NACRTNA GEOMETRIJA (2. Kolokvijum) - 17. April 2005.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : U projektivnoj ravni date su konkurentne prave a, b, c, d i tačke P, Q, R koje im ne pripadaju. Dokazati da postoji tačka X takva da za svake četiri tačke $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ za koje je $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$, važi i $X \in DA$.

Rešenje : Kako P, Q, R ne pripadaju $a \cup b \cup c \cup d$ to su dobro definisana perspektivna preslikavanja

$$f_1 := a \overset{P}{\barwedge} b, \; f_2 := b \overset{Q}{\barwedge} c, \; f_3 := c \overset{R}{\barwedge} d$$

. Njihova kompozicija $f := f_3 \circ f_2 \circ f_1$ je očigledno projektivno preslikavanje $f : a \barwedge d$. Konkurentnost datih pravih daje $a \cap b \cap c \cap d = \{S\}$. Naravno mora biti $f_1(S) = f_2(S) = f_3(S) = S$, te i $f(S) = S$. Projektivno preslikavanje f fiksira zajednički element za a i d, te je f perspektivno preslikavanje. Neka je X centar tog perspektivnog preslikavanja, odnosno $f = a \overset{X}{\barwedge} d$. Neka je $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$, $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$. Tada je $f_1(A) = B$, $f_2(B) = C$, $f_3(C) = D$, te i $f(A) = D$. Kako je f perspektivno preslikavanje sa centrom X ovo poslednje znači da su tačke A, D, X kolinearne, odnosno $X \in DA$. Ovo dokazuje egzistenciju tražene tačke X. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Dat je četvorougao $ABCD$, tačka X i prava s. Odrediti perspektivno afino preslikavanje sa osom s koje dati četvorougao preslikava u jednakokraki trapez na čijoj osnovici leži tačka X. (Rešavati samo opšti slučaj)

Rešenje: Neka je $'$ traženo afino preslikavanje. Ne umanjujući opštost pretpostavimo da je $A'B'C'D'$ trapez sa osnovicama $C'D'$ i $A'B' \ni X$. Kako afino preslikavanje čuva paralelnost $ABCD$ mora biti trapez sa $AB \parallel CD$. Neka je M središte duži AB i $\{N\} := AD \cap BC$. Afino preslikavanje čuva središte duži te je M' središte duži $A'B'$. Kako je $A'B'C'D'$ jednakokraki trapez to je $|A'D'| = |B'C'|$, te po Talesovoj teoremi imamo jednakokraki trougao $A'B'N'$ i odatle je $A'M'B' \perp M'N'$. Neka je $\{U\} := AB \cap s$ i $\{V\} := MN \cap s$. Kako $X \in A'B'$ to je $A'B'XUM' \perp N'VM'$, te M' dobijamo u podnožju visine iz V na XU. Sada je afino preslikavanje jednoznačno određeno osom s i parom odgovarajućih tačaka M i M'. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Date su prave a i o, kao i tačka A. Konstruisati teme parabole kojoj je a tangenta u A, a o osa.

Rešenje: Neka je U_∞ dodirna tačka parabole i u_∞, a tačka T traženo teme parabole. Kako je A na paraboli, o njena osa, to je tačka B, simetrična A u odnosu na o, takođe tačka sa parabole. Kako su A, B, U_∞, T tačke sa parabole možemo primeniti Paskalovu teoremu na degenerisani šestotemenik $AABU\infty U\infty T$. Ovde još valja primetiti da je osa parabole zapravo prava TU_∞. Za $\{P\} := a \cap u_\infty$, $\{Q\} := AB \cap U_\infty T = AB \cap o$, $\{R\} = BU_\infty \cap TA$ imamo kolinearnost P, Q, R, te i $BU_\infty \cap TA \cap PQ = \{R\}$, što se realizuje sa $\{R\} := BU_\infty \cap PQ$ i naravno $\{T\} := o \cap AR$ jer $T \in AR$.
Konstrukcija: Neka je O podnožje visine iz A na pravu o. $B \neq A$ je tačka sa preseka prave AO i kruga sa centrom O i poluprečnikom OA. Q je presek AOB i o. R je presek prave kroz B paralelne o i prave kroz Q paralelne a. Na kraju traženu tačku T dobijamo u preseku pravih o i AR. $\square$