gamma}{\overline{\wedge}}(Q)$ и $l=f(P\vee Q)$ тада је $\Gamma\cap(l)=\{Q\}$, јер бисмо за $Q\neq X\in\Gamma\cap(l)$ имали $f(P\vee X)=Q\vee X=l$, одакле је $P\vee Q=P\vee X\;(=Q\vee X=l)$ и по Теореми 2.48 контрадикторно $f(P\vee Q)=P\vee Q=l$. ***Тангента*** на конику Γ је права која са Γ има тачно једну заједничку тачку.

У Папосовој теореми полазимо од тројки $A_1,B_1,C_1\in(p_1)$ и $A_2,B_2,C_2\in(p_2)$, док теорема тврди да су сецишта $(A_1\vee B_2)\wedge(A_2\vee B_1)$, $(B_1\vee C_2)\wedge(B_2\vee C_1)$ и $(C_1\vee A_2)\wedge(C_2\vee A_1)$ колинеарне тачке. Ако схватимо две праве $(p_1)\cup(p_2)$ као дегенерисану конику, можемо се упитати да ли се нешто мења ако почетних шест тачака поставимо као тачке недегенерисане конике. Покушајмо да имитирамо доказ Папосове теореме из Теореме о перспективитету (доказ Леме 2.45).

Нека су $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ различите тачке недегенерисане конике Γ одређене са $(A_2)\overset{\Gamma}{\barwedge}(C_2)$. Природно питање које се поставља је да ли су тачке $K = (A_1{\vee}B_2){\wedge}(A_2{\vee}B_1)$, $L = (B_1{\vee}C_2){\wedge}(B_2{\vee}C_1)$ и $M = (C_1{\vee}A_2){\wedge}(C_2{\vee}A_1)$ колинеарне.



Уведимо тачке $P = (A_1{\vee}B_2){\wedge}(A_2{\vee}C_1)$ и $Q = (C_1{\vee}B_2){\wedge}(C_2{\vee}A_1)$, те поставимо пројективитет са $f = (A_1{\vee}B_2)\doublebarwedge(A_2)\overset{\Gamma}{\barwedge}(C_2)\doublebarwedge(C_1{\vee}B_2)$ који чува суштину јер на исти начин као раније слика одговарајуће елементе,

$$(A_1, K, P, B_2) \mapsto (A_1{\vee}A_2, B_1{\vee}A_2, C_1{\vee}A_2, p_2) \mapsto (A_1{\vee}C_2, B_1{\vee}C_2, C_1{\vee}C_2, p_2) \mapsto (Q, L, C_1, B_2).$$

Како f фиксира заједнички елемент B_2, у питању је перспективитет и постоји центар S тако да је $f = (A_1{\vee}B_2)\overset{S}{\barwedge}(C_1{\vee}B_2)$. Одавде су праве $A_1{\vee}Q$, $K{\vee}L$ и $P{\vee}C_1$ конкурентне у S, те је $S = M$ и тачке K, L, M су колинеарне.

Лема 2.56. *Нека су $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ различите тачке недегенерисане конике која је одређена пројективитетом између праменова (A_2) и (C_2). Тада су сецишта $(A_1{\vee}B_2){\wedge}(A_2{\vee}B_1)$, $(B_1{\vee}C_2){\wedge}(B_2{\vee}C_1)$ и $(C_1{\vee}A_2){\wedge}(C_2{\vee}A_1)$ колинеарне тачке.*

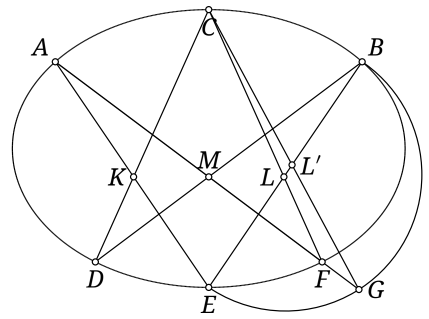
Претходна лема је варијанта чувене Паскалове теореме. Да би она то заиста постала потребно је показати Штајнерову теорему која гарантује да исту конику добијамо независно од избора две различите тачке конике које ће бити носиоци праменова између којих је успостављен пројективитет који је одређује. Две тачке које су носиоци праменова и три тачке конике које по Основној теореми пројективитета једнозначно одређују пројективитет затим једнозначно одређују конику.

У наредним теоремама уместо n тачака са недегенерисане конике говорићемо о теменима n-теменика, јер захваљујући Леми 2.55 знамо да међу њима не постоје три колинеарне.

Теорема 2.57 (Штајнерова теорема). *Постоји јединствена недегенерисана коника која садржи темена неког петотеменика.*

Доказ. Суштина доказа огледа се у томе да се било које две тачке недегенерисане конике могу узети за носиоце праменова из Штајнерове дефиниције. Посматрајмо недегенерисане конике Γ и Γ' које су одређене са $f = (A)\overset{\Gamma}{\barwedge}(B)$ и $g = (A)\overset{\Gamma'}{\barwedge}(C)$, при чему је $(A{\vee}C, A{\vee}D, A{\vee}E)\xrightarrow{f}(B{\vee}C, B{\vee}D, B{\vee}E)$ и $(A{\vee}B, A{\vee}D, A{\vee}E)\xrightarrow{g}(C{\vee}B, C{\vee}D, C{\vee}E)$. По Основној теореми пројективитета f и g су једнозначно одређени и важи $A, B, C, D, E \in \Gamma \cap \Gamma'$. За произвољно $F \in \Gamma$ имамо $f(A{\vee}F) = B{\vee}F$, те нека је G пресечна тачка праве $A{\vee}F$ и конике Γ', односно $(A{\vee}F) \cap \Gamma' = \{A, G\}$.

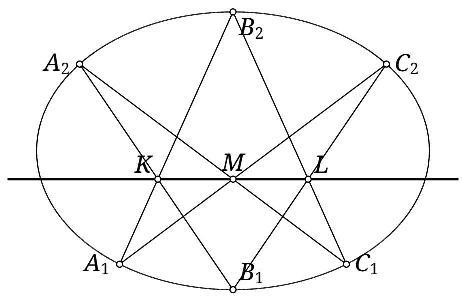
Примена Леме 2.56 на $D, E, F, A, C, B \in \Gamma$ даје колинеарне тачке $K = (D{\vee}C){\wedge}(A{\vee}E)$, $L = (E{\vee}B){\wedge}(C{\vee}F)$ и $M = (F{\vee}A){\wedge}(B{\vee}D)$. Међутим, примена Леме 2.56 на тачке $D, G, E, A, B, C \in \Gamma'$ даје колинеарне тачке $M = (D{\vee}B){\wedge}(A{\vee}G)$, $L' = (G{\vee}C){\wedge}(B{\vee}E)$ и $K = (E{\vee}A){\wedge}(C{\vee}D)$. Даље је $L = (E{\vee}B){\wedge}(K{\vee}M) = L'$, одакле $C{\vee}F = C{\vee}G$, те коначно $F = G$.



Због тога важи $\Gamma = \Gamma'$ што значи да прамен (B) можемо заменити праменом (C). На сличан начин можемо заменити прамен (A) праменом (D), што доказује почетну идеју. Ако две конике садрже темена неког петотеменика, $A, B, C, D, E \in \Gamma \cap \Gamma'$, то њима можемо фиксирати носиоце A и B, те су обе конике одређене пројективитетом за који важи $(A \vee C, A \vee D, A \vee E) \mapsto (B \vee C, B \vee D, B \vee E)$, те је $\Gamma = \Gamma'$. □

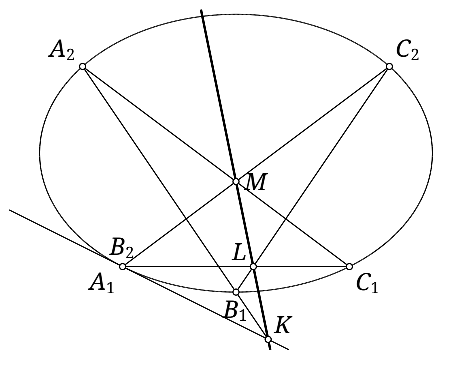
Теорема 2.57 омогућава да из Леме 2.56 уклонимо носиоце праменова пројективитета и тако добијемо чисту теорему коју је први формулисао Паскал давне 1639. године док је још био шеснаестогодишњак [17].

Теорема 2.58 (Паскалова теорема). *Три сецишта наспрамних страница простог шестотеменика уписаног у недегенерисану конику су колинеарне тачке.*



Конкретно, ако су $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ темена шестотеменика која припадају недегенерисаној коници, тада су сецишта $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке. Праву која садржи колинеарне тачке у Паскаловој теореми, називамо ***Паскалова права***.

Важно је напоменути да Паскалова теорема важи и у граничним случајевима када се две суседне тачке простог шестотеменика поклопе. На пример, ако у простом шестотеменику $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ удупламо темена са $A_1 = B_2$ добијамо гранични петотеменик, у којем спојницу $A_1 \vee B_2$ третирамо као тангенту на конику у тој тачки A_1. Суштина је да пројективитет који одређује конику има особину да повезује заједнички елемент праменова са одговарајућим тангентама, тако да сви докази које смо имали пролазе и за граничне случајеве.



Слично можемо удуплати још једну тачку и посматрати гранични четворотеменик, или у најдрастичнијем случају гранични тротеменик код кога су сва темена удуплана.

Са друге стране, важи и обрат тврђења, такозвана Обрнута Паскалова теорема и она је основа за конструкцију конике која је задата са пет тачака. Ту конструкцију је 1733. године изложио Брејкенриц[82], али приоритет око тога ко је први открио теорему, оспорио је Маклорен[83]. Та прича пуна контраверзи завршена је тако што теорема данас носи име обојице [54].

Теорема 2.59 (Брејкенриц–Маклорен). *Уколико су три сецишта наспрамних страница простог шестотеменика колинеарне тачке, тада темена тог шестотеменика припадају некој коници.*

Доказ. Нека је $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ прост шестотеменик такав да су сецишта наспрамних страница $K = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $L = (B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $M = (C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке. За пројективитет дат као композиција $(A_2) \doublebarwedge (A_1 \vee B_2) \overset{M}{\doublebarwedge} (C_1 \vee B_2) \doublebarwedge (C_2)$ важи

$$\begin{aligned}(A_1 \vee A_2, B_1 \vee A_2, C_1 \vee A_2, B_2 \vee A_2) &\mapsto (A_1, K, P, B_2) \\ &\mapsto (Q, L, C_1, B_2) \mapsto (A_1 \vee C_2, B_1 \vee C_2, C_1 \vee C_2, B_2 \vee C_2).\end{aligned}$$

Коника одређена тим пројективитетом по дефиницији садржи тачке A_1, B_1, C_1, B_2, као и A_2, C_2 по Леми 2.54. □

У случају да је пројективитет из претходног доказа перспективитет, коника би била дегенерисана и теорема постаје обрат Папосове теореме. Уколико говоримо о теменима потпуног, а не простог шестотеменика, та коника је свакако недегенерисана и у питању је обрат Паскалове теореме. Дакле, уколико су сецишта наспрамних страница шестотеменика колинеарна, тада је тај шестотеменик уписан у неку недегенерисану конику.

2.17 Пројективна колинеација

Пројективитети су пројективна пресликавања једнодимензионих објеката, односно домени и кодомени су низови тачака или праменови правих. Даље уопштење тиче се пресликавања дводимензионих објеката. Како је наш оперативни простор пројективна раван, то говоримо о аутоморфизмима равни, односно изоморфизмима равни на саму себе. ***Колинеација*** је аутоморфизам пројективне равни који чува релацију инциденције.

Прецизније, под колинеацијом пројективне равни $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ подразумевамо бијективна пресликавања $f_{\mathcal{T}} \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ и $f_{\mathcal{P}} \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ која чувају инциденцију, у смислу да ако важи $A \mathcal{I} p$ за неко $A \in \mathcal{T}$ и $p \in \mathcal{P}$, тада важи и $f_{\mathcal{T}}(A) \mathcal{I} f_{\mathcal{P}}(p)$. Инваријантност релације инциденције за различите тачке $A, B \in \mathcal{T}$ даје $f_{\mathcal{P}}(A \vee B) = f_{\mathcal{T}}(A) \vee f_{\mathcal{T}}(B)$, односно за различите праве $p, q \in \mathcal{P}$ даје $f_{\mathcal{T}}(p \wedge q) = f_{\mathcal{P}}(p) \wedge f_{\mathcal{P}}(q)$. Одавде следи да пресликавање $f_{\mathcal{T}}$ индукује $f_{\mathcal{P}}$, као и обратно, што је разлог да оба пресликавања обележавамо истим словом, на пример f, док саму колинеацију доживљавамо као трансформацију дисјунктне уније $\mathcal{T} \sqcup \mathcal{P}$.

Колинеација f пресликава колинеарне тачке у колинеарне тачке, што оправдава њено име, док конкурентне праве пресликава у конкурентне праве. Ако за неко $X \in \mathcal{T}$ важи $f(X) = X$, кажемо да је X ***фиксна тачка***, а ако за неко $x \in \mathcal{P}$ важи $f(x) = x$, кажемо да је x ***фиксна права***. Како важи $f(A \vee B) = f(A) \vee f(B)$ и $f(p \wedge q) = f(p) \wedge f(q)$,

[82] William Braikenridge (1700–1762), шкотски математичар

[83] Colin Maclaurin (1698–1746), шкотски математичар

то сециште фиксних правих мора бити фиксна тачка, а спојница фиксних тачака мора бити фиксна права. Идентичко пресликавање $\mathbb{1}$ има све тачке фиксне и то је тривијални пример колинеације.

Тачке које су инцидентне са фиксном правом не морају нужно бити фиксне тачке. Уколико је испуњен јачи услов, да су све тачке инцидентне са неком правом фиксне, тада за ту праву кажемо да је ***тачка по тачка фиксна права***. Уколико неидентичка колинеација има тачка по тачка фиксну праву, онда се та права зове ***оса колинеације***. Уколико неидентичка колинеација има тачку за коју важи да је свака права која је са њом инцидентна фиксна, онда се та тачка зове ***центар колинеације***. Испоставља се да уколико колинеација има осу онда она има и центар, а важи и обрнуто.

Теорема 2.60. *Неидентичка колинеација има осу ако и само ако има центар.*

Доказ. Нека је s оса неидентичке колинеације f. Уколико постоји фиксна тачка $S\not{\mathcal{I}}s$, онда произвољна права $p\mathcal{I}S$ мора имати сециште $P = p\wedge s$, те како је p инцидентно са различитим фиксним тачкама S и P, то је p фиксна права, што доказује да је S центар. Претпоставимо сада да су све фиксне тачке управо оне које су инцидентне са s. За произвољну тачку $A\not{\mathcal{I}}s$ је $f(A) \neq A$, те постоји спојница $a = A\vee f(A)$, а како је $S = a\wedge s$ фиксна тачка, то је $f(a) = f(A\vee S) = f(A)\vee S = a$, односно $a = A\vee f(A)$ је фиксна права. Оса s је свакако фиксна права, те нека је $p\mathcal{I}S$ произвољна права са $p \neq s$. Постоји тачка $B\mathcal{I}p$ са $B \neq S$, а због $B\not{\mathcal{I}}s$ по претходној анализи $b = B\vee f(B)$ мора бити фиксна права. Сециште фиксних правих a и b мора бити фиксна тачка, а како су све фиксне тачке инцидентне са s, то су праве a, b и s конкурентне. Како је $S = a\wedge s$ то је S инцидентно са $b = B\vee f(B)$, те је $p = S\vee B = b$ фиксна права, што доказује да је S центар. Показали смо да ако колинеација има осу, онда она има и центар, док обрат овог тврђења следи из Принципа дуалности (Теорема 2.2). □

Посебан тип неидентичке колинеације која има осу, а самим тим по Теореми 2.60 и центар, зовемо ***перспективна колинеација*** (или ***централна колинеација***). Важно је запамтити да за центар и осу перспективне колинеације увек важе правила из наредне леме.

Лема 2.61. *За перспективну колинеацију важе следећа правила. Произвољна тачка, њена слика и центар су колинеарне тачке. Произвољна права, њена слика и оса су конкурентне праве.*

Доказ. Центар S је фиксна тачка, док је свака права инцидентна са њим фиксна, одакле следи да је $A\vee S = f(A\vee S) = f(A)\vee f(S) = f(A)\vee S$, те су зато $A, f(A), S$ колинеарне. Оса s је фиксна права, док је свака тачка инцидентна са њом фиксна, одакле следи да је $a\wedge s = f(a\wedge s) = f(a)\wedge f(s) = f(a)\wedge s$, те су зато $a, f(a), s$ конкурентне. □

Ова правила су довољна да се изведе једнозначност перспективне колинеације.

Лема 2.62. *Перспективна колинеација једнозначно је одређена осом, центром и паром одговарајућих тачака.*

Доказ. Центар S и оса s перспективне колинеације имају особине које једноставно следимо (Лема 2.61). Приметимо најпре да ако A и A' чине одговарајући пар тачака, то су тачке A, A', S нужно колинеарне. Нека је B произвољна тачка која није инцидентна са $S\vee A$ нити са s, а B' њена слика. Тачке B, B', S су колинеарне, док су праве $A\vee B, A'\vee B', s$ конкурентне, одакле је $B'\mathcal{I}(S\vee B)$ и $(A\vee B)\wedge(A'\vee B') = X\mathcal{I}s$. Тачка $X = (A\vee B)\wedge s$ је једнозначно одређена, а након тога и $B' = (S\vee B)\wedge(A'\vee X)$. Уколико је $C\mathcal{I}(S\vee A)$ можемо испермутовати слова A и B те добити једнозначно $C' = (S\vee C)\wedge(B'\vee Y)$, где је $Y = (B\vee C)\wedge s$. □

Међутим, егзистенција перспективне колинеације није тако једноставна јер захтева Дезаргово тврђење. У Дезарговој равни постоје „све могуће“ перспективне колинеације, што видимо у теореми коју је поставио Бер[84] 1942. године [5].

Теорема 2.63 (Бер). *Ако су A, A', S колинеарне тачке Дезаргове равни и s права са $A, A' \notin (s)$, тада постоји јединствена перспективна колинеација са осом s и центром S која пресликава A у A'.*

Доказ. Дефинишимо пресликавање равни тако што најпре поставимо тачке инцидентне са s за фиксне. Затим, по узору на Лему 2.62 за тачке $B \not\mathcal{I} (S \vee A)$ поставимо $B' = (S \vee B) \wedge (A' \vee X)$, где је $X = (A \vee B) \wedge s$. Након тога фиксирамо неко B и за тачке $C \mathcal{I} (S \vee A)$ поставимо $C' = (S \vee C) \wedge (B' \vee Y)$, где је $Y = (B \vee C) \wedge s$. Овако установљено пресликавање је очигледно бијективно, јер пермутовањем тачака A и A' добијамо њему инверзно пресликавање. Преостаје нам да докажемо инваријантност за колинеарност. Како су тачка, њена слика и S колинеарне по самој дефиницији, то су сваки тротеменик и његова слика перспективни у односу на S и можемо применити Дезаргово тврђење. На пример, тротеменици AMN и $A'M'N'$ су перспективни у односу на S, те су перспективни у односу на праву коју чине $(A \vee M) \wedge (A' \vee M') \mathcal{I} s$, $(A \vee N) \wedge (A' \vee N') \mathcal{I} s$ и $(M \vee N) \wedge (M' \vee N')$, што је права s. Дакле, центар и оса колинеације поклапају се са центром и осом тротеменика, одакле су $M \vee N$, $M' \vee N'$ и s конкурентне. За тачку $P \mathcal{I} (M \vee N)$ су $M \vee P$, $M' \vee P'$ и s конкурентне, али како је $M \vee N = M \vee P$, то је очигледно и $M' \vee N' = M' \vee P'$, односно $P' \mathcal{I} (M' \vee N')$. Овим смо доказали да је наше пресликавање колинеација, односно перспективна колинеација са наведеним особинама. □

Перспективне колинеације делимо у две класе у зависности од тога да ли је центар инцидентан оси. Перспективна колинеација код које је центар инцидентан оси зове се ***елација***. Перспективна колинеација код које центар није инцидентан оси зове се ***хомологија***.

Природно је посматрати колинеацију као уопштење пројективитета, међутим испоставља се да рестрикција произвољне колинеације не мора бити пројективитет (Теорема 2.76), што нас мотивише да уведемо појам пројективне колинеације. ***Пројективна колинеација*** је колинеација f таква да је за сваку праву p, рестрикција $f\upharpoonright_p : (p) \to (f(p))$ пројективитет. Да би колинеација била пројективна, потребно је проверити да ли су њене рестрикције на сваку праву пројективитети, али сасвим је довољно то проверити за једну праву [38], што се види из наредне леме.

Лема 2.64. *Ако је рестрикција колинеације f пројективне равни на неку праву пројективитет, онда је f пројективна колинеација.*

Доказ. Нека је f колинеација пројективне равни таква да је рестрикција $f\upharpoonright_p$ пројективитет за неку праву p. Нека је $q \neq p$ произвољна права, а тачка S произвољна која није инцидентна ни са p ни са q. Перспективитет $(q)\overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)$ слика тачку $A \mathcal{I} q$ у тачку $B \mathcal{I} p$ тако да су A, B, S колинеарне, а како је f колинеација то су и $f(A), f(B), f(S)$ колинеарне. Рестрикција од f на праву q је зато пројективитет $f\upharpoonright_q = (q)\overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)\overset{f\upharpoonright_p}{\overline{\wedge}}(f(p))\overset{f(S)}{\overline{\overline{\wedge}}}(f(q))$. □

Како свака перспективна колинеација f има осу s, а рестрикција $f\upharpoonright_s = \mathbb{1}$ је пројективитет, то је она пројективна колинеација. Дакле, елације и хомологије су пројективне колинеације, али и основне градивне јединице пројективних колинеација. Наиме, као што се сваки пројективитет може раставити на композицију перспективитета, то се свака пројективна колинеација у Дезарговој равни може раставити на композицију перспективних колинеација. То се може извести са не више од три перспективне колинеације што видимо у наредној теореми [68].

[84]Reinhold Baer (1902–1979), немачки математичар

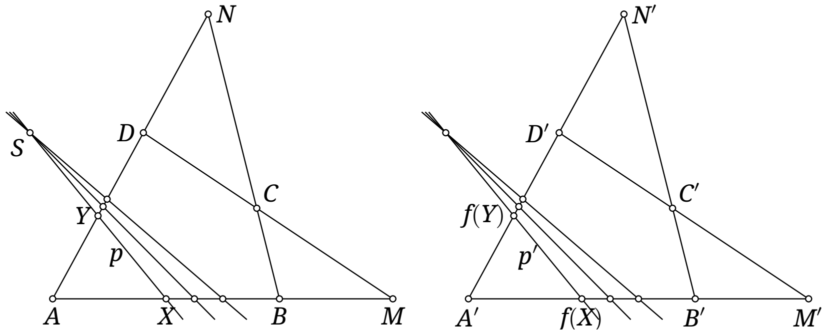
Теорема 2.65. *Свака пројективна колинеација у Дезарговој равни је композиција највише три перспективне колинеације од којих је највише једна хомологија.*

Доказ. Нека је k неидентичка пројективна колинеација Дезаргове равни, а p нека права за коју је $k(p) = q \neq p$. Рестрикција од k на праву p је пројективитет Дезаргове равни, те по Теореми 2.29 важи $k\restriction_p = (p)\overset{S}{\barwedge}(r)\overset{T}{\barwedge}(q)$. По Теореми 2.63 постоји елација f са центром S и осом $(p\wedge r)\vee S$ која слика p у r, као и елација g са центром T и осом $(r\wedge q)\vee T$ која слика r у q. Тада је $f\restriction_p = (p)\overset{S}{\barwedge}(r)$ и $g\restriction_r = (r)\overset{T}{\barwedge}(q)$, одакле следи $k\restriction_p = (g\circ f)\restriction_p$. Колинеација $h = k\circ(g\circ f)^{-1}$ фиксира све тачке праве q, те је у питању перспективна колинеација са осом q и коначно добијамо растављање $k = h\circ g\circ f$ на три перспективне колинеације од којих су бар две елације. □

По претходној теореми, у Дезарговој равни појам пројективне колинеације еквивалентан је композицији коначно много перспективних колинеација. Међутим, у равнима које нису Дезаргове то не мора да важи. На пример, Стивенсон[85] [69] је изложио конкретан пример пројективне колинеације која није композиција перспективних колинеација у коначној пројективној равни реда девет која није Дезаргова.

Егзистенцију и једнозначност перспективне колинеације видели смо у Теореми 2.63, а време је за њено уопштење које говори о егзистенцији и једнозначности пројективне колинеације.

Теорема 2.66 (Основна теорема колинеације). *Постоји јединствена пројективна колинеација Папосове равни која темена четворотеменика $ABCD$ слика редом у темена четворотеменика $A'B'C'D'$.*



Доказ. Нека су $ABCD$ и $A'B'C'D'$ четворотеменици, а f пројективна колинеација Папосове равни за коју је $(A,B,C,D) \mapsto (A',B',C',D')$. Тачка $M = (A\vee B)\wedge(C\vee D)$ се колинеацијом f мора пресликати у $M' = (A'\vee B')\wedge(C'\vee D')$, док је $f\restriction_{A\vee B}$ по Основној теореми пројективитета једнозначно одређено са $(A,B,M) \mapsto (A',B',M')$. Сасвим слично, колинеацијом f се тачка $N = (A\vee D)\wedge(B\vee C)$ мора пресликати у $N' = (A'\vee D')\wedge(B'\vee C')$, док је $f\restriction_{A\vee D}$ по Основној теореми пројективитета једнозначно одређено са $(A,D,N) \mapsto (A',D',N')$.

Произвољна права $p\not{\mathcal{I}}A$, сече наше праве у $X = (A\vee B)\wedge p$ и $Y = (A\vee D)\wedge p$, одакле је $p = X\vee Y$, што колинеацијом f мора отићи у $p' = f\restriction_{A\vee B}(X)\vee f\restriction_{A\vee D}(Y)$. Свака тачка осим A је education сециште две праве које не пролазе кроз A (Лема 2.10), што гарантује једнозначност колинеације f. За егзистенцију је довољно показати да се конкурентне праве сликају у конкурентне. Посматрајмо фамилију правих p које су конкурентне у некој тачки S и пројективитет

$$h = (A'\vee B')\overset{f^{-1}\restriction_{A'\vee B'}}{\barwedge}(A\vee B)\overset{S}{\barwedge}(A\vee D)\overset{f\restriction_{A\vee D}}{\barwedge}(A'\vee D')$$

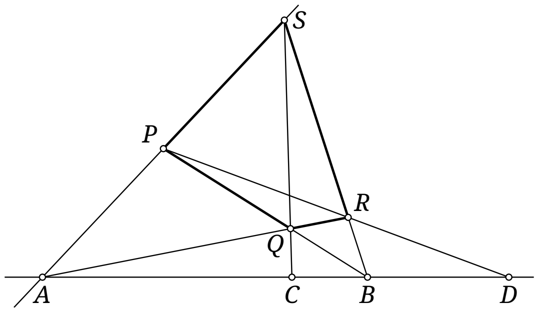
за који важи $f(X) \mapsto X \mapsto Y \mapsto f(Y)$. Дакле, имамо $h(f(X)) = f(Y)$, али и $h(A') = A'$, те је h перспективитет по Теореми о перспективитету, одакле следи да су све праве облика $p' = f(X)\vee f(Y)$ конкурентне. □

[85] Frederick William Stevenson, амерички математичар

2.18 Хармонијска четворка

Нека је $PQRS$ четворотеменик. Његова темена су тачке P, Q, R, S, а има 6 страница. Ако су две странице инцидентне са истим теменом кажемо да су оне ***суседне***, у супротном оне су ***несуседне***. Постоји три пара несуседних страница, а њихова сецишта зовемо ***дијагоналним тачкама***. Конкретно, три дијагоналне тачке нашег четворотеменика $PQRS$ су $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$, $(P \vee R) \wedge (Q \vee S)$ и $(P \vee S) \wedge (Q \vee R)$.

Размотримо следећу конструкцију у Папосовој (или бар Дезарговој) равни. Нека су A, B, C различите тачке праве m. Нека је n права кроз A различита од m (Лема 2.10), и нека су P и S тачке праве n тако да су A, P и S различите (Лема 2.9). Дефинишемо $Q = (P \vee B) \wedge (S \vee C)$, $R = (Q \vee A) \wedge (S \vee B)$ и коначно $D = (A \vee B) \wedge (P \vee R)$.



За овако конструисану слику уочимо четворотеменик $PQRS$ и колинеарне тачке A, B, C, D. Приметимо да су A и B дијагоналне тачке четворотеменика $PQRS$, а да његове несуседне странице које образују трећу дијагоналну тачку пролазе кроз C и D. У том случају кажемо да је уређена четворка (A, B, C, D) хармонијска четворка тачака. За уређену четворку колинеарних тачака (A, B, C, D) кажемо да је ***хармонијска четворка*** и пишемо $\mathcal{H}(AB; CD)$ ако постоји четворотеменик $PQRS$ тако да су A и B дијагоналне тачке, док C и D леже на несуседним страницама које образују трећу дијагоналну тачку.

Дакле, кажемо да је $\mathcal{H}(AB; CD)$ уколико постоји четворотеменик $PQRS$ такав да важи наша слика, односно да је $A = (P \vee S) \wedge (Q \vee R)$, $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R)$, $C = (S \vee Q) \wedge (A \vee B)$, $D = (P \vee R) \wedge (A \vee B)$. Дијагоналне тачке четворотеменика су различите што даје $A \neq B$, док C и D леже на страницама на којима нису A и B, одакле је $A \neq C \neq B$ и $A \neq D \neq B$. Уколико тачке A, B, C, D при $\mathcal{H}(AB; CD)$ нису различите, тада мора бити $C = D$, што се дешава ако и само ако су дијагоналне тачке четворотеменика $PQRS$ колинеарне.

Дијагоналне тачке четворотеменика заиста могу да буду колинеарне у неким пројективним равнима, што би дозволило могућност да тачке хармонијске четворке не буду различите. На пример, у Фаноовој равни не постоје четири различите колинеарне тачке, самим тим дијагоналне тачке сваког четворотеменика су колинеарне, те тамо концепт хармонијске четворке нема смисла. Тога нема у реалној пројективној равни, тако да колинеарне дијагоналне тачке можемо третирати као аномалију коју отклањамо постављањем следеће аксиоме.

Аксиома 2.5 (Фаноова аксиома). *Дијагоналне тачке сваког четворотеменика су неколинеарне.*

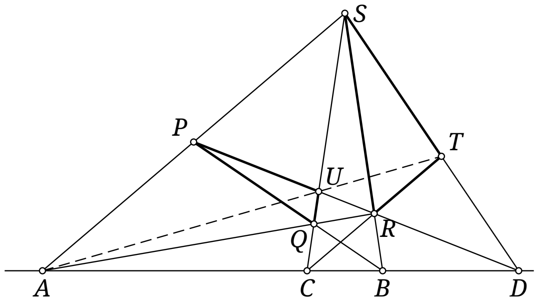
Све четворотеменике можемо поделити у две класе на следећи начин. Уколико су дијагоналне тачке четворотеменика неколинеарне кажемо да је он ***Фаноов***, док је у супротном ***анти-Фаноов***. Фаноова аксиома каже да су сви четворотеменици Фаноови, што гарантује да су све тачке хармонијске четворке различите. Како у дефиницији тачке A и B имају симетричну улогу, као и тачке C и D, то важи следећа лема.

Лема 2.67. *Важи* $\mathcal{H}(AB; CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(BA; CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(BA; DC) \Leftrightarrow \mathcal{H}(AB; DC)$.

Захваљујући претходној леми, ако је $\mathcal{H}(AB;CD)$, можемо рећи да је пар тачака C, D ***хармонијски конјугован*** са паром тачака A, B. Редослед парова такође није битан, што се види из наредне леме.

Лема 2.68. *Важи* $\mathcal{H}(AB;CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(CD;AB)$.

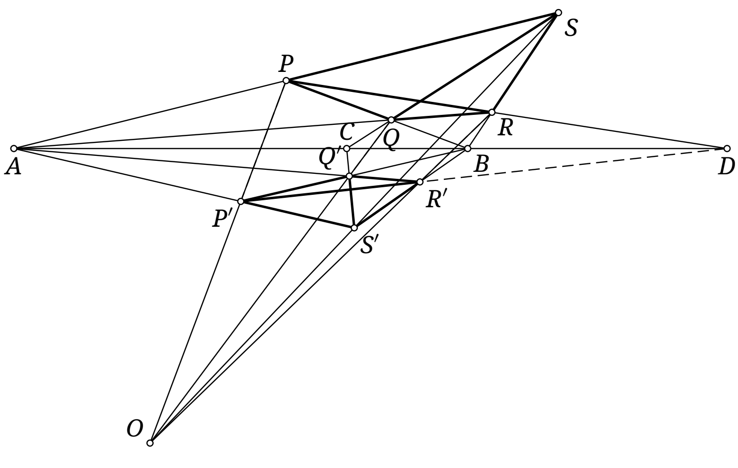
Доказ. Нека је $\mathcal{H}(AB;CD)$ и $PQRS$ четворотеменик из дефиниције, односно такав да важи $A = (P{\vee}S){\wedge}(Q{\vee}R)$, $B = (P{\vee}Q){\wedge}(S{\vee}R)$, $C \in (S{\vee}Q)$, $D \in (P{\vee}R)$. Нека је $T = (C{\vee}R){\wedge}(S{\vee}D)$ и $U = (C{\vee}S){\wedge}(P{\vee}D)$.



Тротеменици PQU и SRT су перспективни у односу на осу коју чине тачке B, C, D, те су по Обрнутој Дезарговој теореми (Тврђење 2.18, Теорема 2.19) перспективни у односу на неки центар. Како се праве $P{\vee}S$ и $Q{\vee}R$ секу у тачки A, то је A центар перспективе и права $T{\vee}U$ пролази кроз A. Четворотеменик $URTS$ има тачке C и D за дијагоналне, док A и B леже на $U{\vee}T$ и $S{\vee}R$ тако да је по дефиницији $\mathcal{H}(CD;AB)$. □

У конструкцији са почетка секције за дате колинеарне тачке A, B, C, послужили смо се произвољним тачкама P и S да бисмо добили тачку D. Међутим, тачка D не зависи од избора тих тачака о чему говори наредна теорема.

Теорема 2.69. *За различите колинеарне тачке A, B и C, постоји јединствена тачка D таква да важи* $\mathcal{H}(AB;CD)$.



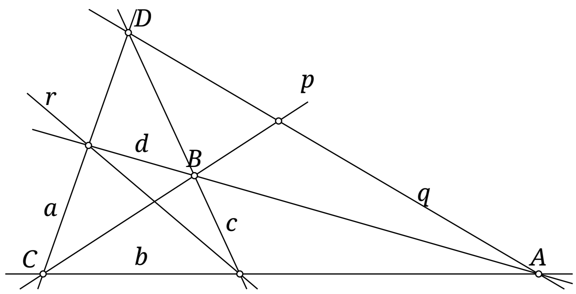
Доказ. Нека су $PQRS$ и $P'Q'R'S'$ четворотеменици из почетне конструкције, односно такви да је $A = (P{\vee}S){\wedge}(Q{\vee}R) = (P'{\vee}S'){\wedge}(Q'{\vee}R')$, $B = (P{\vee}Q){\wedge}(S{\vee}R) = (P'{\vee}Q'){\wedge}(S'{\vee}R')$ и $C = (S{\vee}Q){\wedge}(S'{\vee}Q')$. Тротеменици PQS и $P'Q'S'$ су перспективни у односу на осу коју чине A, B, C те су перспективни у односу на неки центар O, односно праве $P{\vee}P'$, $Q{\vee}Q'$ и $S{\vee}S'$ су конкурентне у O. Сасвим слично, тротеменици RQS и $R'Q'S'$ су перспективни у односу на осу коју чине B, A, C те су перспективни у односу на неки центар O', односно праве $R{\vee}R'$, $Q{\vee}Q'$ и $S{\vee}S'$ су конкурентне у O'. Очигледно је $O = O'$ и праве $P{\vee}P'$, $Q{\vee}Q'$, $R{\vee}R'$ и $S{\vee}S'$ су конкурентне. Како су тротеменици PQR и $P'Q'R'$

перспективни у односу на O то су они перспективни у односу на неку осу, а њу чине тачке A, B и $(P{\vee}R){\wedge}(P'{\vee}R')$. Одавде су праве $A{\vee}B$, $P{\vee}R$ и $P'{\vee}R'$ конкурентне тако да је $(A{\vee}B){\wedge}(P{\vee}R) = (A{\vee}B){\wedge}(P'{\vee}R')$, што је наша јединствена тачка D. □

Досадашњим Аксиомама 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 и 2.5 заокружили смо списак аксиома инциденције које је 1959. године предложио Бахман[86] [4, стр. 76–93], а касније подржао Коксетер [19, стр. 229–234]. Пројективну раван на коју смо додали Папосову теорему (која између осталог уклања не-Дезаргове равни) и Фаноову аксиому (која омогућава концепт хармонијске четворке) у недостатку бољег термина зваћемо ***Бахманова раван***. Бахманова раван је заправо Папосова раван у којој је сваки четворотеменик Фаноов.

Теорема 2.70. *У Бахмановој равни важи Принцип дуалности.*

Доказ. У Папосовој равни важи Принцип дуалности (Теорема 2.42) тако да је довољно проверити дуал Фаноове аксиоме (Аксиома 2.5). Да ли су дијагоналне праве сваког четвоространика неконкурентне?



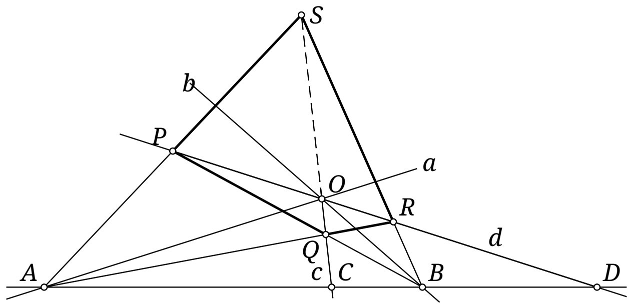
Нека је $abcd$ четвоространик такав да за дијагоналне праве има $p = (a{\wedge}b){\vee}(c{\wedge}d)$, $q = (a{\wedge}c){\vee}(b{\wedge}d)$ и $r = (a{\wedge}d){\vee}(b{\wedge}c)$. Тачке $A = b{\wedge}d, B = c{\wedge}d, C = a{\wedge}b$ и $D = a{\wedge}c$ морају бити различите (иначе четвоространик има три конкурентне странице), одакле следи $A{\vee}B = d, A{\vee}C = b, D{\vee}B = c, D{\vee}C = a$. Међу уведеним тачкама нема три колинеарне (на пример колинеарност A, B, C повлачи $b = d$) те је $ABCD$ четворотеменик. По Аксиоми 2.5 дијагоналне тачке $a{\wedge}d$, $b{\wedge}c$ и $p{\wedge}q$ су неколинеарне, те су p, q и $r = (a{\wedge}d){\vee}(b{\wedge}c)$ неконкурентне. □

Дуално хармонијској четворци тачака можемо дефинисати хармонијску четворку правих. За уређену четворку конкурентних правих (a, b, c, d) кажемо да је ***хармонијска четворка*** и пишемо $\mathcal{H}(ab; cd)$ ако постоји четвоространик $pqrs$ тако да су a и b дијагоналне праве, док c и d пролазе кроз несуседна темена које образују трећу дијагоналну праву. Принцип дуалности (Теорема 2.70) даље омогућава дуале наших теорема. На пример, за конкурентне праве a, b, c постоји јединствена права d таква да је $\mathcal{H}(ab; cd)$.

Теорема 2.71. *Пројективитет чува хармонијску конјугованост.*

Доказ. Како је пројективитет композиција перспективитета, довољно је показати инваријантност за њих. Ако је $\mathcal{H}(AB; CD)$ и O произвољна тачка, показаћемо да је $\mathcal{H}(ab; cd)$, где су $a = A{\vee}O$, $b = B{\vee}O$, $c = C{\vee}O$, $d = D{\vee}O$. Нека је Q произвољна тачка са праве c и нека су $P = (B{\vee}Q){\wedge}d$, $R = (A{\vee}Q){\wedge}d$, $S = (A{\vee}P){\wedge}(B{\vee}R)$.

[86] Friedrich Bachmann (1909–1982), немачки математичар



Четворотеменик $PQRS$ има дијагоналне тачке A и B, док D лежи на $d = P{\vee}R$, те како је $\mathcal{H}(AB;CD)$ тачка C лежи на $Q{\vee}S$, одакле је $c = Q{\vee}S$. Посматрајмо четвоространик чије су странице $P{\vee}Q$, $Q{\vee}R$, $R{\vee}S$ и $S{\vee}P$. Њему су c и d дијагоналне праве, док a и b пролазе кроз темена A и B која образују трећу дијагоналну праву. Важи и обрнуто, односно ако је $\mathcal{H}(ab;cd)$ и p произвољна права, тада за $A = a{\wedge}p$, $B = b{\wedge}p$, $C = c{\wedge}p$ и $D = d{\wedge}p$ имамо $\mathcal{H}(AB;CD)$. Перспективитет чува хармонијску конјугованост, самим тим то важи и за пројективитет. □

Нека су тачке A, B, C, D праве p такве да је $\mathcal{H}(AB;CD)$, а A', B', C', D' тачке праве p' такве да је $\mathcal{H}(A'B';C'D')$. По Теореми 2.25 постоји пројективитет $f = (p)\barwedge(p')$ за који је $(A, B, C) \mapsto (A', B', C')$. Пројективитет f чува хармонијску конјугованост (Теорема 2.71), те мора бити $f(D) = D'$. Хармонијска конјугованост је инваријанта пројективитета, али важи и више од тога, она је инваријанта колинеације.

Теорема 2.72. *Колинеација чува хармонијску конјугованост.*

Доказ. По дефиницији је $\mathcal{H}(AB;CD)$ ако постоји четворотеменик $PQRS$ тако да важи: $A = (P{\vee}S){\wedge}(Q{\vee}R)$, $B = (P{\vee}Q){\wedge}(S{\vee}R)$, $C = (S{\vee}Q){\wedge}(A{\vee}B)$, $D = (P{\vee}R){\wedge}(A{\vee}B)$. Међутим, како „слику цртамо само помоћу лењира“ то ће колинеација сачувати слику и четворотеменик $f(P)f(Q)f(R)f(S)$ ће бити заслужан за $\mathcal{H}(f(A)f(B);f(C)f(D))$. □

Бијективно пресликавање са особином да хармонијску четворку тачака шаље у хармонијску четворку тачака зваћемо ***хармонијско пресликавање*** [67]. Дакле, хармонијско пресликавање је бијекција која чува хармонијску конјугованост, а основни примери су пројективитети (Теорема 2.71) и колинеације (Теорема 2.72).

Како се хармонијска конјугованост конкретизује у аналитичкој пројективној равни? Ако желимо да говоримо о хармонијској четворци морамо најпре проверити Фаноову аксиому. Ми знамо да је свака аналитичка пројективна раван Папосова (Теорема 2.50), али да ли је Бахманова?

Нека је $ABCD$ произвољан четворотеменик аналитичке пројективне равни $\mathbb{FP}^2$. Како су A, B, C неколинеарне, то су вектори представници $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ линеарно независни, те чине базу векторског простора $\mathbb{F}^3$. Самим тим $\vec{D}$ је њихова линеарна комбинација, која се може стандардно нормирати са $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$. Наиме, ми прво фиксирамо вектор $\vec{D}$, а затим бирамо векторе представнике $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ тако да важи $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, што ће управо бити сабирци из оригиналне линеарне комбинације. На тај начин поставили смо координатни систем у односу на четворотеменик $ABCD$.

Погледајмо рачун за дијагоналне тачке тог четворотеменика. За $E = (A{\vee}B){\wedge}(C{\vee}D)$

имамо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E} &= (\overrightarrow{A\vee B}) \times (\overrightarrow{C\vee D}) = (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}) \\ &= (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times (\overrightarrow{C} \times (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})) \\ &= (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \times (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{B}) \\ &= (\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}))\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{B} \cdot (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}))\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{B}))\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{B} \cdot (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{B}))\overrightarrow{A} \\ &= -[\overrightarrow{C}, \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}]\overrightarrow{A} + [\overrightarrow{C}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A}]\overrightarrow{B} = [\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}](-\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}).\end{aligned}$$

За $F = (A\vee C)\wedge(B\vee D)$, добијамо $\overrightarrow{F} = [\overrightarrow{A}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{B}](-\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}) = [\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}](\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C})$, док за $G = (A\vee D)\wedge(B\vee C)$ имамо $\overrightarrow{G} = [\overrightarrow{C}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A}](-\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}) = [\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}](\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$, што се види из симетрија по $\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{C}$, односно по $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{C}$. По Леми 2.31, колинеарност тачака зависи од линеарне зависности њихових вектора представника. Из $\alpha\overrightarrow{E} + \beta\overrightarrow{F} + \gamma\overrightarrow{G} = \overrightarrow{0}$ добијамо $[\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}](\alpha(-\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})+\beta(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C})+\gamma(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})) = \overrightarrow{0}$, одакле долазимо до једначине $(\beta-\alpha)\overrightarrow{A} + (\gamma-\alpha)\overrightarrow{B} + (\beta+\gamma)\overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$. Како су $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ линеарно независни то добијамо $\beta-\alpha = \gamma-\alpha = \beta+\gamma = 0$, односно важи $\alpha = \beta = \gamma$ и $2\alpha = 0$. Уколико је карактеристика поља $\mathbb{F}$ различита од два, тада мора бити $\alpha = \beta = \gamma = 0$, вектори $\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ су линеарно независни, односно дијагоналне тачке никад нису колинеарне. Уколико је карактеристика поља $\mathbb{F}$ једнака два, тада је испуњено $2\alpha = 0$, док свакако постоје $\alpha = \beta = \gamma = 1 \neq 0$, што значи да су вектори $\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ линеарно зависни, односно дијагоналне тачке су увек колинеарне.

Теорема 2.73. *Аналитичка пројективна раван $\mathbb{FP}^2$ је Бахманова ако и само ако поље $\mathbb{F}$ није карактеристике два.*

Раније смо констатовали да Фаноова раван не испуњава Фаноову аксиому, а сада имамо додатни аргумент. Одговарајуће поље Фаноове равни $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ је карактеристике два, што је случај и са свим пољима која за ред имају степен двојке. У аналитичкој пројективној равни $\mathbb{FP}^2$ где је $\mathbb{F}$ карактеристике два, сваки четворотеменик је анти-Фаноов. Уколико је сваки четворотеменик пројективне равни анти-Фаноов, онда је та раван Дезаргова, што је резултат који је 1956. године дао Глисон[87] [35]

Напоменимо да постоје пројективне равни у којима се налазе и Фаноови и анти-Фаноови четворотеменици. Први такав пример била је једна коначна пројективна раван реда 16 коју је 1953. године изложио Ленз[88] [52]. Нешто касније Нојман[89] је уопштила такве примере, односно показала да за сваки $r \neq 4$ који је паран степен простог броја, постоји коначна пројективна раван реда r која има и Фаноове и анти-Фаноове четворотеменике [58].

Нека је $\mathbb{F}$ поље карактеристике различите од два. По Теореми 2.73 у питању је Бахманова раван и сви четворотеменици су Фаноови, те појам хармонијске конјугованости има смисла. Дворазмера је инваријанта пројективитета (Теорема 2.37), а то је и хармонијска конјугованост (Теорема 2.71), што значи да за $\mathcal{H}(AB;CD)$ имамо фиксирану дворазмеру $(ABCD)$. Међутим, по Леми 2.67 је $\mathcal{H}(BA;CD)$, те постоји пројективитет који слика $(A,B,C,D) \mapsto (B,A,C,D)$, што даје $(BACD) = (ABCD)$. Како по Теореми 2.38 важи $(BACD) \cdot (ABCD) = 1$, то је $(ABCD)^2 = 1$, одакле следи $(ABCD) = -1$ јер дворазмера не може бити један. Обратно, ако је $(ABCD) = -1$, а X јединствена тачка из Теореме 2.69 за коју важи $\mathcal{H}(AB;CX)$, то имамо $(ABCX) = -1$, те из Леме 2.39 следи $X = D$, односно $\mathcal{H}(AB;CD)$.

Теорема 2.74. *За поље $\mathbb{F}$ карактеристике различите од 2 у $\mathbb{FP}^2$ важи $\mathcal{H}(AB;CD)$ ако и само ако је $(ABCD) = -1$.*

[87] Andrew Mattei Gleason (1921–2008), амерички математичар
[88] Hanfried Lenz (1916–2013), немачки математичар
[89] Hanna Neumann (1914–1971), немачко-аустралијска математичарка

2.19 Колинеација реалне пројективне равни

Размотримо природно питање о томе да ли рестрикција колинеације f на неку праву p, односно $f\restriction_p : (p) \to (f(p))$, мора бити пројективитет. Мора ли аутоморфизам пројективне равни који чува хармонијску коњугованост (Теорема 2.72) бити пројективитет?

Нека је h хармонијско пресликавање аналитичке пројективне праве $\mathbb{FP}^1$ на саму себе. По Основној теореми пројективитета, пројективитет је једнозначно одређен са три пара одговарајућих тачака, те нека је g пројективитет који се поклапа са h на неке три различите тачке. Ако се h разликује од g можемо посматрати $g^{-1} \circ h$, што је такође хармонијско пресликавање, али оно фиксира три различите тачке. Постоји ли неидентичко хармонијско пресликавање које фиксира три различите тачке?

Да бисмо одговорили на ова питања користимо дехомогенизацију $*\colon \mathbb{FP}^1 \to \bar{\mathbb{F}}$ која од хармонијског $h\colon \mathbb{FP}^1 \to \mathbb{FP}^1$ прави $h^* = * \circ h \circ *^{-1}\colon \bar{\mathbb{F}} \to \bar{\mathbb{F}}$. Претпоставимо да h фиксира основне тачке, односно да h^* фиксира ∞, 0 и 1. Како је h^* бијекција која фиксира ∞, то је $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ дефинисано са $f = h^*\restriction_{\mathbb{F}}$ бијекција за коју је $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

Компликације у строго формалном запису можемо смањити тако што елемент $a \in \bar{\mathbb{F}}$ поистоветимо са тачком $*^{-1}(a)$. На тај начин $a \in \mathbb{F}$ представља тачку са хомогеним координатама $(a : 1)$, док је ∞ заправо тачка $(1 : 0)$. По дефиницији рачунамо дворазмеру $(a, b, c, \infty) = (a - c)(-1)/(-1)(b - c) = (a - c)/(b - c)$, а како по Теореми 2.74, $\mathcal{H}(a, b; c, \infty)$ даје $(a - c)/(b - c) = -1$, то добијамо $2c = a + b$, што значи да је тачка која је хармонијски коњугована бесконачној у односу на неки пар тачака, управо аритметичка средина тог пара.

Лема 2.75. *У $\mathbb{FP}^1$ важи $\mathcal{H}(a, b; c, \infty)$ ако и само ако је $2c = a + b$.*

Из Леме 2.75, за произвољне различите $x, y \in \mathbb{F}$ имамо

$$\mathcal{H}\left(x, y; \frac{x+y}{2}, \infty\right).$$

Примена хармонијског пресликавања h, за које је $h(\infty) = \infty$, даје

$$\mathcal{H}\left(f(x), f(y); f\Big(\frac{x+y}{2}\Big), \infty\right),$$

што новом применом Леме 2.75, за $x, y \in \mathbb{F}$ даје

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Посебно, за $y = 0$ имамо

$$f\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{f(x)}{2},$$

што у сарадњи са претходном једначином показује да је f морфизам у односу на сабирање. Закључујемо да за свако $x, y \in \mathbb{F}$ важи

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{2.15}$$

Посебно, за $y = -x$ имамо $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, одакле следи $f(-x) = -f(x)$.

Како рачун за дворазмеру даје

$$(-x, x, 1, x^2) = \frac{-x-1}{-x-x^2}\frac{x-x^2}{x-1} = -1,$$

то по Теореми 2.74 важи $\mathcal{H}(-x, x; 1, x^2)$. Примена хармонијског пресликавања h даје $\mathcal{H}(f(-x), f(x); f(1), f(x^2))$, односно $\mathcal{H}(-f(x), f(x); 1, f(x^2))$, али како је већ

$\mathcal{H}(-f(x), f(x); 1, (f(x))^2)$, то по Теореми 2.69 имамо $f(x^2) = (f(x))^2$. Додатно расписивање уз коришћење претходне формуле даје

$$f((x+y)^2) = (f(x+y))^2 = (f(x)+f(y))^2 = (f(x))^2 + 2f(x)f(y) + (f(y))^2,$$
$$f((x+y)^2) = f(x^2+2xy+y^2) = f(x^2)+f(2xy)+f(y^2) = (f(x))^2 + 2f(xy) + (f(y))^2,$$

одакле је f морфизам у односу на множење. Дакле, за свако $x, y \in \mathbb{F}$ важи

$$f(xy) = f(x)f(y). \tag{2.16}$$

Хармонијско пресликавање узроковало је да f мора бити морфизам како у односу на сабирање (формула (2.15)), тако и у односу на множење (формула (2.16)), што значи да је f аутоморфизам поља $\mathbb{F}$. Да ли постоји аутоморфизам поља $\mathbb{F}$ различит од $\mathbb{1}$?

У случају комплексне пројективне равни, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, знамо да важи $\overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y}$ и $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, тако да је конјугат $x \mapsto \bar{x}$ аутоморфизам поља $\mathbb{C}$ различит од $\mathbb{1}$. Нека је f бијекција комплексне пројективне равни на саму себе која мења комплексне бројеве њиховим конјугатима, $(z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (\overline{z_1} : \overline{z_2} : \overline{z_3})$. Тада је инциденција између тачке $(x_1 : x_2 : x_3)$ и праве $[u_1 : u_2 : u_3]$ одређена условом $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$, што је даље еквивалентно услову $\overline{x_1}\overline{u_1} + \overline{x_2}\overline{u_2} + \overline{x_3}\overline{u_3} = 0$, одакле следи да f чува инциденцију, те је зато колинеација. Права $p = [0 : 0 : 1]$ је фиксна права, која је инцидентна са три фиксне тачке $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ и $(1 : 1 : 0)$, те ако је $f\restriction_p$ пројективитет по Основној теореми пројективитета мора бити $f\restriction_p = \mathbb{1}$. Међутим, p је инцидентна са $(i : 1 : 0)$ које се слика у $(-i : 1 : 0) \neq (i : 1 : 0)$, што је контрадикција. Дакле, у комплексној пројективној равни постоји колинеација која није пројективна колинеација.

Теорема 2.76. *У комплексној пројективној равни конјугат индукује колинеацију која није пројективна колинеација.*

Вратимо се на аутоморфизам поља $\mathbb{F}$, који у почетку има $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, а затим даје $f(n) = n$ за све природне $n \in \mathbb{N}$. То се даље продужава на целе бројеве $\mathbb{Z}$ због $f(-n) = -f(n)$, те коначно и на рационалне бројеве $\mathbb{Q}$ због $f(m/n)f(n) = f(m)$. Дакле, аутоморфизам поља f фиксира све рационалне бројеве. Самим тим, свака колинеација рационалне пројективне равни је пројективна колинеација.

Размотримо сада најважнији случај $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, случај реалне пројективне равни. Кључни мотив је особина да је реалан број позитиван ако је квадрат неког броја који није нула, а како важи $f(x^2) = (f(x))^2$, то f преводи позитивне бројеве у позитивне. Ако f не фиксира неко $a \in \mathbb{R}$, односно важи $f(a) \neq a$, тада је $a < f(a)$ или $a > f(a)$. Претпоставимо да је $a < f(a)$. Како су рационални бројеви густи у реалним то постоји $q \in \mathbb{Q}$ тако да је $a < q < f(a)$. Међутим, $q - a > 0$ повлачи $f(q-a) > 0$, али $f(q-a) = f(q) - f(a) = q - f(a) < 0$ што је контрадикција. Сасвим слично се изводи контрадикција у случају $a > f(a)$. Можемо закључити да је једини аутоморфизам поља $\mathbb{R}$ идентичко пресликавање и отуда следећа теорема.

Теорема 2.77. *Свака колинеација реалне пројективне равни је пројективна колинеација.*

Захваљујући Теореми 2.66, свака пројективна колинеација реалне пројективне равни, самим тим и свака колинеација (Теорема 2.77), једнозначно се задаје са два четворотеменика. Четворотеменик $ABCD$ одређује координатни систем тако што вектори $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{C}$, као линеарно независни (јер су тачке A, B, C неколинеарне) чине базу простора $\mathbb{R}^3$, а ради једноставности их бирамо да нормирамо $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$. Сасвим слично други координатни систем је задат четворотемеником $A'B'C'D'$, са нормираним $\overrightarrow{D'} = \overrightarrow{A'} + \overrightarrow{B'} + \overrightarrow{C'}$. Ако изразимо нове базне векторе преко старих добијамо матрицу преласка M са старе базе на нову: $(\overrightarrow{A}', \overrightarrow{B}', \overrightarrow{C}') = (\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})M$. Пошто M преводи базе у питању је регуларна квадратна матрица реда три.

Ако са $X = (x_1, x_2, x_3)$ означимо координате вектора представника неке тачке у старом координатном систему, док са $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ означимо координате вектора те исте тачке у новом координатном систему, то је $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})X = (\overrightarrow{A}', \overrightarrow{B}', \overrightarrow{C}')X'$, одакле следи $X = MX'$. Веза између старих и нових координата је једна регуларна матрица. Као и раније, активни приступ такође (попут већ разматраног пасивног приступа) има за везу регуларну матрицу, што значи да су колинеације реалне пројективне равни заправо индуковане регуларним матрицама реда три.

Теорема 2.78. *Колинеација реалне пројективне равни је индукована регуларном линеарном трансформацијом.*

Веза између старих координата X и нових координата X' дата је са $X = MX'$, где је M регуларна матрица. Природно се поставља питање како се пресликавају праве при тој колинеацији. Вектори представници X тачака са праве $p = [U]$ описане су једначином $U^\top X = 0$. Из $X = MX'$ добијамо $U^\top MX' = 0$, што представља једначину нове праве $U'^\top X' = 0$, одакле следи $\lambda U'^\top = U^\top M$. Транспоновање даје $\lambda U' = (U^\top M)^\top = M^\top U$, што доказује наредну теорему.

Теорема 2.79. *Ако колинеација реалне пројективне равни пресликава тачке формулом $X' = PX$, онда она пресликава праве са $U' = (P^{-1})^\top U$.*

Реална пројективна раван $(\mathcal{T}_\mathbb{R}, \mathcal{P}_\mathbb{R}, \mathcal{I}_\mathbb{R})$ природно се поистовећује са интуитивном равни $(\mathcal{T}_\infty, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{I}_\infty)$, при чему је $u_\infty = [0 : 0 : 1]$ бесконачна права. Када знамо која конкретна права пројективне равни је бесконачна, можемо додатно увести нове објекте. Нека је f колинеација интуитивне пројективне равни. ***Противоса*** је права $f^{-1}(u_\infty)$, док је ***хоризонт*** права $f(u_\infty)$.

Посебно је занимљиво посматрати перспективне колинеације. Нека је s оса, а S центар перспективне колинеације f интуитивне пројективне равни. Нека је u противоса, односно права таква да је $f(u) = u_\infty$. Ако су оса и противоса различите праве онда оне имају сециште $A = s \wedge u$, али $f(A) = A$ јер $A \in s$, као и $f(A) \in u_\infty$ јер $A \in u$. Одавде је $A \in u_\infty$ што значи да се u и s секу у бесконачној тачки, односно да су оне паралелне. Хоризонт је противоса инверзног пресликавања, те је такође са њима паралелна.

Лема 2.80. *Оса, противоса и хоризонт су паралелне праве.*

Афино пресликавање је трансформација афиног простора која чува тачке и праве. Дакле, у питању је колинеација која коначне елементе шаље у коначне, а бесконачне у бесконачне. То значи да афино пресликавање има u_∞ за фиксну праву, односно да је противоса $u = u_\infty$.

Размотримо афине перспективне колинеације. Перспективне колинеације за фиксне праве имају само осу и праве које пролазе кроз центар, тако да лако можемо класификовати примере за које је $u = u_\infty$. Хомологија ($S \notin s$) за коју важи $s = u$ је ***хомотетија***, а хомологија код које $S \in u_\infty$ је перспективна ***афиност***, што је најчешћи случај са којим се срећемо. Елација ($S \in s$) код које је $s = u$ је ***транслација***, а она код које је $S \in u_\infty \neq s$ је ***трансвекција*** (или ***смицање***).

Афина пресликавања имају особину да чувају паралелност. Такође, како чувају дворазмеру, она ће чувати и однос дељења дужи.

По Теореми 2.79 ако перспективна колинеација пресликава тачке везом $X' = PX$, за неку регуларну матрицу P, онда се праве сликају везом $U = P^\top U'$. Противоса је права која се слика у $[0 : 0 : 1]$, тако да противосу представља последња трећа врста матрице пресликавања P. Матрица афиног пресликавања зато мора имати нуле на прва два места у последњој врсти.

2.20 Фиксни елементи

Фиксни елементи пројективитета и колинеација имају велики значај у нашој теорији. Како пронаћи све фиксне тачке пројективитета у $\mathbb{RP}^1$ или колинеације у $\mathbb{RP}^2$? Како је и једно и друго индуковано регуларном линеарном трансформацијом (Теорема 2.33, Теорема 2.78), посматрамо пресликавање

$$\lambda\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X},$$

где је A реална квадратна матрица реда $n+1$ за $n \in \{1, 2\}$.

Тачка X је фиксна тачка уколико је $X = X'$, односно уколико за векторе представнике важи $\overrightarrow{X'} \propto \overrightarrow{X}$. То нас доводи до једначине

$$(A - \lambda\mathbb{1})\overrightarrow{X} = 0,$$

где је $\mathbb{1}$ јединична матрица одговарајућег реда. Уколико је $A - \lambda\mathbb{1}$ регуларна матрица, множењем слева њеним инверзом добијамо јединствено решење $\overrightarrow{X} = 0$, које не представља тачку у $\mathbb{RP}^n$. Зато се фиксне тачке јављају само за сингуларне матрице $A - \lambda\mathbb{1}$, где знамо да решење није јединствено. Како је једначина хомогена, нула вектор јесте решење (иако не представља тачку), те број решења мора бити бесконачан.

Полином $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$ је карактеристични полином матрице A по променљивој λ, при чему је $A - \lambda\mathbb{1}$ сингуларно кад је λ нула карактеристичног полинома, односно сопствена вредност матрице A. Тада је свако решење $\overrightarrow{X} \neq 0$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ. Проблем налажења фиксних тачака еквивалентан је проблему налажења свих сопствених вектора матрице A, а у питању су вектори представници фиксних тачака.

Из Леме А.1 можемо закључити да је сума сопствених потпростора директна, тако да је довољно испитати сваку сопствену вредност понаособ. Колика је димензија сопственог потпростора $\mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbb{1})$ за неку конкретну сопствену вредност λ? Она је барем један, јер за сваку (реалну) сопствену вредност постоје сопствени вектори. Са друге стране димензија може ići највише до вишеструкости сопствене вредности. Заправо, по ставу о рангу и дефекту из линеарне алгебре важи

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbb{1})) = (n+1) - \mathrm{rang}(A - \lambda\mathbb{1}).$$

Ако је вишеструкост сопствене вредности λ један, тада је $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbb{1})) = 1$, што повлачи постојање тачно једне фиксне тачке која јој одговара. Уколико је вишеструкост за λ једнака два, имамо $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbb{1})) \in \{1, 2\}$. У случају димензије једнаке један постоји једна одговарајућа фиксна тачка, док у случају димензије једнаке два постоји бесконачно много одговарајућих фиксних тачака при чему су све оне колинеарне.

Колико фиксних тачака може да има пројективитет у $\mathbb{RP}^1$ ($n = 1$)? Матрица пројективитета је облика

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

те рачунамо карактеристични полином матрице A са

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \mathrm{tr}\,A \cdot \lambda + \det A. \tag{2.17}$$

Сопствене вредности су нуле карактеристичног полинома, а њихов број зависи од дискриминанте добијене квадратне једначине $D = (\mathrm{tr}\,A)^2 - 4\det A$.

Уколико је $D < 0$, односно $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$, нема реалних сопствених вредности (постоје две конјуговано комплексне сопствене вредности), самим тим нема ни реалних сопствених вектора, те ни фиксних тачака. Овај пројективитет зовемо ***елиптички***.

Уколико је $D > 0$, односно $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$, имамо две различите сопствене вредности. Како је свака од те две вредности једнострука, њима одговарају једнодимензиони сопствени потпростори, односно имамо тачно две фиксне тачке. Овај пројективитет зовемо ***хиперболички***.

Уколико је $D = 0$, односно $(\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$, имамо једну сопствену вредност λ, али вишеструкости два. У случају $\operatorname{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ имамо $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 2$, све тачке су фиксне и у питању је идентичко пресликавање. У случају $\operatorname{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 1$ имамо $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 1$, те тачно једну фиксну тачку и тај пројективитет зовемо ***параболички***.

Да сумирамо, број фиксних тачака пројективитета може бити 0 (елиптички), 1 (параболички), 2 (хиперболички) или бесконачно (идентички), а неке конкретне примере видимо у следећој табели.

пројективитет	фиксне тачке	пример
елиптички	0	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
параболички	1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
хиперболички	2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
идентички	∞	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Прича о фиксним елементима колинеације у $\mathbb{RP}^2$ ($n = 2$) је нешто компликованија. Матрица колинеације је облика

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

те је карактеристични полином $\chi_A(\lambda)$ једнак

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A \cdot \lambda^2 - \frac{1}{2}((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)) \cdot \lambda + \det A.$$

Фиксне тачке репрезентују сопствени вектори матрице A. По Теореми 2.79 ако за тачке важи $X' = AX$, то је за праве $U' = (A^{-1})^\intercal U$, односно $U = A^\intercal U'$, те фиксне праве добијамо као сопствене векторе матрице $A^\intercal$. Како транспоноване матрице имају исти карактеристични полином, то фиксне тачке и фиксне праве можемо паралелно разматрати.

Пре неголи се упустимо у конкретне примере колинеација, напоменимо да облик матрице зависи од избора координатног система. Ако је P матрица преласка, за нове координате Y важи $X = PY$, док колинеација дата формулом $X' = AX$, у новом координатном систему добија формулу $Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY$. Матрица колинеације у новом систему је $A' = P^{-1}AP$, што говори да сличне матрице A и A' имају исти геометријски смисао.

Карактеристични полином $\chi_A(\lambda)$ има три нуле, али оне не морају нужно бити реалне. Уколико матрица A има комплексну сопствену вредност λ, тада постоји комплексан вектор X такав да је $(A - \lambda \mathbb{1})X = 0$. Конјуговањем свих инстанци директно добијамо $(A - \bar{\lambda}\,\mathbb{1})\bar{X} = 0$ јер се матрице са реалним улазима не мењају. Дакле, уколико је λ нула карактеристичног полинома, онда је то и њен конјугат $\bar{\lambda}$. Вектор X у том случају не може бити реалан јер би био сопствени и за λ и за $\bar{\lambda}$, што је у супротности са Лемом А.1.

Како је матрица A непарног реда, а комплексне сопствене вредности иду у паровима, то она мора имати барем једну реалну сопствену вредност, самим тим барем један реалан сопствени вектор. Тако закључујемо да свака колинеација у $\mathbb{RP}^2$ мора имати барем једну фиксну тачку као и барем једну фиксну праву.

Започнимо дискусију по различитим нулама карактеристичног полинома. Ако су све три нуле реалне и различите, свакој од њих одговара једнодимензиони сопствени потпростор, те имамо тачно три фиксне тачке чији су вектори представници линеарно независни (Лема А.1), те су оне неколинеарне (Лема 2.31). Сасвим слично имамо и тачно три неконкурентне фиксне праве, а геометријски оне су спојнице фиксних тачака.

Ако су све три нуле различите, а нису све реалне, то имамо пар конјугованих комплексних нула и једну реалну. Реална нула даје једну фиксну тачку и то је све. Сасвим слично, имамо и тачно једну фиксну праву. Геометријски различите комплексне нуле дају и комплексне фиксне тачке чија ће спојница бити та реална фиксна права. Дакле, у питању су једна фиксна тачка и једна фиксна права, док оне међусобно нису инцидентне.

Наредна могућност је једна једнострука и једна двострука реална нула. Једнострука реална нула даје фиксну тачку која је независна од осталих (Лема А.1) које зависе од двоструке реалне нуле λ. За $\mathrm{rang}(A - \lambda\,\mathbb{1}) = 1$ имамо $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathbb{1})) = 2$, тако да су фиксне тачке на правој која није инцидентна са већ постојећом фиксном тачком, што је хомологија. За $\mathrm{rang}(A - \lambda\,\mathbb{1}) = 2$ имамо $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathbb{1})) = 1$ и тачно једну фиксну тачку која тој нули одговара. Дакле, имамо тачно две фиксне тачке и тачно две фиксне праве при чему је једна од њих управо спојница фиксних тачака.

Последња могућност је трострука реална нула, те дискусија одлучује о димензији сопственог потпростора. За $\mathrm{rang}(A - \lambda\,\mathbb{1}) = 0$ имамо $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathbb{1})) = 3$, што је идентичко пресликавање. За $\mathrm{rang}(A - \lambda\,\mathbb{1}) = 1$ имамо $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathbb{1})) = 2$, те и тачка по тачка фиксну праву, што је елација. У случају $\mathrm{rang}(A - \lambda\,\mathbb{1}) = 2$ имамо $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathbb{1})) = 1$, што даје једну фиксну тачку и једну фиксну праву, али овога пута оне су зависне јер одговарају истој сопственој вредности, односно оне су инцидентне.

Што се тиче најједноставнијих примера, најзгодније је користити нормалну форму, односно блок дијагоналне матрице. Кад сопствени потпростор не достиже максималну димензију, можемо користити Жорданове[90] блокове, а за комплексне нуле блок који смо видели у елиптичком пројективитету. Неке конкретне примере наводимо у наредној табели.

[90]Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), француски математичар

колинеација	фиксне тачке	пример
тачка ван праве	1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
тачка на правој	1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
две тачке и две праве	2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
фиксни тротеменик	3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
хомологија	∞	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
елација	∞	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
идентичко	∞	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.21 Инволуције

Под ***инволуцијом*** подразумевамо пресликавање које је само себи инверз. Размотримо најпре инволутивне пројективитете, односно пројективитете у $\mathbb{RP}^1$ са овом особином. Ако је

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

матрица инволутивног пројективитета, тада је $A \cdot A \propto \mathbb{1}$, односно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \propto \lambda \mathbb{1} = A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 \end{pmatrix},$$

одакле добијамо услове $a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = a_{12}a_{21} + a_{22}^2$, $a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} = 0$, $a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22}$, који се лепше могу написати са $a_{11}^2 = a_{22}^2$, $a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0$, $a_{21}(a_{11} + a_{22}) = 0$. Услов $a_{11} = a_{22} \neq 0$ повлачи $a_{12} = a_{21} = 0$, те имамо идентичко пресликавање $A \propto \mathbb{1}$. У супротном је $a_{11} + a_{22} = 0$, односно $\operatorname{tr} A = 0$, што оправдава све три једнакости.

Теорема 2.81. *Неидентички инволутивни пројективитет у $\mathbb{RP}^1$ има матрицу трага нула.*

Из формуле (2.17) је $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = \lambda^2 + \det A$, те карактеристични полином има дискриминанту $D = -4 \det A \neq 0$, што значи да не постоји параболички инволутивни пројективитет. Инволутивне пројективитете зато можемо поделити на елиптичке код којих је $\det A > 0$ и хиперболичке за које је $\det A < 0$, што записујемо у наредној леми.

Лема 2.82. *Инволутивни пројективитет са матрицом A је елиптички за* $\det A > 0$*, а хиперболички за* $\det A < 0$.

Да би пројективитет био инволуција довољно је да има један пар инволутивних тачака. Наиме, ако је A матрица пројективитета који размењује тачке P и Q, тада је $A\overrightarrow{P} = \mu\overrightarrow{Q}$ и $A\overrightarrow{Q} = \nu\overrightarrow{P}$ за неке $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, што значи да су $\overrightarrow{P}$ и $\overrightarrow{Q}$ сопствени вектори матрице A^2 за исту сопствену вредност $\mu\nu$, те припадају истом сопственом потпростору, што је због $P \neq Q$ читав простор одакле следи $A^2 \propto \mathbb{1}$.

Лема 2.83. *Ако пројективитет у $\mathbb{RP}^1$ размењује две различите тачке онда је он инволуција.*

Ако за пројективитет важи $(X, Y, P, Q) \mapsto (X, Y, Q, P)$, тада по Теореми 2.37 имамо $(XYPQ) = (XYQP)$, те је по Теореми 2.38 $(XYPQ)^2 = (XYPQ)(XYQP) = 1$, одакле следи $(XYPQ) = -1$, што даје хармонијску четворку $\mathcal{H}(XY; PQ)$.

Лема 2.84. *Фиксне тачке хиперболичког инволутивног пројективитета су хармонијски спрегнуте са сваким паром одговарајућих тачака.*

Инволутивни пројективитет једнозначно је одређен са два пара инволутивних тачака. Наиме, по Леми 2.83 један пар инволутивних тачака даје инволуцију, при чему већ имамо довољно тачака да по Основној теореми пројективитета одреде пројективитет.

Испитајмо сада инволутивне колинеације у $\mathbb{RP}^2$. Ако пођемо од пара инволутивних тачака A и A' лако закључујемо да је $A \vee A'$ фиксна права. Сасвим слично, то важи и за други пар инволутивних тачака B и B', где $B \notin (A \vee A')$. Како су $A \vee A'$ и $B \vee B'$ фиксне праве то је онда $S = (A \vee A') \wedge (B \vee B')$ фиксна тачка. Колинеација у $\mathbb{RP}^2$ је пројективна колинеација (Теорема 2.77), те је рестрикција на неку фиксну праву инволутивни пројективитет. Како је S фиксна тачка праве $A \vee A'$, а по Леми 2.82 не постоји параболички инволутивни пројективитет, то постоји још једна фиксна тачка праве $A \vee A'$, а сасвим слично још једна фиксна тачка праве $B \vee B'$. Тачка $(A \vee B') \wedge (B \vee A') = (A' \vee B) \wedge (B' \vee A)$ је такође фиксна тачка, што значи да већ постоји превише фиксних тачака.

Уколико не говоримо о идентичкој колинеацији, по Основној теореми колинеације фиксне тачке нису темена четворотеменика, одакле следи да на располагању имамо три колинеарне фиксне тачке, а самим тим по Основној теореми пројективитета све тачке те праве су фиксне. Приде имамо фиксну тачку S ван те праве што доказује да је неидентичка инволутивна колинеација заправо хомологија.

Ако у виду имамо Лему 2.84, у питању је јако специфична хомологија. Нормална форма њене матрице је облика

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

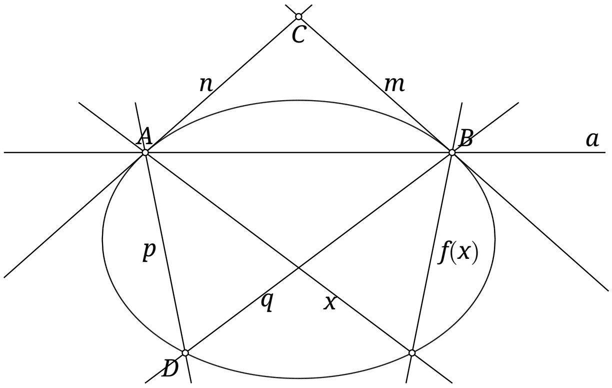
те из $A^2 \propto \mathbb{1}$ следи $\lambda^2 = \mu^2$. Наравно $\lambda = \mu$ даје идентичко пресликавање, тако да преостаје $\lambda = -\mu$, односно нормална форма инволутивне колинеације је

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.22 Конике реалне пројективне равни

Како описати конике у реалној пројективној равни? Нека је Γ недегенерисана коника одређена пројективитетом $f = (A)\overset{\Gamma}{\underset{\wedge}{}}(B)$. Како f није перспективитет, праве

$a = A \vee B$, $m = f(a)$ и $n = f^{-1}(a)$ су различите. Нека је p произвољна фиксирана права прамена (A), различита од a и n, а $q = f(p)$ њена слика. Ако обележимо тачке $C = m \wedge n$ и $D = p \wedge q$, то ће $ABCD$ бити четворотеменик.



По Основној теореми колинеације можемо поставити координатни систем тако да темена четворотеменика имају базне координате $A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$, $C(0:0:1)$ и $D(1:1:1)$, а једноставан рачун даје

$$a[0:0:1] = A \vee B, \qquad m[1:0:0] = B \vee C, \qquad n[0:1:0] = A \vee C,$$
$$p[0:-1:1] = A \vee D, \qquad q[1:0:-1] = B \vee D.$$

По Основној теореми пројективитета, f је одређено са $(n, a, p) \mapsto (a, m, q)$. За произвољну праву $x \in (A)$ постоје $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ тако да је $\overrightarrow{x} = \mu \overrightarrow{a} + \nu \overrightarrow{n} = (0, \nu, \mu)$, док за $f(x) \in (B)$ постоје $\mu', \nu' \in \mathbb{R}$ тако да је $\overrightarrow{f(x)} = \mu' \overrightarrow{m} + \nu' \overrightarrow{a}$. Изаберимо векторе представнике у складу са написаним хомогеним координатама. Провером за $(\mu : \nu) \mapsto (\mu' : \nu')$ добијамо $(1:0) \mapsto (1:0)$ из $f(a) = m$, $(0:1) \mapsto (0:1)$ из $f(n) = a$ и $(1:-1) \mapsto (1:-1)$ из $f(p) = q$, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{m} - \overrightarrow{a}$. По Основној теореми пројективитета, три фиксне тачке повлаче идентичко $(\mu' : \nu') = (\mu : \nu)$ и зато $\overrightarrow{f(x)} = \mu \overrightarrow{m} + \nu \overrightarrow{a} = (\mu, 0, \nu)$. Тачка са конике је сециште правих x и $f(x)$, те како је

$$\overrightarrow{x \wedge f(x)} = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{f(x)} = (0, \nu, \mu) \times (\mu, 0, \nu) = (\nu^2, \mu^2, -\mu\nu),$$

њене хомогене координате су $(\nu^2 : \mu^2 : -\mu\nu)$. Међутим, тачка је облика $(\nu^2 : \mu^2 : -\mu\nu)$ ако и само ако задовољава једначину другог степена $x_3^2 - x_1 x_2 = 0$.

Крива другог реда у еуклидској равни је скуп тачака $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину другог степена $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ (где нису сви a_{11}, a_{12}, a_{22} једнаки нули). Ако хомогенизујемо координате са $x = x_1/x_3$ и $y = x_2/x_3$, претходна једначина, после множења са x_3^2, гласи

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{2.18}$$

Свака крива другог реда, односно једначина (2.18), може се записати у матричном облику. Ако обележимо матрице

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

једначина (2.18) постаје $X^{\mathsf{T}} A X = 0$, при чему је матрица A симетрична.

Вратимо се на почетну недегенерисану конику Γ. Након погодног избора координатног система добили смо једначину конике $x_3^2 - x_1x_2 = 0$ којој (после множења са два) одговара симетрична матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Како гласи једначина конике ако променимо координатни систем или ако пресликамо конику неком колинеацијом? Одговор на ова питања је исти јер у оба случаја (пасивном и активном) веза између старих и нових координата је регуларна матрица (Теорема 2.78). Конкретно, трансформације координата су облика $\lambda X = MX'$, где је $\det M \neq 0$. Заменом у једначину $X^{\intercal}AX = 0$, добијамо $(MX')^{\intercal}A(MX') = 0$, односно $X'^{\intercal}(M^{\intercal}AM)X' = 0$. Нова једначина $X'^{\intercal}A'X' = 0$ има матрицу $A' = M^{\intercal}AM$, при чему она остаје симетрична, $A'^{\intercal} = (M^{\intercal}AM)^{\intercal} = M^{\intercal}A^{\intercal}(M^{\intercal})^{\intercal} = M^{\intercal}AM = A'$. Наша конкретна матрица из (2.19) је регуларна, а како је то и M, имамо регуларно $M^{\intercal}AM$, што значи да је недегенерисана коника одређена једном симетричном регуларном матрицом.

Размотримо обрат. Да ли свака симетрична матрица A одређује неку конику? По спектралној теореми (Теорема А.4), за сваку симетричну матрицу A реда n читав простор је директна сума сопствених потпростора, Уколико за матрицу преласка M поставимо ортогоналну матрицу чије су колоне сопствени вектори који чине ортонормирану базу, тада коника добија матрицу $A' = M^{\intercal}AM$ која је дијагонална. Додатно се може извршити трансформација која нормира елементе на дијагонали. Погледајмо како изгледа рачун у конкретном случају $n = 3$.

Нека вектори $V_1(m_{11}, m_{21}, m_{31}), V_2(m_{12}, m_{22}, m_{32}), V_3(m_{13}, m_{23}, m_{33})$ чине ортонормирану базу из спектралне теореме, тако да је $AV_1 = \lambda_1 V_1$, $AV_2 = \lambda_2 V_2$, $AV_3 = \lambda_3 V_3$. Ако поставимо матрицу преласка

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}V_1 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}V_2 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}}V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{\sqrt{|\lambda_1|}} & \frac{m_{12}}{\sqrt{|\lambda_2|}} & \frac{m_{13}}{\sqrt{|\lambda_3|}} \\ \frac{m_{21}}{\sqrt{|\lambda_1|}} & \frac{m_{22}}{\sqrt{|\lambda_2|}} & \frac{m_{23}}{\sqrt{|\lambda_3|}} \\ \frac{m_{31}}{\sqrt{|\lambda_1|}} & \frac{m_{32}}{\sqrt{|\lambda_2|}} & \frac{m_{33}}{\sqrt{|\lambda_3|}} \end{pmatrix},$$

добијамо

$$M^{\intercal}AM = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}V_1 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}V_2 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}}V_3 \end{pmatrix}^{\intercal} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\sqrt{|\lambda_1|}}V_1 & \frac{\lambda_2}{\sqrt{|\lambda_2|}}V_2 & \frac{\lambda_3}{\sqrt{|\lambda_3|}}V_3 \end{pmatrix},$$

односно

$$A' = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sgn}\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Овако долазимо до дијагоналне матрице која на дијагонали има само вредности 1, -1 и 0. Ово нам омогућава да једноставно класификујемо различите типове симетричних матрица, а самим тим и коника. Нека је A реална симетрична матрица реда три.

Ако је A ранга 3 (регуларна), нема сопствених вредности једнаких нули и имамо два суштински различита случаја. У првом је матрица дефинитна (све сопствене вредности су истог знака: три јединице или три минус јединице), што даје једначину $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ са јединственим решењем $(0, 0, 0)$ које не представља тачку пројективне равни, те је у питању празан скуп, што по Штајнеровој дефиницији није коника. У другом случају матрица је недефинитна (две сопствене вредности су једног, а трећа супротног знака), и она се ортогоналним трансформацијама своди на $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, што је случај и са нашим $x_3^2 - x_1x_2 = 0$. Самим тим постоји ортогонална трансформација од почетне матрице до наше што одређује јединствену недегенерисану конику.

Ако је A ранга 2 имамо једну нулу на дијагонали и два случаја. У првом су обе преостале вредности истог знака, једначина је $x_1^2 + x_2^2 = 0$, што даје тачку $(0 : 0 : 1)$. У другом су те вредности супротног знака, једначина је $x_1^2 - x_2^2 = 0$, што је унија правих $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$, односно две праве $[1 : -1 : 0]$ и $[1 : 1 : 0]$.

Матрица ранга 1 одређује једначину $x_1^2 = 0$ што је права $[1:0:0]$, док матрица ранга 0 је нула матрица и представља све тачке пројективне равни $\mathcal{T}$. Приметимо да дискутовани случајеви покривају све дегенерисане конике (тачка, права, две праве, све тачке) из наше дискусије након увођења Штајнерове дефиниције.

2.23 Корелације

Колинеација пројективне равни је бијективно пресликавање које пресликава тачке у тачке, а праве у праве. Другачији тип пресликавања на дводимензионим објектима зовемо корелација. ***Корелација*** пројективне равни је бијективно пресликавање које тачке слика у праве, а праве у тачке, при чему чува релацију инциденције.

Прецизније, под корелацијом пројективне равни $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ подразумевамо бијективна пресликавања $f_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{P}$ и $f_{\mathcal{P}}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{T}$ која чувају инциденцију, у смислу да ако важи $A\mathcal{I}p$ за неко $A \in \mathcal{T}$ и $p \in \mathcal{P}$, тада важи и $f_{\mathcal{P}}(p)\mathcal{I}f_{\mathcal{T}}(A)$. Инваријантност релације инциденције за различите тачке $A, B \in \mathcal{T}$ даје $f_{\mathcal{P}}(A\vee B) = f_{\mathcal{T}}(A)\wedge f_{\mathcal{T}}(B)$, односно за различите праве $p, q \in \mathcal{P}$ даје $f_{\mathcal{T}}(p\wedge q) = f_{\mathcal{P}}(p)\vee f_{\mathcal{P}}(q)$. Као код колинеације, пресликавање $f_{\mathcal{T}}$ индукује $f_{\mathcal{P}}$ и обратно, те их обележавамо истим словом f и доживљавамо као трансформацију дисјунктне уније $\mathcal{T} \sqcup \mathcal{P}$.

Пројективна корелација је корелација f чија је рестрикција $f\restriction_p\colon (p) \to (f(p))$ на сваку праву p пројективитет. Као у случају колинеације (Лема 2.64), довољно је проверити да је рестрикција на једну праву пројективитет.

Лема 2.85. *Ако је рестрикција корелације пројективне равни на неку праву пројективитет, онда је она пројективна корелација.*

Доказ. Нека је f корелација пројективне равни таква да је $f\restriction_p$ пројективитет за неку праву p. Нека је $q \neq p$ произвољна права, а тачка S произвољна која није инцидентна ни са p ни са q. Перспективитет $(q)\overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)$ слика тачку $A\mathcal{I}q$ у тачку $B\mathcal{I}p$ тако да су A, B, S колинеарне, одакле су $f(A), f(B), f(S)$ конкурентне праве, те следи да је $f\restriction_q = (q)\overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)\overset{f\restriction_p}{\overline{\wedge}}(f(p))\overset{f(S)}{\overline{\overline{\wedge}}}(f(q))$ пројективитет. □

Теорема 2.86 (Основна теорема корелације). *Постоји јединствена пројективна корелација Папосове равни која темена четворотеменика $ABCD$ слика редом у странице четвоространика $a'b'c'd'$.*

Доказ. Доказ се изводи слично доказу Основне теореме колинеације (Теорема 2.66). Нека је f пројективна корелација Папосове равни, где је $(A, B, C, D) \mapsto (a', b', c', d')$, при чему је $ABCD$ четворотеменик, а $a'b'c'd'$ четвоространик. Тачка $M = (A\vee B)\wedge(C\vee D)$ се корелацијом f мора пресликати у праву $m' = (a'\wedge b')\vee(c'\wedge d')$, док је $f\restriction_{A\vee B}$ по Основној теореми пројективитета једнозначно одређено са $(A, B, M) \mapsto (a', b', m')$. Сасвим слично, тачка $N = (A\vee D)\wedge(B\vee C)$ се корелацијом f мора пресликати у праву $n' = (a'\wedge d')\vee(b'\wedge c')$, док је $f\restriction_{A\vee D}$ једнозначно одређено са $(A, D, N) \mapsto (a', d', n')$.

За произвољну праву $p\not{\mathcal{I}}A$ имамо сецишта $X = (A\vee B)\wedge p$ и $Y = (A\vee D)\wedge p$, те имамо $p = X\vee Y$, што се корелацијом f слика у $P' = f\restriction_{A\vee B}(X)\wedge f\restriction_{A\vee D}(Y)$. Довољно је показати да се конкурентне праве сликају у колинеарне тачке. Посматрајмо фамилију правих p које су конкурентне у некој тачки S и пројективитет

$$h = (a'\wedge b')\overset{f^{-1}\restriction_{a'\wedge b'}}{\overline{\wedge}}(A\vee B)\overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}}(A\vee D)\overset{f\restriction_{A\vee D}}{\overline{\wedge}}(a'\wedge d')$$

за који важи $x' \mapsto X \mapsto Y \mapsto y'$. Дакле, имамо $h(x') = y'$, али и $h(a') = a'$, те је h перспективитет, одакле су тачке $P' = x'\wedge y'$ колинеарне □

Поларитет је инволутивна корелација. За поларитет важи $f(f(A)) = A$, односно из $f_{\mathcal{T}}(A) = a$ следи $f_{\mathcal{P}}(a) = A$. Уобичајено је да се тачка $A = f(a)$ у том случају зове ***пол праве*** a, док се права $a = f(A)$ зове ***полара тачке*** A. Тако су одговарајуће тачке и праве спрегнуте везом пол-полара.

Ако тачка A лежи на правој b, тада $a = f(A)$ садржи тачку $B = f(b)$ и кажемо да су A и B ***конјуговане тачке***, односно да су a и b ***конјуговане праве***. Уколико уз $a = f(A)$ важи и $A\mathcal{I}a$, онда је A ***самоконјугована тачка***, док је a ***самоконјугована права***.

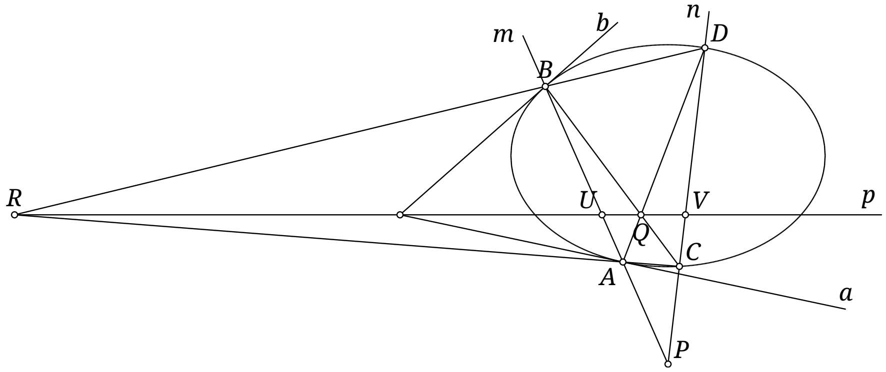
Испоставља се да свака недегенерисана коника одређује један поларитет. Да бисмо припремили доказ тог тврђење потребна нам је наредна лема.

Лема 2.87. *Недегенерисана коника може имати највише две тангенте које су инцидентне са датом тачком.*

Доказ. Нека је дата тачка $P \notin \Gamma$ и нека коника Γ има две тангенте из P са додирним тачкама M и N. Ако је K произвољна тачка са конике различита од M и N, дефинишимо $S = (M\vee N)\wedge(K\vee P)$, и нека је L таква да важи $\mathcal{H}(PS; KL)$. Пројективитет $(M\vee P, M\vee N, M\vee K) \mapsto (N\vee M, N\vee P, N\vee K)$ одређује Γ и важи $\mathcal{H}(M\vee P, M\vee N; M\vee K, M\vee L)$ и $\mathcal{H}(N\vee M, N\vee P; N\vee K, N\vee L)$, те тај пројективитет слика $M\vee L$ у $N\vee L$, одакле важи $L \in \Gamma$ и $P\vee K$ није тангента. $\square$

Теорема 2.88. *Свака недегенерисана коника одређује поларитет.*

Доказ. За неку недегенерисану конику Γ дефинишимо пресликавање $f\colon \mathcal{T} \to \mathcal{P}$ на следећи начин. У случају $P \in \Gamma$, нека је $f(P) = p$, где је p тангента на Γ у тачки P. У случају $P \notin \Gamma$ посматрајмо неке праве m и n прамена (P) тако да је $(m) \cap \Gamma = \{A, B\}$ и $(n) \cap \Gamma = \{C, D\}$ (оне свакако постоје по Леми 2.87). Дијагоналне тачке четворотеменика $ABCD$ су P, $Q = (A\vee D)\wedge(B\vee C)$ и $R = (A\vee C)\wedge(B\vee D)$, те постављамо $f(P) = p = Q\vee R$.



Нека су $U = m\wedge p$ и $V = n\wedge p$ сецишта сечица са $f(P)$. Из четворотеменика $CDRQ$ следи $\mathcal{H}(AB; PU)$, док из четворотеменика $ABRQ$ следи $\mathcal{H}(CD; PV)$. Сециште сечице и праве p представља тачку која је у пару са P хармонијски конјугована са паром тачака добијених у пресеку те сечице и конике.

За сваку сечицу m, где је $(m) \cap \Gamma = \{A, B\}$, постоји јединствена тачка U таква да је $\mathcal{H}(AB; PU)$. Применом Паскалове теореме у граничном случају на прост четворотеменик $AACBBD$ добијамо колинеарне тачке Q, R и $a\wedge b$, где су a и b тангенте на Γ у тачкама A и B. Паскалова права је $p = Q\vee R$ и она је инцидентна са сециштем тангенти a и b. Тако је p одређена тачком U сечице $A\vee B$ из хармонијске четворке и сециштем тангенти у пресечним тачкама те сечице. Како p садржи и хармонијски конјуговане тачке и сецишта тангенти за две сечице, то их онда садржи за све сечице, одакле следи да права p не зависи од избора сечица m и n, те је пресликавање f добро дефинисано.

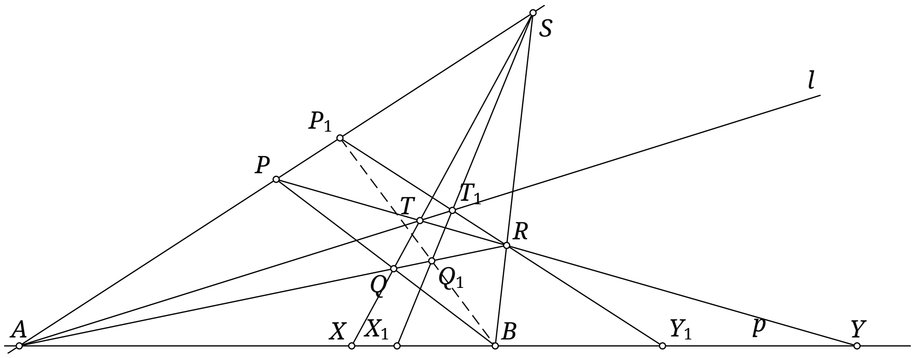
Наредни корак је показати да $P \in f(Q)$ повлачи $Q \in f(P)$. За $P \in \Gamma$ или $Q \in \Gamma$ ствар је очигледна, те нека је $P, Q \notin \Gamma$. Претпоставимо $P \in f(Q)$ и нека је l произвољна сечица кроз Q таква да је $(l) \cap \Gamma = \{A, D\}$. Уведимо тачке B и C тако да је $(A \vee P) \cap \Gamma = \{A, B\}$ и $(B \vee Q) \cap \Gamma = \{B, C\}$. Како $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ и P припадају правој $f(Q) \neq A \vee B$, то добијамо $(A \vee B) \wedge (C \vee D) = P$ и последично $Q \in f(P)$.

Са друге стране, произвољна права $l = P \vee Q$ је слика тачке $L = f(P) \wedge f(Q)$, те се f може проширити на праве. На основу претходно показаних особина лако је видети да је f бијекција која чува инциденцију, као и инволуција, самим тим и поларитет. □

Уколико постоје две тангенте на Γ које пролазе кроз P, тада полара од P мора пресећи конику баш у додирним тачкама тангенти, што нам даје практичан начин одређивања тангенти из тачке на конику. За даљу анализу потребна нам је егзистенција хиперболичког инволутивног пројективитета са којим смо се аналитички сусрели у Лемама 2.84 и 2.83.

Лема 2.89. *За различите тачке A и B постоји пројективитет њихове спојнице који фиксира A и B, док остале тачке X пресликава у Y тако да важи $\mathcal{H}(AB; XY)$.*

Доказ. Ако је $\mathcal{H}(AB; XY)$ то по дефиницији постоји четворотеменик $PQRS$ тако да важи слика: $A = (P \vee S) \wedge (Q \vee R)$, $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R)$, $X = (S \vee Q) \wedge (A \vee B)$, $Y = (P \vee R) \wedge (A \vee B)$. Ако означимо праве $p = A \vee B$ и $l = A \vee T$, где је $T = (P \vee R) \wedge (S \vee Q)$, то је $f = (p) \overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}} (l) \overset{R}{\overline{\overline{\wedge}}} (p)$ пројективитет који је по Основној теореми пројективитета једнозначно одређен са $(A, B, X) \mapsto (A, B, Y)$.



Потребно је доказати да $\mathcal{H}(AB; X_1 Y_1)$ повлачи $f(X_1) = Y_1$. За произвољну тачку $X_1 \in (p)$ постављамо $T_1 = (X_1 \vee S) \wedge l$ и $Y_1 = (T_1 \vee R) \wedge p$, што омогућава $f(X_1) = Y_1$, те преостаје доказати да важи $\mathcal{H}(AB; X_1 Y_1)$. За $P_1 = (A \vee S) \wedge (R \vee T_1)$ и $Q_1 = (A \vee R) \wedge (S \vee T_1)$ тротеменици PTQ и $P_1 T_1 Q_1$ су перспективни у односу на центар A, те су по Дезарговој теореми перспективни у односу на неку осу. Та оса садржи тачке $R = (P \vee T) \wedge (P_1 \vee T_1)$, $S = (Q \vee T) \wedge (Q_1 \vee T_1)$ и $(P \vee Q) \wedge (P_1 \vee Q_1)$, одакле следи да су $P \vee Q$, $P_1 \vee Q_1$ и $S \vee R$ конкурентне, односно тачка $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R)$ лежи на $P_1 \vee Q_1$. Коначно, четворотеменик $P_1 Q_1 R S$ доказује $\mathcal{H}(AB; X_1 Y_1)$. □

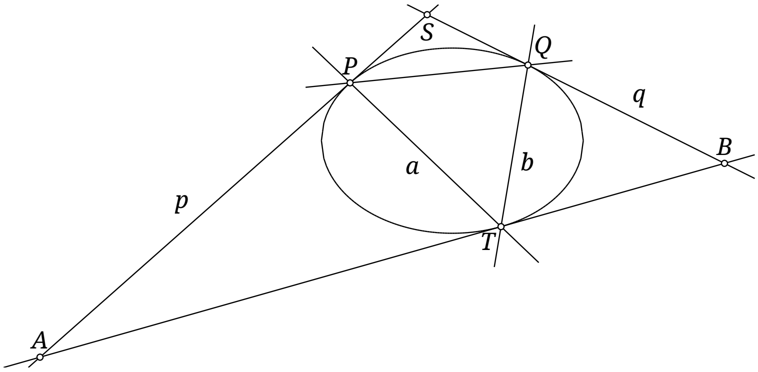
Лема 2.90. *Поларитет одређен недегенерисаном коником је пројективна корелација.*

Доказ. Нека је Γ недегенерисана коника и нека $A, B \in \Gamma$. Ако је f поларитет одређен коником Γ, тада је пол праве $p = A \vee B$, тачка $P = f(p)$. Како полара тачке $X \in (p)$ пролази кроз Y где је $\mathcal{H}(AB; XY)$, то је $f(X) = P \vee Y$, одакле следи да је $f\restriction_p = (p) \overline{\wedge} (p) \overline{\overline{\wedge}} (P)$ пројективитет при чему је $(p) \overline{\wedge} (p)$ пројективитет из Леме 2.89. Како је $f\restriction_p$ пројективитет, то је по Леми 2.85 f пројективна корелација. □

Поларитет f одређен недегенерисаном коником Γ је пројективна корелација, односно његова рестрикција $f\restriction_p$ на произвољну праву p је пројективитет који можемо једноставно обележити са $f\restriction_p = (p) \overset{\Gamma}{\overline{\wedge}} (f(p))$. Дакле, сваки пар пол-полара (P, p) дефинише пројективитет $(p) \overset{\Gamma}{\overline{\wedge}} (P)$, као и његов инверз, пројективитет $(P) \overset{\Gamma}{\overline{\wedge}} (p)$.

Применом Принципа дуалности на конику добијамо ***дуалну конику***, као скуп свих спојница одговарајућих тачака двају низова између којих је успостављен пројективитет. Геометријски смисао дуалне конике огледа се у следећој теореми коју приписујемо Шалу [16].

Теорема 2.91 (Шалова теорема). *Све тангенте недегенерисане конике чине дуалну конику.*



Доказ. Нека су p и q тангенте у тачкама P и Q недегенерисане конике Γ и $S = p \wedge q$. За пројективитет $f = (p)\stackrel{\Gamma}{\barwedge}(P)\stackrel{\Gamma}{\barwedge}(Q)\stackrel{\Gamma}{\barwedge}(q)$ важи $(P, S) \mapsto (p, P \vee Q) \mapsto (P \vee Q, q) \mapsto (S, Q)$. Нека су тачке A и B (различите од P, S, Q) такве да је $f(A) = B$. Ако је a полара од A, а b полара од B, тада је $a \wedge b = T \in \Gamma$. Како је $P \vee T = a$ полара од A то је $A \vee T$ тангента на конику у тачки T, а како је $Q \vee T = b$ полара од B то је и $B \vee T$ тангента на конику у тачки T. Из јединствености тангенте следи да је $A \vee B$ тангента на конику у тачки T. Дакле, свака тангента на недегенерисану конику Γ која је одређена пројективитетом $(P)\stackrel{\Gamma}{\barwedge}(Q)$ је зато спојница одговарајућих тачака при пројективитету f, што доказује теорему. $\square$

Применимо Принцип дуалности на Паскалову теорему. Ако су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ праве које припадају недегенерисаној дуалној коници, онда су спојнице $(a_1 \wedge b_2) \vee (a_2 \wedge b_1)$, $(b_1 \wedge c_2) \vee (b_2 \wedge c_1)$ и $(c_1 \wedge a_2) \vee (c_2 \wedge a_1)$ конкурентне. Како тангенте на недегенерисану конику чине дуалну конику (Теорема 2.91), то добијамо теорему коју је 1806. показао Бријаншон [13].

Теорема 2.92 (Бријаншонова теорема). *Три спојнице наспрамних темена простог шестостраника описаног око недегенерисане конике су конкурентне праве.*

Попут Паскалове теореме и Бријаншонова теорема важи у граничним случајевима, односно када тангенте не чине шестостраник, већ петостраник, четвоространик или најдрастичније тространик. Тачка у којој су одговарајуће спојнице конкурентне зовемо ***Бријаншонова тачка***.

Размотримо конике у реалној пројективној равни, где се природно поставља питање како што лакше доћи до једначине тангенте на конику, односно како реализовати везу пол-полара.

Нека је P тачка, а l произвољна права кроз P која сече недегенерисану конику Γ у две тачке, $\Gamma \cap (l) = \{A, B\}$. Знамо да полара p за пол P пролази кроз тачку X за коју важи $\mathcal{H}(AB; PX)$. Ако поставимо координатни систем на правој l, фиксирањем вектора представника $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$ са нормираним $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$, из $\mathcal{H}(AB; PX)$ је $(ABPX) = -1$, односно $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$. Нека је G матрица конике Γ, односно регуларна симетрична матрица таква да $Y \in \Gamma$ ако и само ако је $\overrightarrow{Y}^{\intercal} G \overrightarrow{Y} = 0$. Како је $\overrightarrow{A}^{\intercal} G \overrightarrow{A} = 0$ и $\overrightarrow{B}^{\intercal} G \overrightarrow{B} = 0$, то је $\overrightarrow{P}^{\intercal} G \overrightarrow{X} = (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})^{\intercal} G (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}^{\intercal} G \overrightarrow{A} - \overrightarrow{A}^{\intercal} G \overrightarrow{B}$. Међутим, транспоновањем добијамо $\overrightarrow{B}^{\intercal} G \overrightarrow{A} = (\overrightarrow{B}^{\intercal} G \overrightarrow{A})^{\intercal} = \overrightarrow{A}^{\intercal} G \overrightarrow{B}$, одакле следи $\overrightarrow{P}^{\intercal} G \overrightarrow{X} = 0$.

Полара тачке P је права која садржи тачке X и зато је $\overrightarrow{p}^{\intercal} = \overrightarrow{P}^{\intercal} G$, односно $\overrightarrow{p} = G \overrightarrow{P}$. Дакле, множењем пола слева матрицом конике добијамо полару.

Теорема 2.93. *Полара тачке P у односу на недегенерисану конику одређену регуларном симетричном матрицом G у $\mathbb{RP}^2$ је права p одређена са $\overrightarrow{p} \propto G\overrightarrow{P}$.*

Глава 3

АФИНА ГЕОМЕТРИЈА

Еуклидска геометрија се често користи као средство за учење аксиоматског метода (видети Секцију 2.1) Међутим, еуклидска геометрија садржи прилично подразумеваних појмова као што су инциденција, растојање, дужина, угао, непрекидност, распоред. Ако уклонимо све ове појмове, а задржимо само појам инциденције, приметићемо да је преостала геометрија и даље прилично очаравајућа и веома нетривијална.

Афина геометрија је уопштење еуклидске геометрије у којем заборављамо метричке концепте. Појам паралелних правих један је од кључних појмова који не зависе од метрике, тако да у афиној геометрији Плејферова аксиома (у пакету са аксиомама инциденције) игра значајну улогу. Реч *афина* потиче од Ојлера, који у својој књизи из 1748. године [25] користи латинску реч *affinis*, што значи сродно, односно повезано...

Афина геометрија може се развијати на два суштински еквивалентна начина. Први приступ је синтетички, ту је афини простор скуп тачака који је повезан са скупом правих, тако да је задовољен списак неких аксиома. Други приступ је аналитички, а његова основа је линеарна алгебра. Ми ћемо се овде више ослањати на овај други.

Криве и површи су скупови тачака са неким специфичним својствима и оне живе у простору који се састоји од тачака. Предмет нашег изучавања су геометријска својства која су инваријантна под одређеним трансформацијама, на пример, транслацијама, ротацијама, пројекцијама. Како поставити модел тачака простора? Почетна идеја је узети векторски простор за модел простора тачака, али ово решење није задовољавајуће из бројних разлога. На пример, тачка која одговара нула вектору има посебно место као координатни почетак, док не постоји добар разлог зашто би нека тачка била привилегована. Затим, појам паралелности се може реализовати само на прилично неприродне начине...

Међутим, дубљи разлог је тај што векторски простор и афини простор поседују различите геометрије. Геометријска својства векторског простора су инваријантна под групом бијективних линеарних пресликавања, док су геометријска својства афиног простора инваријантна под групом бијективних афиних пресликавања, а те две групе нису изоморфне. Грубо говорећи, има више афиних неголи линеарних пресликавања.

Афини простор пружа геометријски боље окружење јер нам омогућава да радимо са тачкама, кривим и површима независно од избора координатног система. Наравно, координатни систем мора бити изабран да би се рачун спровео до краја, али важно је да се суздржимо од избора координатног система све док то не постане заиста неопходно.

Велику предност даје нам чињеница да скоро сваки афини концепт има свој пандан у неком концепту линеарне алгебре. Није лоше афини простор посматрати наглашавајући физичку интерпретацију где су честице представљене тачкама, а силе векторима. На пример, можемо посматрати честицу која се креће у тродимензионом простору, а желимо да опишемо путању те честице. Честицу представља тачка, док је положај те тачке одређен у односу на репер у $\mathbb{R}^3$ као вектор, док је репер уређен пар $(O, (e_1, e_2, e_3))$ где је тачка O координатни почетак, а (e_1, e_2, e_3) база.

На пример, стандардни репер у $\mathbb{R}^3$ има координатни почетак $O(0, 0, 0)$, док је база $e_1(1, 0, 0)$, $e_2(0, 1, 0)$, $e_3(0, 0, 1)$. Положај тачке X је дефинисан јединственим вектором од O ка X. У стандардном реперу тачка $X = (x_1, x_2, x_3)$ има вектор положаја $\overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, x_3)$ што се поклапа са самом тачком, односно можемо рећи да се у стандардном реперу тачке и вектори идентификују.

Међутим, ствари се мењају ако посматрамо репер са другачијим координатним почетком $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, док базу (e_1, e_2, e_3) задржимо. Тада због $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega X}$ и $\overrightarrow{O\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имамо $\overrightarrow{\Omega X} = (x_1 - \omega_1, x_2 - \omega_2, x_3 - \omega_3)$, одакле видимо да се тачке не идентификују са векторима положаја, односно тачке нису вектори.

Тачке и особине тачака потребно је дефинисати тако да буду инваријантне у односу на репер. Погледајмо најпре како се понаша линеарна комбинација вектора. Нека су вектори $u(u_1, u_2, u_3)$ и $v(v_1, v_2, v_3)$ дати координатама у односу на базу $e = (e_1, e_2, e_3)$, тада $\alpha u + \beta v$ има координате $(\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)$. Изаберимо нову базу $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, а са P означимо матрицу преласка са базе e на e', односно за P важи $e' = eP$. Сада се вектори могу изразити на два начина, те је $eu = e'u'$, где u и u' представљају колона матрице са старим, односно новим координатама. Одавде је промена координата дата са $u = Pu'$, односно $u' = P^{-1}u$. Сада за линеарну комбинацију важи

$$\begin{pmatrix} \alpha u'_1 + \beta v'_1 \\ \alpha u'_2 + \beta v'_2 \\ \alpha u'_3 + \beta v'_3 \end{pmatrix} = \alpha P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \beta P^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 \end{pmatrix},$$

што значи да је линеарна комбинација вектора независна од избора базе.

Међутим, уколико са репера (O, e) пређемо на репер (Ω, e), где је $\overrightarrow{O\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, тада тачка $A(a_1, a_2, a_3)$ мења координате у $(a'_1, a'_2, a'_3) = (a_1 - \omega_1, a_2 - \omega_2, a_3 - \omega_3)$, док их тачка $B(b_1, b_2, b_3)$ мења у $(b'_1, b'_2, b'_3) = (b_1 - \omega_1, b_2 - \omega_2, b_3 - \omega_3)$. Сада i-та координата ($i \in \{1, 2, 3\}$) од $\alpha a + \beta b$ у реперу (Ω, e) износи $\alpha a'_i + \beta b'_i = \alpha a_i + \beta b_i - (\alpha + \beta)\omega_i$ што се разликује од координате $\alpha a_i + \beta b_i - \omega_i$ у реперу (O, e) осим у случају кад је $\alpha + \beta = 1$. Овде се види кључна разлика између вектора и тачака. Линеарна комбинација вектора не зависи од базе, док линеарна комбинација тачака зависи од избора репера. Појам линеарне комбинације тачака може се спасити рестрикцијама које захтевају да сума коефицијената износи 1.

Можемо направити две копије од $\mathbb{R}^3$, где прва копија одговара тачкама (у смислу да заборављамо структуру векторског простора), а друга одговара векторима (овде је структура векторског простора важна). Заправо, векторски простор $\mathbb{R}^3$ дејствује на скуп тачака $\mathbb{R}^3$, тако што за сваку тачку $A = (a_1, a_2, a_3)$ и сваки вектор $v = (v_1, v_2, v_3)$ постоји тачка $A + v = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$ коју доживљавамо као резултат транслације тачке A за вектор v. Ово дејство $+ \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задовољава нека кључна својства. На пример $A + 0 = A$, док је $(A + u) + v = A + (u + v)$. Приде, за сваке две тачке A, B постоји јединствени вектор $\overrightarrow{AB}$ за који је $B = A + \overrightarrow{AB}$.

Ове особине су оно што нам је потребно да апстрактно уведемо појам афиног простора. Основна идеја је да посматрамо два различита скупа E и $\overrightarrow{E}$, где је E скуп тачака (без структуре), док је $\overrightarrow{E}$ векторски простор који дејствује на скуп E. Интуитивно можемо говорити о елементима из $\overrightarrow{E}$ чија сила помера тачке из E посматрајући их као честице. Ефекат примене силе $u \in \overrightarrow{E}$ на тачку $A \in E$ је транслација. Дакле, дејство силе $u \in \overrightarrow{E}$ је да сваку тачку $A \in E$ помери у тачку $A + u \in E$, при чему се реализује транслација која одговара вектору u. Како се транслације могу компоновати, природно следи да је $\overrightarrow{E}$ векторски простор.

Као литературу можемо препоручити Галијеа[1] [32] као и скрипту коју су написали Калајџић[2] и Ђорић[3] [44].

3.1 Афини простор и потпростор

Афини простор је тројка $(E, \overrightarrow{E}, +)$, где је E скуп тачака, $\overrightarrow{E}$ векторски простор транслација, а $+\colon E \times \overrightarrow{E} \to E$ дејство за које важи:

$$(\forall A \in E) \quad A + 0 = A; \tag{3.1}$$

$$(\forall A \in E)(\forall u, v \in \overrightarrow{E}) \quad (A + u) + v = A + (u + v); \tag{3.2}$$

$$(\forall A, B \in E)(\exists! u \in \overrightarrow{E}) \quad B = A + u. \tag{3.3}$$

Јединствени вектор $u \in \overrightarrow{E}$ из (3.3) за који је $B = A + u$ краће обележавамо са $\overrightarrow{AB}$ или са $B - A$, тако да за свако $A, B \in E$ можемо писати

$$B = A + \overrightarrow{AB}.$$

Специјално, за $B = A$ је $A = A + \overrightarrow{AA}$, одакле из (3.1) следи $\overrightarrow{AA} = 0$. Такође, за свако $A \in E$ и $v \in \overrightarrow{E}$ важи

$$\overrightarrow{A(A+v)} = v,$$

јер је по (3.3) у питању јединствен вектор за који је $A + v = A + \overrightarrow{A(A+v)}$.

Из (3.2) добијамо $A + \overrightarrow{AC} = C = B + \overrightarrow{BC} = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ за произвољне три тачке $A, B, C \in E$, одакле (3.3) даје ***Шалов идентитет***,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Специјално за $C = A$ је $0 = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$, односно $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Додатно, како је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ то важи ***закон паралелограма*** који каже да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ако и само ако је $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Векторски простор $\overrightarrow{E}$ је ***директриса афиног простора***, а ***димензија афиног простора*** је димензија његове директрисе, односно $\dim E = \dim \overrightarrow{E}$.

Интуитивно, скупови E и $\overrightarrow{E}$ представљају исте објекте, али посматране на различите начине. Избором произвољне тачке $A \in E$, која се може посматрати као координатни почетак, све тачке из E можемо добити као транслиране тачке $\{A + u : u \in \overrightarrow{E}\}$. Ову причу можемо формализовати на следећи начин.

За фиксирано $A \in E$ можемо дефинисати $f\colon \overrightarrow{E} \to E$ са $f(u) = A + u$, као и $g\colon E \to \overrightarrow{E}$ са $g(B) = \overrightarrow{AB}$. Тада је $u \overset{f}{\longmapsto} A + u \overset{g}{\longmapsto} \overrightarrow{A(A+u)} = u$, као и $B \overset{g}{\longmapsto} \overrightarrow{AB} \overset{f}{\longmapsto} A + \overrightarrow{AB} = B$, тако да имамо $g \circ f = \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}$ и $f \circ g = \mathbb{1}_E$, одакле је јасно да су f и g бијекције. Кад идентификујемо E са $\overrightarrow{E}$ преко пресликавања $g\colon B \mapsto \overrightarrow{AB}$, кажемо да је векторски простор постављен избором тачке A за координатни почетак. Ради једноставности често ћемо афини простор $(E, \overrightarrow{E}, +)$ обележавати само са E.

[1] Jean Henri Gallier (1949), француско-амерички математичар
[2] Гојко Калајџић (1948), српски математичар
[3] Мирјана Ђорић (1957), српска математичарка

Треба бити пажљив са коришћењем симбола $+$. Сабирање $u+v$ је добро дефинисано за векторе $u, v \in \overrightarrow{E}$, као и транслација $A+v$ тачке $A \in E$ за вектор $v \in \overrightarrow{E}$. Међутим, сабирање $A+B$ тачака $A, B \in E$ нема смисла иако је ознака одузимање $B-A=\overrightarrow{AB}$ смислена.

Сваки векторски простор $\overrightarrow{E}$ има структуру афиног простора, тако што поставимо $E=\overrightarrow{E}$, док је дејство $+$ обично сабирање у векторском простору $\overrightarrow{E}$. Тако добијамо афини простор $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{E}, +)$, као канонску афину структуру на $\overrightarrow{E}$. Посебно, у случају векторског простора $\mathbb{R}^n$, добијамо $\mathbb{A}^n=(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +)$ ***реални афини простор*** димензије n. У општијој причи сваки векторски простор је над неким пољем $\mathbb{F}$, који не мора нужно бити $\mathbb{R}$ иако је то најчешћи случај са којим радимо, те тако добијамо афини простор $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}=(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n, +)$.

Међутим, афини простор не мора бити векторски простор, барем не на очигледан начин. На пример, нека је $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y-1=0\}\subset\mathbb{R}^2$. Скуп L можемо по дефиницији начинити афиним простором, тако што дефинишемо дејство $+\colon L\times\mathbb{R}\to L$ са $(x,y)+u=(x+u, y-u)$ за свако $u\in\mathbb{R}$. Одавде за произвољно $(x,y)\in L$ добијамо $(x+u)+(y-u)-1=x+y-1=0$, те је $(x,y)+u\in L$, док се једноставно проверава да испуњава све три аксиоме.

Линеарна комбинација је основни концепт линеарне алгебре. Одговарајући концепт у афиној геометрији зовемо афина комбинација или барицентар. Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ скалари, а $A_1, A_2, \dots, A_k \in E$ тачке, тада за неко $B\in E$ можемо посматрати тачку $B+\sum_{i=1}^k \alpha_i\overrightarrow{BA_i}$. У мотивацији смо приметили да је неопходан неки додатни услов да би афина комбинација тачака имала смисла. Испоставља се да нам је потребан збир коефицијената једнак 1, тако да претпостављамо $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=1$. Имамо

$$\begin{aligned} B+\sum_{i=1}^k \alpha_i\overrightarrow{BA_i} &= B+\sum_{i=1}^k \alpha_i\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA_i}\right) = B+\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)\overrightarrow{BC}+\sum_{i=1}^k \alpha_i\overrightarrow{CA_i} \\ &= B+\overrightarrow{BC}+\sum_{i=1}^k \alpha_i\overrightarrow{CA_i} = C+\sum_{i=1}^k \alpha_i\overrightarrow{CA_i}, \end{aligned}$$

што показује да почетни израз не зависи од избора тачке B.

За фамилије тачака $A_i\in E$ и скалара $\alpha_i\in\mathbb{F}$ за $1\leqslant i\leqslant k$, при чему је $\sum_{i=1}^k\alpha_i=1$, дефинишемо ***барицентар*** као тачку

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = B+\sum_{i=1}^k \alpha_i\overrightarrow{BA_i}$$

која не зависи од избора тачке $B\in E$. Барицентар је заправо афина комбинација тачака коју смо желели да дефинишемо, при чему не смемо испустити из вида да је неопходан услов $\sum_{i=1}^k\alpha_i=1$. Често уместо појединачних фамилија говоримо о тежинским тачкама $(A_i, \alpha_i)\in E\times\mathbb{F}$, односно тачкама A_i које имају тежину α_i. Физички смисао се огледа у центру масе система од k тачака које имају свој положај и масу, при чему су масе нормализоване тако да је $\sum_{i=1}^k\alpha_i=1$, док су и негативне масе такође дозвољене.

За барицентар $X=B+\sum_{i=1}^k\alpha_i\overrightarrow{BA_i}$ из (3.3) имамо $\overrightarrow{BX}=\sum_{i=1}^k\alpha_i\overrightarrow{BA_i}$, те уколико изаберемо баш $B=X$ добијамо $\sum_{i=1}^k\alpha_i\overrightarrow{XA_i}=0$. У овој формули са барицентром битан је само однос тежина, јер се једначина без последица може помножити било којим скаларом.

У линеарној алгебри потпростор се може окарактерисати као непразан подскуп векторског простора који је затворен за линеарне комбинације. У афиним просторима, одговарајући појам је афини потпростор и можемо га природно дефинисати као подскуп тачака афиног простора који је затворен за афине комбинације, односно барицентре. ***Афини потпростор*** афиног простора $(E, \overrightarrow{E}, +)$ је подскуп V од E такав да за сваку фамилију $(A_i, \alpha_i) \in V \times \mathbb{F},\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ за коју је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, важи $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i \in V$.

У складу са дефиницијом празан скуп је тривијално афини потпростор, а није тешко приметити да је сваки пресек афиних потпростора такође афини потпростор. Пример афиног потпростора може бити скуп $U \subset \mathbb{R}^2$ који је дефинисан са

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\},$$

где претпостављамо да a и b нису истовремено нула ($a^2 + b^2 > 0$). У питању је скуп решења једначине $ax + by + c = 0$, а потребно је доказати да за k тачака $(x_i, y_i) \in U$ и скаларе α_i за које је $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$, важи $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i, y_i) \in U$.

Како $(x_i, y_i) \in U$ даје $ax_i + by_i + c = 0$, то сумирањам ових једначина множених са α_i добијамо $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (ax_i + by_i + c) = 0$, односно $a \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + b \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i + c \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$. Због $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, тачка $(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i, y_i)$ задовољава $ax + by + c = 0$ и зато припада U, што доказује да је U афини потпростор од $\mathbb{A}^2$.

Афини потпростор U блиско је повезан са подскупом $\overrightarrow{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$, који је афини потпростор као специјални случај претходног рачуна за $c = 0$. $\overrightarrow{U}$ је скуп решења хомогене једначине $ax + by = 0$, а како смо услов $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ користили само уз c, без икаквих рестрикција за скаларе α_i важиће $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i, y_i) \in \overrightarrow{U}$, одакле је $\overrightarrow{U}$ векторски потпростор од $\mathbb{R}^2$. Додатно се може показати да за произвољну тачку $(x_0, y_0) \in U$ важи

$$U = (x_0, y_0) + \overrightarrow{U} = \{(x_0 + x_1, y_0 + y_1) : (x_1, y_1) \in \overrightarrow{U}\}.$$

Из $ax_0 + by_0 + c = 0$ и $ax_1 + by_1 = 0$ за $(x_1, y_1) \in \overrightarrow{U}$ је $a(x_0 + x_1) + b(y_0 + y_1) + c = 0$, те имамо $(x_0, y_0) + \overrightarrow{U} \subseteq U$. Са друге стране $(x, y) \in U$ повлачи $ax + by + c = 0$, те је $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, што даје $(x - x_0, y - y_0) \in \overrightarrow{U}$, из чега следи $(x, y) \in (x_0, y_0) + \overrightarrow{U}$, односно $U \subseteq (x_0, y_0) + \overrightarrow{U}$.

Дакле, афина права U (као решење једначине $ax + by + c = 0$) добијена је транслацијом њој паралелне праве $\overrightarrow{U}$ (са једначином $ax + by = 0$) која пролази кроз координатни почетак. Ова прича важи у општијем случају где се посматрају решења система линеарних једначина.

Сваки афини потпростор V афиног простора $(E, \overrightarrow{E}, +)$ може се видети као афини простор. Да бисмо одредили његову директрису посматрамо скуп $\overrightarrow{V_B} = \{\overrightarrow{BX} : X \in V\}$ за неко фиксирано $B \in V$. Линеарна комбинација у $\overrightarrow{V_B}$ је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$, где $A_i \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Међутим, $B + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i} + (1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i)\overrightarrow{BB}$ је барицентар, одакле је $B + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i} \in V$, те имамо $\overrightarrow{B(B + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i})} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{BA_i} \in \overrightarrow{V_B}$, што доказује да је $\overrightarrow{V_B}$ потпростор од $\overrightarrow{E}$. За неко $C \in V$ имамо $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{BX} - \overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{V_B}$, те је $\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_C} = \{\overrightarrow{XY} : X, Y \in V\}$, одакле природно важи $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_B}$ и $(V, \overrightarrow{V}, +)$ је заиста један афини простор, где је $\overrightarrow{V}$ потпростор векторског простора $\overrightarrow{E}$.

Са друге стране, ако је $\overrightarrow{V}$ потпростор од $\overrightarrow{E}$ и $A \in E$, онда за тежишне тачке $(A + v_i, \alpha_i)$ где је $v_i \in \overrightarrow{V}$ и $\alpha_i \in \mathbb{F}$ важи $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (A + v_i) = A + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{A(A + v_i)} = A + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, одакле следи да је $V = A + \overrightarrow{V} = \{A + v : v \in \overrightarrow{V}\}$ афини потпростор од E.

Дакле, сваки афини потпростор афиног простора $(E, \overrightarrow{E}, +)$ је облика $A + \overrightarrow{V}$, где је $\overrightarrow{V}$ потпростор од $\overrightarrow{E}$. Потпростори од $\overrightarrow{E}$ су афини потпростори који садрже 0. Дејство $+ : V \times \overrightarrow{V} \to V$ индуковано дејством $+ : E \times \overrightarrow{E} \to E$ обезбеђује афину структуру

$(V, \overrightarrow{V}, +)$ овом афином потпростору V. Афини потпростор димензије 1 зовемо ***права***, а димензије 2 зовемо ***раван***. Афини потпростор кодимензије 1 зовемо ***хиперраван***.

Кажемо да су афини потпростори U и V ***паралелни*** ако имају исте директрисе. Како је тада $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$, имамо $U = A + \overrightarrow{U}$ и $V = B + \overrightarrow{U}$ за произвољно $A \in U$ и $B \in V$, те је зато V добијено из U транслацијом за вектор $\overrightarrow{AB}$. За афине потпросторе различитих димензија можемо дозволити и релаксиранију варијанту паралелности. Кажемо да су афини потпростори ***паралелни*** ако је директриса једног од њих садржана у директриси оног другог, односно пишемо $U \parallel V$ ако и само ако је $\overrightarrow{U} \subseteq \overrightarrow{V}$ или $\overrightarrow{V} \subseteq \overrightarrow{U}$. Овако дефинисана релација паралелности јесте рефлексивна и симетрична, али не мора бити транзитивна. Ако су потпростори дисјунктни, а нису паралелни, онда кажемо да су они ***мимоилазни***.

Права је одређена тачком $A \in E$ и ненула вектором $v \in \overrightarrow{E}$, односно у питању је скуп тачака облика $A + \alpha v$ за $\alpha \in \mathbb{F}$. Кажемо да су тачке $A, B, C \in E$ ***колинеарне*** ако су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линеарно зависни. Раван је одређена тачком $A \in E$ и са два линеарно независна вектора $u, v \in \overrightarrow{E}$, односно то је скуп тачака облика $A + \alpha u + \beta v$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Кажемо да су тачке A, B, C, D ***компланарне*** ако су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ линеарно зависни.

За дати афини простор $(E, \overrightarrow{E}, +)$ и непразан подскуп $S \subset E$, најмањи афини потпростор који садржи S зовемо ***афини омотач*** скупа и обележавамо са $\langle S \rangle$. Афини омотач $\langle S \rangle$ је заправо пресек свих афиних потпростора који садрже S, а очигледно се ради о скупу свих барицентара за тачке из S. Дакле, за фамилију тачака $A_1, \ldots, A_k \in E$ афини омотач је афини потпростор

$$\langle A_1, \ldots, A_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Ову теорију афиних простора можемо повезати са аксиомама еуклидске (синтетичке) геометрије. На пример, свака права је инцидентна са бар две тачке, јер правој $A + \alpha v$ припадају тачке које су добијене за елементе $0, 1 \in \mathbb{F}$ који постоје у сваком пољу. Такође, ако две равни у тродимензионом простору ($\dim \overrightarrow{E} = 3$) имају заједничку тачку онда имају бар још једну заједничку тачку. Наиме, из Грасманове формуле $\dim(\overrightarrow{U} \cap \overrightarrow{V}) = \dim \overrightarrow{U} + \dim \overrightarrow{V} - \dim(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V})$ за равни U и V имамо $\dim \overrightarrow{U} = \dim \overrightarrow{V} = 2$, те како је $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \leqslant \overrightarrow{E}$ добијамо $\dim(\overrightarrow{U} \cap \overrightarrow{V}) = 4 - \dim(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) \geqslant 1$.

3.2 Афина пресликавања

Афино пресликавање је пресликавање које чува барицентре. Прецизније, за афине просторе $(E, \overrightarrow{E}, +)$ и $(E', \overrightarrow{E}', +')$ чије су директрисе над истим пољем, пресликавање $f\colon E \to E'$ је афино ако за све тежишне тачке $(A_i, \alpha_i) \in E \times \mathbb{F}$, где је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, важи

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(A_i).$$

Теорема 3.1. *Ако је $h\colon \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}'$ линеарно пресликавање, тада је за фиксирано $A \in E$ и $B \in E'$ са $f(A + v) = B +' h(v)$ дефинисано афино пресликавање $f\colon E \to E'$.*

Доказ. За $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ имамо

$$f(\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i) = f(A + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{AA_i}) = B + h(\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{AA_i}) = B + \sum_{i=1}^k \alpha_i h(\overrightarrow{AA_i})$$
$$= B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{B(B + h(\overrightarrow{AA_i}))} = \sum_{i=1}^k \alpha_i (B + h(\overrightarrow{AA_i})) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(A + \overrightarrow{AA_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(A_i).$$

Дакле, пресликавање f је затворено за барицентре, те је оно афино. □

Теорема 3.2. *За свако афино пресликавање* $f\colon E \to E'$, *постоји јединствено линеарно пресликавање* $\overrightarrow{f}: \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}'$ *такво да је* $f(A+v) = f(A) + \overrightarrow{f}(v)$, *за свако* $A \in E$ *и свако* $v \in \overrightarrow{E}$.

Доказ. Ако пресликавање $\overrightarrow{f}$ постоји, мора бити $\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}$. Овај израз не зависи од избора тачке A јер из $B + v = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A(A+v)} + (-1)\overrightarrow{AA} = B + (A+v) + (-1)A$ следи $f(B+v) = f(B) + f(A+v) + (-1)f(A)$, одакле добијамо

$$\overrightarrow{f(B)f(B+v)} = \overrightarrow{f(B)f(A+v)} - \overrightarrow{f(B)f(A)} = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}.$$

Како $\overrightarrow{f}$ морамо дефинисати са $\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}$, јединственост је очигледна, те преостаје доказати да је $\overrightarrow{f}$ линеарно.

Како је $A + \alpha v = A + \alpha\overrightarrow{A(A+v)} + (1-\alpha)\overrightarrow{AA} = \alpha(A+v) + (1-\alpha)A$, то имамо једначину $f(A+\alpha v) = \alpha f(A+v) + (1-\alpha)f(A)$, одакле добијамо $f(A) + \overrightarrow{f}(\alpha v) = \alpha(f(A) + \overrightarrow{f}(v)) + (1-\alpha)f(A)$, те за множење скаларом добијамо $\overrightarrow{f}(\alpha v) = \alpha\overrightarrow{f}(v)$.

Слично, из $f(A+u+v) = f(1(A+u) + 1(A+v) + (-1)A) = f(A+u) + f(A+v) - f(A)$ имамо $f(A) + \overrightarrow{f}(u+v) = (f(A) + \overrightarrow{f}(u)) + (f(A) + \overrightarrow{f}(v)) - f(A)$, одакле за сабирање вектора важи $\overrightarrow{f}(u+v) = \overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{f}(v)$. Дакле, $\overrightarrow{f}$ је затворено за множење скаларом и сабирање, тако да јесте линеарно. □

Линеарно пресликавање $\overrightarrow{f}: \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}'$ зовемо ***линеарни део*** афиног пресликавања f. Вреди напоменути да услов $f(A+v) = f(A) + \overrightarrow{f}(v)$ сада можемо еквивалентно записати (заменом $v = \overrightarrow{AB}$) као $f(B) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$ или

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}. \tag{3.4}$$

Такође, ако је f инјективно или сурјективно онда је такво и $\overrightarrow{f}$.

Како афино пресликавање чува барицентре и како је афини потпростор затворен за барицентре, слика $f(V)$ афиног потпростора V јесте афини потпростор од E'. На пример, слика праве је тачка или права, док слика равни може бити тачка, права или раван. Афина пресликавања имају доста инваријанти, а пре свега ту је колинеарност тачака. Чување барицентара заправо говори да се чувају и односи у којем тачка дели дуж. Додатно, из дефиниције лако видимо да се чува и паралелност. Дакле, афино пресликавање чува: барицентре, афине потпросторе, колинеарност, однос дељења дужи и паралелност.

Афину независност можемо схватити као уопштење линеарне независности. За фамилију тачкака $A_0, A_1, \ldots, A_n$ из E кажемо да је ***афино независна*** ако су вектори $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ линеарно независни. Линерна независност ових вектора не зависи од пермутације тачака, јер за $i \neq 0$ једначина

$$0 = \sum_{j\neq i} \alpha_j \overrightarrow{A_iA_j} = \sum_{j\neq i} \alpha_j \overrightarrow{A_iA_0} + \sum_{j\neq i} \alpha_j \overrightarrow{A_0A_j} = -\left(\sum_{j\neq i} \alpha_j\right)\overrightarrow{A_0A_i} + \sum_{j\neq i,0} \alpha_j \overrightarrow{A_0A_j},$$

за линеарно независне $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ даје $\alpha_j = 0$ за свако $j \neq i$ (најпре за свако $j \neq i, 0$, а онда из $\sum_{j \neq i} \alpha_j = 0$ следи и $\alpha_0 = 0$).

Ако су тачке $A_0, A_1, \ldots, A_n \in E$ афино независне, онда вектори $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ чине базу у $\overrightarrow{E}$. Сваку тачку $X \in E$ можемо записати са $X = A_0 + \overrightarrow{A_0X}$, те постоји јединствена уређена n-торка скалара $(x_1, \ldots, x_n)$ таква да је $X = A_0 + x_1\overrightarrow{A_0A_1} + \ldots x_n\overrightarrow{A_0A_n}$, што чини координате тачке у односу на $(A_0, (\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}))$. Како је

$$X = A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{A_0A_i} = (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_iA_i,$$

то се и $X \in E$ може једнозначно раставити са $X = \sum_{i=0}^{n} \alpha_iA_i$, при чему је $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, где су смене $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$ и $\alpha_i = x_i$ за $i = 1, \ldots, n$.

Нека је $(E, \overrightarrow{E}, +)$ афини простор. ***Афини репер*** са координатним почетком A_0 је фамилија $(A_0, \ldots, A_n)$ од $n + 1$ тачака из E тако да је $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ база векторског простора $\overrightarrow{E}$. Уређени пар $(A_0, (\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}))$ такође зовемо ***афини репер***.

Теорема 3.3. *Ако је E афини простор димензије n и $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ афини репер за E, тада за произвољни афини простор E' и било коју фамилију $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ тачака из E', постоји јединствено афино пресликавање $f\colon E \to E'$ такво да је $f(A_i) = B_i$ за $0 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказ. Ако испуњава услове f мора бити такво да $f(\alpha_0A_0 + \cdots + \alpha_nA_n) = \alpha_0B_0 + \cdots + \alpha_nB_n$, где је $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = 1$, што једнозначно дефинише афино пресликавање на E будући да је $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ афини репер. □

Уз помоћ афиних репера, афина пресликавања могу се представити матрицама. Нека је $f\colon E \to E$ афино пресликавање. Тада имамо $f(A_0 + v) = f(A_0) + \overrightarrow{f}(v)$, односно

$$\overrightarrow{A_0f(A_o + v)} = \overrightarrow{A_0f(A_0)} + \overrightarrow{f}(v) \tag{3.5}$$

Све векторе из (3.5) можемо изразити преко базних вектора са $v = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{A_0A_i}$, те $\overrightarrow{A_0f(A_0)} = \sum_{i=1}^{n} b_i\overrightarrow{A_0A_i}$ и $\overrightarrow{A_0f(A_o + v)} = \sum_{i=1}^{n} y_i\overrightarrow{A_0A_i}$. Ако те векторе запишемо преко координата са $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ и третирамо као колона матрице, док са A обележимо матрицу линеарног пресликавања $\overrightarrow{f}$ у бази $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$, тада једначина (3.5) постаје једноставно $Y = AX + B$.

Није лоше напоменути да $f(A_0) \neq A_0$ повлачи $B \neq 0$. Такође, у општем случају f није линеарна трансформација, а јесте уколико има фиксну тачку.

Афина пресликавања чувају барицентре, те су и њихове композиције афина пресликавања. За $f\colon E \to E'$ и $g\colon E' \to E''$ је $g(f(A + v)) = g(f(A) + \overrightarrow{f}(v)) = g(f(A)) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(v))$, одакле следи

$$\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}.$$

Из линеарне алгебре знамо да скуп свих линеарних трансформација на неком векторском простору $\overrightarrow{E}$ чини линеарну групу $GL(\overrightarrow{E})$. У афиној геометрији посматрамо скуп свих бијективних афиних пресликавања $f\colon E \to E$ који обележавамо са $GA(E)$ и зовемо ***афина група***. Како сваком $f \in GA(E)$ одговара неко $\overrightarrow{f} \in GL(\overrightarrow{E})$, то је $f \mapsto \overrightarrow{f}$ један хомоморфизам група $GA(E) \to GL(\overrightarrow{E})$.

Најједноставније линеарно пресликавање је константно пресликавање, али оно није бијективно. Тако долазимо до идентичког $\overrightarrow{f} = \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}$, што је основни пример за $\overrightarrow{f} \in GL(\overrightarrow{E})$. У том случају из формуле (3.4) имамо $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$, одакле закон правоугаоника даје $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)}$. Зато је f са идентичким линеарним делом заправо транслација за вектор $\overrightarrow{Af(A)}$ (што не зависи од избора тачке A).

Транслације су пресликавања $\tau_u \in GA(E)$ за $u \in \overrightarrow{E}$ дефинисана са $\tau_u(A) = A + u$ и тада је $u = \overrightarrow{A\tau_u(A)} = \overrightarrow{B\tau_u(B)}$. Композиција две транслације је такође транслација јер

$$(\tau_u \circ \tau_v)(A) = \tau_u(A+v) = (A+v) + u = A + (v+u) = \tau_{v+u}(A)$$

даје

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{v+u}.$$

Скуп свих транслација $T(E)$ је подгрупа афине групе $GA(E)$, где је неутрал транслација за нула вектор $\tau_0 = \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}$. Штавише, како за $f \in GA(E)$ важи

$$(f \circ \tau_u \circ f^{-1})(A) = f(f^{-1}(A) + u) = f(f^{-1}(A)) + \overrightarrow{f}(u) = A + \overrightarrow{f}(u) = \tau_{\overrightarrow{f}(u)}(A),$$

то је

$$f \circ \tau_u \circ f^{-1} = \tau_{\overrightarrow{f}(u)},$$

што значи да је $T(E)$ нормална подгрупа од $GA(E)$.

Често је згодно да афино пресликавање има фиксну тачку. Наравно, транслација различита од τ_0 нема фиксних тачака, али важи следећа теорема.

Теорема 3.4. *За произвољно $P \in E$, свако $f \in GA(E)$ се на јединствен начин разлаже са $f = \tau_u \circ g$, где је $\tau_u \in T(E)$, а $g \in GA(E)$ такво да је $g(P) = P$.*

Доказ. Из услова теореме следи $f(P) = \tau_u(g(P)) = \tau_u(P) = P + u$, те мора бити $u = \overrightarrow{Pf(P)}$, што једнозначно одређује транслацију $\tau_u = \tau_{\overrightarrow{Pf(P)}}$, а како су у питању бијекције то имамо једнозначно $g = (\tau_{\overrightarrow{Pf(P)}})^{-1} \circ f = \tau_{\overrightarrow{f(P)P}} \circ f$. □

У даљем тексту

$$\Phi_f = \{X \in E : f(X) = X\}$$

означава скуп свих фиксних тачака афиног пресликавања $f\colon E \to E$.

Уколико је Φ_f непразан, то за $P \in \Phi_f$ важи $f(X) = f(P + \overrightarrow{PX}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PX}) = P + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PX})$, те ако је додатно $X \in \Phi_f$ имамо $f(X) = X = P + \overrightarrow{PX}$, односно $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PX}) = \overrightarrow{PX}$. Даље је $(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}})(\overrightarrow{PX}) = 0$, односно $\overrightarrow{PX} \in \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}) \leqslant \overrightarrow{E}$. Дакле, скуп фиксних тачака $\Phi_f = P + \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}})$ је један афини потпростор чија је директриса $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}})$.

Ако је Φ_f празан, то за фиксирану тачку $P \in E$ и свако $v \in \overrightarrow{E}$ имамо $f(P+v) \neq P + v$. Тада је $f(P) + \overrightarrow{f}(v) \neq P + v$, односно $(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}})(v) \neq \overrightarrow{f(P)P}$ за свако v, одакле следи $\overrightarrow{f(P)P} \notin \operatorname{Im}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}})$. Одавде је $\dim \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}) = n - \dim \operatorname{Im}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}) \geqslant 1$, односно $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}) \neq \{0\}$.

Теорема 3.5. *Ако је $\Phi_f \neq \emptyset$ онда је Φ_f афини потпростор са директрисом $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}})$. Ако је $\Phi_f = \emptyset$ онда је $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}) \neq \{0\}$.*

Како је $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$, то за транслацију важи $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB}$, одакле следи паралелност $\langle A, B\rangle \parallel \langle f(A), f(B)\rangle$, односно транслација пресликава праву у њој паралелну праву. Поставља се природно питање да ли постоје још нека афина пресликавања која имају ову лепу особину. Паралелност праве и њене слике повлачи $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda\overrightarrow{AB}$, односно $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \lambda\overrightarrow{AB}$, за неко $\lambda \in \mathbb{F}$.

Посматрајмо функцију $\lambda\colon \overrightarrow{E} \to \mathbb{F}$ дату са $\overrightarrow{f}(x) = \lambda(x)x$ за $x \in \overrightarrow{E}$. За линеарно независне $u, v \in \overrightarrow{E}$ имамо $\overrightarrow{f}(u+v) = \overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{f}(v)$, односно $\lambda(u+v)(u+v) = \lambda(u)u + \lambda(v)v$, те $(\lambda(u+v) - \lambda(u))u + (\lambda(u+v) - \lambda(v))v = 0$, одакле је $\lambda(u+v) = \lambda(u) = \lambda(v)$. Дакле, ако је слика сваке праве паралелна свом оригиналу тада је $\overrightarrow{f} = \lambda \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}$ за неко фиксирано $\lambda \neq 0$.

У случају $\lambda = 1$ такво афино пресликавање је транслација. У супротном имамо $\lambda \notin \{0, 1\}$ а како је $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}) = \mathrm{Ker}((\lambda - 1)\,\mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}) = \{0\}$, по Теореми 3.5 важи $\Phi_f \neq \emptyset$, те постоји фиксна тачка $S \in \Phi_f$. Коначно, $f \in GA(E)$ и $\overrightarrow{f} = \lambda \mathbb{1}_{\overrightarrow{E}}$ дају

$$f(X) = f(S + \overrightarrow{SX}) = f(S) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{SX}) = S + \lambda\overrightarrow{SX}.$$

Пресликавање које је одређено са $\chi_{S,\lambda}(X) = S + \lambda\overrightarrow{SX}$ је ***хомотетија*** са центром S и коефицијентом λ.

Погледајмо рачун за композицију две хомотетије.

$$\begin{aligned}\chi_{S,\alpha} \circ \chi_{T,\beta}(X) &= \chi_{S,\alpha}(T + \beta\overrightarrow{TX}) = \chi_{S,\alpha}(T) + \overrightarrow{\chi_{S,\alpha}}(\beta\overrightarrow{TX}) = S + \alpha\overrightarrow{ST} + \alpha\beta\overrightarrow{TX}\\ &= P + \overrightarrow{PS} + \alpha\overrightarrow{PT} - \alpha\overrightarrow{PS} + \alpha\beta\overrightarrow{PX} - \alpha\beta\overrightarrow{PT}\\ &= P + (1-\alpha)\overrightarrow{PS} + \alpha(1-\beta)\overrightarrow{PT} + \alpha\beta\overrightarrow{PX}.\end{aligned}$$

У случају да је $\alpha\beta \neq 1$ можемо изабрати барицентар

$$P = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}S + \frac{\alpha - \alpha\beta}{1-\alpha\beta}T,$$

што повлачи $(1-\alpha)\overrightarrow{PS} + \alpha(1-\beta)\overrightarrow{PT} = 0$, одакле следи

$$\chi_{S,\alpha} \circ \chi_{T,\beta}(X) = P + \alpha\beta\overrightarrow{PX} = \chi_{P,\alpha\beta}.$$

У случају да је $\alpha\beta = 1$ имамо

$$\chi_{S,\alpha} \circ \chi_{T,\beta}(X) = P + \overrightarrow{PX} + (1-\alpha)\overrightarrow{PS} + (\alpha - 1)\overrightarrow{PT} = X + (1-\alpha)\overrightarrow{TS} = \tau_{(1-\alpha)\overrightarrow{TS}}(X).$$

У сваком случају како је $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$ то транслације и хомотетије $HT(E)$ увек имају линеарни део сразмеран идентитету и зато чине једну подгрупу од $GA(E)$.

3.3 Паралелно пројектовање

За два афина потпростора Π и Γ кажемо да су ***суплементарни*** уколико су такве њихове директрисе, односно уколико је $\overrightarrow{\Pi} \oplus \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{E}$. У том случају $w \in \overrightarrow{E}$ се једнозначно раставља са $w = \pi_1(w) + \pi_2(w)$ где је $\pi_1(w) \in \overrightarrow{\Pi}$ и $\pi_2(w) \in \overrightarrow{\Gamma}$. На пример, у афиној равни две праве су суплементарне ако и само ако нису паралелне. Сличну ствар можемо рећи за праву и раван у тродимензионом афином простору.

Суплементарни афини потпростори имају тачно једну заједничку тачку. Наиме, како је $\Pi = P + \overrightarrow{\Pi}$ и $\Gamma = Q + \overrightarrow{\Gamma}$ за $P \in \Pi$ и $Q \in \Gamma$, тада се $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{E}$ јединствено раставља са $\overrightarrow{PQ} = u + v$, где је $u \in \overrightarrow{\Pi}$, $v \in \overrightarrow{\Gamma}$. Тада је $Q = P + (u + v) = (P + u) + v$, одакле следи $Q - v = P + u = S \in \Pi \cap \Gamma$, те из $\overrightarrow{\Pi} \cap \overrightarrow{\Gamma} = \{0\}$ следи $\Pi \cap \Gamma = \{S\}$.

За произвољно $X \in E$ и суплементарне афине потпросторе Π и Γ можемо посматрати афини потпростор $\Gamma' = X + \overrightarrow{\Gamma} \parallel \Gamma$ који је суплементаран са Π и поставити $X' \in \Pi \cap \Gamma'$. У том случају је $\overrightarrow{SX} = \overrightarrow{SX'} + \overrightarrow{X'X}$ јединствено растављање у $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Pi} \oplus \overrightarrow{\Gamma}$ и важи $\langle X, X' \rangle \subseteq \Gamma'$. ***Паралелно пројектовање*** је пресликавање $X \mapsto X'$, односно $f\colon E \to \Pi \subset E$ задато са $f(S + w) = S + \pi_1(w)$, за свако $w \in \overrightarrow{E}$. Како је пројекција на векторским просторима линеарна, то је паралелно пројектовање афино пресликавање.

Паралелно пројектовање није бијективно и за њега важи $f^2 = f$. Можемо погодно изабрати базу тако да матрица паралелног пројектовања f, односно његовог линеарног дела $\overrightarrow{f}$, буде дијагонална матрица са нулама и јединицама на дијагонали, те минимални полоном за $\overrightarrow{f}$ износи $\lambda^2 - \lambda$.

Један од основних и најстаријих резултата афине геометрије је Талесова теорема. Погледајмо једно од могућих уопштења.

Теорема 3.6. *Нека су H_1, H_2, H_3 три различите паралелне хиперравни афиног простора E, а Γ и Δ две праве које нису са њима паралелне. Ако је $\{A_i\} = \Gamma \cap H_i$ и $\{B_i\} = \Delta \cap H_i$, за $i \in \{1, 2, 3\}$, тада важи $\overrightarrow{A_1A_3} : \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_3} : \overrightarrow{B_1B_2}$.*

Доказ. Из паралелности хиперравни добијамо $\overrightarrow{H_1} = \overrightarrow{H_2} = \overrightarrow{H_3} = \overrightarrow{H}$, док $\dim \Gamma = 1$ и $\dim \Gamma + \dim H_i = \dim E$ дају $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Gamma} \oplus \overrightarrow{H}$. Од пројекције $\pi\colon \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Gamma} \oplus \overrightarrow{H} \to \overrightarrow{\Gamma}$ по Теореми 3.1 градимо афино пресликавање $f\colon E \to \Gamma$ са $f(B_1 + v) = A_1 + \pi(v)$. Добијамо

$$\begin{aligned} f(B_i) &= f(B_1 + \overrightarrow{B_1B_i}) = A_1 + \pi(\overrightarrow{B_1B_i}) = A_1 + \pi(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_i} + \overrightarrow{A_iB_i}) \\ &= A_1 + \pi(\overrightarrow{B_1A_1}) + \pi(\overrightarrow{A_1A_i}) + \pi(\overrightarrow{A_iB_i}) = A_1 + \overrightarrow{A_1A_i} = A_i, \end{aligned}$$

јер је $\pi(\overrightarrow{B_1A_1}) = \pi(\overrightarrow{A_iB_i}) = 0$ због $\overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{A_iB_i} \in \overrightarrow{H}$, а $\pi(\overrightarrow{A_1A_i}) = \overrightarrow{A_1A_i}$ због $\overrightarrow{A_1A_i} \in \overrightarrow{\Gamma}$. Зато је $f(B_1) = A_1$, $f(B_2) = A_2$, $f(B_3) = A_3$, те како афино пресликавање чува односе дељења дужи важиће тврђење теореме. □

Обрат Талесове теореме доказује се директно. Ако је $\overrightarrow{SA_1} : \overrightarrow{SA_2} = \overrightarrow{SB_1} : \overrightarrow{SB_2} = \theta$, то је $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SA_1} = \theta\overrightarrow{SB_2} - \theta\overrightarrow{SA_2} = \theta(\overrightarrow{SB_2} - \overrightarrow{SA_2}) = \theta\overrightarrow{A_2B_2}$, одакле је $\langle A_1, B_1 \rangle \parallel \langle A_2, B_2 \rangle$.

3.4 Дилатација и трансвекција

Скуп фиксних тачака Φ_f за афину трансформацију $f \in GA(E)$ је афини потпростор. Најједноставније је $\Phi_f = E$ за $f = \mathbb{1}_E$. Посматрајмо по једноставности наредни случај када f фиксира n афино независних тачака, односно фиксира хиперраван $\Pi = \Phi_f$. Тада је f по Теореми 3.3 одређено још са $P \mapsto f(P) \neq P$, а ми се питамо како се слика тачка $X \notin \Pi$.

Уколико је $\langle P, X \rangle \cap \Pi = \{S\}$ тада се чувају односи $\overrightarrow{SX} : \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{Sf(X)} : \overrightarrow{Sf(P)}$, те је по Обратној Талесовој теореми $\langle P, f(P) \rangle \parallel \langle X, f(X) \rangle$. У супротном је $\langle P, X \rangle \parallel \Pi$, те постоје $A, B \in \Pi$ са $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{AB}$, одакле је $\overrightarrow{f(P)f(X)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PX}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PX}$, те из закона правоугаоника важи $\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{Xf(X)}$. Закључујемо да у сваком случају имамо паралелност

$$\langle P, f(P) \rangle \parallel \langle X, f(X) \rangle. \tag{3.6}$$

Даље дискутујемо случајеве у зависности да ли права $\langle P, f(P) \rangle$ сече хиперраван Π.

Трансформација код које постоји пресек $\langle P, f(P) \rangle \cap \Pi = \{P_0\}$ зовемо ***дилатација***. У том случају из (3.6) следи да постоји и пресек $\langle X, f(X) \rangle \cap \Pi = \{X_0\}$, где је X_0 пројекција тачке X на хиперраван Π, паралелно правој $\langle P, f(P) \rangle$. Ако је $\alpha \in \mathbb{F}$ скалар за који је $\overrightarrow{P_0f(P)} = \alpha\overrightarrow{P_0P}$, тада како афино чува односе имамо $\overrightarrow{X_0X} : \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{f(X_0)f(X)} : \overrightarrow{f(P_0)f(P)}$, те добијамо $\overrightarrow{X_0f(X)} = \alpha\overrightarrow{X_0X}$. Сада је јасно где је $f(X)$, те нам је за дилатацију потребан коефицијент α, правац $Pf(P)$ и хиперраван Π. Погодним избором базе матрица линеарног дела дилатације има облик

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Трансформација код које је $\langle P, f(P)\rangle \parallel \Pi$ зовемо ***трансвекција***. Из (3.6) можемо написати $f(X) = X + \lambda(X)\overrightarrow{Pf(P)}$, одакле за $X = S + v$ где је $S \in \Pi$ и $v \in \overrightarrow{E}$, имамо $f(X) = f(S+v) = S + \overrightarrow{f}(v) = S + v + \lambda(S+v)\overrightarrow{Pf(P)}$, односно $\overrightarrow{f}(v) = v + \lambda(S+v)\overrightarrow{Pf(P)}$. Није тешко уочити да је $\mu\colon \overrightarrow{E} \to \mathbb{F}$ дато са $\mu(v) = \lambda(S+v)$ једна линеарна форма и $\mu(v) = 0$ ако и само ако $v \in \overrightarrow{\Pi}$, при чему важи $\overrightarrow{f}(v) = v + \mu(v)\overrightarrow{Pf(P)}$. Погодним избором базе матрица линеарног дела трансвекције има облик

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5 Еуклидски афини простори

Афини простор $(E, \overrightarrow{E}, +)$ снабдевен скаларним производом $(\overrightarrow{E}, \cdot)$ (симетричност, компатибилност, дистрибутивност, позитивна дефинитност) постаје ***еуклидски афини простор***. На овај начин сваком вектору $v \in \overrightarrow{E}$ придружујемо ***интензитет***, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. Скаларни производ омогућава нам појам ортогоналности, где за векторе $x, y \in \overrightarrow{E}$ кажемо да су ***ортогонални*** и пишемо $x \perp y$ ако и само ако је $x \cdot y = 0$.

Векторски потпростори $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V} \in \overrightarrow{E}$ су ***ортогонални*** и пишемо $\overrightarrow{U} \perp \overrightarrow{V}$ ако и само ако за свако $x \in \overrightarrow{U}$ и свако $y \in \overrightarrow{V}$ важи $x \perp y$. ***Ортогонал*** потпростора чини скуп свих вектора ортогоналних на њега $\overrightarrow{U}^{\perp} = \{x \in \overrightarrow{E} : x \perp \overrightarrow{U}\}$. Можемо приметити да је $\overrightarrow{U} \perp \overrightarrow{V}$ ако и само ако је $\overrightarrow{U} \leqslant \overrightarrow{V}^{\perp}$, односно ако и само ако је $\overrightarrow{V} \leqslant \overrightarrow{U}^{\perp}$.

За два афина потпростора Π и Γ кажемо да су ***ортогонални*** ако су такве њихове директрисе. Тада је $\overrightarrow{\Pi} \leqslant \overrightarrow{\Gamma}^{\perp}$, а уколико важи $\overrightarrow{\Pi} \geqslant \overrightarrow{\Gamma}^{\perp}$ онда су Π и Γ ***управни***.

Ортогонално пројектовање је специјални случај паралелног пројектовања на афини потпростор Π кад пројектујемо паралелно са $\overrightarrow{\Pi}^{\perp}$. Ако је Π афини потпростор и $A \in E$ произвољна тачка, тада је $A + \overrightarrow{\Pi}^{\perp}$ јединствен потпростор кодимензије $\dim \Pi$ који садржи A и ортогоналан је на Π.

Теорема 3.7. *Права је ортогонална на раван ако и само ако је ортогонална на неке две њене непаралелне праве.*

Доказ. За $\Gamma_i = T_i + \mathrm{Span}\{u_i\}$, $i = 1, 2$ услов $\Gamma_1 \nparallel \Gamma_2$ повлачи линеарну независност u_1 и u_2, док $v \perp u_1, u_2$ даје $v \perp \mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$. □

У еуклидској геометрији позната је ***Теорема о три нормале***.

Теорема 3.8. *Нека је A произвољна тачка (тродимензионог еуклидског афиног простора) ван равни Π, и нека се права Δ налази у Π. Ако је B подножје нормале из A на Π, а C подножје нормале из B на Δ, тада је права AC нормална на Δ.*

Доказ. Из $\langle A, B\rangle \perp \Pi \supset \Delta$ следи $\langle A, B\rangle \perp \Delta$, те како је и $\langle B, C\rangle \perp \Delta$, из Теореме 3.7 имамо $\langle A, B, C\rangle \perp \Delta$, те и $\langle A, C\rangle \perp \Delta$. □

Захваљујући скаларном производу уводимо ***растојање*** између тачака $A, B \in E$ са

$$\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}.$$

Растојање има неке лепе особине, $\delta(A,B) \geqslant 0$, $\delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, $\delta(A,B) = \delta(B,A)$. Такође важи и неједнакост троугла $\delta(A,C) \leqslant \delta(A,B) + \delta(B,C)$, што је последица Коши-Шварцове неједнакости $x \cdot y \leqslant \|x\|\|y\|$, која следи из

$$0 \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 2 - 2\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}.$$

3.6 Изометрије и симетрије

Под ***изометријом*** подразумевамо пресликавање $f\colon E \to E$ еуклидског простора које чува растојања, односно за свако $A, B \in E$ важи $\delta(f(A), f(B)) = \delta(A,B)$. За транслације важи $\delta(\tau_v(A), \tau_v(B)) = \delta(A+v, B+v) = \|\overrightarrow{(A+v)(B+v)}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \delta(A,B)$, те су оне основни примери изометрија. Такође, композиција изометрија очигледно јесте изометрија.

За оператор $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ кажемо да је ***ортогоналан*** ако чува скаларни производ, односно за свако $x, y \in \overrightarrow{E}$ важи $\overrightarrow{f}(x) \cdot \overrightarrow{f}(y) = x \cdot y$.

Теорема 3.9. *Пресликавање $f\colon E \to E$ је изометрија ако и само ако је f афина трансформација са ортогоналним линеарним делом $\overrightarrow{f}$.*

Доказ. Ако је f изометрија, фиксирамо $P \in E$ и дефинишемо $\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f(P)f(P+v)}$. Да би f било афино потребно је и довољно показати да је овако дефинисано $\overrightarrow{f}$ линеарно. Како је f изометрија имамо

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{f}(x) - \overrightarrow{f}(y)\| &= \|\overrightarrow{f(P)f(P+x)} - \overrightarrow{f(P)f(P+y)}\| = \|\overrightarrow{f(P+y)f(P+x)}\| \\ &= \|\overrightarrow{(P+y)(P+x)}\| = \|x-y\|.\end{aligned}$$

Специјалан случај за $\overrightarrow{f}(0) = 0$ доноси једначину $\|\overrightarrow{f}(x)\| = \|x\|$, одакле добијамо $\|\overrightarrow{f}(x) - \overrightarrow{f}(y)\|^2 = \|\overrightarrow{f}(x)\|^2 - 2\overrightarrow{f}(x) \cdot \overrightarrow{f}(y) + \|\overrightarrow{f}(y)\|^2$ и $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \cdot y) + \|y\|^2$. Одавде следи $\overrightarrow{f}(x) \cdot \overrightarrow{f}(y) = x \cdot y$, те је $\overrightarrow{f}$ ортогонално. Из ортогоналности лако следи

$$\|\overrightarrow{f}(\alpha x + \beta y) - \alpha\overrightarrow{f}(x) - \beta\overrightarrow{f}(y)\|^2 = \|(\alpha x + \beta y) - \alpha x - \beta y\|^2 = 0,$$

што значи да је $\overrightarrow{f}$ линеарно. Обратно, уколико је f афино са ортогоналним $\overrightarrow{f}$, то имамо $\|\overrightarrow{f}(x) - \overrightarrow{f}(y)\| = \|x-y\|$, одакле $\|\overrightarrow{f(P+y)f(P+x)}\| = \|\overrightarrow{(P+y)(P+x)}\|$, те је f изометрија. □

Изометрије су афина пресликавања, а Φ_f је један афини потпростор. Занима нас под којим условима транслација комутира са изометријом. Како је $f \circ \tau_v \circ f^{-1} = \tau_{\overrightarrow{f}(v)}$ то је комутативност еквивалентана са $\tau_{\overrightarrow{f}(v)} = \tau_v$, односно са $v \in \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}) = \overrightarrow{\Phi_f}$. Дакле, транслација τ_v комутира са изометријом f ако и само ако је $v \parallel \Phi_f$.

Матрица линеарног дела изометрије је ортогонална матрица, те из $AA^\top = \mathbb{1}$ закључујемо $\det A = \pm 1$. Ако је детерминанта позитивна ($\det A = 1$) кажемо да је изометрија ***директна***, док је у супротном (за $\det A = -1$) ***индиректна***.

Нека су $A, B \in E$ произвољне тачке. Размотримо шта је скуп свих тачака подједнако удаљених од њих, $\{X \in E : \delta(A,X) = \delta(B,X)\}$. Посматрајмо најпре праву $\langle A, B\rangle$ и тачке са ње, $X = \alpha A + (1-\alpha)B$. Како је $\overrightarrow{AX} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BX} = \alpha\overrightarrow{BA}$, то је $\|\overrightarrow{AX}\| = \|\overrightarrow{BX}\|$ ако и само ако је $|1-\alpha| = |\alpha|$, односно кад је $\alpha = 1/2$, што одговара средишту дужи $S = (1/2)A + (1/2)B$.

Нека је P произвољна тачка за коју је $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$, а P_0 ортогонална пројекција из P на праву $\langle A, B\rangle$. Тада из $\|\overrightarrow{AP_0}\|^2 + \|\overrightarrow{P_0P}\|^2 = \|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP_0}\|^2 + \|\overrightarrow{P_0P}\|^2$ закључујемо $\|\overrightarrow{AP_0}\| = \|\overrightarrow{BP_0}\|$, односно $P_0 = S$. Дакле, тражени скуп тачака је медијатриса дужи AB, односно хиперраван кроз $S = (1/2)A + (1/2)B$ ортогонална на праву $\langle A, B\rangle$.

Теорема 3.10. *Скуп свих тачака euклидског афиног простора E које су подједнако удаљене од $A, B \in E$ је медијатриса дужи AB.*

Симетрија у односу на неки афини потпростор Π је пресликавање $\sigma_\Pi : X \mapsto X'$ за које важи да је ортогонална пројекција X_0 тачке X на Π средиште дужи XX', односно $X_0 = (1/2)X+(1/2)X'$. Симетрија у односу на тачку ($\dim \Pi = 0$) је ***централна***, у односу на праву ($\dim \Pi = 1$) је ***осна***, а специјални случај симетрије кад је Π хиперраван ($\dim \Pi = n - 1$) зовемо ***рефлексија***.

Докажимо да је симетрија изометрија. За фиксирано $P \in \Pi$ важи $\overrightarrow{PX'} = 2\overrightarrow{PX_0} - \overrightarrow{PX}$. Ортогонална пројекција π на потпростор Π је афина (али није изометрија), одакле је $\overrightarrow{\sigma_\Pi} = 2\overrightarrow{\pi} - \mathbb{1}$, те је $\overrightarrow{\sigma_\Pi}$ линеарно. Како је $\overrightarrow{\pi}(x) - x = \overrightarrow{XX_0} \perp \overrightarrow{\Pi} \supseteq \mathrm{Span}\{\overrightarrow{\pi}(x), \overrightarrow{\pi}(y)\}$ и слично $\overrightarrow{\pi}(y) - y \perp \mathrm{Span}\{\overrightarrow{\pi}(x), \overrightarrow{\pi}(y)\}$, то имамо

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_\Pi}(x) \cdot \overrightarrow{\sigma_\Pi}(y) &= (2\overrightarrow{\pi}(x) - x) \cdot (2\overrightarrow{\pi}(y) - y) \\
&= (\overrightarrow{\pi}(x) + (\overrightarrow{\pi}(x) - x)) \cdot (\overrightarrow{\pi}(y) + (\overrightarrow{\pi}(y) - y)) \\
&= \overrightarrow{\pi}(x) \cdot \overrightarrow{\pi}(y) + (\overrightarrow{\pi}(x) - x) \cdot (\overrightarrow{\pi}(y) - y) \\
&= (\overrightarrow{\pi}(x) - (\overrightarrow{\pi}(x) - x)) \cdot (\overrightarrow{\pi}(y) - (\overrightarrow{\pi}(y) - y)) = x \cdot y,
\end{aligned}$$

одакле је $\overrightarrow{\sigma_\Pi}$ ортогонално, те Теорема 3.9 повлачи да је σ_Π изометрија.

У погодно изабраној бази матрица симетрије је дијагонална са вредностима ± 1 на дијагонали. Тада је $\det \overrightarrow{\sigma_\Pi} = (-1)^{n - \dim \Pi}$, те можемо дискутовати да ли је симетрија директна или индиректна. На пример, осна симетрија у тродимензионом простору је директна, док је свака рефлексија индиректна.

Теорема 3.11. *Изометрија је симетрија ако и само ако је инволуција.*

Доказ. Симетрија је инволуција, те претпоставимо да је изометрија f инволуција. За произвољну тачку $X \in E$ је $X \mapsto X' \mapsto X$, одакле следи $S = (1/2)X + (1/2)X' \mapsto S$. Скуп фиксних тачака $\Phi_f \ni S$ је непразан, а како је f изометрија то су фиксне тачке подједнако удаљене од X и X', те по Теореми 3.10 припадају медијатриси Π дужи XX'. Дакле, имамо $\emptyset \neq \Phi_f \subseteq \Pi \perp \langle X, X'\rangle$, те је f симетрија у односу на Φ_f. □

Под којим условима симетрија σ_Π комутира са изометријом f? Како је σ_Π инволуција, то је $f \circ \sigma_\Pi \circ f^{-1}$ такође инволуција, те по Теореми 3.11, $f \circ \sigma_\Pi \circ f^{-1}$ је симетрија у односу на фиксне тачке $\Phi_{f\circ\sigma_\Pi\circ f^{-1}} = f\Phi_{\sigma_\Pi} = f\Pi$. Дакле, σ_Π и f комутирају ако и само ако је $f\Pi = \Pi$. На пример, транслација τ_v комутира са σ_Π уколико је $v \parallel \Pi$.

Теорема 3.12. *Изометрија f је рефлексија ако и само ако је Φ_f хиперраван.*

Доказ. Ако је Φ_f хиперраван изаберимо произвољно $X \notin \Phi_f$. За свако $P \in \Phi_f$ важи $\delta(P, X) = \delta(P, f(X))$, те P припада медијатриси Π дужи $Xf(X)$. Како је Π хиперраван која садржи све фиксне тачке то мора бити $\Pi = \Phi_f$, одакле је f рефлексија. □

У специјалном случају $n = 2$ претходна теорема значи да је f рефлексија ако и само ако је индиректна и има фиксну тачку. Наиме, за $P \in \Phi_f$ и $X \notin \Phi_f$ важи да P припада медијатриси дужи $Xf(X)$ што је нека права Π. Пресликавање $\sigma_\Pi \circ f$ је директна изометрија као композиција две индиректне изометрије. Како директна изометрија није рефлексија, а $\sigma_\Pi \circ f$ фиксира тачке P и X, те и хиперраван $\langle P, X\rangle$, то значи да има још фиксних тачака. Дакле $\Phi_{\sigma_\Pi\circ f} = E$, односно $\sigma_\Pi \circ f = \mathbb{1}$, одакле је $f = \sigma_\Pi$ рефлексија.

Рефлексије су основне градивне јединице изометрија. Уз стандардни (тополошки) договор да је $\dim \emptyset = -1$ можемо поставити следећу теорему.

Теорема 3.13. *Свака изометрија f је композиција не више од $n - \dim \Phi_f$ рефлексија.*

Доказ. База индукције је јасна јер за $\dim \Phi_f = n$ је $f = \mathbb{1}$, док је f за $\dim \Phi_f = n - 1$ по Теореми 3.12 рефлексија. За корак индукције посматрамо $X \notin \Phi_f$, где је Φ_f садржано у медијатриси Π дужи $Xf(X)$. Нова изометрија $\sigma_\Pi \circ f$ фиксира све из Φ_f као и тачку X, те је $\dim \Phi_{\sigma_\Pi \circ f} > \dim \Phi_f$. На основу индукцијске претпоставке $\sigma_\Pi \circ f$ је композиција не више од $n - \dim \Phi_{\sigma_\Pi \circ f}$ рефлексија, те је $f = \sigma_\Pi \circ (\sigma_\Pi \circ f)$ композиција не више од $n + 1 - \dim \Phi_{\sigma_\Pi \circ f} \leqslant n - \dim \Phi_f$ њих, □

Посебно, резултат ове теореме каже да уколико изометрија нема фиксних тачака онда је у питању композиција не више од $n + 1$ рефлексија, док је за $\Phi_f \neq \emptyset$ композиција не више од n рефлексија.

3.7 Класификација изометрија и сличности

Појам подударности у еуклидском афином простору можемо дефинисати помоћу еквиваленције

$$(A_0, A_1) \cong (B_0, B_1) \quad \iff \quad \delta(A_0, A_1) = \delta(B_0, B_1).$$

По узору на класични став ССС о подударности троуглова, то се даље уопштава на већи број тачака, те дефинишемо подударност $(A_0, A_1, \ldots, A_k) \cong (B_0, B_1, \ldots, B_k)$ ако и само ако за свако $0 \leqslant i, j \leqslant k$ важи $\delta(A_i, A_j) = \delta(B_i, B_j)$.

Ако је $(A_0, A_1, \ldots, A_m)$ афино независни систем тачака и $(B_0, B_1, \ldots, B_m)$ њему подударан систем, тада постоји изометрија f таква да је $f(A_i) = B_i$ за свако $0 \leqslant i \leqslant m$. Штавише, уколико је $m = n$ та изометрија је јединствена, док за $m = n - 1$ постоје тачно две такве изометрије. Ово тврђење доказујемо математичком индукцијом по m.

Претпоставимо да постоји изометрија f таква да важи $f(A_i) = B_i$ за $0 \leqslant i \leqslant m - 1$ са додатним $f(A_m) = B$. Нека је $B \neq B_m$, иначе смо решили корак индукције. Како је

$$\delta(B_i, B_m) = \delta(A_i, A_m) = \delta(f(A_i), f(A_m)) = \delta(B_i, B),$$

то тачка B_i по Теореми 3.10 припада медијатриси Π дужи BB_m. Композиција $\sigma_\Pi \circ f$ је изометрија за коју важи $(\sigma_\Pi \circ f)(A_i) = \sigma_\Pi(B_i) = B_i$, као и $(\sigma_\Pi \circ f)(A_m) = \sigma_\Pi(B) = B_m$.

Кад изометрија нема фиксну тачку, често се по узору на Теорему 3.4 разлаже на транслацију и изометрију која има фиксних тачака. Добро је да редослед композиције није битан, односно да имамо $f = \tau_v \circ g = g \circ \tau_v$, што се дешава кад је $\overrightarrow{g}(v) = v$, односно $\Phi_g \parallel v$. Тако долазимо до теореме о канонском разлагању изометрије.

Теорема 3.14. *Свака изометрија се једнозначно разлаже са $f = \tau_v \circ g$ уз $\emptyset \neq \Phi_g \parallel v$.*

Основна идеја је посматрати векторски потпростор $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}) \leqslant \overrightarrow{E}$ и тачку $P \in E$. Како је $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\tau_v} \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}$, видимо суплементарне просторе $\Pi = P + \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}) \parallel \Phi_g$ и $\Gamma = P + \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1})^\perp$. Због $\Gamma \perp \Phi_g$ је $g\Gamma \perp g\Phi_g = \Phi_g$, а како g има фиксну тачку S где је $\Phi_g \cap \Gamma = \{S\}$, можемо закључити да је $g\Gamma = \Gamma$, односно $f\Gamma = \tau_v \Gamma$. Из услова $v \parallel \Phi_g$ се јединственост за v лако види.

Важно је приметити да у специјалном случају кад g има само једну фиксну тачку, $\Phi_g = \{S\}$, услов $v \parallel \{S\}$ даје $v = 0$, што значи да нема транслације!

Класификацију изометрија вршимо тако што полазимо од мањих димензија n и идемо ка већим. Најпре примењујемо Теорему 3.14 која канонски разлаже изометрију $f = \tau_v \circ g$ где је $\emptyset \neq \Phi_g \parallel v$. Затим вршимо дискусију по $0 \leqslant \dim \Phi_g \leqslant n$, где се, по Теореми 3.13, g разлаже као композиција не више од $n - \dim \Phi_g$ рефлексија.

Размотримо најпре афину праву, $n = 1$. За $\dim \Phi_g = 0$ је $\Phi_g = \{S\}$ и $v = 0$, те $f = g$. Притом Φ_g је хиперраван, те је f рефлексија, односно ***централна симетрија*** са центром S. За $\dim \Phi_g = 1$ је $\Phi_g = E$, односно $g = \mathbb{1}$, те је $f = \tau_v$ ***транслација*** (и посебно за $v = 0$ идентичко).

Следећи случај је афина раван, $n = 2$. За $\dim \Phi_g = 0$ је $\Phi_g = \{S\}$, те $f = g$, одакле имамо $f = \sigma_a \circ \sigma_b$, при чему су a и b праве (хиперравни) које се секу у S, те је f ***ротација***. За $\dim \Phi_g = 1$ је $g = \sigma_a$, тако да су опције ***рефлексија*** $f = \sigma_a$ и ***клизајућа рефлексија*** $f = \tau \circ \sigma_a$. Наравно, за $\dim \Phi_g = 2$ је $g = \mathbb{1}$, те је f ***транслација***.

Долазимо до изометрија (тродимензионог) простора, $n = 3$. За $\dim \Phi_g = 3$ је $g = \mathbb{1}$, те је f ***транслација***. За $\dim \Phi_g = 2$ је $g = \sigma_a$, тако да су опције ***рефлексија*** $f = \sigma_a$ и ***клизајућа рефлексија*** $f = \tau \circ \sigma_a$.

Случај $\dim \Phi_g = 1$ је компликованији. Како је Φ_g права, то кроз $X \in E$ постоји јединствена раван Π са $X \in \Pi \perp \Phi_g$. Тада је $g\Pi \perp g\Phi_g = \Phi_g$, као и $g(X_0) = X_0$ за ортопројекцију из X на Φ_g, те важи $g\Pi = \Pi$. Рестрикција $g\restriction_\Pi$ је изометрија у Π са тачно једном фиксном тачком X_0, те је у питању ротација. То се дешава у свакој таквој равни Π, те глобална изометрија даје и једнаке углове ротације и добијамо да је g ***осна ротација***. Додатно имамо опцију $f = \tau \circ g$, што је у овом случају ***завојно кретање***.

Последњи случај $\dim \Phi_g = 0$ као и раније нема транслацију, $f = g$ и $\Phi_f = \{S\}$. Можемо искористити централну симетрију σ_S да бисмо конструисали изометрију $\sigma_S \circ f$ која је директна (јер је f индиректна као композиција три рефлексије), те мора, поред S имати још фиксних тачака. Прва опција је $\sigma_S \circ f = \mathbb{1}$ која даје ***централну симетрију*** $f = \sigma_S$. Друга опција је $\sigma_S \circ f = \rho_{\Gamma,\theta}$ осна ротација око праве $\Gamma = \Phi_{\sigma_S \circ f} \ni S$ за угао θ. Како је $\sigma_S = \sigma_\Pi \circ \rho_{\Gamma,\pi}$ где је $S \in \Pi \perp \Gamma$, то имамо $f = \sigma_S \circ \rho_{\Gamma,\theta} = \sigma_\Pi \circ \rho_{\Gamma,\theta+\pi}$ и добили смо ***ротациону рефлексију***.

Ако се растојање пресликавањем f мења пропорционално, односно уколико важи $\delta(f(X), f(Y)) = \lambda\delta(X, Y)$ за неко $\lambda > 0$, у питању је ***сличност***. Наравно, специјални случај сличности за $\lambda = 1$ је изометрија. Основни пример сличности је хомотетија јер за њу важи,

$$\begin{aligned}
\delta(\chi_{S,\theta}(X), \chi_{S,\theta}(Y)) &= \delta(S + \theta\overrightarrow{SX}, S + \theta\overrightarrow{SY}) = \left\|\overrightarrow{(S + \theta\overrightarrow{SX})(S + \theta\overrightarrow{SY})}\right\| \\
&= \|\theta\overrightarrow{SY} - \theta\overrightarrow{SX}\| = \|\theta\overrightarrow{XY}\| = |\theta|\|\overrightarrow{XY}\| = |\theta|\delta(X, Y).
\end{aligned}$$

Композиција сличности је сличност са коефицијентом који је једнак производу коефицијената. Уколико сличност f има коефицијент различит од 1, онда f не може имати више од једне фиксне тачке. Међутим, како је $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}) = 0$ то f мора имати фиксну тачку, одакле закључујемо да је фиксна тачка јединствена. Због тога, сличност са коефицијентом $\lambda \neq 1$ и фиксном тачком S можемо записати као $\chi_{S,\lambda} \circ f$ где је f изометрија која фиксира S. Проласком кроз класификацију изометрија на овај начин једноставно добијамо класификацију сличности.

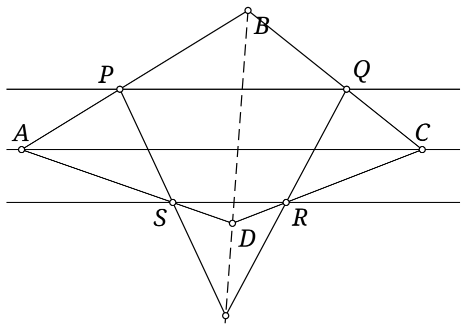
Глава 4

ЗБИРКА ЗАДАТАКА

4.1 Дезаргова теорема

Бахманова раван је по дефиницији Папосова, а самим тим по Хесенберговој теореми (Теорема 2.43) и Дезаргова. Приде, по Теореми 2.19, важи и Обрнуто Дезаргово тврђење, што у пакету са Дезарговим тврђењем можемо формулисати на следећи начин. Два тротеменика имају центар перспективе ако и само ако имају осу перспективе.

Задатак 4.1. У произвољан четвороугао уписан је трапез чије су основе паралелне једној дијагонали четвороугла. Доказати да се краци трапеза секу на другој дијагонали четвороугла.



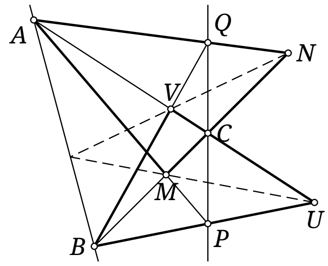
Решење. Нека је $ABCD$ четвороугао при чему тачке P, Q, R, S леже редом на AB, BC, CD, DA, тако да су праве PQ, AC и SR паралелне. Бесконачна тачка правих паралелних са AC је центар перспективе троуглова APS и CQR. По Дезарговој теореми постоји оса на којој су тачке B, D и $PS \wedge QR$, те су праве BD, PS, QR конкурентне.

Алтернативно, права AC је оса перспективе троуглова PBQ и SDR, те по Обрнутој Дезарговој теореми има центар у пресеку правих BD, PS, QR. $\triangle$

Задатак 4.2. У произвољан четвороугао уписан је трапез коме се краци секу на једној дијагонали четвороугла. Доказати да су основе трапеза паралелне другој дијагонали четвороугла.

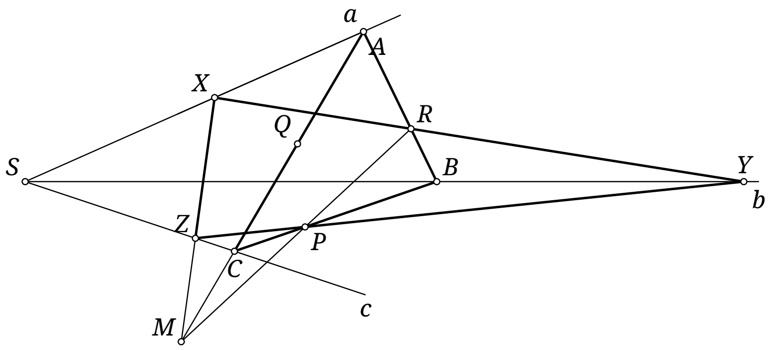
Решење. Варијација Задатка 4.1 чију ћемо нотацију задржати. Како су троуглови PBQ и SDR перспективни у односу на тачку у којој су праве BD, PS, QR конкурентне, то постоји оса коју чине тачке A, C и $PQ \wedge SR$, одакле су AC, PQ, SR конкурентне, односно паралелне. $\triangle$

Задатак 4.3. Дате су неколинеарне тачке A, B, C и права $p \ni C$. Нека су P и Q произвољне тачке са p и нека важи $M = AP \wedge BC$, $N = AQ \wedge BC$, $U = BP \wedge AC$, $V = BQ \wedge AC$. Доказати да су праве AB, MU, NV конкурентне.



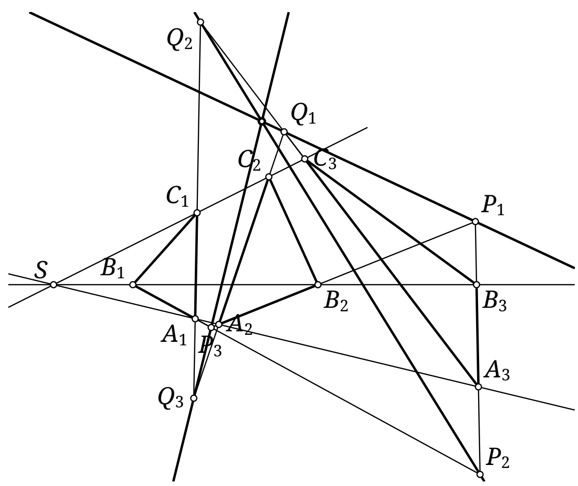
Решење. Како тачке $AM \wedge BU = P$, $AN \wedge BV = Q$, $MN \wedge UV = C$ леже на p, то је p оса перспективе троуглова AMN и BUV. По Обрнутој Дезарговој теореми они имају центар перспективе, те су праве AB, MU, NV конкурентне. △

Задатак 4.4. Дате су конкурентне праве a, b, c и тачке P, Q, R које им не припадају. Одредити тачке $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ тако да важи $P \in BC$, $Q \in AC$, $R \in AB$.



Решење. Поставимо произвољну тачку $Z \in c$. Желимо да троугао ABC имитирамо троуглом XYZ, те постављамо $Y = ZP \wedge b$, а затим $X = YR \wedge a$. Да би троугао XYZ постао троугао ABC фали му још само $Q \in XZ$. Троуглови XYZ и ABC имају центар перспективе у пресеку правих a, b, c. Из Дезаргове теореме следи да они имају осу на којој су тачке $P = BC \wedge YZ$, $R = AB \wedge XY$, $M = AC \wedge XZ$. Како су P, R, M колинеарне то M можемо добити са $M = PR \wedge XZ$, а затим $A = MQ \wedge a$, $C = MQ \wedge c$ и $B = AR \wedge b$. △

Задатак 4.5. Три троугла имају заједнички центар перспективе. Доказати да су одговарајуће три осе перспективе конкурентне праве.



Решење. Дезаргова теорема на троугловима $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ даје осу $s_3 = P_3Q_3$, где је $P_3 = A_1B_1 \wedge A_2B_2$, $Q_3 = A_1C_1 \wedge A_2C_2$. Дезаргова теорема на троугловима $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$

даје осу $s_2 = P_2Q_2$, где је $P_2 = A_1B_1 \wedge A_3B_3$, $Q_2 = A_1C_1 \wedge A_3C_3$. Дезаргова теорема на троугловима $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ даје осу $s_1 = P_1Q_1$, где је $P_1 = A_2B_2 \wedge A_3B_3$, $Q_1 = A_2C_2 \wedge A_3C_3$. Посматрајмо троуглове $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$, за које је $A_3 = P_1P_2 \wedge Q_1Q_2$, $A_2 = P_1P_3 \wedge Q_1Q_3$, $A_1 = P_2P_3 \wedge Q_2Q_3$. Како су тачке A_1, A_2, A_3 колинерне то оне чине осу перспективе, те применом Обрнуте Дезаргове теореме троуглови имају центар, одакле су праве P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, односно s_1, s_2, s_3 конкурентне.

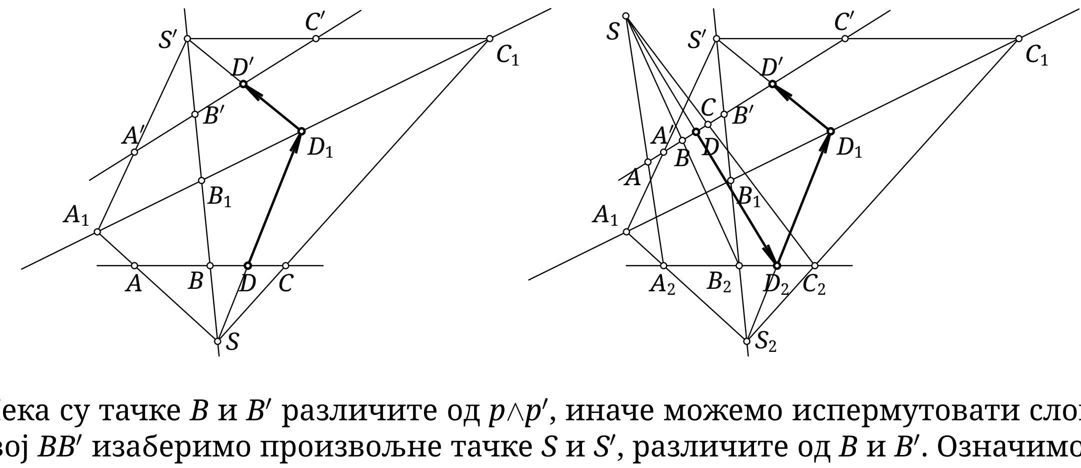
Специјални случајеви се лако проверавају. На пример уколико је $P_1 = P_2$, лако се види да мора бити $P_1 = P_3$, одакле $P_1 = P_2 = P_3 \in s_i$ за свако $i = 1, 2, 3$. △

4.2 Пројективитети

Бахманова раван је свакако Папосова, те користимо Папосову теорему (Тврђење 2.41) по којој су колинеарна сецишта наспрамних страница простог шестотеменика чија темена припадају двема правама (дегенерисаној коници). По Теореми 2.47 на располагању имамо још две еквивалентне теореме. Теорема о перспективитету (Теорема 2.48) каже је пројективитет заправо перспективитет ако и само ако фиксира заједнички елемент. Основна теорема пројективитета (Теорема 2.49) једнозначно одређује пројективитет са три пара одговарајућих елемената. Често се пројективитет (између различитих низова тачака) раставља на композицију два перспективитета (Теорема 2.29) одакле се он једноставно конкретно реализује. Пројективитете на пројективној правој у зависности од броја фиксних тачака делимо на елиптичке (без фиксних тачака), параболичке (једна фиксна) и хиперболичке (две фиксне). У случају да постоје бар три фиксне тачке онда су све тачке фиксне и пројективитет је идентички.

Задатак 4.6. Дате су различите тачке A, B, C праве p и различите тачке A', B', C' праве p'. Одредити слику произвољне тачке $D \in p$ при пројективитету које пресликава A, B, C редом у A', B', C'. Дискутовати и случај $p = p'$.

Решење. Основна идеја је раставити пројективитет на композицију два (за $p \neq p'$, Теорема 2.29) или три (за $p = p'$, Теорема 2.30) перспективитета, јер перспективитете лако реализујемо. То се може урадити на начин описан у доказу Теореме 2.25, али сада не морамо да бринемо о ограничењима везана за број тачака на правој, те ћемо изложити релаксиранију варијанту композиције.

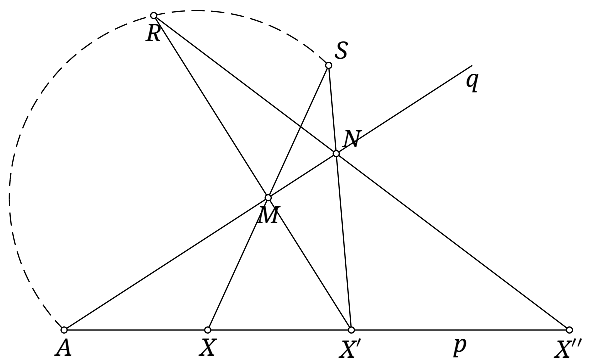


Нека су тачке B и B' различите од $p \wedge p'$, иначе можемо испермутовати слова. На правој BB' изаберимо произвољне тачке S и S', различите од B и B'. Означимо даље $A_1 = SA \wedge S'A'$, $C_1 = SC \wedge S'C'$, те $B_1 = SS' \wedge A_1C_1$. По Основној теореми пројективитета тражени пројективитет је $(p) \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} (p_1) \overset{S'}{\underset{\wedge}{=}} (p')$, где је $p_1 = A_1C_1$, јер за њега важи $(A, B, C) \mapsto (A_1, B_1, C_1) \mapsto (A', B', C')$. Сада је лако реализовати слику D' произвољне тачке D, јер најпре конструишемо $D_1 = SD \wedge p_1$, а затим $D' = S'D_1 \wedge p'$.

У случају $p = p'$ бирамо произвољну тачку $S \notin p$ и праву $p_2 \neq p$ ван S, те укључујемо $f = (p)\overset{S}{\overline{\wedge}}(p_2)$, те преостаје премостити тројку $f(A), f(B), f(C)$ на тројку A', B', C', по већ утврђеном начину јер је $p_2 \neq p$. △

Задатак 4.7. Нека је f пројективитет праве p са фиксном тачком A. Доказати да је f параболички пројективитет ако и само ако за сваку тачку $X \neq A$ са p важи $\mathcal{H}(Af(X); Xf(f(X)))$.

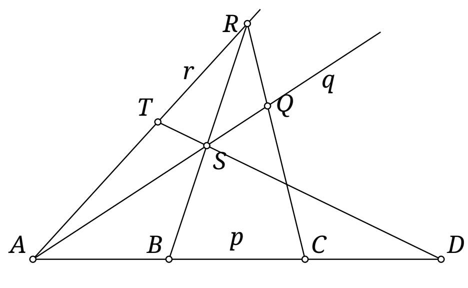
Решење. Нека је q произвољна права кроз A, а S тачка ван p и q. За произвољну тачку $X \in p$ означимо $X' = f(X)$ и $X'' = f(f(X))$. Нека је $M = SX \wedge q$, $N = SX' \wedge q$ и $R = X'M \wedge X''N$. По Основној теореми пројективитета $f = (p)\overset{S}{\overline{\wedge}}(q)\overset{R}{\overline{\wedge}}(p)$ јер пресликава $(A, X, X') \mapsto (A, M, N) \mapsto (A, X', X'')$. Ако је f параболичко, A је јединствена фиксна тачка. Међутим, $B = RS \wedge p$ је такође фиксна тачка одакле следи $B = A$, односно $A \in RS$. Четворотеменик $MNSR$ повлачи $\mathcal{H}(AX'; XX'')$.



Обратно, ако важи $\mathcal{H}(AX'; XX'')$, то постоји четворотеменик $MNSR$ такав да имамо $A = MN \wedge SR$, $X' = MR \wedge NS$ и $X \in MS$, $X'' \in NR$. Ако би $B \in p$ била фиксна тачка за f имали бисмо колинеарне $B, BS \wedge q, S$, као и колинеарне $BS \wedge q, f(B) = B, R$, одакле следи $B \in SR$ и отуда $B = A$.

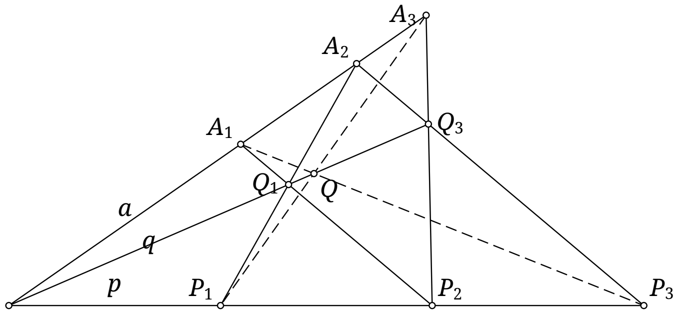
Као последицу овог задатка имамо да је параболички пројективитет f праве p једнозначно одређен својом фиксном тачком A и сликом једне тачке $X' = f(X)$. Наиме, $f(X')$ је јединствена тачка за коју је $\mathcal{H}(AX'; Xf(X'))$ (Теорема 2.69), док Основна теорема пројективитета једнозначно одређује f са $(A, X, X') \mapsto (A, X', f(X'))$. △

Задатак 4.8. Параболички пројективитети праве p који фиксирају дату тачку међусобно комутирају.



Решење. Нека су f и g параболички пројективитети праве p са $f(A) = g(A) = A$. Изаберимо произвољну праву $r \ni A$ и тачке $B \in p$ и S, те нека је $q = AS$, $C = f(B)$, $D = g(B)$. Уведимо тачке $R = BS \wedge r$, $Q = CR \wedge q$, $T = DS \wedge r$. Пројективитет $(p)\overset{S}{\overline{\wedge}}(r)\overset{Q}{\overline{\wedge}}(p)$ пресликава $(A, B) \mapsto (A, C)$, што по последици Задатка 4.7 једнозначно одређује параболички пројективитет f. Сасвим слично, $(p)\overset{R}{\overline{\wedge}}(q)\overset{T}{\overline{\wedge}}(p)$ даје $(A, B) \mapsto (A, D)$, што одређује g. Како је $(f \circ g)(B) = f(D) = TQ \wedge p = g(C) = (g \circ f)(B)$, то добијамо $f \circ g = g \circ f$. △

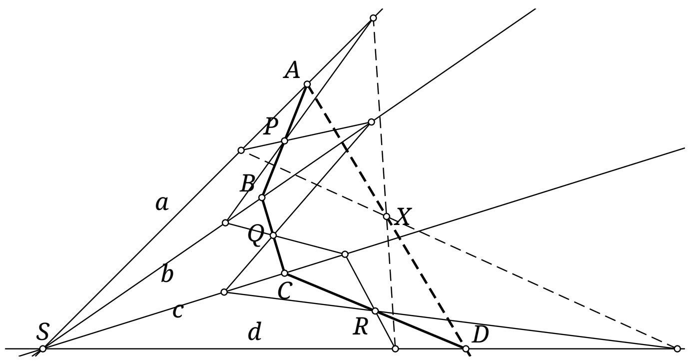
Задатак 4.9. Дате су конкурентне праве a, p, q и тачке $A_1, A_2, A_3 \in a$. Ако је $f_i\colon (p)\overset{A_i}{\overline{\wedge}}(q)$ за $i = 1, 2, 3$, доказати да важи $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.



Решење. За произвољно $P_2 \in p$ различито од $p \wedge a$, нека је $Q_1 = f_1(P_2)$ и $Q_3 = f_3(P_2)$, а затим $P_1 = f_2^{-1}(Q_1)$ и $P_3 = f_2^{-1}(Q_3)$. Примена Папосове теореме на тројке колинеарних тачака $A_1, A_2, A_3 \in a$ и $P_1, P_2, P_3 \in p$ даје колинеарне тачке $A_1P_2 \wedge A_2P_1 = Q_1$, $A_2P_3 \wedge A_3P_2 = Q_3$, $A_1P_3 \wedge A_3P_1 = Q$, одакле важи $Q \in Q_1Q_3 = q$. Даље добијамо $(f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3)(P_2) = f_1(P_3) = P_3A_1 \wedge q = Q$ и $(f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1)(P_2) = f_3(P_1) = P_1A_3 \wedge q = Q$, одакле следи тврђење.

Алтернативно, пројективитети $f_1 \circ f_2^{-1}$ и $f_3 \circ f_2^{-1}$ су параболички са једином фиксном тачком S, јер је $\{S\} = a \cap p \cap q$, те по Задатку 4.8 међусобно комутирају, одакле следи $(f_1 \circ f_2^{-1}) \circ (f_3 \circ f_2^{-1}) = (f_3 \circ f_2^{-1}) \circ (f_1 \circ f_2^{-1})$. Множењем здесна са f_2 добијамо тражену једнакост. $\triangle$

Задатак 4.10. Дате су конкурентне праве a, b, c, d и тачке P, Q, R које им не припадају. Доказати да постоји тачка X таква да за сваке четири тачке $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ за које је $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$, важи и $X \in AD$.



Решење. Дефинишимо пројективитет $f = (a)\overset{P}{\overline{\wedge}}(b)\overset{Q}{\overline{\wedge}}(c)\overset{R}{\overline{\wedge}}(d)$. Ако су праве a, b, c, d конкурентне у тачки S, тада је $f(S) = S$, те је f перспективитет, одакле постоји тачка X таква да је $f = (a)\overset{X}{\overline{\wedge}}(d)$. За тачке A, B, C, D које испуњавају услове задатка важи $f(A) = D$ одакле следи $X \in AD$. $\triangle$

4.3 Хомогене координате, дворазмера

За практично рачунање дворазмере најчешће користимо формулу (2.13), по којој ако важи $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{D} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$, онда је $(ABCD) = (\beta/\alpha) : (\delta/\gamma)$. Из Теореме 2.38 добијамо основне особине на пермутацијама тачака: $(ABCD) = (BADC) = (CDAB)$, $(ABCD) \cdot (BACD) = 1$ и $(ABCD) + (ACBD) = 1$. Напоменимо и то да је хармонијска конјугованост $\mathcal{H}(AB; CD)$ само краћи запис за $(ABCD) = -1$ (Теорема 2.74).

Задатак 4.11. Нека су тачке еуклидске равни дате преко својих стандардних еуклидских координата: $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(3, 0)$, $D(4, 1)$. Одредити координате пресечне тачке правих AB и CD. Поновити рачун у случају да је $D(5, 1)$.

Решење. Тачкама додељујемо хомогене координате, односно векторе представнике, на пример природно: $\overrightarrow{A} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{B} = (3, 2, 1)$, $\overrightarrow{C} = (3, 0, 1)$, $\overrightarrow{D} = (4, 1, 1)$. По Леми 2.5 рачунамо спојнице $\overrightarrow{A \vee B} \propto \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (-1, 2, -1)$ и $\overrightarrow{C \vee D} \propto \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D} = (-1, 1, 3)$, као и сециште $E = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ са $\overrightarrow{E} \propto \overrightarrow{(A \vee B) \wedge (C \vee D)} \propto \overrightarrow{(A \vee B)} \times \overrightarrow{(C \vee D)} = (7, 4, 1)$. Хомогене координате тачке E су $(7 : 4 : 1)$, те су еуклидске $(7, 4)$. Јединица на трећој хомогеној координати се случајно појавила, те у случају другог броја, еуклидске координате добијамо одговарајућим дељењем тим бројем. У случају $D(5, 1)$ додељујемо $\overrightarrow{D} = (5, 1, 1)$, те се мења рачун за $\overrightarrow{C \vee D} \propto (-1, 2, 3)$, одакле за E добијамо $\overrightarrow{E} \propto (8, 4, 0)$. Сада тачка E има хомогене координате $(8 : 4 : 0)$, односно $(2 : 1 : 0)$, а еуклидски је у питању бесконачно сециште паралелних правих AB и CD. △

Задатак 4.12. За дате тачке $A(0 : 1)$, $B(1 : 0)$, $C(1 : 1)$, $D(3 : 2)$, одредити дворазмеру $(ABCD)$.

Решење. Природни представници су $\overrightarrow{A} = (0, 1)$, $\overrightarrow{B} = (1, 0)$, $\overrightarrow{C} = (1, 1)$, $\overrightarrow{D} = (3, 2)$. Како је $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{D} = 2\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B}$, то је $(ABCD) = (1/1) : (3/2) = 2/3$. △

Задатак 4.13. За тачке $A(1 : 0)$, $B(2 : 1)$, $C(4 : 1)$, одредити тачку X тако да је $\mathcal{H}(AX; BC)$.

Решење. За дате тачке можемо узети природне векторе представнике, док из $\mathcal{H}(AX; BC)$ следи $X \neq A(1 : 0)$, те постоји вектор представник $\overrightarrow{X} = (x, 1)$. Изразимо векторе $\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{C}$ преко вектора $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{X}$ на следећи начин:

$$\overrightarrow{B} = (2, 1) = (2 - x)(1, 0) + (x, 1) = (2 - x)\overrightarrow{A} + \overrightarrow{X},$$
$$\overrightarrow{C} = (4, 1) = (4 - x)(1, 0) + (x, 1) = (4 - x)\overrightarrow{A} + \overrightarrow{X}.$$

Из $\mathcal{H}(AX; BC)$ је $(AXBC) = -1$, док директан рачун даје $(AXBC) = (1/(2 - x)) : (1/(4 - x))$, одакле је $(4 - x)/(2 - x) = -1$ и коначно $x = 3$, односно $X = (3 : 1)$.

Алтернативно, можемо приметити да је A бесконачна тачка, те је X по Леми 2.75 артиметичка средина тачака $B(2)$ и $C(4)$, одакле следи $X(3)$, односно $X = (3 : 1)$. △

Задатак 4.14. Нека су A_1, A_2, A_3, A_4 различите тачке реалне пројективне праве. Израчунати производ и суму дворазмера по свим пермутацијама тачака, односно
а) $\prod_{\sigma \in S_4} (A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} A_{\sigma 3} A_{\sigma 4}) = (A_1 A_2 A_3 A_4) \cdot (A_1 A_2 A_4 A_3) \cdot \ldots \cdot (A_4 A_3 A_2 A_1)$;
б) $\sum_{\sigma \in S_4} (A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} A_{\sigma 3} A_{\sigma 4}) = (A_1 A_2 A_3 A_4) + (A_1 A_2 A_4 A_3) + \ldots + (A_4 A_3 A_2 A_1)$.

Решење. За различите тачке A, B, C, D аналитичке пројективне праве по Теореми 2.38 важи $(ABCD) \cdot (ABDC) = 1$, као и $(ABCD) + (ACBD) = 1$. У оба случаја свака од 24 пермутација има свој пар, те је $\prod_{\sigma \in S_4} (A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} A_{\sigma 3} A_{\sigma 4}) = 1^{12} = 1$, односно $\sum_{\sigma \in S_4} (A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} A_{\sigma 3} A_{\sigma 4}) = 12 \cdot 1 = 12$. △

Задатак 4.15. Одредити праву која пролази кроз тачке $A(2 : 5 : 2)$ и $B(8 : -1 : 1)$, показати да јој $C(-2 : 16 : 5)$ припада, а затим одредити D тако да је $\mathcal{H}(AB; CD)$.

Решење. Нека је $p = A \vee B$, тада је је $\overrightarrow{p} \propto \overrightarrow{A \vee B} \propto \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (2, 5, 2) \times (8, -1, 1)$. Одавде је

$$p = A \vee B = \left[\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} \right] = [7 : 14 : -42] = [1 : 2 : -6].$$

Како је $\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{p}=(-2,16,5)\cdot(1,2,-6)=0$ имамо $\overrightarrow{C}\perp\overrightarrow{p}$, одакле $C\in p$. Из $\overrightarrow{C}=\alpha\overrightarrow{A}+\beta\overrightarrow{B}$ следи $(-2,16,5)=(2\alpha+8\beta,5\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$, одакле је $\alpha=3,\beta=-1$, односно $\alpha=-3\beta$. Како је $\mathcal{H}(AB;CD)$, то важи $(ABCD)=-1$, те за $\overrightarrow{D}=\gamma\overrightarrow{A}+\delta\overrightarrow{B}$ имамо $(ABCD)=\beta\gamma/(\alpha\delta)$, односно $-1=-\gamma/(3\delta)$, одакле је $\gamma=3\delta$. За $\delta=1,\gamma=3$ је $\overrightarrow{D}\propto 3\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(14,14,7)$, односно $D=(14:14:7)=(2:2:1)$. △

Задатак 4.16. Нека су A,B,C,D различите колинеарне тачке реалне пројективне равни. Доказати да је тачно једна негативна од три дворазмере: $(ABCD)$, $(ACBD)$, $(ADBC)$.

Решење. Из особина је $(ACBD)=1-(ABCD)$ и $(ADBC)=1-(ABDC)=1-(ABCD)^{-1}$. За $x=(ABCD)$ имамо $(ABCD)(ACBD)(ADBC)=x(1-x)(1-1/x)=-(x-1)^2<0$, одакле следи непаран број негативних дворазмера. Како је $(ABCD)+(ACBD)=1>0$, то је бар једна дворазмера позитивна, те је тачно једна негативна, а преостале две су позитивне. △

Задатак 4.17. Ако су дате дворазмере $(ABCD)$ и $(ACBE)$, изразити $(ADEB)$.

Решење. Ако је $\overrightarrow{C}=\alpha\overrightarrow{A}+\beta\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}=\gamma\overrightarrow{A}+\delta\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{E}=\mu\overrightarrow{A}+\nu\overrightarrow{B}$, имамо

$$(ABDE)=\frac{\delta}{\gamma}:\frac{\nu}{\mu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\nu}{\mu}\right):\left(\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\delta}{\gamma}\right)=(ABCE):(ABCD).$$

Користећи особине дворазмере добијамо

$$(ADEB)=\frac{1}{(ADBE)}=\frac{1}{1-(ABDE)}=\frac{1}{1-\frac{(ABCE)}{(ABCD)}}=\frac{1}{1-\frac{1-(ACBE)}{(ABCD)}}=\frac{(ABCD)}{(ABCD)+(ACBE)-1},$$

што решава задатак. △

Задатак 4.18. Ако је $\mathcal{H}(AB;CD)$, $\mathcal{H}(AC;BE)$ и $\mathcal{H}(AD;EF)$, израчунати дворазмеру $(ABEF)$.

Решење. Нека је $\overrightarrow{C}=\alpha\overrightarrow{A}+\beta\overrightarrow{B}$. Из $(ABCD)=-1$ следи $\overrightarrow{D}\propto\alpha\overrightarrow{A}-\beta\overrightarrow{B}$. Из $(ACBE)=-1$ је $(ABCE)=1-(ACBE)=2$, одакле је $\overrightarrow{E}\propto 2\alpha\overrightarrow{A}+\beta\overrightarrow{B}$. Из $(ADEF)=-1$, како важи $\overrightarrow{E}\propto 2\alpha\overrightarrow{A}+\beta\overrightarrow{B}=3\alpha\overrightarrow{A}-(\alpha\overrightarrow{A}-\beta\overrightarrow{B})=3\alpha\overrightarrow{A}-\overrightarrow{D}$, то је $\overrightarrow{F}\propto 3\alpha\overrightarrow{A}+\overrightarrow{D}=4\alpha\overrightarrow{A}-\beta\overrightarrow{B}$, одакле рачунамо $(ABEF)=(\beta/(2\alpha)):(-\beta/(4\alpha))=-2$. △

4.4 Пројективитети у $\mathbb{RP}^2$

Пројективитети у реалној пројективној равни (Теорема 2.33), као и промена координата на реалној пројективној правој (Теорема 2.34) индуковани су регуларном линеарном трансформацијом, што значи да је веза између координата нека регуларна матрица реда 2. Напоменимо да је дворазмера инваријанта пројективитета (Теорема 2.37).

Задатак 4.19. Тачке $A_1(2:1), A_2(3:1)$ и $B(4:1)$ дате хомогеним координатама $(x_1:x_2)$ одабране су тим редом за базне тачке новог система хомогених координата $(x_1':x_2')$. Одредити везу између старих и нових координата.

Решење. Промена координата у $\mathbb{RP}^1$ је индукована регуларном линеарном трансформацијом

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix},$$

где је $(x_1' : x_2') \mapsto (x_1 : x_2)$ спрега између нових и старих координата произвољне тачке. У новом систему дате тачке су базне, односно имају координате $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$, те користимо везе $(1:0) \mapsto (2:1)$, $(0:1) \mapsto (3:1)$ и $(1:1) \mapsto (4:1)$ које нас доводе до коефицијената тражене матрице. Добијамо систем једначина

$$\begin{array}{r|r|r} 2\lambda_1 = m_{11} & 3\lambda_2 = m_{12} & 4\lambda_3 = m_{11} + m_{12} \\ \lambda_1 = m_{21} & \lambda_2 = m_{22} & \lambda_3 = m_{21} + m_{22} \end{array}$$

одакле следи $4(\lambda_1 + \lambda_2) = 2\lambda_1 + 3\lambda_2$, односно $\lambda_2 = -2\lambda_1$. Одавде је јединствено решење $m_{11} = 2\lambda_1$, $m_{21} = \lambda_1$, $m_{12} = -6\lambda_1$, $m_{22} = -2\lambda_1$, где $\lambda_1 \neq 0$. Тражена веза је

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

јер је пронађена матрица случајно сразмерна свом инверзу.

Напоменимо да при одређивању коефицијената тражене матрице одмах можемо елиминисати параметре λ. Наиме, за тачку A_1 одмах имамо $m_{11} = 2m_{21}$, за тачку B је $m_{12} = 3m_{22}$, док за тачку C важи $m_{11} + m_{12} = 4(m_{21} + m_{22})$. На овај начин уместо система 6 једначина са 7 непознатих решавамо систем 3 једначине са 4 непознате. $\triangle$

Задатак 4.20. Наћи формуле пројективитета који пресликава тачке $A(0:1)$, $B(1:0)$, $C(1:1)$ у тачке $A'(1:-1)$, $B'(1:1)$, $C'(1:3)$.

Решење. Пројективитет $\lambda\overrightarrow{X'} = M\overrightarrow{X}$ је индукован регуларном линеарном трансформацијом

$$M \propto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Везе $(0,1) \mapsto (1,-1)$, $(1,0) \mapsto (1,1)$ и $(1,1) \mapsto (1,3)$ одређују систем једначина

$$\begin{array}{r|r|r} \lambda_1 = m_{12} & \lambda_2 = m_{11} & \lambda_3 = m_{11} + m_{12} \\ -\lambda_1 = m_{22} & \lambda_2 = m_{21} & 3\lambda_3 = m_{21} + m_{22}, \end{array}$$

а елиминација параметара даје $m_{12} = -m_{22}$, $m_{11} = m_{21}$, $3(m_{11} + m_{12}) = m_{21} + m_{22}$. Заменом прве и друге једначине у трећу, добијамо $2m_{11} = 4m_{22}$, одакле се добија

$$M \propto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda\overrightarrow{X'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X},$$

што је тражена матрица, односно тражене формуле пројективитета. $\triangle$

Задатак 4.21. Нека је f пројективитет реалне пројективне праве p и $A_0 \in p$. Уколико важи $A_{n+1} = f(A_n)$ за $n \geqslant 0$ и $A_6 = A_0$, одредити дворазмеру $(A_1A_2A_4A_5)$ уколико постоји.

Решење. Уколико дворазмера $(A_1A_2A_4A_5)$ постоји, то због инваријантности пројективитета постоје и дворазмере $(A_2A_3A_5A_0)$ и $(A_3A_4A_0A_1)$, одакле следи да су тачке A_0, A_1, A_2, A_3 различите. На правој p уводимо хомогене координате са $A_0 = (1:0)$, $A_1 = (0:1)$, $A_2 = (1:1)$ (Теорема 2.35), док је $A_3 = (a:1)$ за неко $a \notin \{0,1\}$. Пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом одакле је

$$\lambda\overrightarrow{A_{n+1}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \overrightarrow{A_n}.$$

За $n = 0$ из $(1:0) \mapsto (0:1)$ следи $m_{11} = 0$. За $n = 1$ из $(0:1) \mapsto (1:1)$ следи $m_{22} = m_{12}$. За $n = 2$ из $(1:1) \mapsto (a:1)$ следи $a(m_{21}+m_{22}) = m_{11}+m_{12}$, одакле имамо $a(m_{21}+m_{12}) = m_{12}$, што нас доводи до матрице M пројективитета f која је облика

$$M \propto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}.$$

Даљим рачуном добијамо тачке A_4, A_5 и A_6 са

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_4} &\propto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a(2-a) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{A_5} &\propto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix}, \\
\overrightarrow{A_6} &\propto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ a((1-a)(2-a)+1+a-a^2) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1+a-a^2 \\ 3-2a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

По услову задатка $A_6 = A_0 = (1:0)$, те је $3-2a = 0$, односно $a = 3/2$, одакле следи

$$M \propto \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

те $A_3 = (3:2)$ и $A_4 = (2:1)$. Имамо $(A_1A_2A_4A_5) = (A_0A_1A_3A_4) = (2/3) : (1/2) = 4/3$. △

Задатак 4.22. Нека је f пројективитет реалне пројективне праве p и $A_0 \in p$. Уколико важи $A_{n+1} = f(A_n)$ за $n \geqslant 0$, и $A_5 = A_0$ одредити могуће вредности дворазмере $(A_0A_1A_3A_4)$.

Решење. У питању је варијација Задатка 4.21. Уколико тражена дворазмера $(A_0A_1A_3A_4)$ постоји, то су тачке A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 различите. На правој p уводимо хомогене координате са $A_0 = (1:0)$, $A_1 = (0:1)$, $A_2 = (1:1)$. У Задатку 4.21 смо матрицу за f изражавали преко афине координате тачке $A_3(a:1)$ коју не знамо. Једноставније је користити само услов $(A_0, A_1) \mapsto (A_1, A_2)$ одакле добијамо матрицу пројективитета облика

$$M \propto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

где је заправо $b = (1-a)/a$. Даље је $\overrightarrow{A_3} \propto M\overrightarrow{A_2} = (1, b+1)$, те $\overrightarrow{A_4} \propto M\overrightarrow{A_3} = (b+1, 2b+1)$ и на крају $(1,0) = \overrightarrow{A_0} \propto \overrightarrow{A_5} \propto M\overrightarrow{A_4} \propto (2b+1, b^2+3b+1)$. Одавде је $b^2+3b+1 = 0$, одакле постоје два решења, $b = (-3 \pm \sqrt{5})/2$. Како имамо $\overrightarrow{A_3} = 1\overrightarrow{A_0} + (b+1)\overrightarrow{A_1}$ и $\overrightarrow{A_4} \propto (b+1)\overrightarrow{A_0} + (2b+1)\overrightarrow{A_1}$, то добијамо

$$(A_0A_1A_3A_4) = \frac{b+1}{1} : \frac{2b+1}{b+1} = \frac{b^2+2b+1}{2b+1} = \frac{-b}{2b+1} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2(-2 \pm \sqrt{5})} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

што су могуће вредности дворазмере. △

Задатак 4.23. Дате су тачке пројективне праве $A(0:1)$, $B(1:1)$ и $C(2:1)$. Одредити све параболичке пројективитете који сликају $(A, B) \mapsto (A', B')$ тако да је $(ABCA') = 3$ и $(ABA'B') = 16/15$.

Решење. Из $\overrightarrow{C} = -\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$ за $\overrightarrow{A'} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ је $3 = (ABCA') = (2/-1) : (\beta/\alpha) = -2\alpha/\beta$, одакле следи $\overrightarrow{A'} \propto -3\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$, односно $A' = (2:-1)$. За $\overrightarrow{B'} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$ добијамо $16/15 = (ABA'B') = (2/-3) : (\delta/\gamma)$, одакле је $5\gamma = -8\delta$, те $\overrightarrow{B'} \propto -8\overrightarrow{A} + 5\overrightarrow{B}$, односно $B' = (5:-3)$.

Ако је M матрица пројективитета $\lambda X' = MX$ из $A \mapsto A'$ је $(m_{12}, m_{22}) \propto (2, -1)$, док $B \mapsto B'$ даје $(m_{11} + m_{12}, m_{21} + m_{22}) \propto (5, -3)$. Одавде добијамо једначине $m_{12} = -2m_{22}$ и $3(m_{11} + m_{12}) + 5(m_{21} + m_{22}) = 0$, из којих је $5m_{21} = m_{22} - 3m_{11}$. Пројективитет је параболички ако је дискриминанта карактеристичног полинома нула, односно ако је $(\operatorname{tr} M)^2 = 4 \det M$, што даје једначину $(m_{11}+m_{22})^2 = 4(m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21})$. Искористимо ли претходне једначине имамо $5m_{11}^2+10m_{11}m_{22}+5m_{22}^2 = 20m_{11}m_{22}+8m_{22}(m_{22}-3m_{11})$, односно $5m_{11}^2 + 14m_{11}m_{22} - 3m_{22}^2 = (m_{11} + 3m_{12})(5m_{11} - m_{12}) = 0$, што даје два решења $m_{11} = -3m_{12}$ и $5m_{11} = m_{12}$. Коначно,

$$M \propto \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M \propto \begin{pmatrix} 5 & -50 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$$

су матрице два тражена пројективитета. △

Задатак 4.24. Тачке пројективне праве $A(1), B(2), C(3), D(\infty)$ дате су својом афином координатом. Одредити дворазмеру $(ABCD)$. Ако је f пројективитет за који је $f(A) = B$, $f(B) = C, f(C) = D$, одредити $f(D)$.

Решење. Како је B очигледно средиште дужи AC, а тачка D бесконачна, то важи $\mathcal{H}(AC; BD)$ (Лема 2.75), односно $(ACBD) = -1$. Имамо $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 2$, те рачун даје

$$(BCDA) = \frac{1}{(BCAD)} = \frac{1}{1 - (BACD)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(ABCD)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Дворазмера је инваријанта пројективитета одакле је $(BCDf(D)) = (ABCD) = 2$, а како имамо $(BCDA) = 2$, то по Леми 2.39 мора бити $f(D) = A$.

Наравно, задатак се може решавати на класичан начин, увођењем хомогених координата $A(1:1)$, $B(2:1)$, $C(3:1)$, $D(1:0)$, а затим тражењем матрице пројективита $(A, B, C) \mapsto (B, C, D)$. По Основној теореми пројективитета, матрица мора бити

$$M \propto \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

јер она очигледно испуњава наметнуте услове. Даље је $\overrightarrow{f(D)} \propto M\overrightarrow{D} = M(1, 0) = (1, 1)$, одакле добијамо $f(D) = (1:1) = (1) = A$. △

Задатак 4.25. Ако је $(ABCD) = 2$, $(ABCE) = 3$, $(ADEF) = -2$, а f пројективитет за који је $f(A) = D, f(B) = E, f(C) = F, f(D) = G$, израчунати $(ABCG)$.

Решење. Резултат не зависи од избора хомогеног система координата, те га можемо увести са $A(1:0)$, $B(0:1)$, $C(1:1)$. Сада тачка X има координате $((ABCX):1)$, те је $D(2:1)$, $E(3:1)$. Како је $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{D}$ и $(ADEF) = -2$, то је $\overrightarrow{F} \propto 2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{D}$, односно $F = (0:1) = B$. Из $f(A) = D, f(B) = E, f(C) = F$ добијамо матрицу пројективитета

$$M \propto \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

одакле следи $\overrightarrow{G} \propto M\overrightarrow{D} = (6, 4)$. Дакле, $G = (3/2:1)$, и коначно $(ABCG) = 3/2$. △

Задатак 4.26. Наћи фиксне тачке пројективитета $\lambda x_1' = 2x_1 - x_2$, $\lambda x_2' = x_1 + 4x_2$. Одредити формуле овог пројективитета у неком координатном систему у којем је фиксна тачка бесконачна.

Решење. Дат је пројективитет $\lambda\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X}$ чија је матрица

$$A \propto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Карактеристични полином

$$\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

има само једну (двоструку) нулу $\lambda = 3$. Сопствене векторе $\overrightarrow{X}$ добијамо решавањем једначине

$$(A - 3\,\mathbb{1})\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Добијамо $x_2 = -x_1$ што даје $\overrightarrow{X} \propto (1, -1)$, чему одговара јединствена фиксна тачка $(1 : -1)$.

Промену координата представља матрица преласка M са старе на нову базу, при чему је веза између старих и нових координата дата са $\lambda\overrightarrow{X} = M\overrightarrow{X_N}$. Желимо да фиксна тачка $(1 : -1)$ постане бесконачна, односно $(1 : 0)$. Вектор $(1, 0)$ је први базни вектор и његови коефицијенти у старој бази су, рецимо, $(1, -1)$, те их уписујемо у прву колону матрице преласка. На овај начин испуњавамо услове задатка, док матрицу M комплетирамо другом колоном, тако што упишемо било шта што испуњава услов $\det M \neq 0$. На пример, нови координатни систем можемо задати матрицом преласка

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пројективитет $\lambda\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X}$, преласком на нове координате постаје $\lambda M\overrightarrow{X'_N} = AM\overrightarrow{X_N}$, односно имамо $\lambda\overrightarrow{X'_N} = (M^{-1}AM)\overrightarrow{X_N}$, те је одговарајућа матрица пројективитета

$$A_N \propto M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Промена координата даје пројективитет

$$\lambda\overrightarrow{X'_N} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\overrightarrow{X_N},$$

који очигледно фиксира тачку $(1 : 0)$. $\triangle$

Задатак 4.27. Наћи фиксне тачке пројективитета $\lambda x'_1 = 2x_1 + 3x_2$, $\lambda x'_2 = 3x_1 + 2x_2$. Одредити нови координатни систем у чијим је афиним координатама тај пројективитет хомотетија са центром у нули.

Решење. Дат је пројективитет $\lambda\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X}$, чија је матрица

$$A \propto \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Карактеристични полином

$$\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 3^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$$

има две једноструке нуле $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 5$. Сопствене векторе добијамо из једначине $(A - \lambda_i \mathbb{1})\overrightarrow{X} = 0$, а како знамо да су сопствени потпростори димензије један имамо $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = \mathrm{Span}\{(-1, 1)\}$ и $\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 \mathbb{1}) = \mathrm{Span}\{(1, 1)\}$, одакле добијамо две фиксне тачке $(-1 : 1)$ и $(1 : 1)$.

Пројективитет је хомотетија ако фиксира бесконачну тачку и центар, дакле фиксне тачке у новом координатном систему морају бити $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$. Задатак решавамо тако што пресликамо тачке $(-1 : 1)$ и $(1 : 1)$ у $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$, не нужно у том редоследу. Тачка којој одговара вектор представник уписан у прву колону матрице преласка прелази у $(1 : 0)$, док тачка којој одговара вектор представник уписан у другу колону матрице преласка прелази у $(0 : 1)$. Задатак зато има бесконачно много решења, а једно од једноставнијих је матрица преласка

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ за коју је } M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Друга решења могу се добити тако што другу колону матрице M помножимо произвољним ненула скаларом.

Пројективитет $\lambda\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X}$, у новим координатама постаје $\lambda\overrightarrow{X'_N} = (M^{-1}AM)\overrightarrow{X_N}$, те одговарајућа матрица пројективитета постаје

$$A_N \propto M^{-1}AM = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ова промена координата даје пресликавање

$$\lambda\overrightarrow{X'_N} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\overrightarrow{X_N},$$

које очигледно фиксира тачке $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$, те је у питању хомотетија. △

Задатак 4.28. Доказати да у $\mathbb{RP}^1$ постоји јединствен параболички пројективитет f којем је дата тачка A фиксна, при чему је $f(M) = M' \neq M$. Доказати да за $M'' = f(M')$ важи $\mathcal{H}(M''M; M'A)$.

Решење. Уведимо координатни систем базним тачкама: $A(1 : 0)$, $M(0 : 1)$, $M'(1 : 1)$. Ако је P са улазима p_{ij} матрица пројективитета f, то из $A \mapsto A$ добијамо $p_{21} = 0$, док из $M \mapsto M'$ имамо $p_{12} = p_{22}$, те је

$$P \propto \begin{pmatrix} p_{11} & p_{22} \\ 0 & p_{22} \end{pmatrix}$$

Како је карактеристични полином $\det(P - \lambda\mathbb{1}) = (p_{11} - \lambda)(p_{22} - \lambda)$, услов да је f параболичко даје исте сопствене вредности $p_{11} = p_{22}$, што нас доводи до јединственог пројективитета којег одређује матрица

$$P \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Даље је $\overrightarrow{M''} \propto P\overrightarrow{M'} = P(1, 1) = (2, 1)$, односно $M'' = (2 : 1)$. Како је $2\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{M''} + \overrightarrow{M}$ и $2\overrightarrow{A} = \overrightarrow{M''} - \overrightarrow{M}$, имамо $(M''MM'A) = (1/1) : (-1/1) = -1$ и зато је $\mathcal{H}(M''M; M'A)$. △

Задатак 4.29. Ако пројективитет у $\mathbb{RP}^1$ слика $(A, B, C) \mapsto (B, C, A)$, онда је он елиптички.

Решење. Задатак се може решавати увођењем координатног система у којем су дате тачке базне, након чега се израчуна конкретна матрица пројективитета, а онда провери да она има само комплексне сопствене вредности. Алтернативно, можемо искористити Задатак 4.16. Ако би X била фиксна тачка, због инваријантности дворазмере у односу на пројективитет имамо $(XABC) = (XBCA) = (XCBA)$, те су $(XABC)$, $(XBAC) = (XBCA)^{-1}$ и $(XCAB) = (XCBA)^{-1}$ истог знака што је немогуће. Зато пројективитет нема фиксних тачака и јесте елиптички. △

Задатак 4.30. Одредити формуле и фиксне тачке инволутивног пројективитета задатог са два пара одговарајућих тачака: $A(1:2)$, $A'(1:0)$ и $B(2:3)$, $B'(8:1)$.

Решење. Из $A \mapsto A'$ имамо $\lambda_1 = a_{11} + 2a_{12}$, $0 = a_{21} + 2a_{22}$, односно $a_{21} = -2a_{22}$. Из $A' \mapsto A$ имамо $\lambda_2 = a_{11}$, $2\lambda_2 = a_{21}$, односно $a_{21} = 2a_{11}$. Из $B \mapsto B'$ имамо $8\lambda_3 = 2a_{11} + 3a_{12}$, $\lambda_3 = 2a_{21} + 3a_{22}$, одакле је $8(2a_{21} + 3a_{22}) = 2a_{11} + 3a_{12}$. Прве две једначине дају $a_{21} = 2a_{11}$ и $a_{22} = -a_{11}$, што заменом у трећу даје $a_{12} = 2a_{11}$, те су тражене формуле

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Карактеристични полином је $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 5$, што даје сопствене вредности $\lambda_1 = \sqrt{5}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{5}$. Одговарајући сопствени вектори представљају фиксне тачке $(1+\sqrt{5}:2)$ и $(1-\sqrt{5}:2)$. △

Задатак 4.31. Мора ли композиција два инволутивна пројективитета бити инволутивни пројективитет? Може ли композиција елиптичког и хиперболичког инволутивног пројективитета бити елиптички инволутивни пројективитет? Може ли композиција елиптичког и хиперболичког инволутивног пројективитета бити хиперболички инволутивни пројективитет?

Решење. По Теореми 2.81, неидентички инволутивни пројективитет има матрицу трага нула. Како је

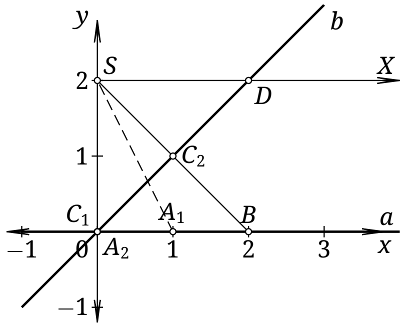
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

то имамо производ две инволуције који није инволуција и одговор на прво питање је негативан. Шта може бити композиција елиптичког и хиперболичког инволутивног пројективитета? Ако је E матрица елиптичког, а H матрица хиперболичког тада важи $\det E > 0$ и $\det H < 0$ (Лема 2.82). Међутим, $\det(EH) = \det E \cdot \det H < 0$, тако да композиција не може бити елиптичка, што даје негативан одговор и на друго питање. Конкретан пример

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

илуструје потврдан одговор на треће питање. △

Задатак 4.32. У афиној равни дате су праве $a\colon y = 0$, $b\colon y = x$ и тачка $S(0,2)$. На правој a уведен је хомогени координатни систем $(x_1 : x_2)$ базним тачкама $A_1(1,0)$, $A_2(0,0)$, $B(2,0)$, док је на правој b уведен хомогени координатни систем $(x_1' : x_2')$ базним тачкама $C_1(0,0)$, $C_2(1,1)$, $D(2,2)$. У датим хомогеним координатама одредити формуле перспективитета $(a) \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} (b)$.



Решење. Да бисмо одредили формуле за $f = (a)\overset{S}{\barwedge}(b)$ потребна су, по Основној теореми пројективитета, три пара одговарајућих тачака. Није лоше да се међу тих шест тачака нађе што више оних чије хомогене координате унапред знамо (јер су базне), на пример можемо радити са $f(A_2) = C_1$, $f(B) = C_2$, $f(X) = D$. У овом случају једина непозната тачка је X, а са слике видимо да је у питању бесконачна тачка праве $y = 0$, односно тачка чије би афине координате најлакше описали са $X(\infty, 2)$. Међутим, афине координате нису оне у којима морамо записати f. Због тога је потребно наћи везу између природних координата $(a_1 : a_2)$ на правој a, које добијамо из афиних координата путем $(x, 0) \mapsto (x : 1)$, и наших хомогених координата $(x_1 : x_2)$, што се може урадити матрицом M на следећи начин:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Коефицијенте матрице налазимо из познавања координата тачака A_1, A_2, B у оба система. Наиме, ове тачке у природном афином систему имају редом координате $(1 : 1)$, $(0 : 1)$, $(2 : 1)$, док су у нашем систему базне $(1 : 0)$, $(0 : 1)$, $(1 : 1)$. За тачку A_1 добијамо $m_{21} + m_{22} = 0$, за A_2 је $m_{12} = 0$, док из тачке B следи $2m_{11} + m_{12} = 2m_{21} + m_{22}$. Решавање система једначина даје $m_{12} = 0$, $m_{21} = 2m_{11}$, $m_{22} = -2m_{11}$, одакле добијамо матрицу M и везу

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Ова веза нам служи да одредимо координате тачке X која има природне координате $(1 : 0)$. Како је $\overrightarrow{X} = M(1, 0) = (1, 2)$, то добијамо координате $X(1 : 2)$. Све је спремно да одредимо тражени перспективитет

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Из $A_2(0 : 1) \mapsto C_1(1 : 0)$ следи $n_{22} = 0$, из $B(1 : 1) \mapsto C_2(0 : 1)$ је $n_{11} + n_{12} = 0$, а из $X(1 : 2) \mapsto D(1 : 1)$ имамо $n_{11} + 2n_{12} = n_{21} + 2n_{22}$. Решавањем система једначина добијамо $n_{11} = -n_{12}$, $n_{21} = n_{12}$, $n_{22} = 0$, што комплетира матрицу за f и тражене формуле

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Алтернативно можемо посматрати тачку $Y(2/3, 2/3)$ за коју је $f(A_1) = Y$, након чега користимо $(A_1, A_2, B) \mapsto (Y, C_1, C_2)$. Базне тачке $C_1(1 : 0)$, $C_2(0 : 1)$, $D(1 : 1)$ са праве b имају природне координате редом $(0 : 1)$, $(1 : 1)$, $(2 : 1)$, што даје везу

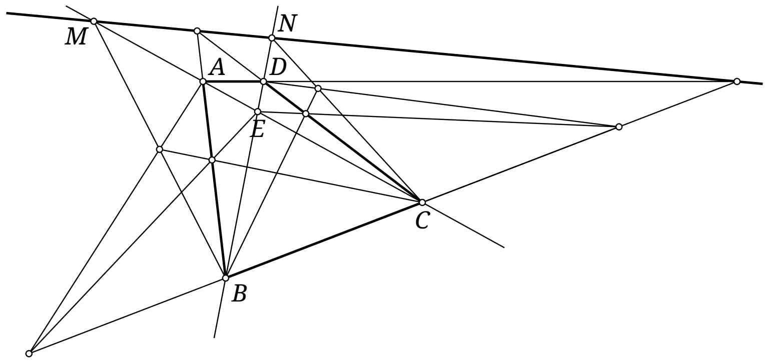
$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}.$$

Добијена веза од природних координата $(2 : 3)$ тачке Y даје њене хомогене координате $(-1 : 1)$, одакле коначно можемо извести тражене формуле као раније. $\triangle$

4.5 Колинеације

У реалној пројективној равни свака колинеација је пројективна колинеација (Теорема 2.77). Тако се колинеација (као пројективна колинеација) по Основној теореми колинеације (Теорема 2.66) једнозначно задаје са два четворотеменика. Хармонијска конјугованост је важна инваријанта колинеације (Теорема 2.72).

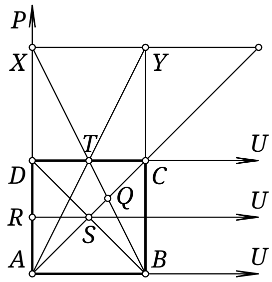
Задатак 4.33. Ако колинеација дат четвороугао $ABCD$ слика у паралелограм одредити јој противосу.



Решење. Како је $A'B' \parallel C'D'$ и $A'D' \parallel B'C'$, то су тачке $A'B' \wedge C'D'$ и $A'D' \wedge B'C'$ бесконачне, одакле следи да $AB \wedge CD$ и $AD \wedge BC$ припадају противоси.

Алтернативно, четвороугао је паралелограм ако и само ако му се дијагонале полове. Ако је $E = AC \wedge BD$, њена слика E' мора бити средиште дужи $B'D'$ и $A'C'$. То нас мотивише да уведемо тачке M и N тако да важи $\mathcal{H}(AC; EM)$ и $\mathcal{H}(BD; EN)$. Применом колинеације инваријантност даје $\mathcal{H}(A'C'; E'M')$ и $\mathcal{H}(B'D'; E'N')$, одакле следи да су тачке M' и N' бесконачне (Лема 2.75). Коначно, M и N припадају противоси $u = MN$. $\triangle$

Задатак 4.34. Нека је $ABCD$ квадрат са центром S и нека су T и R редом средишта дужи CD и AD. Ако пројективна колинеација f пресликава $(A, B, C, D) \mapsto (B, C, S, T)$, конструисати $f(R)$.



Решење. Нека је $f(R) = X$. Из $R \in AD$ следи $X \in BT$, те нам је потребно још нешто. Из $S = AC \wedge BD$ имамо $f(S) = BS \wedge CT = D$. Посматрајмо $U = RS \wedge u_\infty = AB \wedge CD$ за које је $f(U) = BC \wedge ST = AD \wedge u_\infty = P$. Имамо $f(RS) = f(SU) = f(S) \vee f(U) = DP = AD$, одакле због $R = AD \wedge RS$ добијамо $X = BT \wedge AD$, односно X је тачка симетрична A у односу на D.

Алтернативно, можемо приметити да је R средиште дужи AD, одакле следи $\mathcal{H}(AD; PR)$, где је $P = AD \wedge u_\infty$. Како је хармонијска конјугованост инваријанта колинеације важи $\mathcal{H}(BT; Qf(R))$, где је $Q = f(P) = f(AD \wedge BC) = BT \wedge CS$. Преостаје конструкција четврте хармонијске тачке за познате три B, T, Q. Ако је X симетрична A у односу на D, а Y симетрична B у односу на C, четворотеменик $AUCY$ има дијагоналне тачке $AU \wedge CY = B$ и $AY \wedge UC = T$, док је $AC \wedge BT = Q$ и $UY \wedge BT = X$, што значи $\mathcal{H}(BT; QX)$, одакле је $f(R) = X$. $\triangle$

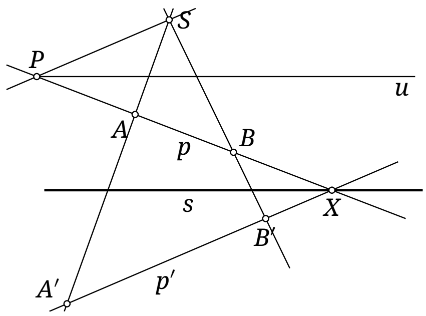
4.6 Перспективне колинеације

У овој секцији посебну пажњу посвећујемо перспективним колинеацијама, што су хомологије и елације, односно колинеације које имају центар S и осу s. Све што знамо о колинеацијама и даље нам је на располагању, док центар и оса пружају нове могућности. Велики број задатака решава се вишеструком применом Леме 2.61 која утврђује два корисна правила, односно особине центра и осе. Произвољна тачка, њена слика и центар су колинеарне тачке, док су произвољна права, њена слика и оса конкурентне праве. Ван центра и осе нема фиксних тачака, односно $s \cup \{S\}$ представља скуп фиксних тачака, што је некада корисно приметити. Добро је знати да је противоса увек паралелна оси (Лема 2.80).

Задатак 4.35. Доказати да је перспективна колинеација одређена а) центром, осом и паром одговарајућих тачака; б) центром, осом и паром одговарајућих правих; в) центром, осом и противосом.

Решење. Одређеност колинеације се своди на Основну теорему колинеације по којој се пројективна колинеација једнозначно дефинише са два четворотеменика. Међутим, у случају перспективне колинеације (са центром S и осом s) једнозначност смо посебно разматрали у Леми 2.62, а егзистенцију у Теореми 2.63.

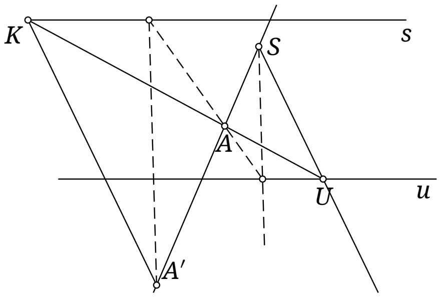
а) Ако A и A' чине одговарајући пар тачака, то у поставци задатка A, A', S морају бити колинеарне (Лема 2.61). слику B' произвољне тачке B одредићемо као у Леми 2.62. По Леми 2.61 тачке B, B', S су колинеарне, а праве $AB, A'B', s$ су конкурентне, одакле $B' \in SB$ и $AB \wedge A'B' = X \in s$. У случају $B \notin SA$ конструишемо $X = AB \wedge s$, а затим $B' = A'X \wedge SB$. Након тога можемо фиксирати неко B, и за тачке $C \in SA$ поставити $C' = B'Y \wedge SC$, где је $Y = BC \wedge s$.



б) Ако p и p' чине одговарајући пар правих, то у поставци задатка p, p', s морају бити конкурентне. За произвољну праву $a \ni S$ можемо добити одговарајући пар тачака $A = a \wedge p$ и $A' = a \wedge p'$, што решење своди на претходно решени случај.

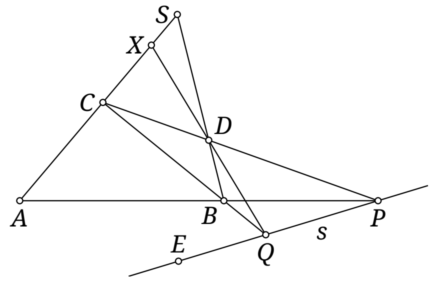
в) Ако је u противоса, то у поставци задатка s и u морају бити паралелне (Лема 2.80). Нека је $p \not\ni S$ произвољна права и нека важи $P = p \wedge u$ и $X = p \wedge s$. Како $P \in u$ то је P' бесконачна тачка, а како су P, P', S колинеарне то је P' бесконачна тачка правца PS. Са друге стране p, p', s су конкурентне, одакле $X \in p'$, те је p' права кроз X паралелна са PS и решење следи из претходно решеног случаја. $\triangle$

Задатак 4.36. Дате су тачке A, A', S и права u. Конструисати осу перспективне колинеације са центром S и противосом u која слика A у A'.



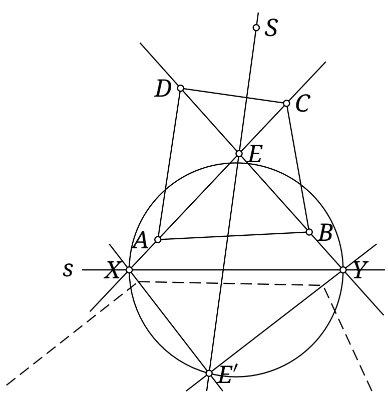
Решење. Тачке A, A', S су колинеарне (особине центра), иначе тражена колинеација не постоји. Нека је $U \in u$ произвољна тачка ван праве SA. Из особине центра, слика од U је бесконачна тачка праве SU, односно $U' = SU \wedge u_\infty$. Из особине осе, права AU, њена слика $A'U'$ и оса s су конкурентне праве, тако да је тачка $K = AU \wedge A'U'$ на оси. Како је оса паралелна противоси то је $K \in s \parallel u$, те је све спремно за конструкцију. Изаберимо произвољну тачку $U \in u$ са $U \notin SA$, а затим конструишемо K као сециште праве AU и праве кроз A' паралелне SU. Оса s је права кроз K паралелна u. △

Задатак 4.37. Дате су тачке A, B, C, D, E међу којима нема три колинеарне, нити било која два пара чине паралелне спојнице. Ако за перспективну колинеацију f важи $(A, B, E) \mapsto (C, D, E)$, конструисати $f(C)$.



Решење. Овај задатак је најбоља илустрација особина центра и осе из Леме 2.61. Како важи $f(A) = C$ и $f(B) = D$, то центар мора бити $S = AC \wedge BD$. Како је E фиксна тачка она мора припадати оси (није центар због неколинеарности A, C, E). Праве $AB, f(AB) = CD, s$ су конкурентне, одакле $P = AB \wedge CD$ припада оси, те је оса $s = EP$. Сада је f перспективна колинеација одређена (по Задатку 4.35) осом s, центром S и паром тачака, рецимо $A \mapsto C$. Ако је $X = f(C)$, особине центра дају колинеарност C, X, S, док особине осе дају конкурентност CB, XD, s, те ако је $Q = CB \wedge s$ имамо $X = CS \wedge QD$. △

Задатак 4.38. Дата је тачка S, права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективну колинеацију са осом s и центром S која дати четвороугао пресликава у четвороугао коме су дијагонале нормалне.



Решење. Размотримо најпре општи случај да бисмо увидели основну идеју реализације правог угла на слици. Нека је $E = AC \wedge BD$, $X = AC \wedge s$, $Y = BD \wedge s$. Из $X, E \in AC$ следи $AC = XE$, односно $A'C' = XE'$, док из $Y, E \in BD$ следи $BD = YE$, односно $B'D' = YE'$. Како је $A'C' \perp B'D'$, то имамо $XE' \perp YE'$, односно $\angle XE'Y = \pi/2$, те E' лежи на кругу над пречником XY, што можемо једноставно записати са $E' \in k(XY)$. Како су E, E', S колинеарне, то добијамо $E' \in SE \cap k(XY)$. Након избора $E' \in SE \cap k(XY)$, перспективна колинеација је по Леми 2.62 једнозначно одређена осом s, центром S и паром тачака (E, E').

Пресек праве и круга може бити празан скуп, тачка или две тачке. У општем случају у питању су две тачке од којих свака дефинише перспективну колинеацију која задовољава услове задатка, те ћемо изабрати једну од њих и урадити задатак. Уколико за изабрану тачку E', противоса u (права паралелна са s кроз тачку која је пресек праве AC и праве кроз S паралелне са XE') сече четвороугао $ABCD$ ствари се компликују јер тада његова слика $A'B'C'D'$ није четвороугао у правом смислу речи.

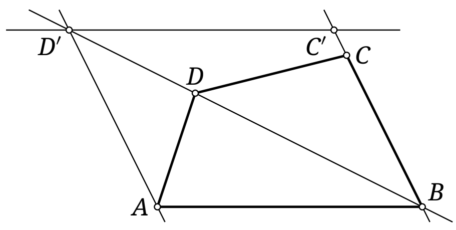
Размотримо неке специјалне случајеве. У случају $S = E'$ неопходно је $\angle AEB = \pi/2$, да би задатак имао решење. У општем случају који смо решили постоје тачке X и Y, односно важи $AC \nparallel s$ и $BD \nparallel s$. Уколико је $AC \parallel s \parallel BD$ било би $A'C' \parallel B'D'$ што је немогуће. У случају $AC \parallel s$ и $BD \nparallel s$ пресек X не постоји, али важи $AC \parallel s \parallel A'C'$, те из $B'D' \perp A'C'$ имамо $B'D' \perp s$. Тада за $Y = BD \wedge s$ имамо $Y \in B'D'$, те је B' сециште праве SB и праве кроз Y нормалне на s. $\triangle$

Задатак 4.39. Дате су тачке A, B, C, S и права s. Ако је f хомологија са осом s и центром S таква да је слика троугла ABC правоугли троугао са правим углом код темена $f(C)$, конструисати тачку $f(A)$.

Решење. Прав угао код $C' = f(C)$ реализујемо са $C' \in k(XY)$ где је $X = CA \wedge s$, $Y = CB \wedge s$. Како су из особина центра C, C', S колинеарне, то је $C' \in k(XY) \cap SC$, након чега је $f(A)$ сециште правих XC' и SA. $\triangle$

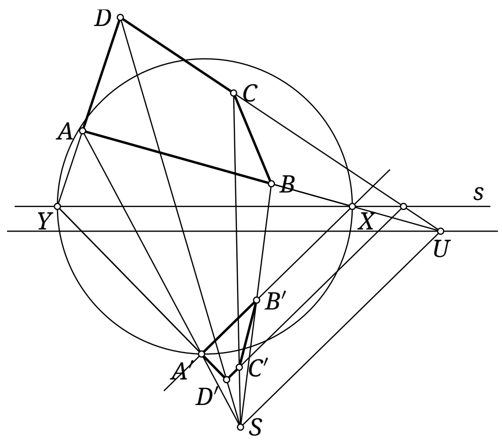
Задатак 4.40. Дат је четвороугао $ABCD$ који није трапез. Одредити све перспективне колинеације којима су A и B фиксне тачке, док четвороугао $ABCD$ преводе у паралелограм.

Решење. Све фиксне тачке чине $s \cup \{S\}$, где је S центар, а s оса. За $A \neq S \neq B$ имали бисмо $s = AB$, одакле су праве $CD, C'D', AB$ конкурентне. Како је $ABC'D'$ паралелограм, то је $AB \parallel C'D'$ и отуда $AB \parallel CD$, што је немогуће јер $ABCD$ није трапез. Овим закључујемо да S мора бити једна од тачака A и B.



Уколико је $S = B$ из особина центра имамо $C' \in BC$ и $D' \in BD$. Са друге стране $ABC'D'$ је паралелограм, одакле важи $BC' \parallel AD'$, те је тачка D' сециште праве BD и праве кроз A паралелне $BC = BC'$, док је тачка C' сециште праве BC и праве кроз D' паралелне AB. По Основној теореми колинеације, $(A, B, C, D) \mapsto (A, B, C', D')$ једнозначно одређује колинеацију. Друго решење добија се у случају $S = A$, где спроведемо аналоган поступак симетријом по A и B. $\triangle$

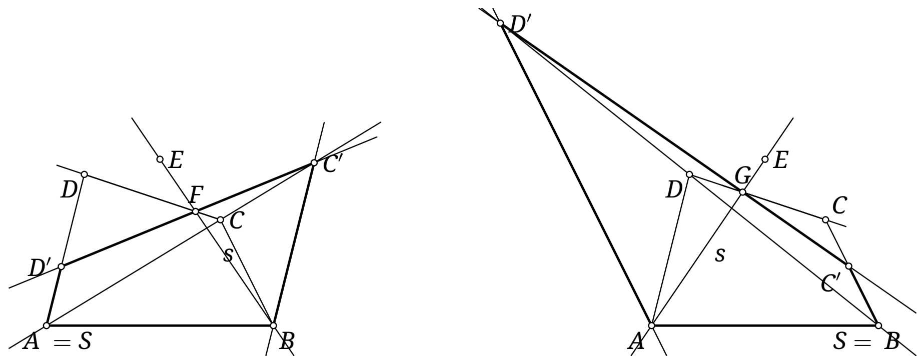
Задатак 4.41. Дат је четвороугао $ABCD$ који није трапез и права s. Одредити перспективну колинеацију са осом s која четвороугао $ABCD$ преводи у правоугли трапез $A'B'C'D'$ са основицом $C'D'$, и правим углом код темена A', тако да је угао између AB и $A'B'$ једнак $\pi/3$.



Решење. По услову задатка имамо $A'B' \parallel C'D'$ одакле је $U = AB \wedge CD$ тачка противосе, коју можемо добити са $U \in u \parallel s$. Ако је $X = AB \wedge s$ и $Y = AD \wedge s$, прав угао код темена A' реализујемо са $A' \in k(XY)$. Додатни услов $\angle(AB, A'B') = \pi/3$ заправо значи $\angle AXA' = \pi/3$, те A' добијамо у пресеку круга над пречником XY и праве кроз X која са AX заклапа угао $\pi/3$. Тачка U слика се у бесконачну тачку праве XA' тако да центар S колинеације мора бити сециште AA' и праве кроз U паралелне XA'. Перспективна колинеација је сада одређена центром S, осом s и паром тачака A, A'. $\triangle$

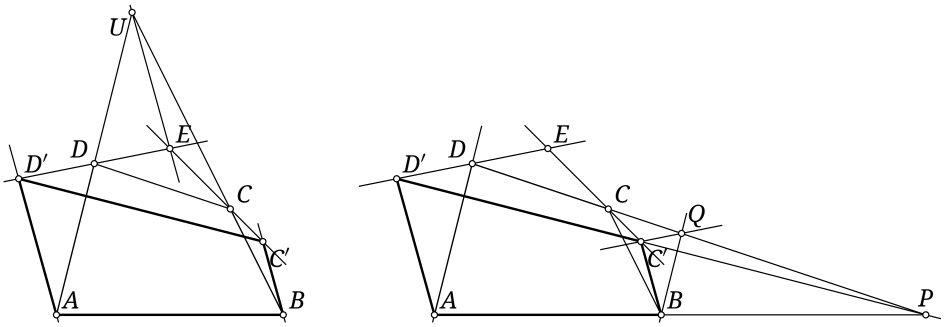
Задатак 4.42. Дате су тачке A, B, C, D, E међу којима нема три колинеарне, нити било која два пара чине паралелне спојнице. Ако су A, B, E фиксне тачке хомологије f која четвороугао $ABCD$ пресликава у трапез са основицом $f(BC)$, одредити слику тог четвороугла $f(ABCD)$ у свим могућим случајевима.

Решење. Хомологија f има центар S и осу s, а све фиксне тачке од f припадају скупу $s \cup \{S\}$. Због тога разликујемо два случаја у зависности да ли је тачка E центар.



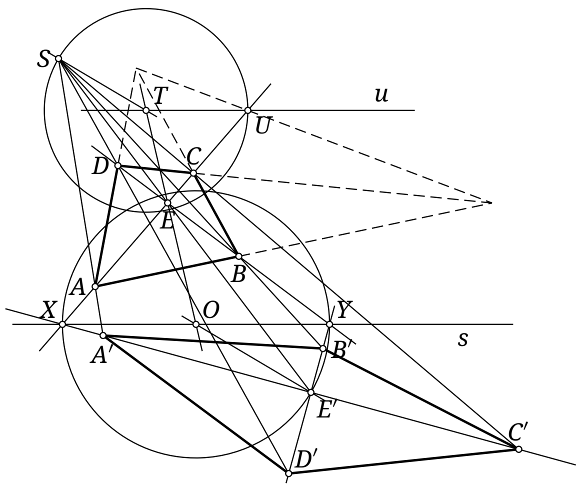
Ако E није центар имамо две опције, у првој је $S = A$ и $s = BE$, а у другој $S = B$ и $s = AE$. Размотримо прву опцију где најпре из особина центра имамо $C' \in AC$ и $D' \in AD$. Из трапеза следи $AD = AD' \parallel BC'$, те је C' сециште праве AC и праве кроз B паралелне AD. Тачка $F = BE \wedge CD$ припада оси, те из особина осе $F \in C'D'$, одакле је $D' = AD \wedge C'F$. Друга опција када E није центар решава се аналогно из симетрија где пермутујемо слова A и B, односно C и D. Конкретно D' је сециште праве BD и праве кроз A паралелне BC, док је $C' = BC \wedge D'G$, где је $G = AE \wedge CD$.

Преостао је случај кад је E центар, а тада AB мора бити оса. Нека је $U = AD \wedge BC$. Како је у трапезу $AD' \parallel BC'$ то је $U' = AD' \wedge BC'$ бесконачна тачка и зато U припада противоси u. Из особина центра $C' \in EC$, $D' \in ED$, али и $U' \in EU$, одакле је U' бесконачна тачка праве EU. Због тога C' је сециште EC и праве кроз B паралелне EU, док је D' сециште ED и праве кроз A паралелне EU



Алтернативно можемо посматрати $P = AB \wedge CD$, те Q као сециште DC и праве кроз B паралелне AD. Сада је C' сециште EC и праве кроз Q паралелне ED, као и $D' = PC' \wedge ED$. Како је $AD \parallel BQ$, Талесова теорема даје однос дужина дужи $PA : PB = PD : PQ$, а затим због $DD' \parallel QC'$ имамо $PD : PQ = PD' : PC'$. Даље је $PA : PB = PD : PQ = PD' : PC'$ и по Обрнутој Талесовој теореми важи $AD' \parallel BC'$, те је $ABC'D'$ трапез. △

Задатак 4.43. Дат је четвороугао $ABCD$ и права s. Одредити геометријско место тачака потенцијалних центара хомологије са осом s која дати четвороугао пресликава у делтоид.



Решење. Делтоид је четвороугао коме су дијагонале нормалне, при чему једна дијагонала полови другу. За $E = AC \wedge BD$ је $E' = A'C' \wedge B'D'$ при чему услове делтоида $A'B'C'D'$ можемо записати са $A'E'C' \perp B'E'D'$ и $A'E' \cong C'E'$. Ако уведемо тачку U са $\mathcal{H}(AC; EU)$ имамо $\mathcal{H}(A'C'; E'U')$, а како је E' средиште дужи $A'C'$, тачка U' је бесконачна, те U припада противоси. Противоса u је паралелна оси и конструишемо је са $U \in u \parallel s$.

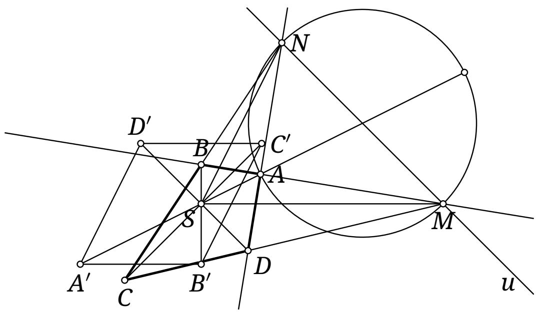
У општем случају важи $AC \nparallel s$ и $BD \nparallel s$ те имамо $X = AC \wedge s$ и $Y = BD \wedge s$. Нормалност $A'C'XE' \perp B'D'YE'$ налази E' на кругу над пречником XY. Нека је O средиште дужи XY (O је центар круга $k(XY) \ni E'$) и нека је $T = OE \wedge u$. За центар S хомологије важи $S = EE' \wedge UU'$, те како је $T' = ST \wedge u_\infty$ из $T \in OE$ је $T' = OE' \wedge u_\infty$, одакле је $ST \parallel OE'$. Талесова теорема даје $TS : OE' = TE : OE$, те је дужина дужи TS константна, што значи да су потенцијални центри на неком кругу са центром у T. Конкретније, Талесова теорема из $u \parallel s$ даје $TE : OE = TU : OX$, што значи $TS : OE' = TU : OX$, те из $OE' \cong OX$ добијамо $TS \cong TU$. Потенцијалне тачке S леже на кругу са центром T полупречника $r \cong TU$.

Што се специјалних случајева тиче размотримо $BD \parallel s$, где немамо тачку Y из претходног разматрања. Из $BD \parallel s$ следи $B'E'D' \parallel s$, те због $A'E' \perp B'E'$ тачка E' мора бити на правој кроз X нормалној на s. Потенцијални центри S налазе се на правој кроз U нормалној на s. Ако је додатно и $AC \parallel s$, те немамо тачку X, имали бисмо $U \in AC \parallel s$, односно $u = AC$, те су A' и C' бесконачне и нема делтоида. $\triangle$

Задатак 4.44. Дат је троугао ABC и тачке $M \in AC$ и $N \in BC$. Одредити елацију f са центром C тако да је $f(M)f(N)$ средња линија троугла $f(A)f(B)f(C)$.

Решење. Како је $f(M)$ средиште дужи $f(A)f(C)$, то тачка X за коју важи $\mathcal{H}(AC; MX)$ лежи на противоси. Како је $f(N)$ средиште дужи $f(B)f(C)$, то тачка Y за коју важи $\mathcal{H}(BC; NY)$ лежи на противоси. Ако је $U = AB \wedge MN$, $V = AN \wedge CU$, $W = BM \wedge CU$, тада захваљујући четворотеменицима $BNUV$ и $AMUW$ добијамо $X = BV \wedge AC$ и $Y = AW \wedge BC$, те је противоса $u = XY$ (и наравно $U \in u$). Оса s је паралелна противоси те је добијамо као праву кроз C која је паралелна са u. Перспективна колинеација је одређена центром C, осом s и противосом u. $\triangle$

Задатак 4.45. У еуклидској равни дат је паралелограм $A'B'C'D'$, тачка S и права u. Конструисати четвороугао $ABCD$ са правим углом код темена A који се слика на $A'B'C'D'$ при хомологији са центром S и противосом u.



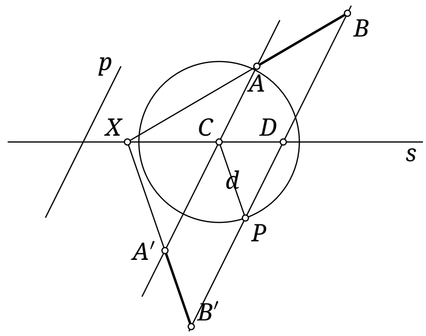
Решење. Из $M' = A'B' \wedge C'D' \in u_\infty$ имамо $M = AB \wedge CD \in u$, док из $N' = A'D' \wedge B'C'$ имамо $N = AD \wedge BC \in u$. Због тога M конструишемо као сециште праве u и праве кроз S паралелне са $A'B'$, док N конструишемо као сециште праве u и праве кроз S паралелне са $A'D'$. Како је угао код темена A прав то A припада кругу над пречником MN, те имамо $A \in k(MN) \cap SA'$ (што у општем случају даје два решења). Хомологија је одређена центром, противосом и једним паром тачака (на пример можемо добити осу као праву кроз $AM \wedge A'B'$ која је паралелна са u), тако да је једноставно завршити конструкцију четвороугла $ABCD$, рецимо, $B = AM \wedge SB'$, $D = AN \wedge SD'$, $C = BN \wedge DM$. $\triangle$

4.7 Перспективне афиности

Перспективна афиност је хомологија код које је центар бесконачна тачка. Све што знамо о перспективним колинеацијама остаје на снази, при чему је центар бесконачна тачка, док оса није бесконачна права. Уколико имамо пар одговарајућих тачака, одмах знамо и центар, а то је бесконачна тачка њихове спојнице. Самим тим све спојнице одговарајућих тачака су међусобно паралелне и чине такозване зраке афиности.

Бесконачна права је фиксна (јер садржи центар), односно бесконачне тачке се сликају у бесконачне, што повлачи да перспективна афиност чува паралелност. Како је хармонијска конјугованост инваријанта колинеације, а бесконачна тачка хармонијски спрегнута са средиштем дужи, то је и средиште дужи инваријанта. Штавише, ако у обзир узмемо инваријантност дворазмере, нова инваријанта постаје однос у којем тачка дели дуж.

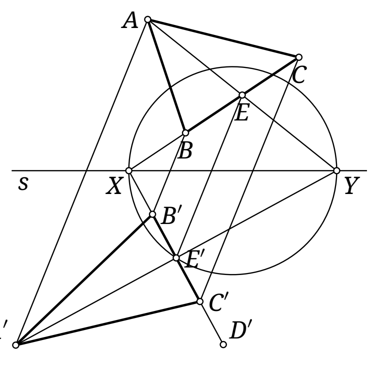
Задатак 4.46. Дата је дуж AB и праве p и s. Одредити перспективну афиност чија је оса s, зраци афиности су паралелни са p, а слика дужи AB има дату дужину d.



Решење. За $X = AB \wedge s$ је $X \in A'B'$, а такође знамо $AA' \parallel BB' \parallel p$. За $C = AA' \wedge s$ и $D = BB' \wedge s$ тражимо $P \in BB'$ тако да је $CP \parallel A'B'$ јер је тада $CPB'A'$ паралелограм и $CP \cong A'B' \cong d$. Конструкција почиње тако што праве паралелне са p кроз A и B секу s у тачкама C и D. Затим је P у пресеку праве BD и круга са центром C и полупречником d. Коначно, A' и B' су пресеци праве кроз $X = AB \wedge s$ паралелне CP са AC, односно BD.

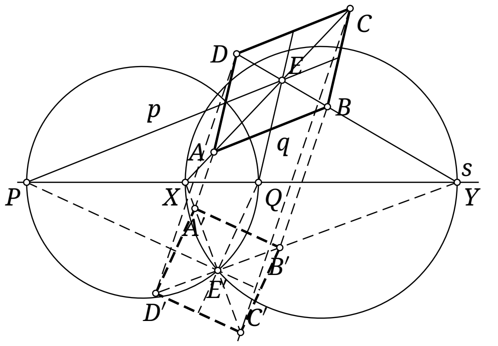
Број решења зависи од броја пресека праве BD и круга са центром C и полупречником d. Обележимо са r растојање између правих AA' и BB'. Ако је $d < r$ нема решења, а ако је $d = r$ имамо јединствено решење $A' = C$, $B' = D$. У општем случају је $d > r$ кад имамо два решења. Наравно, у случају да је $AB \parallel s$ задатак нема решења, осим ако није $AB \cong d$. △

Задатак 4.47. Дата је права s и тачке A, B, C, D'. Перспективна афиност са осом s слика троугао ABC у једнакокраки троугао $A'B'C'$ са основицом $B'C'$, тако да D' лежи на правој $B'C'$. Конструисати троугао $A'B'C'$ у општем случају.



Решење. Нека је E средиште дужи BC. Афиност чува односе дељења дужи те се E слика у средиште E' дужи $B'C'$. Како је $A'B' \cong A'C'$, то је E' подножје висине троугла $A'B'C'$ из темена A'. У општем случају постоје пресеци $X = BC \wedge s$ и $Y = AE \wedge s$, за које важи $X \in B'C'$ и $Y \in A'E'$. Како је $B'C'XE' \perp A'YE'$ и $E' \in B'C'D'X$, то је E' подножје висине из Y на $D'X$. Зато E' мора бити на кругу над пречником XY, те имамо једнозначно $X \neq E' \in k(XY) \cap D'X$. Перспективна афиност је одређена осом s и паром тачака E и E'. Тачке B' и C' добијамо у пресеку праве XD' са правом паралелној EE' кроз B, односно C, док тачку A' можемо добити у пресеку YE' и праве кроз A паралелне са EE'. △

Задатак 4.48. Дата је права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективну афиност која има осу s, а дати четвороугао пресликава у квадрат.

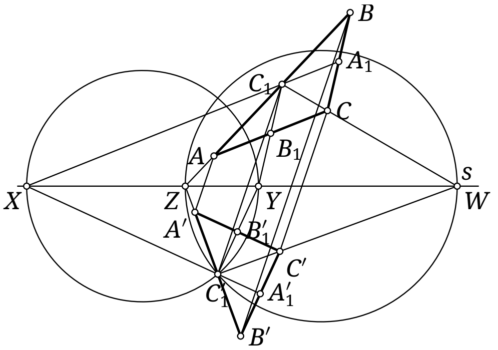


Решење. Перспективна афиност чува паралелност, те уколико $ABCD$ није паралелограм задатак нема решења. Посматрајмо тачку $E = AC \wedge BD$ која се слика у центар $E' = A'C' \wedge B'D'$ квадрата $A'B'C'D'$. Нека су p и q праве за које важи $E \in p \parallel AB \parallel DC$ и $E \in q \parallel AD \parallel BC$. Сада је $A'B'C'D'$ квадрат ако и само ако је $\angle p'E'q' = \pi/2 = \angle A'E'B'$. Са једне стране из $A'C' \perp B'D'$ важи $E' \in k(XY)$, где је $X = AC \wedge s$, $Y = BD \wedge s$. Са друге стране из $p' \perp q'$ важи $E' \in k(PQ)$, где је $P = p \wedge s$, $Q = q \wedge s$. Закључујемо да најпре E' бирамо са $E' \in k(XY) \cap k(PQ)$, након чега је перспективна афиност одређена осом s и паром тачака E и E'. $\triangle$

Задатак 4.49. Дата је права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективну афиност која има осу s, а дати четвороугао пресликава у правоугаоник са односном страница $2 : 1$.

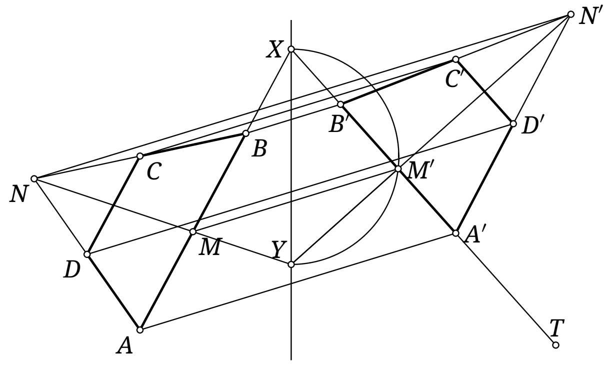
Решење. Можемо у игру укључити средишта дупло дужих страница, те како се паралелност и средишта дужи чувају имамо четвороугао који се слика у квадрат. Решење сводимо на Задатак 4.48, чија је ово варијација. $\triangle$

Задатак 4.50. Дата је права s и троугао ABC. Одредити перспективну афиност са осом s која дати троугао пресликава у једнакокрако правоугли.



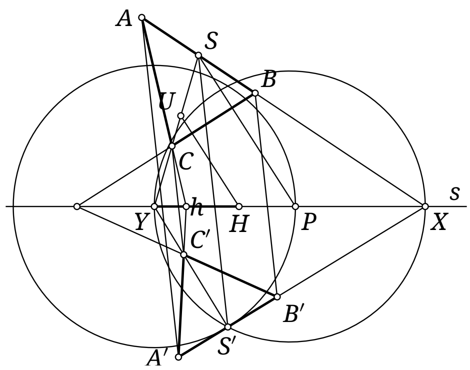
Решење. Још једна варијација Задатка 4.48. Не умањујући општост претпоставимо да је угао код темена C' једнакокраког троугла $A'B'C'$ прав. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта дужи BC, AC, AB. Како афиност чува средишта то су A_1', B_1', C_1' одговарајућа средишта, четвороугао $A_1'C_1'B_1'C'$ је паралелограм, а због правог угла и квадрат. Тако добијамо ортогоналности $A_1'C_1' \perp B_1'C_1'$ и $A'C_1' \perp C'C_1'$. У општем случају постојаће сецишта са осом: $X = A_1C_1 \wedge s$, $Y = B_1C_1 \wedge s$, $Z = AB \wedge s$, $W = CC_1 \wedge s$. Сада тачка C_1' види и дуж XY и дуж ZW под правим углом, те $C_1' \in k(XY) \cap k(ZW)$. Перспективна афиност је одређена осом s и паром тачака C_1 и C_1'. $\triangle$

Задатак 4.51. Дат је четвороугао $ABCD$, тачка T и права s. Одредити перспективну афиност са осом s која дати четвороугао пресликава у једнакокраки трапез на чијој основици лежи T.



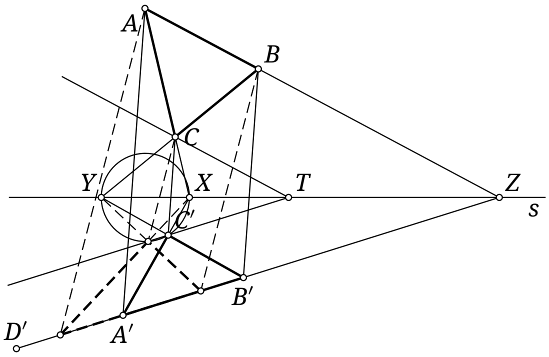
Решење. Не умањујући општост претпоставимо да једнакокраки трапез $A'B'C'D'$ има основице $C'D'$ и $A'B' \ni T$. Како афиност чува паралелност мора бити $AB \parallel CD$, те је неопходно да $ABCD$ буде трапез. Нека је M средиште дужи AB и нека је $N = AD \wedge BC$. Како афиност чува средишта, то је M' средиште дужи $A'B'$. Трапез $A'B'C'D'$ је једнакокраки, те је $A'D' \cong B'C'$, одакле по Талесовој теореми имамо једнакокраки троугао $A'B'N'$ што повлачи $A'M' \perp M'N'$. За $X = AB \wedge s$ и $Y = MN \wedge s$ имамо $A'B'TXM' \perp N'YM'$, те M' добијамо у подножју нормале из Y на TX. Перспективна афиност је сада одређена осом s и паром одговарајућих тачака M и M'. $\triangle$

Задатак 4.52. Дат је троугао ABC, права s и дуж h. Перспективна афиност f има осу s, а слика дат троугао у једнакокраки троугао чија је висина која одговара основици подударна са h. Одредити слику $f(ABC)$.



Решење. Ако је AB страница која се слика у основицу, а S њено средиште, тада знамо да је $A'B' \perp S'C'$, што повлачи $S' \in k(XY)$, где је $X = AB \wedge s$ и $Y = CS \wedge s$. Перспективна афиност даје $CC' \parallel SS'$, те је из Талесове теореме $YS : CS = YS' : C'S'$. Можемо поставити тачку U која је симетрична C у односу на средиште дужи YS, што даје $YU \cong CS$. На правој s постављамо тачку Hтакву да је $YH \cong h$, а онда конструишемо праву кроз S паралелну UH која сече YH у тачки P. Из Талесове теореме за $UH \parallel SP$ добијемо $YS' : C'S' = YS : CS = YS : YU = YP : YH$, те како је $C'S' \cong h \cong YH$ мора бити $YS' \cong YP$, односно S' припада кругу са центром Y који садржи P. Зато је $S' \in k(XY) \cap k(Y, YP)$, те након избора S' (у општем случају има два решења) добијамо једнозначно одређено f. На пример, темена A' и B' добијамо на $S'X$ у пресеку са правом паралелном SS' кроз A, односно B, док је C' сециште $S'Y$ и праве кроз C паралелне SS'. $\triangle$

Задатак 4.53. Дата је права s и тачке A, B, C, D'. Одредити перспективну афиност са осом s која слика троугао ABC у троугао $A'B'C'$ са правим углом код темена C', док права $A'B'$ пролази кроз D'.



Решење. Означимо пресеке са осом $X = AC \wedge s$, $Y = BC \wedge s$, $Z = AB \wedge s$. Из $A'C' \perp B'C'$ следи $C' \in k(XY)$. Са друге стране, нека права кроз C паралелна са AB сече s у тачки T. Како перспективна афиност чува паралелност то се права CT слика у $C'T$ која је паралелна са $D'Z$. Дакле, C' мора бити у пресеку праве кроз T паралелне са $D'Z$ и круга $k(XY)$. Перспективна афиност је одређена осом s и паром тачака C и C'. $\triangle$

4.8 Колинеације у $\mathbb{RP}^2$

Колинеација реалне пројективне равни је индукована регуларном линеарном трансформацијом (Теорема 2.78), тако да је веза између старих и нових тачака дата са $X' \propto MX$, где је M регуларна матрица. У том случају веза између старих и нових координата правих дата је са $U' \propto (M^{-1})^{\mathsf{T}}U$ или једноставније записано $U \propto M^{\mathsf{T}}U'$ (Теорема 2.79).

Задатак 4.54. Тачке $A_1(4:1:1)$, $A_2(4:4:1)$, $A_3(0:4:1)$, $B(2:1:1)$ узете су за базне тачке новог координатног система. Одредити формуле трансформација координата из старих у нове.

Решење. Формуле трансформација су линеарне, а матрицу те трансформације добијамо из веза $(4:1:1) \mapsto (1:0:0)$, $(4:4:1) \mapsto (0:1:0)$, $(0:4:1) \mapsto (0:0:1)$, $(2:1:1) \mapsto (1:1:1)$. Ако те везе провучемо кроз матричну једначину добијамо

$$\begin{array}{c|c|c}
\lambda_1 = 4a_{11} + a_{12} + a_{13} & 0 = 4a_{21} + a_{22} + a_{23} & 0 = 4a_{31} + a_{32} + a_{33} \\
0 = 4a_{11} + 4a_{12} + a_{13} & \lambda_2 = 4a_{21} + 4a_{22} + a_{23} & 0 = 4a_{31} + 4a_{32} + a_{33} \\
0 = \phantom{4a_{11} +} 4a_{12} + a_{13} & 0 = \phantom{4a_{21} +} 4a_{22} + a_{23} & \lambda_3 = \phantom{4a_{31} +} 4a_{32} + a_{33} \\
\hline
\lambda_4 = 2a_{11} + a_{12} + a_{13} & \lambda_4 = 2a_{21} + a_{22} + a_{23} & \lambda_4 = 2a_{31} + a_{32} + a_{33}
\end{array}$$

после чега преостаје решити систем 12 једначина са 13 непознатих. Конкретан систем има приличан број нула, те се може решавати директном елиминацијом параметара $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Међутим, у општем случају вероватно је најпогодније систем решавати Крамеровом методом детерминанти. Основна детерминанта за прве три везе је

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12,$$

док затим рачунамо помоћне детерминанте

$$\begin{array}{c|c|c}
D_{11} = 0 & D_{21} = 3\lambda_2 & D_{31} = -3\lambda_3 \\
D_{12} = -4\lambda_1 & D_{22} = 4\lambda_2 & D_{23} = 0 \\
D_{13} = 16\lambda_1 & D_{23} = -16\lambda_2 & D_{33} = 12\lambda_3
\end{array}$$

где је $a_{ij} = D_{ij}/D$. Заменом у последњу везу имамо

$$\begin{aligned}12\lambda_4 &= 0 - 4\lambda_1 + 16\lambda_1 = 12\lambda_1\\ 12\lambda_4 &= 6\lambda_2 + 4\lambda_2 - 16\lambda_2 = -6\lambda_2\\ 12\lambda_4 &= -6\lambda_3 + 0 + 12\lambda_3 = 6\lambda_3,\end{aligned}$$

одакле је $\lambda_1 = \lambda_4$, $\lambda_2 = -2\lambda_4$, $\lambda_3 = 2\lambda_4$ и коначно тражена матрица је

$$A = \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16\\ -6 & -8 & 32\\ -6 & 0 & 24\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8\\ -3 & -4 & 16\\ -3 & 0 & 12\end{pmatrix},$$

при чему је $\lambda X' = AX$. △

Задатак 4.55. Дате су тачке $A(1:1:0)$, $B(1:3:2)$, $C(1:0:1)$, $D(1:2:1)$, $E(0:0:1)$ и праве $p\colon 2x_2 + x_3 = 0$ и $q\colon x_3 = 0$. Одредити формуле колинеације f за коју је $f(A) = B$, $f(C) = D$, $f(E) = E$ и $f(p) = q$.

Решење. Формуле колинеације су $\lambda X' = MX$, те је из датих услова потребно одредити матрицу

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13}\\ m_{21} & m_{22} & m_{23}\\ m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{pmatrix}.$$

Полазимо од најједноставнијих услова, што су они који садрже велики број нула. Услов $f(E) = E$ даје $m_{13} = m_{23} = 0$. Колинеација слика праве са $\lambda U = M^{\mathsf{T}} U'$, те из $f(p) = q$ важи $\overrightarrow{p} \propto M^{\mathsf{T}} \overrightarrow{q}$. Како је $p = [0:2:1]$ и $q = [0:0:1]$ имамо $(m_{31}, m_{32}, m_{33}) \propto (0, 2, 1)$, односно $m_{31} = 0$ и $m_{32} = 2m_{33}$, тако да за сада тражена матрица има облик

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0\\ m_{21} & m_{22} & 0\\ 0 & 2m_{33} & m_{33}\end{pmatrix}.$$

Примена $f(C) = D$ даје $M\overrightarrow{C} = (m_{11}, m_{21}, m_{33}) \propto (1, 2, 1) = \overrightarrow{D}$, одакле је $m_{21} = 2m_{11}$, $m_{33} = m_{11}$. Услов $f(A) = B$ даје $M\overrightarrow{A} = (m_{11} + m_{12}, 2m_{11} + m_{22}, 2m_{11}) \propto (1, 3, 2) = \overrightarrow{B}$, одакле је $2m_{11} = 2(m_{11} + m_{12})$ и $2m_{11} + m_{22} = 3(m_{11} + m_{12})$, односно $m_{12} = 0$ и $m_{22} = m_{11}$. Сви елементи матрице M су изражени преко $m_{11} \neq 0$, те добијамо формуле

$$\begin{pmatrix} x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

тражене колинеације. △

Задатак 4.56. Дате су тачке $A(1:1:1)$, $B(0:-1:1)$, $C(2:1:1)$, $D(0:5:1)$ и праве $p\colon x_1 = 0$, $q\colon x_2 = 0$ и $r\colon x_2 = x_3$. Одредити матрицу колинеације f за коју је $f(p) = q$, $f(q) = r$, $f(A) = B$ и $f(f(C)) = D$.

Решење. Тражимо матрицу M за коју важи $X' \propto MX$, односно $U \propto M^{\mathsf{T}} U'$. Из услова $p[1:0:0] \mapsto q[0:1:0]$ следи $m_{22} = m_{23} = 0$, док из $q[0:1:0] \mapsto r[0:1:-1]$ добијамо $m_{21} = m_{31}$ и $m_{23} = m_{33}$, тако да за почетак имамо матрицу облика

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13}\\ m_{31} & 0 & 0\\ m_{31} & m_{32} & 0\end{pmatrix}.$$

Из $A(1:1:1) \mapsto B(0:-1:1)$ је $(m_{11}+m_{12}+m_{13}, m_{31}, m_{31}+m_{32}) \propto (0,-1,1)$, одакле добијамо $m_{13} = -m_{11} - m_{12}$ и $m_{32} = -2m_{31}$. Даље рачунамо

$$\overrightarrow{f(C)} \propto M\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & -m_{11}-m_{12} \\ m_{31} & 0 & 0 \\ m_{31} & -2m_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ 2m_{31} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{f(f(C))} \propto M\overrightarrow{f(C)} \propto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & -m_{11}-m_{12} \\ m_{31} & 0 & 0 \\ m_{31} & -2m_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ 2m_{31} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 + 2m_{12}m_{31} \\ m_{11}m_{31} \\ m_{11}m_{31} - 4m_{31}^2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Одавде је $m_{11}^2 + 2m_{12}m_{31} = 0$, $m_{31} \neq 0$ и $m_{11}m_{31} = 5(m_{11}m_{31} - 4m_{31}^2)$, одакле добијамо $m_{11} = 5m_{31}$, те $2m_{12} = 25m_{31}$, односно

$$M \propto \begin{pmatrix} 10 & 25 & -35 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

кад матрицу нормирамо са $m_{31} = 2$. $\triangle$

Задатак 4.57. Дате су тачке $A(1:1:1)$, $B(1:2:3)$, и праве $p\colon x_1 = 0$, $q\colon x_2 = 0$, $r\colon x_1 = x_3$. За колинеацију f важи $f(p) = p, f(q) = r, f(A) = B, f(B) = C$. Одредити матрице свих колинеација f уколико је а) $C(2:3:1)$; б) $C(1:3:5)$.

Решење. Ако је

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

тражена матрица колинеације f, онда она пресликава тачке са $\lambda X' = MX$, а праве са $\lambda U = M^{\mathsf{T}} U'$. Услов $f(p) = p$ је заправо $[1:0:0] \mapsto [1:0:0]$, што даје $m_{12} = m_{13} = 0$. услов $f(q) = r$ је $[0:1:0] \mapsto [-1:0:1]$, одакле добијамо $m_{31} = m_{11}$ и $m_{33} = 0$. Добили смо матрицу облика

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{11} & m_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

и примењујемо је на тачке. Из $f(A) = B$ следи $m_{21}+m_{22}+m_{23} = 2m_{11}$ и $m_{11}+m_{32} = 3m_{11}$, односно $m_{32} = 2m_{11}$ и $m_{21} = 2m_{11} - m_{22} - m_{23}$. Даље је

$$\overrightarrow{C} \propto M\overrightarrow{B} \propto \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 2m_{11} - m_{22} - m_{23} & m_{22} & m_{23} \\ m_{11} & 2m_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ 2m_{11} + m_{22} + 2m_{23} \\ 5m_{11} \end{pmatrix}.$$

Видимо да је немогуће $\overrightarrow{C} \propto (2,3,1)$, те задатак под а) нема решења. Задатак под б) даје додатни услов $\overrightarrow{C} \propto (1,3,5)$ одакле добијамо $2m_{11} + m_{22} + 2m_{23} = 3m_{11}$, односно $m_{22} = m_{11} - 2m_{23}$. То нас доводи до колинеација са матрицом

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{11} + m_{23} & m_{11} - 2m_{23} & m_{23} \\ m_{11} & 2m_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

где је очигледно $m_{11} \neq 0$ и $m_{23} \neq 0$ због $\det M \neq 0$. $\triangle$

Задатак 4.58. Одредити фиксне тачке и фиксне праве колинеације $\lambda x_1' = 4x_1 - x_2$, $\lambda x_2' = 6x_1 - 3x_2$, $\lambda x_3' = x_1 - x_2 - x_3$.

Решење. Колинеација је дата системом једначина $\lambda X' = AX$, где је матрица колинеације

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рачунамо карактеристични полином

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda)(-1-\lambda) + 6(-1-\lambda),$$

те добијамо $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 12 + 6) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3)$. Како имамо три различите реалне сопствене вредности свака понаособ даје по једну фиксну тачку. Тражимо сопствене векторе матрице A, односно такве X за које важи $(A - \lambda \mathbb{1})X = 0$, где је $\lambda \in \{-1, -2, 3\}$.

За $\lambda = -1$ је $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ даје фиксну тачку $(0:0:1)$.

За $\lambda = -2$ је $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ даје фиксну тачку $(1:6:5)$.

За $\lambda = 3$ је $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ даје фиксну тачку $(1:1:0)$.

Колинеација има тачно три фиксне тачке: $T_1(0:0:1)$, $T_2(1:6:5)$, $T_3(1:1:0)$. Слично, фискне праве одговарају сопственим векторима транспоноване матрице A^{T}, која има исти карактеристични полином. Можемо их рачунати као раније.

За $\lambda = -1$ је $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ даје фиксну праву $[1:-1:1]$.

Међутим, једноставније је приметити да су фиксне праве заправо спојнице фиксних тачака, на пример добијено $[1:-1:1]$ је управо $T_2 \vee T_3$. Преостале фиксне праве су $T_1 \vee T_3 = [1:-1:0]$ и $T_1 \vee T_2 = [-6:1:0]$. $\triangle$

Задатак 4.59. Колинеација је дата са $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$. Доказати да је у питању хомологија, те одредити центар и осу. Одредити неки координатни систем у чијим је афиним координатама та колинеација хомотетија са центром у тачки $(0:0:1)$.

Решење. Колинеација је дата системом једначина $\lambda X' = AX$, где је матрица колинеације

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рачунамо карактеристични полином

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

За $\lambda = -1$ је $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, што важи за $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, односно осу $[1:1:1]$.

За $\lambda = 2$ је $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, што даје $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, односно центар $(1 : 1 : 1)$.

Како важи $(1 : 1 : 1) \notin [1 : 1 : 1]$, то је у питању хомологија. Хомотетија осим центра хомотетије фиксира и све бесконачне тачке. Променом координатног система желимо обезбедити да оса буде бесконачна права, а да центар постане $(0 : 0 : 1)$. Матрицу преласка попуњавамо у складу са условима. Њена прва и друга колона одговарају бесконачним тачкама $(1 : 0 : 0)$ и $(0 : 1 : 0)$, тако да је ту неопходно уписати неке векторе представнике за две тачке са осе, на пример $(1, 0, -1)$ и $(1, -1, 0)$. Трећа колона одговара тачки $(0 : 0 : 1)$, те ту уписујемо вектор представник центра. Односе између наведених вектора представника можемо варирати тако да решење свакако није једнозначно, а једно решење је матрица преласка

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Њен инверз је матрица

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

док матрица колинеације у новом систему гласи

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

што очигледно испуњава услове задатка. $\triangle$

Задатак 4.60. Одредити фиксне тачке и фиксне праве колинеације која је дата формулама $\lambda x_1' = 10x_1 + 6x_2 - 6x_3$, $\lambda x_2' = -3x_1 + x_2 + 3x_3$, $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + x_3$. Изабрати координатни систем у којем је колинеација афина тако да је тачка $(0 : 0 : 1)$ бесконачна и написати формуле колинеације у новим координатама.

Решење. Матрица колинеације је

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Након краћег рачуна добијамо $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = -(\lambda - 4)^3$, те је једина сопствена вредност 4 (трострука нула). Из једначина $(A - 4\mathbb{1})X = 0$ и $(A^\intercal - 4\mathbb{1})X = 0$ добијамо фиксне тачке $\{(a : b : a + b) : a^2 + b^2 \neq 0\}$, док су $\{[a : b : b - 2a] : a^2 + b^2 \neq 0\}$ фиксне праве, те је у питању елација са центром $(2 : -1 : 1)$ и осом $[1 : 1 : -1]$. Афина колинеација има бесконачну праву за фиксну праву, а како желимо да тачка $(0 : 0 : 1)$ буде бесконачна, то она мора бити на оригиналној фиксној правој. Из скупа решења фиксних правих узимамо ону која садржи нашу тачку, а то је права $[1 : 2 : 0]$. У прве две колоне матрице преласка M уписаћемо две тачке са те праве, на пример

$(2:-1:0)$ и $(0:0:1)$, а у трећу било шта тако да важи $\det M \neq 0$, на пример $(1:0:0)$. Тако добијамо

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

док је матрица колинеације у новом систему

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Напоменимо да афина колинеација мора имати нуле на прва два места у последњој врсти њене матрице, што нам даје један вид контроле да смо последњу матрицу добро израчунали. △

Задатак 4.61. Нека је колинеација дата формулама $\lambda x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Изабрати координатни систем у којем је колинеација афина тако да је тачка $(0:0:1)$ бесконачна. Написати формуле колинеације у новим координатама.

Решење. Овај задатак је сасвим сличан Задатку 4.60. Матрица колинеације је

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Најпре рачунамо карактеристични полином $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. Сопствени вектори за вредност $\lambda = -1$ дају тачка по тачка фиксну праву $[1:1:1]$, док за вредност $\lambda = 2$ дају фиксну тачку $(-1:1:3)$. Дакле, у питању је хомологија са осом $[1:1:1]$ и центром $(-1:1:3)$. Афина колинеација има фиксну бесконачну праву, а приде захтевамо да тачка $(0:0:1)$ постане бесконачна. Да бисмо ово остварили неопходно је да пронађемо фиксну праву која садржи $(0:0:1)$. То можемо урадити тражећи сопствене векторе матрице A^{T}, али како смо закључили да је у питању хомологија, тражена фиксна права је $[1:1:0]$ као спојница тачке $(0:0:1)$ и центра $(-1:1:3)$. У прве две колоне матрице преласка уписујемо векторе представнике за две тачке са те праве, на пример $(0:0:1)$ (добро је узети баш њу да би се јасно видело да постаје бесконачна) и $(-1:1:0)$, док је трећа произвољна тако да детерминанта не буде нула, на пример $(1:0:0)$ (пожељно је имати што више нула). Тако добијамо

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

док је

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрица колинеације у новом систему. △

Задатак 4.62. Колинеација је дата формулама $\lambda x_1' = 5x_1 - 3x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = -3x_1 + 5x_2 + x_3$, $\lambda x_3' = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3$. Одредити све фиксне праве колинеације, а затим изабрати координатни систем у којем је та колинеација афина, те написати формуле у новим координатама.

Решење. Матрица колинеације је

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рачунамо $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = -(\lambda^3 - 14\lambda^2 + 60\lambda - 72) = -(\lambda-2)(\lambda-6)^2$. Фиксне праве тражимо као сопствене векторе транспоноване матрице.

За $\lambda = 2$ је $(A^\intercal - 2\,\mathbb{1})U = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$, што даје $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

За $\lambda = 6$ је $(A^\intercal - 6\,\mathbb{1})U = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$, што даје $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Дакле, постоје две фиксне праве, $[1:1:0]$ и $[-1:1:1]$. Афина колинеација има бесконачну праву фиксну, те бирамо једну од пронађених, на пример $[1:1:0]$, а затим са ње две произвољне тачке, на пример $(0:0:1)$ и $(1:-1:0)$, чије векторе представнике уписујемо у прве две колоне матрице преласка. Трећу колону попуњавамо произвољно, али да матрица буде регуларна. Једна од много могућности је

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

док је матрица колинеације у новом систему

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прва два улаза у последњој врсти нове матрице су нуле, што значи да је добијена колинеација афина. △

Задатак 4.63. Одредити матрицу хомологије која је одређена центром $S(-1:1:3)$, осом $s\colon x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и противосом $u\colon 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$.

Решење. Противоса се реализује дуж треће врсте, тако да можемо одмах у њу уписати $(3,3,2)$ или нешто сразмерно том вектору,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Све тачке са осе $[1:1:1]$ су фиксне, тако да ћемо издвојити неке лаке за рачун (што више нула то боље) попут $(-1:0:1)$ и $(0:-1:1)$.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} - a_{11} \\ a_{23} - a_{21} \\ -1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, одакле је $a_{11} = a_{13} - 1$, $a_{21} = a_{23}$.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} - a_{12} \\ a_{23} - a_{22} \\ -1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, одакле имамо $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23} - 1$.

Можемо одмах уврстити $a_{13} = x$, $a_{12} = x$, $a_{11} = x - 1$, односно $a_{23} = y$, $a_{22} = y - 1$, $a_{21} = y$, те искористити услов да је S фиксна тачка.

$\begin{pmatrix} x-1 & x & x \\ y & y-1 & y \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 \\ 3y-1 \\ 6 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, одакле је $3x+1 = -2$, $3y-1 = 2$, односно $x = -1, y = 1$. Тражена хомологија има матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

За крај, довољно је проверити да је још једна тачка са $[1:1:1]$ фиксна, на пример $(-1:1:0)$, чиме бисмо обезбедили да $[1:1:1]$ буде оса, а $S(-1:1:3)$ фиксна тачка. Како колинеација дата матрицом A није идентитет она мора бити хомологија са траженим особинама. $\triangle$

Задатак 4.64. Наћи формуле колинеације која праве $a\colon x = 0$, $b\colon y = 0$, $c\colon x+y = 1$ пресликава редом на b, c, a, док тежиште троугла којем странице припадају тим правама пресликава у пресек правих $x-y = 0$ и $x-y = 2$. Која права се слика у бесконачну? Шта је слика круга описаног око тог троугла?

Решење. Ако колинеација има матрицу M, она слика тачке са $\lambda X' = MX$, а праве са $\lambda U = M^\intercal U'$. Хомогене координате правих су $a[1:0:0]$, $b[0:1:0]$, $c[1:1:-1]$, тежиште троугла је $T(1/3:1/3:1) = (1:1:3)$ и оно се слика у $T'(1:1:0)$. Компликације око правих избегавамо њиховим сецииштима $C = a \wedge b = (0:0:1)$, $A = b \wedge c = (1:0:1)$, $B = c \wedge a = (0:1:1)$, након чега користимо формуле само за тачке $C \mapsto A \mapsto B \mapsto C$, $T \mapsto T'$. Међутим, некада колинеацију није могуће одредити само помоћу слика тачака, те овај задатак радимо директно.

Из $a[1:0:0] \mapsto b[0:1:0]$ имамо $m_{22} = m_{23} = 0$. Из $b[0:1:0] \mapsto c[1:1:-1]$ добијамо $m_{11} + m_{21} - m_{31} = m_{13} + m_{23} - m_{33} = 0$, одакле следи $m_{31} = m_{11} + m_{21}$ и $m_{33} = m_{13}$. Из $c[1:1:-1] \mapsto a[1:0:0]$ је $m_{11} = m_{12} = -m_{13}$, тако да матрица има облик

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 0 & 0 \\ m_{11}+m_{21} & m_{32} & -m_{11} \end{pmatrix}.$$

Кад уврстимо $\overrightarrow{T'} \propto M\overrightarrow{T}$ добијамо

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 0 & 0 \\ m_{11}+m_{21} & m_{32} & -m_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{11} \\ m_{21} \\ m_{21}+m_{32}-2m_{11} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

одакле је $-m_{11} = m_{21}$, $m_{21} + m_{32} - 2m_{11} = 0$, што коначно даје

$$M \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Множењем матрице M са $\overrightarrow{u_\infty} = (0,0,1)$ добијамо противосу $u[0:3:-1]$, односно праву $y = 1/3$. Како та права сече круг у двема тачкама, то се он слика у хиперболу. $\triangle$

Задатак 4.65. Одговарајућом матрицом одредити све могуће колинеације које имају тачно две фиксне тачке $(0:0:1)$ и $(-1:0:2)$, фиксирају праву $2x_1 + x_3 = 0$, док праву $3x_2 + x_3 = 0$ пресликавају у праву $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Решење. Како је $(0 : 0 : 1)$ фиксна тачка то имамо $m_{13} = 0$ и $m_{23} = 0$, а како је и $(-1 : 0 : 2)$ фиксна то добијамо $m_{21} = 0$ и $2m_{11} = 2m_{33} - m_{31}$. Фиксна права $[2 : 0 : 1]$ доноси $m_{32} = -2m_{12}$ и већ виђено $2m_{11} = 2m_{33} - m_{31}$, док $[0 : 3 : 1] \mapsto [1 : 1 : 1]$ даје $m_{31} = -m_{11}$ и $m_{12} + m_{22} + m_{32} = 3m_{33}$. Одавде закључујемо да је матрица колинеације

$$M \propto \begin{pmatrix} 2a & b & 0 \\ 0 & 3a+b & 0 \\ -2a & -2b & a \end{pmatrix}.$$

Добили смо облик свих колинеација које пресликавају све што треба, али преостаје неискоришћен услов да колинеација има тачно две фиксне тачке. У том случају неопходно је да матрица има тачно две сопствене вредности, док су наше сопствене вредности a, $2a$ и $3a+b$. Како је $2a \neq a \neq 0$ због $\det M \neq 0$, то дискутујемо два случаја. У првом случају је $3a + b = 2a$, односно $b = -a$, што нас доводи до матрице

$$M \propto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

која за сопствену вредност 2 има једнодимензиони сопствени потпростор којем одговара фиксна тачка $(-1 : 0 : 2)$ и зато јесте решење. У другом случају је $3a + b = a$, односно $b = -2a$, што нас доводи до матрице

$$M \propto \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

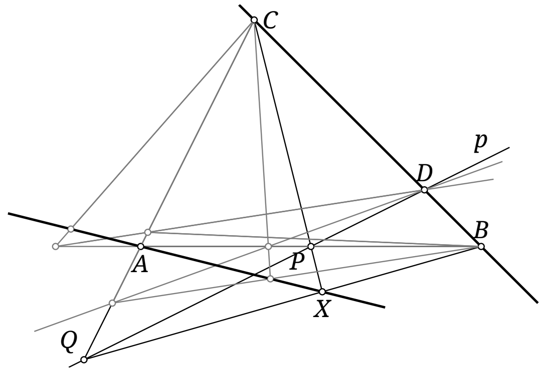
која за сопствену вредност 1 има дводимензиони сопствени потпростор којем одговара оса $[1 : -2 : 0] \ni (2 : 1 : 0)$ и зато није решење. $\triangle$

4.9 Штајнерове конике

У овој секцији доказујемо да је описано геометријско место тачака једна коника по Штајнеровој дефиницији. Геометријско место тачака уобичајено је описано као сециште неких правих $X = p \wedge q$. Потребно је да пронаћи пројективитет $f\colon (P) \barwedge (Q)$ за који је $f(p) = q$, а он је често композиција познатих пројективитета, који су или перспективитети или пројективитети одређени неком коником. Важно је да у дефиницијама користимо искључиво елементе који су у задатку фиксирани, док варирају елементи које пресликавамо. На пример, права p варира, а за P морамо узети неку унапред фиксирану тачку $P \in p$. Овако се природно намеће шта ће бити праменови (P) и (Q), те је потребно само мало интуиције да би се решио конкретан задатак.

Испитивање (не)дегенерисаности конике своди се на питање да ли је f перспективитет. То решава Теорема о перспективитету, те рачунамо слику заједничког елемента. Уколико је $f(PQ) = QP$, коника је дегенерисана, а у супротном недегенерисана.

Задатак 4.66. Кроз тачку D странице BC троугла ABC пролази права p која сече странице AB и AC редом у тачкама P и Q. Праве CP и BQ секу се у тачки X. Шта је геометријско место тачака X када $p \ni D$?

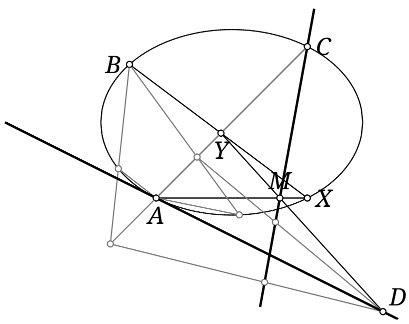


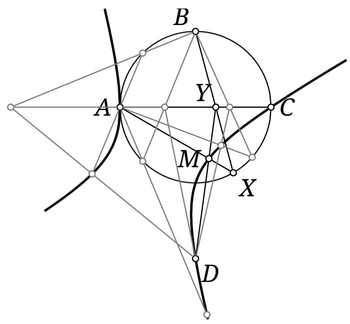
Решење. Како је $X = CP{\wedge}BQ$, потребно је направити пројективитет f за који је $f(BQ) = CP$. То можемо урадити са $f = (B)\overset{AC}{\overline{\wedge}}(D)\overset{AB}{\overline{\wedge}}(C)$ јер је тад $BQ \mapsto p \mapsto CP$ и тражено геометријско место тачака је коника по Штајнеровој дефиницији. Како важи $BC \mapsto BC \mapsto BC$, f је перспективитет, те је коника дегенерисана и важи $\Gamma = BC \cup s$. Из $AB \mapsto AD \mapsto AC$ следи $AB{\wedge}AC = A \in \Gamma$, одакле је $\Gamma = BC{\cup}AX$, где је X нека тачка конике. $\triangle$

Задатак 4.67. Дате су праве a и b, као и тачке P, Q и R ван њих. Ако је $r \ni R$ произвољна права и важи $A = r{\wedge}a$ и $B = r{\wedge}b$, описати скуп свих сецишта $PA{\wedge}QB$.

Решење. Пројективитет $f = (P)\overset{a}{\overline{\wedge}}(R)\overset{b}{\overline{\wedge}}(Q)$ пресликава $PA \mapsto r \mapsto QB$, те је тражено геометријско место тачака коника. Дегенерисаност конике зависи од тога да ли је f перспективитет, што се дешава уколико су тачке X, Y и R колинеарне где су $X = PQ{\wedge}a$ и $Y = PQ{\wedge}b$. Коника је дегенерисана ако су тачке P, Q и R колинеарне или ако су праве a, b и PQ конкурентне. $\triangle$

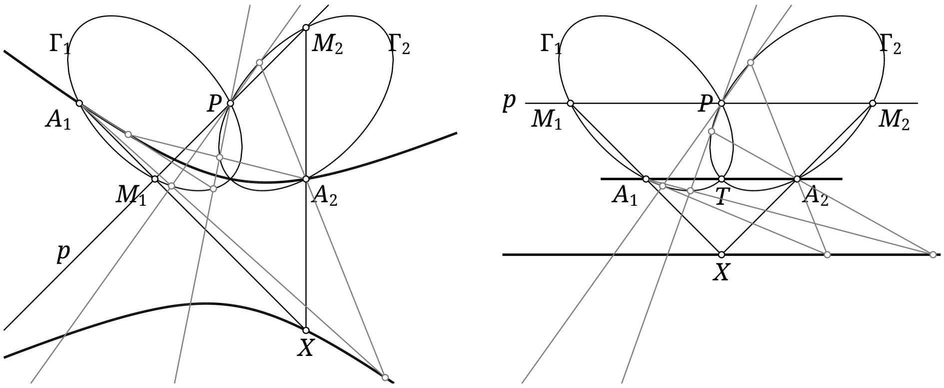
Задатак 4.68. Дата је недегенерисана коника Γ и различите тачке $A, B, C \in \Gamma$ и $D \notin \Gamma$. За произвољно $X \in \Gamma$ нека је $Y = BX{\wedge}AC$, те $M = AX{\wedge}DY$. Доказати да је геометријско место тачака M када $X \in \Gamma$ једна коника и испитати јој дегенерисаност.





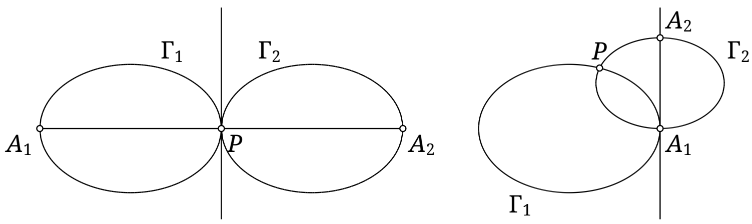
Решење. Како је $M = AX{\wedge}DY$, потребно је наћи пројективитет f за који је $f(AX) = DY$. То можемо са $f = (A)\overset{\Gamma}{\overline{\wedge}}(B)\overset{AC}{\overline{\wedge}}(D)$ јер тада важи $AX \mapsto BX \mapsto DY$, те је коника тражено геометријско место тачака. Дегенерисаност даје услов перспективитета $f(AD) = DA$, што се дешава уколико $(A)\overset{\Gamma}{\overline{\wedge}}(B)$ слика AD у BA, односно уколико је AD тангента на Γ у тачки A. Дакле, Γ је дегенерисана ако и само ако је AD тангента на Γ. Можемо приметити да $AC \mapsto BC \mapsto DC$ повлачи $AC{\wedge}DC = C \in \Gamma$, док $A, D \in \Gamma$ имамо директно (Лема 2.54). У случају дегенерисане конике је $\Gamma = AD{\cup}MC$, где је M нека тачка конике коју смо већ одредили. $\triangle$

Задатак 4.69. Дате су недегенерисане конике Γ_1 и Γ_2, као и различите тачке $A_1 \in \Gamma_1$, $A_2 \in \Gamma_2$ и $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. За произвољну праву $p \ni P$ поставимо тачке $M_i \in \Gamma_i \cap p$ са $M_i \neq P$ уколико p није тангента на Γ_i, за $1 \leqslant i \leqslant 2$. Доказати да је геометријско место тачака $X = A_1M_1{\wedge}A_2M_2$ кад p пролази кроз P, коника, а затим јој испитати дегенерисаност.



Решење. Пројективитет $f = (A_1)\overset{\Gamma_1}{\barwedge}(P)\overset{\Gamma_2}{\barwedge}(A_2)$ даје $A_1M_1 \mapsto p \mapsto A_2M_2$, што доказује да је тражено геометријско место тачака коника. Како је $A_1 \neq A_2$ питамо се када је $f(A_1A_2) = A_2A_1$, а коника је дегенерисана ако и само ако права A_1A_2 има исту слику при пројективитетима $(A_1)\overset{\Gamma_1}{\barwedge}(P)$ и $(A_2)\overset{\Gamma_1}{\barwedge}(P)$.

Нека A_1A_2 није тангента ни на Γ_1, ни на Γ_2. Тада услов постаје $PT_1 = PT_2$, при чему важи $T_1 \in A_1A_2 \cap \Gamma_1$ и $T_2 \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$ Уколико је $T_1 \neq T_2$ имали бисмо $P \in T_1T_2 = A_1A_2$ и контрадикторно $T_1 = P = T_2$, те мора бити $T_1 = T_2 = T$. Тада $T \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и A_1, A_2, T су колинеарне. Коника је дегенерисана ако је $P \neq T$, као и у случају $P = T$ где Γ_1 и Γ_2 имају заједничку тангенту у P.



Претпоставимо да је A_1A_2 тангента на тачно једну од коника, рецимо на Γ_1. Тада услов постаје $PA_1 = PT$, где је $T \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. За $T \neq A_1$ тражимо $P \in A_1T = A_1A_2$ што је немогуће, тако да је коника дегенерисана под условом $T = A_1$, односно $A_1 \in \Gamma_2$. Симетрично, ако је A_1A_2 тангента на Γ_2, коника је дегенерисана под условом $A_2 \in \Gamma_1$. Коначно, ако је A_1A_2 тангента и на Γ_1 и на Γ_2 дегенерисаност би дао услов $PA_1 = PA_2$, одакле је $P \in A_1A_2$, што се никад не дешава. $\triangle$

4.10 Паскалова и Бријаншонова теорема

Најлепши геометријски задаци тичу се примене Паскалове и Бријаншонове теореме. Размотримо нека правила која нам помажу да увидимо на шта тачно примењујемо теорему. Уколико на располагању имамо више тачака (од тангенти) са конике примењујемо Паскалову теорему (Теорема 2.58): три сецишта наспрамних страница простог шестотеменика уписаног у недегенерисану конику су колинеарне тачке. Уколико имамо више тангенти на конику онда примењујемо Бријаншонову теорему (Теорема 2.92): три спојнице наспрамних темена простог шестостраника описаног око недегенерисане конике су конкурентне праве.

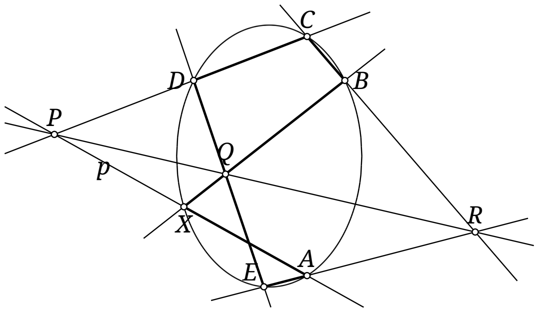
Теореме се често примењују у граничном случају, односно неке елементе можемо удуплати. Ако смо удуплали тачку онда је одговарајућа спојница тангента у тој тачки, а ако смо удуплали тангенту онда је одговарајуће сециште додирна тачка те тангенте.

Уобичајено је коника одређена са пет елемената, да би применом теореме добили шести елемент који се тражи. Основна идеја је искористити информацију коју имамо о том шестом елементу тако што њему зависан елемент поставимо за суседни у нашој теореми. Редослед осталих познатих елемената није превише битан те самим тим задаци имају више различитих решења, односно различитих примена теорема које решавају задатак.

Тип конике одређује број пресека са бесконачном правом. Елипса нема пресеке са u_∞ те о њој немамо ништа нарочито. Парабола има тачно једну бесконачну тачку, тако да одмах можемо u_∞ третирати као познату тангенту. Додирна тачка те тангенте са параболом је бесконачна тачка осе параболе. Некад је корисно приметити да је тангента у темену параболе нормална на осу те параболе. Хипербола има две бесконачне тачке, а то су додирне тачке њених асимптота. То значи да уколико добијемо асимптоту, заправо смо добили две информације, имамо њу као познату тангенту, а њену бесконачну тачку као познату тачку конике.

Чести мотиви у задацима су центар или оса конике, где је могуће добити нове тачке или тангенте конике једноставном централном или осном симетријом познатих тачака или тангенти.

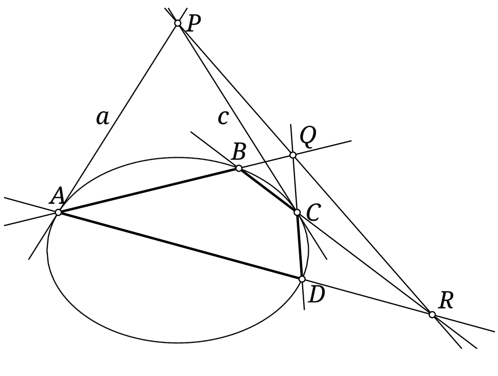
Задатак 4.70. Дате су тачке A, B, C, D, E недегенерисане конике Γ и права $p \ni A$. Конструисати другу пресечну тачку праве p и конике Γ.



Решење. Применимо Паскалову теорему на прост шестотеменик $AXBCDE$, где је X тражена тачка, $\Gamma \cap p = \{A, X\}$. Паскалову праву чине $P = AX \wedge CD = p \wedge CD$, $Q = XB \wedge DE$ и $R = BC \wedge EA$, одакле имамо $Q \in PR$. Сада су праве XB, DE, PR конкурентне у Q те можемо конструисати $Q = PR \wedge DE$ и коначно $X = BQ \wedge p$.

Алтернативно задатак се решава проналажењем $X = p \wedge f(p)$, где је пројективитет $(A)\barwedge(B)$ одређен са $(AC, AD, AE) \mapsto (BC, BD, BE)$. △

Задатак 4.71. Дате су тачке A, B, C, D недегенерисане конике Γ и њена тангента $a \ni A$. Конструисати тангенту на Γ у тачки C.



Решење. Примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $AABCCD$ даје Паскалову праву коју чине $P = a \wedge c$, $Q = AB \wedge CD$ и $R = BC \wedge DA$, где је c тражена тангента у тачки C. Можемо конструисати $P = a \wedge RQ$ и коначно $c = PC$. △

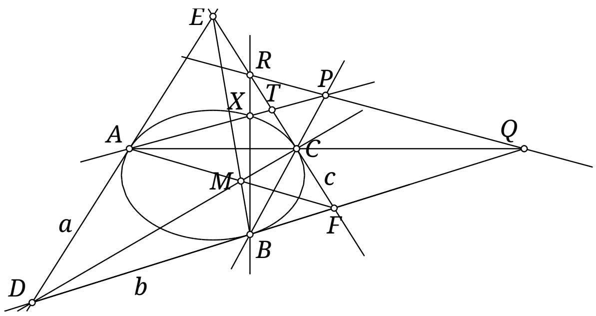
Задатак 4.72. Нека су A, B, C, A', B', C', P тачке недегенерисане конике. Ако су праве AA', BB' и CC' конкурентне, доказати да су тачке $A'P \wedge BC, B'P \wedge AC$ и $C'P \wedge AB$ колинеарне.

Решење. Обележимо $A_0 = A'P \wedge BC, B_0 = B'P \wedge AC, C_0 = C'P \wedge AB$, те нека су праве AA', BB' и CC' конкурентне у тачки S. Примена Паскалове теореме на прост шестотеменик $A'PB'BCA$ даје колинеарне A_0, B_0, S, док примена на $B'PC'CAB$ даје колинеарне B_0, C_0, S, одакле су A_0, B_0 и C_0 колинеарне. $\triangle$

Задатак 4.73. Нека су A, B, C, D тачке недегенерисане конике Γ. Нека је P сециште тангенти на Γ у тачкама A и C, а Q сециште тангенти на Γ у тачкама B и D. Ако је $R = AB \wedge CD$ и $S = AD \wedge BC$ доказати да су тачке P, Q, R, S колинеарне.

Решење. Примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $AABCCD$ даје колинеарне P, R, S, док примена на $ABBCDD$ даје колинеарне R, Q, S, одакле следи тврђење. Можемо приметити да ако је $T = AC \wedge BD$, онда P, Q, R, S припадају полари тачке T. $\triangle$

Задатак 4.74. Дате су тангенте a, b, c и додирне тачке $A \in a$, $B \in b$ недегенерисане конике Γ. За дату тачку $T \in c$ одредити другу пресечну тачку праве AT и конике Γ.

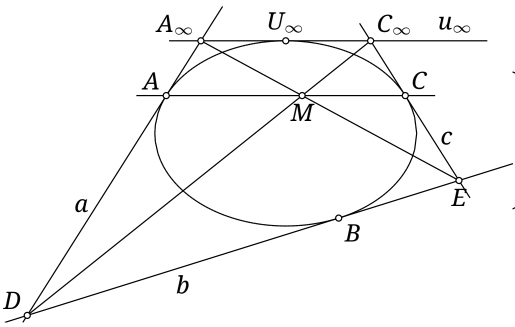


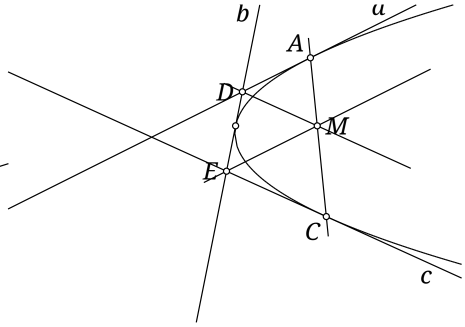
Решење. Обележимо $a \wedge b = D$, $a \wedge c = E$, $b \wedge c = F$, и нека је C додирна тачка тангенте c. Најпре тражимо тачку C применом Бријаншонове теореме на прост гранични тространик $aabbcc$. Бријаншонову тачку M чине конкурентне праве AF, DC, BE, тако да имамо $M = AF \wedge BE$, те $C = MD \wedge c$. Сада имамо довољно тачака за Паскалову теорему коју ћемо применити на прост гранични четворотеменик $AXBBCC$, где је X тражена тачка. Паскалову праву чине тачке $P = AX \wedge BC = AT \wedge BC$, $Q = b \wedge CA$, $R = XB \wedge c$, одакле можемо добити $R = PQ \wedge c$ и коначно $X = AT \wedge BR$. $\triangle$

Задатак 4.75. Дате су тачке A, B, C, D недегенерисане конике Γ и тачка $T \notin$ Γ. Ако је AT тангента на Γ, конструисати другу тангенту из T.

Решење. Ако је $t \ni T$ тражена тангента, потребно је искористити услов $a \wedge t = T$, где је $a = AT$ тангента. Услов се може искористити у Бријаншоновој теореми, али на располагању немамо довољно тангенти. Због тога најпре користимо Паскалову теорему примењену на граничне четворотеменике. На пример, четворотеменик $AABBCD$ даје тангенту b у B, док четворотеменик $AABCCD$ даје тангенту c у C. Сада можемо применити Бријаншонову теорему на $aatbbc$ и добити t. $\triangle$

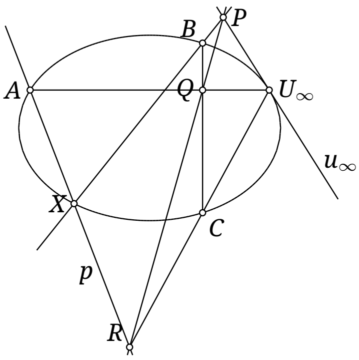
Задатак 4.76. Конструисати додирну тачку C тангенте c на параболу, ако су дате тангенте a, b, c и тачка $A \in a$ параболе.

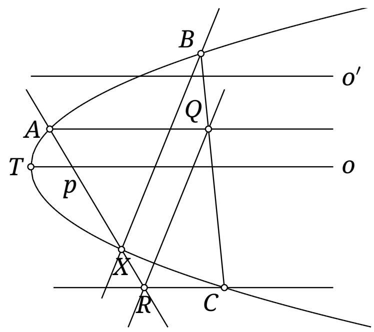




Решење. Парабола додирује бесконачну праву u_∞ у тачки U_∞, те је можемо третирати као тангенту. Уведимо тачке $D = a{\wedge}b$, $E = c{\wedge}b$, $A_\infty = a{\wedge}u_\infty$, $C_\infty = c{\wedge}u_\infty$. Применом Бријаншонове теореме на гранични четвоространик $aabccu_\infty$ добијамо праве AC, DC_∞, EA_∞ које су конкурентне у Бријаншоновој тачки M. Видимо да је $M = DC_\infty{\wedge}EA_\infty$, те коначно $C = AM{\wedge}c$. Конструкцију започињемо са $D = a{\wedge}b$ и $E = c{\wedge}b$. Даље је M сециште праве кроз D паралелне c и праве кроз E паралелне a, те имамо завршно $C = AM{\wedge}c$. △

Задатак 4.77. Дате су тачке A, B, C параболе и правац o' њене осе, као и права $p \ni A$. Конструисати другу пресечну тачку праве p и параболе.

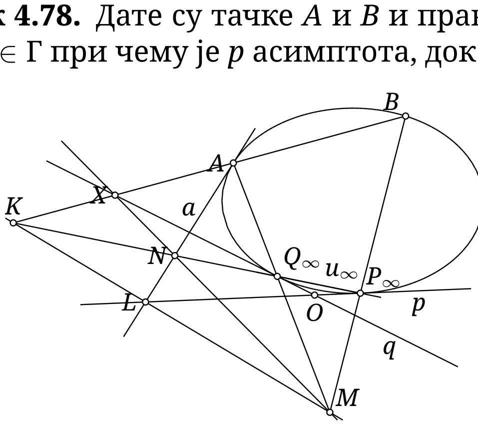


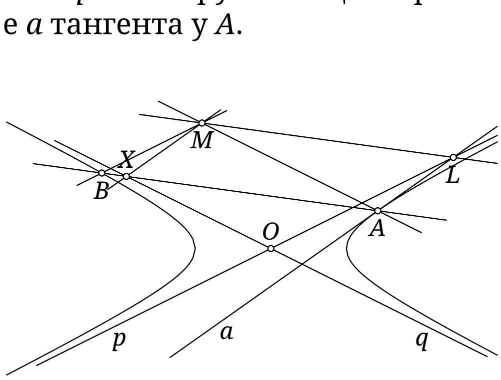


Решење. Карактеристика параболе Γ је да бесконачна права u_∞ додирује Γ, односно да је u_∞ тангента на Γ у некој тачки U_∞. Та тачка се налази на оси o параболе, односно $U_\infty \in \Gamma \cap o$, што значи $\Gamma \cap o = \{U_\infty, T\}$, где је T теме параболе. Како је правац осе $o' \parallel o$, то је $U_\infty = o{\wedge}o'$. Примењујемо Паскалову теорему на прост гранични петотеменик $U_\infty U_\infty AXBC$, где је тражено $X \in \Gamma \cap p$. Паскалову праву одређују тачке $P = u_\infty{\wedge}XB$, $Q = U_\infty A{\wedge}BC$, $R = AX{\wedge}CU_\infty = p{\wedge}CU_\infty$, одакле $P \in QR$, што даје $P = QR{\wedge}u_\infty$, те коначно $X = PB{\wedge}p$.

На основу претходне анализе конструкција је следећа. Тачка Q је пресек праве BC и праве кроз A паралелне o'. Тачка R је пресек праве p и праве кроз C паралелне o'. Тачка X је пресек праве p и праве кроз B паралелне QR. △

Задатак 4.78. Дате су тачке A и B и праве a и p. Конструисати центар хиперболе Γ ако $A, B \in \Gamma$ при чему је p асимптота, док је a тангента у A.

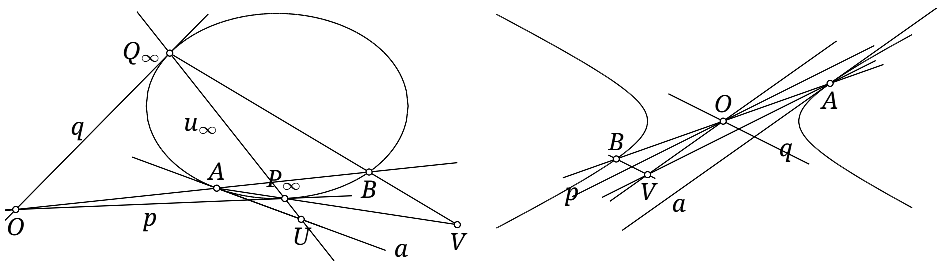




Решење. Асимптоте p и q хиперболе Γ су тангенте које додирују Γ у бесконачним тачкама P_∞ и Q_∞, док се центар хиперболе налази у њиховом пресеку $O = p \wedge q$. Преостаје пронаћи другу асимптоту q. Применимо Паскалову теорему на прост гранични четворотеменик $Q_\infty P_\infty P_\infty BAA$. Паскалову праву чине $K = Q_\infty P_\infty \wedge BA = u_\infty \wedge BA$, $L = p \wedge a$, $M = P_\infty B \wedge AQ_\infty$, одакле је $M = KL \wedge P_\infty B$, те $Q_\infty = AM \wedge u_\infty$ што значи да је $q \parallel AM$. Нова примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $Q_\infty Q_\infty P_\infty BAA$ даје Паскалову праву коју чине $X = q \wedge BA$, $N = u_\infty \wedge a$, $M = P_\infty B \wedge AQ_\infty$. Даље је $X = NM \wedge BA$, затим $q = XQ_\infty$ и коначно $O = p \wedge q$.

На основу претходне анализе конструкција је следећа. Тачка L је пресек правих a и p. Тачка M је пресек праве кроз L паралелне BA и праве кроз B паралелне p. Тачка X је пресек праве BA и праве кроз M паралелне a. Права q пролази кроз X и паралелна је са AM. Тражени центар O је пресек правих p и q. △

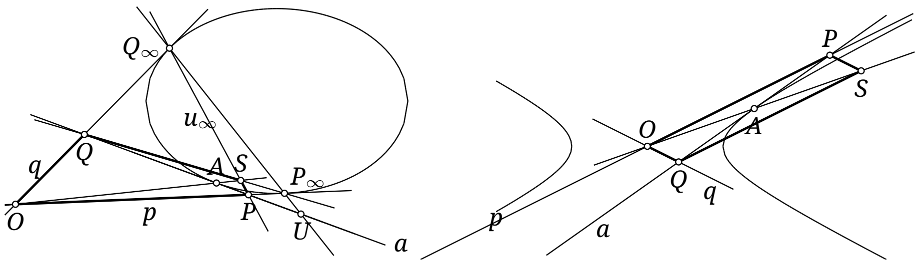
Задатак 4.79. Дате су тачке A и O, као и праве a и p. Ако је A додирна тачка тангенте a на хиперболу, O центар те хиперболе, а p једна њена асимптота, одредити другу њену асимптоту.



Решење. Тачка B која је симетрична тачки A у односу на O ($A \neq B \in AO \cap k(O, OA)$) је такође на коници. Нека је $P_\infty = p \wedge u_\infty$ и $Q_\infty = q \wedge u_\infty$, где је q друга асимптота. Примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $P_\infty P_\infty AABQ_\infty$ даје Паскалову праву коју чине $O = p \wedge AB$, $V = P_\infty A \wedge BQ_\infty$, $U = a \wedge u_\infty$ одакле је $V = OU \wedge P_\infty A$, те $Q_\infty = BV \wedge u_\infty$ и коначно $q = OQ_\infty$.

На основу претходне анализе конструкција је следећа. Тачка B је симетрична A у односу на O. Тачка V је пресек праве кроз O паралелне a и праве кроз A паралелне p. Права q пролази кроз O и паралелна је са BV.

Алтернативно, задатак је могуће елегантно решити употребом Бријаншонове теореме.

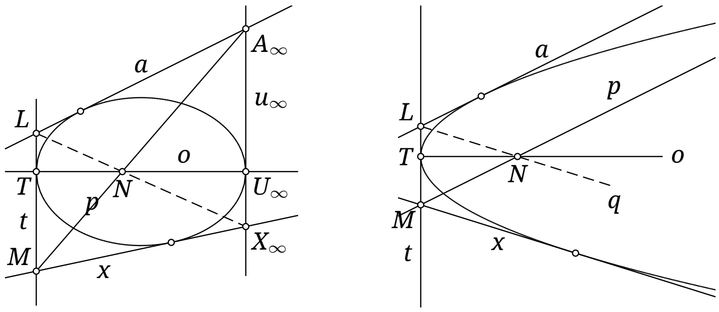


Нека је $P = a \wedge p$, $Q = a \wedge q$ и $S = P_\infty Q \wedge Q_\infty P$. Како је $PS \wedge OQ = Q_\infty$ и $QS \wedge OP = P_\infty$, то је $PS \parallel OQ$ и $QS \parallel OP$, те је четвороугао $PSQO$ паралелограм. Примена Бријаншонове теореме на прост гранични тространик $ppqqaa$ даје праве $P_\infty Q$, OA, $Q_\infty P$ које су конкурентне у Бријаншоновој тачки. Одавде $S \in OA$, те $A = PQ \wedge OS$, а како се дијагонале паралелограма полове то имамо $PA \cong QA$. Захваљујући овој анализи, конструкција је једноставна. Најпре добијамо Q као симетричну P у односу на A, односно $P \neq Q \in a \cap k(A, AP)$, а онда је $q = OQ$. △

Задатак 4.80. Дате су асимптоте p и q хиперболе Γ, као и тачке $A \in \Gamma$ и $T \in p$. Конструисати тангенту из T на Γ.

Решење. Нека су $P_\infty = p \wedge u_\infty$ и $Q_\infty = q \wedge u_\infty$ додирне тачке асимптота. Најпре примењујемо Паскалову теорему на гранични тротеменик $AAP_\infty P_\infty Q_\infty Q_\infty$ одакле добијамо тангенту a у тачки A. Након тога можемо применити Бријаншонову теорему на гранични четвоространик $tppaqq$ где користимо $t \wedge p = T$ да бисмо добили тражену тангенту $t \ni T$. $\triangle$

Задатак 4.81. Дате су праве a и t, као и тачке T и M са праве t. Ако је T теме параболе и ако су a и t њене тангенте, конструисати другу тангенту из тачке M на ту параболу.

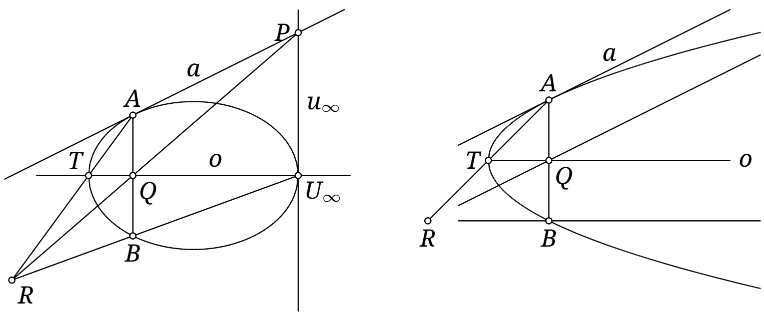


Решење. Нека је x тражена тангента из M. Уведимо тачке $L = a \wedge t$, $A_\infty = a \wedge u_\infty$, $X_\infty = x \wedge u_\infty$, $\{U_\infty\} = \Gamma \cap u_\infty$. Тачка U_∞ је бесконачна тачка осе параболе o која је нормална на тангенту t у темену T. Примена Бријаншонове теореме на прост гранични четвоространик $ttxu_\infty u_\infty a$ даје праве $o = TU_\infty$, $p = (t \wedge x) \vee (u_\infty \wedge a) = MA_\infty$, $q = (x \wedge u_\infty) \vee (a \wedge t) = X_\infty L$ које су конкурентне у Бријаншоновој тачки. За $N = o \wedge p$ имамо $N \in q$, те је $X_\infty \in NL$. Све је спремно за конструкцију. Права o пролази кроз T и нормална је на t, док права p пролази кроз M и паралелна је са a. Даље је $N = o \wedge p$, $L = a \wedge t$, и коначно x је права кроз M паралелна са NL. $\triangle$

Задатак 4.82. Дате су праве p и q, као и тачке $P \in p$ и $Q \in q$. Ако права p додирује параболу Γ у P, а права q додирује Γ у Q, конструисати тангенту на Γ која је паралелна правој PQ.

Решење. Примена Бријаншонове теореме на гранични четвоространик $xu_\infty ppqq$, где је x тражена тангента, даје конкурентне праве $(PQ \wedge u_\infty) \vee (p \wedge q)$, $(p \wedge u_\infty) \vee Q$ и $(q \wedge x) \vee P$. Бријаншонову тачку B конструишемо као сециште праве кроз $p \wedge q$ која је паралелна са PQ и праве кроз Q која је паралелна са p. Сада су праве BP, q и x конкурентне, те је x права кроз $BP \wedge q$ која је паралелна са PQ. $\triangle$

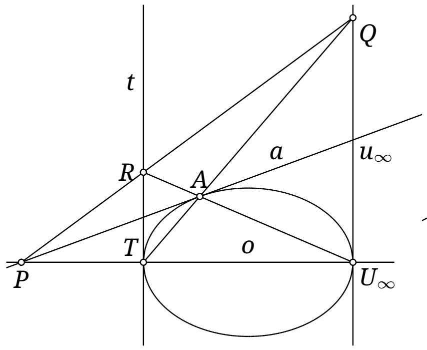
Задатак 4.83. Дате су различите праве a и o, као и тачка $A \in a$. Конструисати теме параболе Γ са осом o којој је a тангента у тачки $A \in \Gamma$.

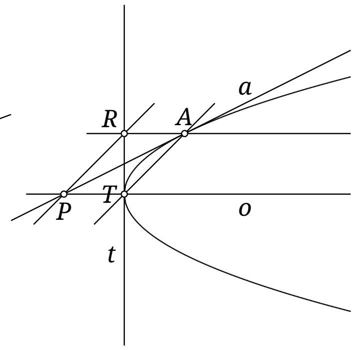


Решење. Нека је U_∞ додирна тачка параболе и u_∞, а тачка T тражено теме параболе Γ. Тачка B која је симетрична тачки $A \in \Gamma$ у односу на осу o такође припада Γ. Ако применимо Паскалову теорему на гранични четворотеменик $AABU_\infty U_\infty T$ добијамо

Паскалову праву коју чине $P = a \wedge u_\infty$, $Q = AB \wedge U_\infty T = AB \wedge o$, $R = BU_\infty \wedge TA$. Сада је $R = BU_\infty \wedge PQ$ и коначно $T = o \wedge AR$. На основу анализе, конструкцију изводимо на следећи начин. Конструишемо тачку Q као подножје нормале из A на праву o, а затим $A \neq B \in AQ \cap k(Q, QA)$. Даље је R сециште праве кроз B паралелне o и праве кроз Q паралелне a. Коначно T је сециште правих o и AR. $\triangle$

Задатак 4.84. Дата је права o и тачке $T \in o$ и $A \notin o$. Ако је A тачка параболе Γ са осом o и теменом T, конструисати тангенту на ту параболу у тачки A.



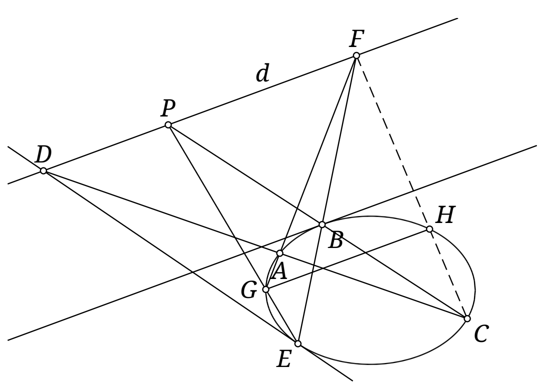


Решење. Нека је U_∞ додирна тачка параболе и u_∞, а t тангента у темену T параболе Γ. Ове елементе имамо на располагању будући да је $T \in t \perp o$ и $U_\infty = o \wedge u_\infty$. Применом Паскалове теореме на гранични тротеменик $AATTU_\infty U_\infty$ добијамо колинеарне тачке $a \wedge TU_\infty = a \wedge o = P$, $AT \wedge u_\infty = Q$, $t \wedge U_\infty A = R$. Даље је $P = QR \wedge o$ и коначно $a = AP$. Дакле, конструкција се изводи на следећи начин. Најпре је R сециште праве кроз A паралелне o и праве t, а затим је P сециште праве кроз R паралелне AT и праве o, те је завршно $a = AP$ тражена тангента. $\triangle$

Задатак 4.85. Дате су тачке A, B, T и права p. Ако хипербола Γ има асимптоту p, тангенту AT и $A, B \in \Gamma$, конструисати другу тангенту из T на Γ.

Решење. Права $a = TA$ је једна тангента на Γ, а нека је $x \ni T$ друга тражена тангента. Да би одредили x природно је применити Бријаншонову теорему где a и x постављамо за суседне странице. Међутим, како немамо довољно тангенти за примену, прво ћемо одредити тангенту $b \ni B$. Ако је $P_\infty = p \wedge u_\infty$ додирна тачка асимптоте, примена Паскалове теореме на гранични тротеменик $AABBP_\infty P_\infty$ даје b. Затим примењујемо Бријаншонову теорему, на пример, на гранични четворотеменик $aaxppb$. $\triangle$

Задатак 4.86. Нека су A, B, C тачке недегенерисане конике Γ, а d права која је паралелна са тангентом на Γ у B. Нека је $D = AC \wedge d$, E додирна тачка Γ и неке њене тангенте кроз D, $F = BE \wedge d$ и $G \neq A$ пресечна тачка праве AF и конике Γ. Ако је H тачка конике Γ таква да су GH и d паралелне, доказати да су тачке C, F, H колинеарне.



Решење. Примена Паскалове теореме на гранични петотеменик $EEBCAG$ даје колинеарне тачке D, F, P, где је $P = BC \wedge EG$, што значи да $P \in d$. Након тога, примена Паскалове теореме на гранични петотеменик $HCBBEG$ даје колинеарне тачке P, B_∞ и $HC \wedge BE$, где је B_∞ бесконачна тачка тангенте у тачки B. Међутим, из паралелности следи $B_\infty \in d$, што значи да је Паскалова права у претходној примени теореме управо права d, те су праве HC, BE и d конкурентне у F, односно тачке H, C, F су колинеарне. $\triangle$

4.11 Конике у $\mathbb{RP}^2$

Коника Γ у реалној пројективној равни одређена је симетричном матрицом G тако што $X \in \Gamma$ ако и само ако важи $\overrightarrow{X}^\intercal G \overrightarrow{X} = 0$, при чему је коника недегенерисана уколико јој је матрица регуларна. Полара тачке P у односу на недегенерисану конику одређена је вектором $G\overrightarrow{P}$.

Задатак 4.87. Дата је коника $\Gamma : 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$. Одредити једначину поларе тачке $A(1:0:1)$. Наћи, ако постоје, тангенте из A на криву Γ. Наћи пол праве $x_3 = 0$.

Решење. Једначина конике је $X^\intercal G X = 0$, где је њена матрица

$$G \propto \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Полара тачке A се једноставно рачуна

$$\overrightarrow{\mathrm{pol} A} \propto G\overrightarrow{A} \propto \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

те је $\mathrm{pol} A = [2 : -1 : -2]$. Међутим, како је $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{pol} A} = 0$ то $A \in \mathrm{pol} A$ и постоји само једна тангента кроз A на конику и то је баш полара $[2 : -1 : -2]$.

Пол праве $q[0 : 0 : 1]$ тражимо из $\overrightarrow{q} \propto G\overrightarrow{\mathrm{pol}\, q}$, те је $\overrightarrow{\mathrm{pol}\, q} \propto G^{-1}\overrightarrow{q}$. Један начин је искористити инверзну матрицу

$$G^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -6 & -4 & -4 \\ -6 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

од које нам је потребна само њена трећа колона, после чега је $\mathrm{pol}\, q = (6 : 4 : 7)$.

Ако је проблем наћи инверзну матрицу, можемо расписати $\overrightarrow{q} \propto G\overrightarrow{\mathrm{pol}\, q}$ са

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

одакле је $2x_1 - 3x_2 = 0$ и $-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Даље је $x_1 = 3x_2/2$, те $7x_2/2 = 2x_3$, односно $x_3 = 7x_2/4$, што даје $\mathrm{pol}\, q = (3/2 : 1 : 7/4) = (6 : 4 : 7)$. $\triangle$

Задатак 4.88. Дата је коника $\Gamma : 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$. Одредити тангенте из тачке $A(1:1:1)$ на конику Γ. Да ли је права $x_3 = 0$ тангента на Γ?

Решење. Једначина конике је $X^\mathsf{T}GX = 0$, где је њена матрица

$$G \propto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тражимо полару тачке A са

$$\overrightarrow{\mathrm{pol}A} \propto G\overrightarrow{A} \propto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

те је $\mathrm{pol}A = [1 : -1 : -1]$. Додирне тачке тангенти добијамо у пресеку конике и поларе. Решавањем система једначина $3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ (коника) и $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ (полара) добијамо два решења, тачке $M(1 : 0 : 1)$ и $N(1 : 1 : 0)$. Тражене тангенте су праве $AM[1 : 0 : -1]$ и $AN[1 : -1 : 0]$, односно $x_1 = x_3$ и $x_1 = x_2$.

Да ли је нека права тангента на конику можемо одгонетнути на више начина. На пример, можемо пронаћи пол $P(x_1 : x_2 : x_3)$ те праве $p = [0 : 0 : 1]$ са

$$\overrightarrow{\mathrm{pol}P} \propto G\overrightarrow{P} \propto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p},$$

одакле добијамо систем $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$ чије је решење $P(1 : 1 : 2)$. Међутим, провером у једначину конике видимо да $P \notin \Gamma$, те $x_3 = 0$ није тангента.

Алтернативно, пресек Γ и праве $x_3 = 0$ даје $3x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = (3x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$, што значи да наша права сече конику у две тачке и не може бити тангента. $\triangle$

Задатак 4.89. Наћи једначину конике која додирује осу Ox у тачки $(3, 0)$, осу Oy у тачки $(0, 2)$ и додирује бесконачну праву.

Решење. Једначина конике је $X^\mathsf{T}GX = 0$, где је њена матрица

$$G \propto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Имамо две везе пол-полара: $(3 : 0 : 1) \leftrightarrow [0 : 1 : 0]$ и $(0 : 2 : 1) \leftrightarrow [1 : 0 : 0]$ на које примењујемо $\overrightarrow{\mathrm{pol}A} \propto G\overrightarrow{A}$. Из прве везе добијамо $3a_{11} + a_{13} = 0$ и $3a_{13} + a_{33} = 0$, док из друге $2a_{22} + a_{23} = 0$ и $2_{23} + a_{33} = 0$. Одатле је $a_{13} = -3a_{11}$, $a_{33} = -3a_{13} = 9a_{11}$, $a_{23} = -a_{33}/2 = -9a_{11}/2$, $a_{22} = -a_{23}/2 = 9a_{11}/4$, што нас за $a = a_{11}/4$, $b = a_{12}$ доводи до

$$G \propto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -3a_{11} \\ a_{12} & \frac{9}{4}a_{11} & -\frac{9}{2}a_{11} \\ -3a_{11} & -\frac{9}{2}a_{11} & 9a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & b & -12a \\ b & 9a & -18a \\ -12a & -18a & 36a \end{pmatrix}.$$

Коника $4ax_1^2 + 2bx_1x_2 - 24ax_1x_3 + 9ax_2^2 - 36ax_2x_3 + 36ax_3^2 = 0$ додирује $x_3 = 0$, што значи да постоји дупло решење квадратне једначине $4ax_1^2 + 2bx_1x_2 + 9ax_2^2 = 0$. Дискриминанта ове једначине $(2b)^2 - 4 \cdot 4a \cdot 9a = 4(b^2 - 36a^2)$ мора бити нула, што нас доводи до потенцијалних решења $b = \pm 6a$. Како је $\det G = 36a(-36a^2 + 12ab - b^2)$, а коника није дегенерисана, то отпада $b = 6a$, те преостаје $b = -6a$. Коначно, тражена коника има једначину $4x_1^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 9x_2^2 - 36x_2x_3 + 36x_3^2 = 0$. $\triangle$

Задатак 4.90. Одредити фамилију свих недегенерисаних коника које садрже тачке $(2 : 0 : 1)$ и $(0 : 1 : 1)$, а за тангенте имају праве $x_1 = 0$ и $x_1 = 2x_3$. Одредити параболе из ове фамилије.

Решење. Како је $(2:0:1) \in [1:0-2]$ и $(0:1:1) \in [1:0:0]$, то имамо две везе пол-полара. Ако је $G = (a_{ij})_{ij}$ матрица конике имамо

$$G\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a_{11}+a_{13}\\2a_{12}+a_{23}\\2a_{13}+a_{33}\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},$$

$$G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}+a_{13}\\a_{22}+a_{23}\\a_{23}+a_{33}\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

одакле добијамо четири једначине: $2(2a_{11}+a_{13})+(2a_{13}+a_{33}) = 0$, $2a_{12}+a_{23} = 0$, $a_{22}+a_{23} = 0$, $a_{23}+a_{33} = 0$. Можемо изразити $a_{23} = -2a_{12}$, $a_{22} = 2a_{12}$, $a_{33} = 2a_{12}$, $2a_{11}+2a_{13} = -a_{12}$. За $a_{12} = 0$ је очигледно $\det G = 0$, те можемо матрицу скалирати са $a_{12} = 2$, одакле је даље $a_{23} = -4$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 4$, $a_{11}+a_{13} = -1$. Матрица конике за $a = a_{11}$ је

$$G \propto \begin{pmatrix} a & 2 & -a-1\\ 2 & 4 & -4\\ -a-1 & -4 & 4\end{pmatrix}.$$

Рачунамо $\det G = -4(1-a)^2$, те случај $a = 1$ даје дегенерисану конику. Тражене конике имају једначину $ax_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-2(a+1)x_1x_3-8x_2x_3 = 0$ за $a \neq 1$. Парабола има тангенту $x_3 = 0$ што у пресеку са коником даје $ax_1^2+4x_2^2+4x_1x_2 = 0$, док је дискриминанта ове квадратне једначине нула само за $a = 1$, што није дозвољено, односно тражена парабола не постоји. △

Задатак 4.91. Дате су тачке афине равни $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ и $D(0,1)$. У хомогеним координатама одредити формуле колинеације f при којој су тачке A и C фиксне, док се тачке B и D пресликавају редом у бесконачне тачке правих AB и AD. Одредити слике унутрашњости квадрата $ABCD$, као и круга $k(C, CB)$ при колинеацији f. Која је афина једначина криве $f(k)$?

Решење. Преласком на хомогене координате имамо $A(0:0:1)$, $B(1:0:1)$, $C(1:1:1)$, $D(0:1:1)$. Права AB има једначину $x_2 = 0$, те је њена бесконачна тачка $E(1:0:0)$. Права AD има једначину $x_1 = 0$, те је њена бесконачна тачка $F(0:1:0)$. Колинеацију

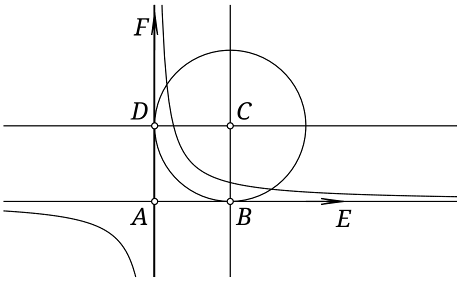
$$\lambda\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

једнозначно одређујемо из услова $(A,B,C,D) \mapsto (A,E,C,F)$.

$$\begin{array}{r|r|r|r} 0 = a_{13} & 0 \neq a_{11}+a_{13} & \lambda = a_{11}+a_{12}+a_{13} & 0 = a_{12}+a_{13}\\ 0 = a_{23} & 0 = a_{21}+a_{23} & \lambda = a_{21}+a_{22}+a_{23} & 0 \neq a_{22}+a_{23}\\ 0 \neq a_{33} & 0 = a_{31}+a_{33} & \lambda = a_{31}+a_{32}+a_{33} & 0 = a_{32}+a_{33}\end{array}$$

Одмах је $a_{13} = a_{23} = a_{21} = a_{12} = 0$, а добијамо и $\lambda = a_{11} = a_{22} = a_{31} = a_{32} = -a_{33}$. Тражена колинеација је

$$\begin{aligned}\lambda x_1' &= x_1\\ \lambda x_2' &= x_2\\ \lambda x_3' &= x_1+x_2-x_3\end{aligned}$$



Једначина круга $k(C, CB)$ је $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, што хомогенизацијом доноси једначину $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$. Инверзна колинеација је $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_1' + x_2' - x_3'$, те заменом у једначину после сређивања добијамо ${x_3'}^2 - 2x_1'x_2' = 0$, што је хипербола $x'y' = 1/2$. △

Задатак 4.92. Дата је коника $\Gamma\colon x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ и тачка $A(1:2:1)$. Одредити тангенте из тачке A на конику Γ. Ако су T_1 и T_2 додирне тачке тангенти из A на Γ, одредити још неку конику која садржи тачке T_1 и T_2 и има за тангенте праве AT_1 и AT_2.

Решење. Погледајмо матрицу конике и рачун за полару

$$G \propto \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{pol} A} \propto G\overrightarrow{A} \propto \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Полара тачке A је права $\mathrm{pol} A = [-4 : 2 : 4] = [-2 : 1 : 2]$ и ту леже додирне тачке тангенти, $\mathrm{pol} A \cap \Gamma = \{T_1, T_2\}$. Налазимо их из система $x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$, $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Након што заменимо $2x_1 = x_2 + 2x_3$ у прву једначину добијамо $x_2^2 + 4x_3^2 - (x_2 + 2x_3)x_2 - 2(x_2 + 2x_3)x_3 + 2x_2x_3 = 0$, односно $-2x_2x_3 = 0$. Постоје два решења, у првом је $x_2 = 0$, што даје $T_1(1:0:1)$, односно тангенту $AT_1 = [1:0:-1]$, док је у другом $x_3 = 0$, што даје $T_2(1:2:0)$, односно тангенту $AT_2 = [2:-1:0]$.

У другом делу задатка постављамо две везе пол-полара. Из прве имамо

$$G'\overrightarrow{T_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{13} \\ a_{12} + a_{23} \\ a_{13} + a_{33} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AT_1},$$

што даје $a_{12} + a_{23} = 0$ и $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0$. Из друге имамо

$$G'\overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} \\ a_{12} + 2a_{22} \\ a_{13} + 2a_{23} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AT_2},$$

одакле је $a_{13} + 2a_{23} = 0$ и $a_{11} + 4a_{12} + 4a_{22} = 0$. За $a = \frac{1}{4}a_{11}$ и $b = a_{23}$ имамо $a_{13} = -2b$, $a_{12} = -b$, $a_{33} = -4a + 4b$, $a_{22} = -a + b$, односно

$$G' \propto \begin{pmatrix} 4a & -b & -2b \\ -b & -a + b & b \\ -2b & b & -4a + 4b \end{pmatrix}.$$

Детерминанта је $\det G' = 16a^3 - 32a^2b + 20ab^2 - 4b^3 = 4(a-b)(2a-b)^2$, тако да не одговарају само $b = a$ и $b = 2a$. Почетна коника очигледно има $a = 0, b = 1$, а другу конкретну конику можемо добити са $a = 1, b = 0$ што даје $4x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 = 0$. △

Задатак 4.93. Одредити једначину круга $x^2 + y^2 = 1$ у координатном систему са базним тачкама $A_1(1,0)$, $A_2(0,1)$, $A_3(-1,0)$, $B(0,-1)$.

Решење. Како знамо старе и нове координате на тачкама A_1, A_2, A_3, B то можемо пронаћи матрицу везе. Приметимо да задатак захтева слику конике, те је захвалније тражити матрицу M за коју је $\lambda X = MX'$. За тачку A_1 имамо $(1:0:1) \mapsto (1:0:0)$, одакле је $m_{31} = m_{11}, m_{21} = 0$. За тачку A_2 имамо $(0:1:1) \mapsto (0:1:0)$, одакле је $m_{12} = 0$, $m_{32} = m_{22}$. За тачку A_3 имамо $(-1:0:1) \mapsto (0:0:1)$, одакле је $m_{33} = -m_{13}$, $m_{23} = 0$. Коначно за тачку B је $(0:-1:1) \mapsto (1:1:1)$, одакле добијамо $m_{11} + m_{12} + m_{13} = 0$, $m_{31} + m_{32} + m_{33} = -m_{21} - m_{22} - m_{23}$, што даје $m_{13} = -m_{11}$ и $m_{22} = -m_{11}$. Тако смо добили матрицу

$$M \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

из које читамо везу $\lambda x_1 = x_1' - x_3'$, $\lambda x_2 = -x_2'$, $\lambda x_3 = x_1' - x_2' + x_3'$ коју мењамо у једначину круга $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Добијамо $(x_1' - x_3')^2 + (-x_2')^2 - (x_1' - x_2' + x_3')^2 = 0$, што после сређивања постаје $2x_1'x_2' - 4x_1'x_3' + 2x_2'x_3' = 0$, односно хипербола $x'y' - 2x' + y' = 0$. △

Задатак 4.94. Нови хомогени координатни систем за базне тачке има $A_1(2,0)$, $A_2(0,2), A_3(3,1), B(-1,1)$. Коника Γ садржи тачке A_1, A_2, A_3, B и додирује x-осу у старом афином систему. Одредити једначину конике Γ у новом систему.

Решење. Како знамо старе и нове координате на тачкама A_1, A_2, A_3, B рачунамо матрицу M промене координата $\lambda X = MX'$. За тачку A_1 имамо $(2:0:1) \mapsto (1:0:0)$, одакле је $m_{11} = 2m_{31}$, $m_{21} = 0$. За тачку A_2 имамо $(0:2:1) \mapsto (0:1:0)$, одакле је $m_{12} = 0$, $m_{22} = 2m_{32}$. За тачку A_3 имамо $(3:1:1) \mapsto (0:0:1)$, одакле је $m_{23} = m_{33}$, $m_{13} = 3m_{33}$. Коначно за тачку B је $(-1:1:1) \mapsto (1:1:1)$, одакле добијамо $-(m_{11} + m_{12} + m_{13}) = m_{21} + m_{22} + m_{23} = m_{31} + m_{32} + m_{33}$. Након мало рачуна добијамо

$$M \propto \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Наша тангента је x-оса, која има координате $U[0:1:0]$, те применом $U' = M^{\mathsf{T}}U$ добијамо њену слику $U'[0:2:-1]$ која је тангента у новим координатама. Једначина конике у новом систему је општег облика

$$a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' = 0.$$

Из $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1) \in \Gamma$ следи $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Приде је $[0:2:-1]$ тангента у тачки $(1:0:0)$, самим тим њена полара, одакле важи

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

што даје $a_{12} = -2a_{13}$. Из услова $(1:1:1) \in \Gamma$ добијамо $a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$, односно $a_{23} = a_{13}$. Одавде добијамо тражену једначину конике $2x_1'x_2' - x_1'x_3' - x_2'x_3' = 0$.

Ово је био најбржи пут ка решењу. Алтернативно, можемо тражити једначину оригиналне конике и добити $x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 = 0$, те онда даље пресликавати. Време можемо изгубити и тражећи директну трансформацију која има матрицу

$$M^{-1} \propto \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

да бисмо тек онда схватили да је за пресликавање конике потребан њен инверз. △

Задатак 4.95. Нека колинеација f преводи тачке $A_1(1:0:1)$, $A_2(1:0:0)$, $A_3(0:1:0)$, $B(2:1:1)$ редом у базне тачке. Нека је Γ парабола која припада фамилији коника $\{x_1^2+4x_2^2+ax_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3=0 : a\in\mathbb{R}\}$. Одредити слику од Γ при колинеацији f.

Решење. Пронађимо све параболе из дате фамилије коника. Услов додира са $x_3=0$ доноси двоструко решење квадратне једначине $x_1^2+2ax_1x_2+4x_2^2=0$, односно нула дискриминанту, што је еквивалентно услову $a^2=4$. Ово је потребан услов, док је довољан услов регуларност матрице наше конике

$$G \propto \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 4 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Како је $\det G = -a^3+8a-8$, то морамо искључити случај $a=2$, те преостаје $a=-2$ када је $\det G=-16\neq 0$, односно $\Gamma\colon x_1^2+4x_2^2+-2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3=0$. Са друге стране можемо потражити матрицу A за коју је $\lambda X = AX'$, што ће рећи матрица колинеације f^{-1}. Како су дате тачке темена четворотеменика то је по Основној теореми колинеације матрица A једнозначно одређена до на сразмерност. На пример, видимо да матрица

$$A \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

испуњава тажене везе између четири пара тачака. Заменом оригинала сликама у једначину конике или применом формуле $G' = A^\mathsf{T} G A$ добијамо

$$G' \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Одавде тражена слика конике Γ има једначину $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3=0$. $\triangle$

Задатак 4.96. Дате су праве $a\colon x_1=0, b\colon x_2=0, c\colon x_3=0$ и тачке $P(1:1:1)$ и $Q(1:2:3)$. Ако је f колинеација задата са $f(a)=b, f(b)=c, f(c)=a$ и $f(P)=Q$, одредити слику $f(\Gamma)$ ако је коника $\Gamma\colon x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2=0$.

Решење. Да бисмо колинеацијом f пресликали конику потребна нам је матрица M за коју је $\lambda X = MX'$, односно инверзна матрица од f, а тада се праве сликају формулом $\lambda U' = M^\mathsf{T} U$. Из $[1:0:0]\mapsto[0:1:0]$ имамо $m_{11}=m_{13}=0$, из $[0:1:0]\mapsto[0:0:1]$ је $m_{21}=m_{22}=0$, док из $[0:0:1]\mapsto[1:0:0]$ добијамо $m_{32}=m_{33}=0$. Имајући у виду $f(P)=Q$, односно $M\overrightarrow{Q}\propto\overrightarrow{P}$, следи $m_{12}=2m_{31}$, $m_{23}=3m_{31}$, што одређује матрицу

$$M \propto \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

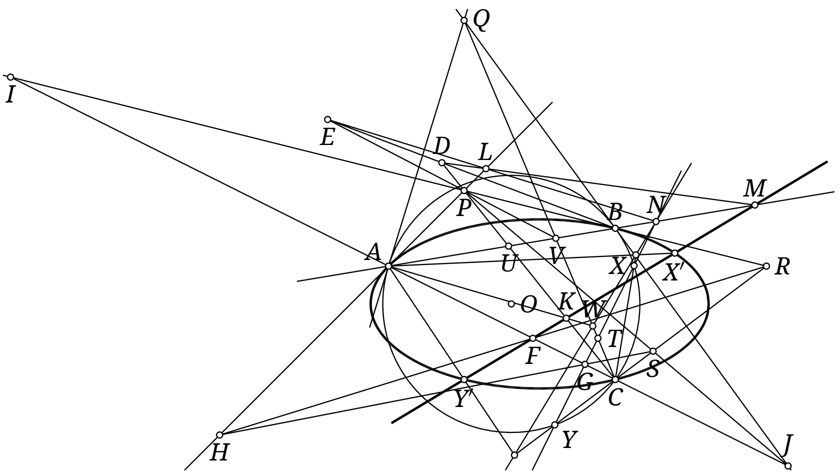
односно формуле $\lambda x_1 = 3x_2'$, $\lambda x_2 = 2x_3'$, $\lambda x_3 = 6x_1'$. Ако је G матрица конике Γ онда тражена коника у слици има матрицу $G' = M^\mathsf{T} G M$, али је једноставније заменити формуле у једначину конике за $(3x_2')^2+2(2x_3')^2+3(6x_1')^2+4(3x_2')(2x_3')=0$, односно $108x_1^2+9x_2^2+8x_3^2+24x_2x_3=0$. $\triangle$

4.12 Разни задаци

Задатак 4.97. Конструисати пресек праве t са коником Г.

Решење. Коника се уобичајено задаје са пет елемената. Претпоставимо да имамо три тачке конике $A, B, C \in \Gamma$ и две тангенте $a \ni A$, $b \ni B$. Уколико су дати неки други елементи до наведених елемената долазимо применама Паскалове или Бријаншонове теореме, али ове теореме нам не могу суштински решити задатак.

Приметимо да лењиром и шестаром можемо да конструишемо круг, али не и конику, док са друге стране можемо конструисати произвољно много тачака конике. Такође, конструкција лењиром и шестаром подразумева да можемо конструисати пресек праве и круга, док је за конструкцију пресека праве и конике потребно више труда који следи. Основна идеја је пронаћи колинеацију која конику пресликава на круг. Колинеација пресликава тангенте у тангенте, које су у случају круга нормале на одговарајући полупречник. Ако претпоставимо да наша колинеација фиксира тачке A, B, C долазимо до тога да тачка $P = a \wedge b$ иде у сециште Q тангенти у тачкама A и B на круг k описан око троугла ABC. Дакле, ако је O центар описаног круга троугла ABC, тачка Q је сециште нормале из A на OA и нормале из B на OB.



По Основној теореми колинеације, колинеација је једнозначно задата на два четворотеменика, тако да f дефинишемо са $(A, B, C, P) \mapsto (A, B, C, Q)$. Коника Г је једнозначно одређена тачкама A, B, C које су фиксне и тангентама PA и PB које се сликају у QA и QB. Међутим, $A, B, C \in k$, док су QA и QB тангенте на k чиме је коника једнозначно одређена, односно важи $f(\Gamma) = k$. Уколико је t произвољна права, преостаје нам да пронађемо праву $f(t)$, затим да њом пресечемо круг k за $k \cap f(t)$ и онда одредимо $f^{-1}(k \cap f(t))$.

Како су тачке A и B фиксне, то је AB фиксна права. Рестрикција f на њу је хиперболички пројективитет са фиксним A и B. Знамо да је $AB \wedge CP = U \mapsto V = AB \wedge CQ$, а питамо се шта је слика тачке $M = AB \wedge t$. Хиперболички пројективитет можемо представити као композицију два перспективитета. Најпре узимамо произвољно $D \in UPC$, при чему теоретски може бити $D = C$, али је практично боље изабрати погоднију тачку (да слика не изађе ван папира). Затим постављамо $E = VP \wedge BD$ и правимо пројективитет $f_1 = (AB)\overset{D}{\overline{\wedge}}(AP)\overset{E}{\overline{\wedge}}(AB)$. Како је A заједничка за домене и кодомене она је фиксна, а како за центре перспективитета имамо $B \in DE$ то је и B фиксна. По самој конструкцији имамо $U \mapsto P \mapsto V$, тако да смо по Основној теореми пројективитета раставили $f{\restriction}_{AB} = f_1$. Ако поставимо $L = MD \wedge AP$ и $N = EL \wedge AB$, добијамо $M \mapsto L \mapsto N$, односно $f(M) = N$.

Ово можемо поновити за фиксну праву AC. Знамо да је $AC \wedge BP = I \mapsto J = AC \wedge BQ$, а питамо се шта је слика тачке $F = AC \wedge t$. Узимамо произвољно $R \in IPB$, при чему може бити $R = B$, те $S = JP \wedge CR$ и правимо пројективитет $f_2 = (AC) \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} (AP) \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} (AC)$. Ово обезбеђује да f_2 има фиксне тачке A и B, као и $I \mapsto P \mapsto J$, те добијамо $f\restriction_{AC} = f_2$. Ако поставимо $H = FR \wedge AP$ и $G = SH \wedge AC$, добијамо $F \mapsto H \mapsto G$, односно $f(F) = G$.

За сада смо пронашли $(M, F) \mapsto (N, G)$, те је права NG слика праве $t = MF$. У слици сечемо праву и круг, рецимо $k \cap NG = \{X, Y\}$ (уколико пресек не постоји онда Γ и t немају пресек), те преостаје да пронађемо $f^{-1}(X)$ и $f^{-1}(Y)$. Како је $PC \mapsto QC$, то је $MF \wedge PC = K \mapsto T = NG \wedge QC$, одакле можемо раставити пројективитет $(M, K, F) \mapsto (N, T, G)$. На пример, за $W = AK \wedge CT$, постављамо $f_3 = (MF) \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} (WN) \overset{C}{\underset{\wedge}{=}} (NG)$, где је $(M, K, F) \mapsto (N, W, ?) \mapsto (N, T, G)$, те мора бити $f_3 = f\restriction_t$. Сада добијамо $X_1 = XC \wedge WN$ и $X' = X_1 A \wedge MF$, односно $Y_1 = YC \wedge WN$ и $Y' = Y_1 A \wedge MF$. Овако долазимо до тражених пресека $X' = f^{-1}(X)$ и $Y' = f^{-1}(Y)$ конике Γ и праве t. △

Задатак 4.98. Пројективна колинеација Папосове равни има тачно a фиксних тачака. Колики је број тачака у тој равни уколико је а) $a = 6$; б) $a = 7$; в) $a = 8$?

Решење. У Папосовој равни важи Основна теорема колинеације по којој уколико пројективна колинеација има фиксна темена четворотеменика она мора бити идентитет. Идентитет је могућ само уколико је број тачака облика $r^2 + r + 1$, што се дешава само под б) кад је $r = 2$. У супротном нема фиксних темена четворотеменика, те за $a \geqslant 4$ постоје три колинеарне фиксне тачке. Рестрикција колинеације на одговарајућу праву даје пројективитет који има три фиксне тачке, те по Основној теореми пројективитета мора бити индентитет. Дакле, у овом случају раван мора имати осу, те је у питању перспективна колинеација. Како је број фиксних тачака коначан перспективна колинеација мора бити коначна и имати неки ред r, а број тачака на свакој правој онда износи $r + 1$. Перспективна колинеација може бити хомологија која има центар ван осе и тада је $a = (r + 1) + 1$, односно елација која има центар на оси и тада је $a = r + 1$. Дакле, уколико колинеација није идентитет, онда је хомологија у равни реда $a - 2$ или елација у равни реда $a - 1$. Додатно, пројективна раван не може бити реда 6, рецимо по Брук-Рајзер теореми (Теорема 2.16). Када одредимо ред r пројективне равни она мора имати $r^2 + r + 1$ тачака тако да је све спремно за одговоре. а) Могућа је хомологија у равни реда 4 ($\mathbb{F}_4\mathbb{P}^2$) која има 21 тачку или елација у равни реда 5 ($\mathbb{Z}_5\mathbb{P}^2$) која има 31 тачку. б) Могућ је идентитет у равни реда 2 (Фаноова раван) која има 7 тачака или хомологија у равни реда 5 ($\mathbb{Z}_5\mathbb{P}^2$) која има 31 тачку. в) Могућа је једино елација у равни реда 7 ($\mathbb{Z}_7\mathbb{P}^2$) која има 57 тачака. △

Задатак 4.99. Израчунати број перспективних колинеација Дезаргове равни реда n.

Решење. Перспективне колинеације f Дезаргове равни генеришу се по Теореми 2.63. Оса s може бити било која права, те је бирамо на $n^2 + n + 1$ начина. Затим бирамо центар S, што даје $n + 1$ начин за елацију или n^2 начина за хомологију. На крају фиксирамо произвољну тачку $A \notin (s) \cup \{S\}$ која се слика у тачку са праве $A \vee S$ при чему не може отићи ни у S, ни у $(A \vee S) \wedge s$ (јер су то фиксне тачке), али ни у A (јер је $f \neq \mathbb{1}$), што даје $n - 1$ начина за елацију, односно $n - 2$ за хомологију. Множењем одговарајућих бројева добијамо $(n - 1)(n + 1)(n^2 + n + 1)$ елација и $n^2(n - 2)(n^2 + n + 1)$ хомологија, што у збиру даје $(n^3 - n^2 - 1)(n^2 + n + 1)$ перспективних колинеација. △

Задатак 4.100. Израчунати број (потпуних) тротеменика, четворотеменика и петотеменика, као и број хомологија, елација и недегенерисаних коника Фаноове равни.

Решење. Фаноова раван има 7 тачака и 7 правих. Број неуређених тројки тачака износи $7 \cdot 6 \cdot 5/3! = 35$, док оних тројки где су тачке колинеарне има колико и правих, односно 7, тако да је број тротеменика $35 - 7 = 28$. Тачке Фаноове равни које нису темена неког четворотеменика су његове дијагоналне тачке, а оне су колинеарне јер је сваки четворотеменик анти-Фаноов, тако да постоји бијекција између четворотеменика и правих, те је број четворотеменика једнак 7. За произвољних 5 тачака, кроз недостајуће две тачке пролази укупно 5 правих, тако да постоје две тројке колинеарних тачака у почетној фигури, што значи да у Фаноовој равни не постоји петотеменик. Фаноова раван је Дезаргова, те из Задатка 4.99 за $n = 2$ имамо 21 елацију, док хомологије не постоје. Недегенерисана коника Фаноове равни састоји се од три сецишта одговарајућих правих, односно у питању је тротеменик, те је тражени број 28. $\triangle$

Глава А

ДОДАТАК

А.1 Сопствена структура квадратне матрице

Линеарне трансформације на коначно димензионом векторском простору могу се исказати помоћу квадратних матрица. У ту сврху корисно је имати на располагању алате из линеарне алгебре који се тичу сопствене структуре квадратних матрица.

Нека је A произвољна квадратна матрица. Уколико за неки ненула вектор (колону) V и број $\lambda \in \mathbb{R}$ важи једначина $AV = \lambda V$, тада кажемо да је λ ***сойсшвена вредносш*** матрице A, док је V њен ***сойсшвени векшор*** који одговара тој сопственој вредности. Овај услов еквивалентан је хомогеној једначини $(A - \lambda\mathbb{1})V = 0$, која у случају $\det(A - \lambda\mathbb{1}) \neq 0$ има јединствено решење $V = 0$, тако да тада нема сопствених вектора. Дакле, сопствени вектор V постоји само ако одговара сопственој вредности λ која је нула ***каракшерисшичноī йолинома***

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$$

наше матрице A. Скуп свих сопствених вектора који одговарају некој сопственој вредности λ, заједно са нула вектором, чине ***сойсшвени йошйросшор*** $\mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbb{1})$. Вектори из различитих сопствених потпростора су суштински различити о чему говори наредна лема.

Лема А.1. *Сойсшвени векшори који одīоварају различишим сойсшвеним вредносшима су линеарно независни.*

Доказ. Нека је k минималан број линеарно зависних вектора који одговарају различитим сопственим вредностима матрице A. Нека $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0$ важи за неке векторе X_i и $\alpha_i \in \mathbb{R}$ са $AX_i = \lambda_i X_i$ за $1 \leqslant i \leqslant k$, где су $\lambda_i \in \mathbb{R}$ различити. Множењем слева матрицом A добијамо $\alpha_1\lambda_1 X_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k X_k = 0$. Ако од ове једначине одузмемо претходну множену са λ_1 добијамо $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)X_k = 0$. Како је k бирано минимално, то су $X_2, \ldots, X_k$ линеарно независни одакле следи $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \ldots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0$. Сопствене вредности λ_i су различите и отуда контрадикторно $\alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. □

Веома често срећемо се са симетричном матрицом A, а у том случају на располагању имамо додатне бенефите.

Лема А.2. *Сойсшвене вредносши симешричне машрице су реалне.*

Доказ. У општем случају полином $\chi_A(\lambda)$ се факторише над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$, те за сопствену вредност важи $\lambda \in \mathbb{C}$. Услов $AV = \lambda V$ еквивалентан је свом конјугату $A\bar{V} = \bar{\lambda}\bar{V}$, где је $\bar{V}$ колона која се састоји од конјугата елемената колоне V,

док је матрица A сама себи конјугат јер за улазе има реалне бројеве. Из једноставног рачуна
$$\lambda\bar{V}^{\intercal}V = \bar{V}^{\intercal}AV = (\bar{V}^{\intercal}AV)^{\intercal} = V^{\intercal}A\bar{V} = \bar{\lambda}V^{\intercal}\bar{V} = \bar{\lambda}(V^{\intercal}\bar{V})^{\intercal} = \bar{\lambda}\bar{V}^{\intercal}V,$$
добијамо $(\lambda - \bar{\lambda})\bar{V}^{\intercal}V = 0$, а како је $\bar{V}^{\intercal}V$ сума квадрата норми елемената из $V \neq 0$, то је $\bar{V}^{\intercal}V > 0$, одакле следи $\lambda = \bar{\lambda}$, што доказује $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Сопствени вектори из различитих сопствених потпростора су линеарно независни (Лема А.1), али у случају симетричне матрице они морају бити међусобно ортогонални.

Лема А.3. *Сопствени вектори симетричне матрице који одговарају различитим сопственим вредностима су међусобно ортогонални.*

Доказ. Уколико важи $AV = \lambda V$ и $AW = \mu W$, тада је
$$\lambda W^{\intercal}V = W^{\intercal}AV = (W^{\intercal}AV)^{\intercal} = V^{\intercal}AW = \mu V^{\intercal}W = \mu(V^{\intercal}W)^{\intercal} = \mu W^{\intercal}V,$$
одакле следи $(\lambda - \mu)W^{\intercal}V = 0$. Услов $\lambda \neq \mu$ повлачи $W^{\intercal}V = 0$, односно $W \cdot V = 0$. □

Штавише, наредна ***спектрална теорема*** нам дозвољава спектралну декомпозицију читавог векторског простора на директну суму сопствених потпростора, односно
$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda} \operatorname{Ker}(A - \lambda\,\mathbb{1}).$$

Теорема А.4. *Постоји ортонормирана база простора $\mathbb{R}^n$ која се састоји од сопствених вектора дате симетричне матрице реда n.*

Доказ. За сопствену вредност λ, по Леми А.2 је $\lambda \in \mathbb{R}$ и постоји вектор $E_1 \neq 0$ такав да је $AE_1 = \lambda E_1$, а не умањујући општост E_1 можемо скалирати односно сматрати да је јединичан. Како је $E_1^{\intercal}AX = X^{\intercal}AE_1 = \lambda X^{\intercal}E_1$, видимо да свако X ортогонално на E_1 даје AX ортогонално на E_1. Та инваријантност нам омогућава да причу рестрикујемо на векторски простор $\operatorname{Span}\{E_1\}^{\perp}$ што је потпростор од $\mathbb{R}^n$ димензије $n-1$. Индукција нам даје ортонормирану базу $E_2, \ldots, E_n$ у $\operatorname{Span}\{E_1\}^{\perp}$ која се састоји од сопствених вектора и допуњује са E_1 до комплетне базе у $\mathbb{R}^n$. □

А.2 Теорија бројева

У овој секцији изложили смо неке старе резултате из теорије бројева који су нам потребни да образложимо неке напредне резултате који су углавном везани за Брук-Рајзер теорему (Теорема 2.16).

Ојлеров идентитет о четири квадрата, појављује се у Ојлеровом писму Голдбаху[1] из 1748. године [28].

Лема А.5 (Ојлер). *Важи идентитет* $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) = c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2$, *где је* $c_1 = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$, $c_2 = a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3$, $c_3 = a_1b_3-a_2b_4-a_3b_1+a_4b_2$, $c_4 = a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2-a_4b_1$.

Доказ је очигледан и ради се конкретном провером. Важно је приметити да је линеарна веза
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & -b_1 & b_4 & -b_3 \\ b_3 & -b_4 & -b_1 & b_2 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

[1] Christian Goldbach (1690–1764), немачки математичар

дата матрицом детерминанте $(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)^2 \neq 0$ бијективна, односно да можемо линеарно изразити обрат

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & -b_1 & -b_4 & b_3 \\ b_3 & b_4 & -b_1 & -b_2 \\ b_4 & -b_3 & b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Ојлеров идентитет употребио је Лагранж, да би 1770. доказао своју теорему о четири квадрата у [50].

Лема А.6 (Лагранж). *Сваки природан број може се представити као збир четири квадрата целих бројева.*

Доказ. Захваљујући Леми А.5 довољно је доказати лему за непарне просте бројеве p. Како потпуни квадрати имају $(p+1)/2$ различитих остатака по модулу p, то по Дирихлеовом принципу постоје цели бројеви a и bтакви да p дели a^2+b^2+1, што повлачи да постоји $n < p$ такво да је $a^2+b^2+1^2+0^2 = np$. Нека је $m \in \mathbb{N}$ најмањи такав да је $mp = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$. Ако уведемо $y_i \equiv x_i \pmod m$ за $y_i \in [(1-m)/2, m/2]$ имамо $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 = mr$ за неко $r < m$. Из нове примене Леме А.5 добијамо $mpmr = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) = z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$, где $y_i \equiv x_i \pmod m$ даје $z_2 \equiv z_3 \equiv z_4 \equiv 0 \pmod m$, као и $z_1 \equiv y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 = mr \equiv 0 \pmod m$. Замена $w_i = z_i/m$ повлачи $rp = w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2$ са $r < m$, али како је m биран као најмањи то мора бити $m = 1$, односно $p = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ је збир четири квадрата. □

Лема А.7. *Ако је $nx^2 = y^2+z^2$ за целобројне n, x, y, z, тада је n збир два квадрата.*

Доказ. Нека је p неки прост фактор броја n, имамо $y^2+z^2 \equiv 0 \pmod p$, те постоји најмањи r тако да је $rp = y^2+z^2$ збир два квадрата. Ако уведемо $u \equiv y \pmod r$ и $v \equiv z \pmod r$ тако да је $|u|, |v| \leqslant r/2$ имамо $u^2+v^2 \equiv y^2+z^2 \equiv 0 \pmod r$, те је $u^2+v^2 = rs$. Добијамо једначину $r^2sp = (rp)(rs) = (y^2+z^2)(u^2+v^2) = (yv-zu)^2+(yu+zv)^2$, односно

$$sp = \left(\frac{yv-zu}{r}\right)^2 + \left(\frac{yu+zv}{r}\right)^2,$$

због $yv-zu \equiv yz-zy = 0 \pmod r$ и $yu+zv \equiv y^2+z^2 \equiv 0 \pmod r$. Међутим, како важи неједнакост

$$s = \frac{rs}{r} = \frac{u^2+v^2}{r} \leqslant \frac{(\frac{r^2}{2})^2+(\frac{r^2}{2})^2}{r} = \frac{r}{2} < r,$$

то следи да је sp збир два квадрата за $s < r$. Зато је $r = 1$, односно p је збир два квадрата. Већ виђена трансформација $(y^2+z^2)(u^2+v^2) = (yv-zu)^2+(yu+zv)^2$ омогућава да производ збирова два квадрата и даље буде збир два квадрата, те факторизација броја n на просте бројеве омогућава да он буде збир два квадрата. □

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Adam & B. J. Mautschler : *On Wedderburn's theorem about finite division algebras*, Universität Bielefeld, Preprint, 2003.

[2] B. Alimpić, N. Bokan & Z. Šnajder : *Zbirka zadataka iz projektivne i nacrtne geometrije*, Naučna knjiga, Beograd, 1992.

[3] В. Андрејић : *Пројективна геометрија равни*, Математички факултет, Београд, 2016.

[4] F. Bachmann : *Aufbau der geometrie aus dem spiegelungsbegriff*, Mathematischen wissenschaften 96, Springer, Berlin, 1959.

[5] R. Baer : *Homogeneity of Projective Planes*, Am. J. Math. **64** (1942), 137–152.

[6] J. Bamberg & T. Pentilla : *Completing Segre's proof of Wedderburn's little theorem*, Bull. Lond. Math. Soc. **47** (2015), 483–492.

[7] G. Bellavitis : *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica (Calcolo delle equipollenze)*, Ann. Lomb. Veneto **5** (1835), 244–250.

[8] R. C. Bose : *On the application of the properties of Galois fields to the problem of construction of hyper-Grœco-Latin squares*, Sankhyā Indian J. Statistics **3** (1938), 323–338.

[9] O. Blumenthal : *Lebensgeschichte*. In: D. Hilbert : *Gesammelte abhandlungen, dritter band: analysis, grundlagen der mathematik, physik verschiedenes*, Springer, Berlin (1935), 388–429.

[10] E. Bobillier : *Philosophie mathématique. Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue*, Ann. de Math. **18** (1827-1828), 320–339.

[11] N. Bokan & S. Vukmirović : *Projektivna geometrija*, Matematički fakultet, Beograd, 2004.

[12] A. Bosse : *Manière universelle de Mr Desargues, pour pratiquer la perspective*, Paris, 1648.

[13] C.-J. Brianchon : *Mémoire sur les surfaces courbes du second degré*, J. Éc. Polytech. **6** (1806), 297–311.

[14] R. H. Bruck & H. J. Ryser : *The non-existence of certain finite projective planes*, Can. J. Math. **1** (1949), 88–93.

[15] M. Chasles : *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837.

[16] M. Chasles : *Note sur une propriété générale des coniques*, Corr. Math. et Physique **4** (1828), 363–371.

[17] F. M. Clarke & D. E. Smith : *”Essay pour les coniques” of Blaise Pascal*, Isis **10** (1928), 16–20.

[18] J. L. Coolidge : *The rise and fall of projective geometry*, Am. Math. Mon. **41** (1934), 217–228.

[19] H. S. M. Coxeter : *Introduction to geometry*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1969.

[20] H. S. M. Coxeter : *Projective geometry*, Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.

[21] A. Cronhaim : *A Proof of Hessenberg's Theorem*, Proc. Am. Math. Soc. **4** (1953), 219–221.

[22] G. Desargues : *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, Paris, 1639.

[23] L. E. Dickson : *On the cyclotomic function*, Am. Math. Mon. **12** (1905), 86–89.

[24] R. Descartes : *La géométrie*. In R. Descartes : *Discours de la méthode*, Leyde, (1637), 376–493.

[25] L. Euler :*Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet, 1748.

[26] L. Euler :*De quadratis magicis*, Commentationes arithmeticae **2** (1849), 593–602.

[27] L. Euler :*Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques*, Commentationes arithmeticae **2** (1849), 302–361.

[28] L. Euler :*Euler à Goldbach, 4. Mai 1748*. In P. H. Fuss: em Correspondance mathématique et physique, Tome I, Saint-Pétersbourg, 1843, 450–455.

[29] G. Fano :*Sui postulati fondamentali della geometria in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Giornale di Matematiche **30** (1892), 106–132.

[30] P. Fermat : *Ad locos planos et solidos isagoge*. In P. Fermat : *Varia opera mathematica*, Tolosæ, (1679), 1–8.

[31] K. W. Feuerbach : *Grundriß zu analytischen untersuchungen der dreieckigen pyramide*, Nürnberg, 1827.

[32] J. Gallier : *Basics of Affine Geometry*. Chapter 12 in *Algebra, Topology, Differential Calculus, and Optimization Theory For Computer Science and Engineering*, 2017.

[33] C. F. Gauss : *Schumacher an Gauss, 10. August 1842 - Über vermutungen Clausens.*, Gauss Werke **12**, Göttingen, Dieterich, 1863, 16–16.

[34] J. D. Gergonne : *Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue*, Ann. de Math. **16** (1825-1826), 209–231.

[35] A. M. Gleason : *Finite Fano planes*, Am. J. Math. **78** (1956), 797–807.

[36] M. Hall : *Projective planes*, Trans. Am. Math. Soc **54** (1943), 229–277.

[37] W. R. Hamilton : *On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra*, Phil. Mag. (3) **25** (1844), 10–13.

[38] R. Hartshorne : *Foundations of projective geometry*, Benjamin, New York, 1967.

[39] G. Hessenberg : *Beweis des Desarguesschen satzes aus dem Pascalschen*, Math. Ann **61** (1905), 161–172.

[40] A. Heyting : *Axiomatic projective geometry*, 2nd Edition, North Holland, 1980.

[41] D. Hilbert : *Grundlagen der geometrie*, Leipzig, 1899.

[42] D. R. Hughes & F. C. Piper: *Projective planes*, Springer, 1973.

[43] A. Jones : *Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*, Springer, 1986.

[44] G. Kalajdžić & M. Đorić : *Geometrija (materijal za studente)*, 2003.

[45] I. Keplero : *Ad vitellionem paralipomena, quibus astronomiæ pars optica traditur*, Francofurti, 1604.

[46] M. Kline : *Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 3*, Oxford University Press, 1990.

[47] D. Klive & L. Stemkoski : *Graeco-Latin squares and a mistaken conjecture of Euler*, College Math. J. **37** (2006), 2–15.

[48] J. H. van Lint & R. M. Wilson : *A course in combinatorics*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2001.

[49] C. W. H. Lam, L. Thiel & S. Swiercz : *The non-existence of finite projective planes of order 10*, Can. J. Math. **41** (1989), 1117–1123.

[50] J. L. Lagrange : *Démonstration d'un théorème d'arithmétique*, Nouveaux mémoires de l'Académie royale de Berlin (1770), 1772, 123–133.

[51] C. W. H. Lam : *The search for a finite projective plane of order 10*, Am. Math. Mon. **98** (1991), 305–318.

[52] H. Lenz : *Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalpunkte haben*, Arch. Math. **4** (1953), 327–330.

[53] Z. Lučić : *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, 2009.

[54] S. Mills : *Note on the Braikenridge–Maclaurin Theorem*, Notes. Rec. R. Soc. Lond. **38** (1984), 235–240.

[55] M. Mitrović : *Projektivna geometrija*, Skripta internacional, Beograd, 1997.

[56] A. F. Möbius : *Der barycentrische calcul*, Leipzig, 1827.

[57] F. R. Moulton : *A simple non-desarguesian plane geometry*, Trans. Am. Math. Soc **3** (1902), 192–195.

[58] H. Neumann : *On some finite non-desarguesian planes*, Arch. Math. **6** (1954), 36–40.

[59] V. Niče : *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[60] D. Palman : *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[61] K. H. Parshall : *In pursuit of the finite division algebra theorem and beyond: Joseph H. M. Wedderburn, Leonard E. Dickson, and Oswald Veblen*, Arch. Internat. Hist. Sci. **33** (1983), 274–299.

[62] G. Pickert : *Projektive ebenen*, Mathematischen wissenschaften 80, Springer, Berlin, 1955.

[63] J. Plücker : *Über ein neues coordinatensystem.*, J. Reine Angew. Math. **5** (1830), 1–36.

[64] J. V. Poncelet : *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822.

[65] J. V. Poncelet : *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques: pour faire suite au Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*, J. Reine Angew. Math. **4** (1829), 1–71.

[66] M. Prvanović : *Projektivna geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1968.

[67] J. Richter-Gebert : *Perspectives on projective geometry*, Springer, 2011.

[68] J. F. Rigby : *Collineations, correlations, polarities, and conics*, Canad. J. Math. **19** (1967), 1027-1041.

[69] F. W. Stevenson : *A note on projective collineations*, Arch. Math. **23** (1972), 446-448.

[70] D. R. Stinson : *A short proof of the non-existence of a pair of orthogonal Latin squares of order 6*, J. Combin. Theory Ser. A **36** (1984), 373-376.

[71] G. K. Staudt : *Geometrie der lage*, Nürnberg, 1847.

[72] J. Steiner : *Systematische entwicklung der abhängigkeit geometrischer gestalten von einander*, Berlin, 1832.

[73] E. J. Straume : *A survey of the development of geometry up to 1870*, NTNU, 2009; arXiv:1409.1140 [math.HO].

[74] G. Tarry : *Le problème des 36 officiers*, C. R. Assoc. Fran. Av. Sci. **1** (1900), 122–123, **2** (1901), 170–203.

[75] С. Вукмировић & З. Станић : *Збирка задатака из пројективне геометрије са применама у рачунарској графици*, Математички факултет, Београд, 2003.

[76] O. Weblen & J. W. Young : *Projective geometry*, Ginn and company, 1910.

[77] J. H. M. Wedderburn : *A theorem on finite algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **6** (1905), 349–352.

[78] C. Weibel : *Survey of non-Desarguesian planes*, Notices Am. Math. Soc. **54** (2007), 1294–1303.

ИНДЕКС ПОЈМОВА