NACRTNA GEOMETRIJA (Martovski rok) - 18. Mart 2006.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Naći (bar jedan) novi projektivni sistem u čijim je afinim koordinatama preslikavanje $\lambda x_1' = 2x_2$, $\lambda x_2' = 3x_1 - x_2$ homotetija.

Rešenje : Dato preslikavanje može se zapisati kao $X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$. Karakteristični polinom matrice preslikavanja biće $\chi(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda) - 3 \cdot 2 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2)$. Sopstvenim vrednostima -3 i 2 odgovaraju redom sopstveni vektori $(-2, 3)$ i $(1, 1)$, te su fiksne tačke preslikavanja (u starom sistemu) $(-2 : 3)$ i $(1 : 1)$. Homotetija na pravoj ima za fiksne tačke centar homotetije i beskonačno daleku tačku. Da bi rešili zadatak moramo fiksnim tačkama dodeliti koordinate beskonačno daleke i centra homotetije u novom sistemu. Ukoliko želimo da se homotetija jasno vidi uzećemo da je centar homotetije nula. Zato ćemo u kolone matrice prelaska upisati vektore predstavnike fiksnih tačaka. Na primer $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, što zapravo znači da je nova baza $f_1 = -2e_1 + 3e_2$ i $f_2 = e_1 + e_2$. Matrica prelikavanja u novoj bazi biće $C^{-1}AC$, te kako je $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ imamo

$$C^{-1}AC \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. U novom sistemu preslikavanje je dakle $\lambda x_1' = -3x_1$, $\lambda x_2' = 2x_2$, odnosno afino $x' = -\frac{3}{2}x$, što je očigledno homotetija. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Date su tri konkurentne prave p, q, a i tačke A_1, A_2, A_3 na pravoj a. Ako su f_1, f_2, f_3 perspektivna preslikavanja prave p na pravu q sa centrima A_1, A_2, A_3 (tim redom), dokazati da važi $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.

Rešenje: Potrebno je i dovoljno pokazati da za proizvoljno $P \in p$ važi $(f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1)(P) = (f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3)(P)$. Neka je $Q_1 := f_1(P)$, $P_1 := f_2^{-1}(Q_1)$, tj $A_1P \cap A_2P_1 = \{Q_1\}$ i neka je $Q_2 := f_3(P)$, $P_2 := f_2^{-1}(Q_2)$, tj $A_3P \cap A_2P_2 = \{Q_2\}$. Primenimo li Papasovu teoremu na kolinearne trojke $A_1, A_2, A_3 \in a$ i $P_1, P, P_2 \in p$ dobićemo tri kolinearne tačke određene sa $A_1P \cap A_2P_1$, $A_3P \cap A_2P_2$ i $A_1P_2 \cap A_3P_1$. Prve dve tačke su Q_1 i Q_2 i one određuju pravu q, odakle za $\{Q\} := A_1P_2 \cap A_3P_1$ važi $Q \in q$, odnosno $A_1P_2 \cap A_3P_1 \cap q = \{Q\}$. Kako je sada $A_1P_2 \cap q = \{f_1(P_2)\}$ i $A_3P_1 \cap q = \{f_3(P_1)\}$ to mora biti $f_1(P_2) = Q = f_3(P_1)$, odnosno $f_1(f_2^{-1}(f_3(P))) = f_3(f_2^{-1}(f_1(P)))$, što dokazuje tvrđenje. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom odstojanja data su temena $A(A', A_0)$ i $B(B', A_0)$ pravilnog tetraedra $ABCD$. Ako je AB paralelna ravni π, a CD sa ravni π zaklapa ugao od $\pi/6$ konstruisati projekciju tog tetraedra.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda date su tačke $S^c \in p^c(P, P^c_\infty)$ i $V^c \in q^c(Q, Q^c_\infty)$. Predstaviti projekciju prave kupe sa vrhom V i središtem osnove S, ako je prečnik osnove jednak visini kupe.