NACRTNA GEOMETRIJA (Junski rok) - 8. Jun 2005.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Neka je f projektivno preslikavanje ravni koje preslikava prave $x=0$ i $y=0$ redom u prave $y=0$ i $y=1$. Da li je slika kruga $x^2+y^2=1$ elipsa, hiperbola ili parabola? Ukoliko f slika tačku $(1,1)$ u tačku $(0,-1)$ odrediti protivosu preslikavanja f. Ispisati formule preslikavanja f ukoliko još $f\circ f$ preslikava tačku $(2,1)$ u tačku $(0,5)$.

Rešenje : Neka je A matrica preslikavanja f, tj važi $\lambda X' = AX$. Dobro je poznato da se onda prave slikaju sa $\lambda U = A^T U'$. kako imamo $[1:0:0]\mapsto[0:1:0]$ i $[0:1:0]\mapsto[0:1:-1]$, to je

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}-a_{31} \\ a_{22}-a_{32} \\ a_{23}-a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Ovo nam daje $a_{22}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=0$, $a_{21}=a_{31}, a_{21}\neq 0, a_{32}\neq 0$. Za protivosu važi $u\mapsto u_\infty=[0:0:1]$, te je u zapravo treća kolona transponata od A, odnosno $u=[a_{31}:a_{32}:a_{33}]=[a_{21}:a_{32}:0]$. Ova prava sadrži tačku $(0:0:1)$, koja je centar zadatog kruga. Samim tim protivosa mora seći krug u dve tačke, što povlači da je slika kruga hiperbola! Dodamo li uslov $(1:1:1)\mapsto(0:-1:1)$ biće

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21} \\ a_{21}+a_{32} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sada je $a_{13}=-a_{11}-a_{12}$ i $a_{32}=-2a_{12}$, što daje $u=[a_{21}:a_{32}:0]=[a_{21}:-2a_{12}:0]=[1:-2:0]$. Dakle protivosa preslikavanja f je prava $x=2y$. Uvedimo još poslednji podatak da $(2:1:1)\mapsto ?\mapsto(0:5:1)$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{11}-a_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & -2a_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 2a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} a_{11} \\ 2a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2+2a_{12}a_{21} \\ a_{11}a_{21} \\ a_{11}a_{21}-4a_{21}^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Odavde je $a_{11}a_{21}=5(a_{11}a_{21}-4a_{21}^2)$ i $a_{11}^2+2a_{12}a_{21}=0$, što će dati $a_{11}=5a_{21}$ i $2a_{12}=-25a_{21}$. Stavimo li $a_{21}=2$ imamo $a_{11}=10$ i $a_{12}=-25$. Tražene formule su: $\lambda x_1'=10x_1-25x_2+15x_3$, $\lambda x_2'=2x_1$, $\lambda x_3'=2x_1-4x_2$. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Data je nedegenerisana kriva drugog reda Γ i tačke $A,B,C\in\Gamma$ i $D\notin\Gamma$. Za proizvoljno $M\in\Gamma$ neka je $\{N\}=BM\cap AC$ i $\{X\}=AM\cap DN$. Dokazati da je geometrijsko mesto tačaka X kada $M\in\Gamma$ kriva drugog reda. Dati potreban i dovoljan uslov da je ta kriva degenerisana.

Rešenje: Neka je $f_1 := D \overset{AC}{\barwedge} B$, $f_2 := B \overset{\Gamma}{\barwedge} A$ i $f:=f_2\circ f_1$. Tada važi $f(DN)=f_2(f_1(DN))=f_2(BM)=AM$, te kako je $f: D\barwedge A$ projektivno preslikavanje i $\{X\}=DN\cap f(DN)$ to je u pitanju kriva drugog reda. U slučaju da je $D\in AC$ jasno je da je traženo GMT zapravo tačka A, a tada se f_1 i ne može definisati. Degenerisanost daje uslov perspektivnosti $f(DA)=AD$. $f(DA)=f_2(BA)$ što je tangenta u A, te je kriva degenerisana akko je AD tangenta na Γ. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom odstojanja data je ravan $\tau(t,S(S',OS_0))$. Konstruisati projekciju pravilnog oktaedra $ABCDEF$ čiji dijagonalni presek (kvadrat) $ABCD$ pripada τ, a dijagonala AC gradi ugao od 30^0 sa ravni π. Ivica oktaedra podudarna je datoj duži d.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda data je prava p tragom P i nagibnim uglom 60^o prema ravni slike. Predstaviti projekciju prave kupe čiji je vrh tačka P, središte S osnove pripada pravoj p, a SP je podudarno datoj duži d.