NACRTNA GEOMETRIJA (Martovski rok) - 19. Mart 2005.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Na pravoj $y = 0$ uveden je koordinatni sistem čije bazne tačke i jedinica imaju afine koordinate $A_1(1,0)$, $A_2(0,0)$ i $B(2,0)$. Na pravoj $y = x$ uveden je koordinatni sistem čije bazne tačke i jedinica imaju afine koordinate $C_1(0,0)$, $C_2(1,1)$ i $D(2,2)$. U datim homogenim koordinatama odrediti formule perspektivnog preslikavanja sa centrom u $S(0,2)$ koje preslikava pravu $y = 0$ na pravu $y = x$.

Rešenje : Traženo perspektivno preslikavanje f određeno je sa tri para tačaka. Sa slike vidimo da je $f(A_2) = C_1$, $f(B) = C_2$ i $f(X) = D$, gde je X beskonačno daleka tačka prave $y = 0$. Potrebno je naći koordinate tačke X. U tu svrhu potražimo vezu između standardnih afinih i naših koordinata sa prave $y = 0$. Tu afinim koordinatama $(1:1)$, $(0:1)$, $(2:1)$ odgovaraju bazne tačke tj $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$. Ovo daje vezu

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

. Kako X kao beskonačno daleka ima standardne afine koordinate $(1:0)$ to množenjem gornjom matricom dobijamo da su njene koordinate $X(1:2)$. Koordinate ostalih tačaka znamo kao bazne iz uslova zadatka. Dakle imamo $A_2(0:1)$, $B(1:1)$, $X(1:2)$ koje se slikaju u $C_1(1:0)$, $C_2(0:1)$, $D(1:1)$, što daje tražene formule transformacije:

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \square$$

.

Drugo rešenje : Može se posmatrati recimo tačka $Y(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ i iskoristiti veza da tačke A_1, A_2, B idu u tačke Y, C_1, C_2. Jedino su nepoznate koordinate tačke Y no ona ima standardne afine koordinate $(2:3)$ na pravoj $y = x$, dok bazne tačke i jedinica imaju $(0:1)$, $(1:1)$ i $(2:1)$. Kao i u prvom rešenju sračunaju se koordinate za Y i na kraju matrica preslikavanja. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : U proizvoljan četvorougao upisan je trapez. Ako se bočne ivice trapeza seku na jednoj dijagonali datog četvorougla, dokazati da su onda osnovice trapeza paralelne drugoj dijagonali.

Rešenje: Neka je $ABCD$ trapez sa $AB \parallel CD$ upisan u četvorougao $PQRS$ i recimo $A \in PQ$, $B \in QR$, $C \in RS$, $D \in SP$. Kako je $AD \cap BC \cap QS \neq \varnothing$, to trotemenici $\triangle\ ABQ$ i $\triangle\ DCS$ imaju centar perspektive, te po Dezargovoj teoremi imaju i osu perspektive. $AQ \cap DS = \{P\}$, $BQ \cap CS = \{R\}$, $AB \cap CD = \{X\}$, pri čemu su po teoremi P, R i X kolinearne. Odavde je $AB \cap CD \cap PR = \{X\}$, no $AB \parallel CD$, odakle je X beskonačno daleka tačka. Zato je i $AB \parallel CD \parallel PR$, što je i trebalo dokazati! $\square$

Drugo rešenje: Zadatak se mogao rešiti i primenom Obrnute Dezargove teoreme na trotemenike $\triangle\ ADP$ i $\triangle\ BCR$ $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom odstojanja data je ravan $\tau(t, S', OS_0)$. Predstaviti projekciju prave kupe čija osnova pripada ravni τ, središte osnove je data tačka S, a ravan π je jedna tangentna ravan kupe. Predstaviti zatim i projekciju preseka kupe i ravni ρ koja sadrži pravu t i tačku M visine kupe SV koja deli SV u odnosu $2:1$.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda centralnog projektovanja predstaviti paralelne ravni α i β, predstaviti zatim prav valjak čije osnove pripadaju ravnima α i β čija je visina jednaka prečniku osnove.