NACRTNA GEOMETRIJA (Februarski rok) - 2. Februar 2005.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Dato je projektivno preslikavanje ravni koje prevodi tačke $A_1(1:0:1)$, $A_2(1:0:0)$, $A_3(0:1:0)$ i $B(2:1:1)$ redom u bazne tačke i tačku jedinice. Neka je Γ parabola iz familije krivih drugog reda $\{x_1^2+4x_2^2+ax_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3=0 : a\in\mathbb{R}\}$. Odrediti jednačinu slike krive Γ pri datom preslikavanju.

Rešenje : Pronađimo najpre sve parabole iz date familije krivih. Znamo da je parabola nedegenerisana kriva koja za tangentu ima beskonačno daleku pravu. Uslov dodira sa pravom $x_3=0$ daje duplu nulu kvadratne jednačine $x_1^2+2ax_1x_2+4x_2^2=0$, odnosno nula diskriminantu, što je ekvivalentno uslovu $a^2=4$. Ovo je potreban uslov, dok bi za dovoljan uslov trebalo proveriti determinantu matrice $G=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&4&2\\1&2&a\end{pmatrix}$ indukovane krivom Γ, odnosno $\det G=-a^3+8a-8$. U slučaju $a=2$ je $\det G=0$ te tada imamo dve prave koje se seku, a ne parabolu! Ostaje još $a=-2$, za šta je $\det G=-16\neq 0$, te imamo tačno jednu parabolu iz date familije $\Gamma: x_1^2+4x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3=0$. Sa druge strane možemo potražiti matričnu vezu koju indukuje dato preslikavanje u direktno primenjivom obliku $\lambda X=AX'$. Direktnom proverom vidimo da matrica $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ zadovoljava odgovarajuće veze medju četiri para tačaka (u opštem položaju), te je time preslikavanje jednoznačno određeno. Zamenom originala slikama u jednačinu krive ili primenom formule $G'=A^TGA$ dobijamo

$$G'=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&2\\1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}$$

Odavde vidimo da tražena slika krive Γ ima jednačinu $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Date su tačke A, B, C, D i E u ravni takve da nikoje tri nisu kolinearne i nikoje dve prave njima određene nisu paralelne. Perspektivno kolinearno preslikavanje sa fiksnim tačkama A, B i E preslikava četvorougao $ABCD$ u trapez koji za osnovicu ima sliku duži BC. Konstruisati sliku četvorougla $ABCD$ pri tom preslikavanju za sve moguće slučajeve.

Rešenje: Znamo da su sve fiksne tačke perspektivno kolinearnog preslikavanja $'$ tačke sa ose i centar. Imamo $A'=A$, $B'=B$, $E'=E$, te razlikujemo dva suštinski različita slučaja:
1) E **je centar!** Posmatrajmo tačku P definisanu sa $\{P\}:=BC\cap AD$. Iz trapeza $ABC'D'$ imamo $BC'\parallel AD'$, te kako je $\{P'\}=BC'\cap AD'$ to je P' beskonačno daleka tačka. Dakle P pripada protivosi, a kako je E centar to je P' beskonačno daleka prave PE. Sada je lako konstruisati. $C'\in EC$ i $D'\in ED$ jer je E centar. Sa druge strane C' leži na pravoj kroz B paralelnoj PE (prava $BC'P'$), dok D' leži na pravoj kroz A paralelnoj PE (prava $AD'P'$). Naravno C' dobijamo u preseku EC i prave paralelne PE kroz B, a D' dobijamo u preseku prave ED i prave paralelne PE kroz A.
2) E **nije centar!** Centar mora biti tačka A ili tačka B. Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da je A centar, te onda prava BE mora biti osa. A je centar te $D'\in AD$, a kako zbog trapeza mora biti $AD'\parallel BC'$ to C' pripada pravoj paralelnoj AD kroz B, a naravno C' leži i na AC, te je konstruišemo u njihovom preseku. Kako je BE osa to je $CD\cap C'D'\cap BE\neq\varnothing$, te za $\{M\}:=BE\cap CD$ važi $M\in C'D'$, odakle $\{D'\}:=AD\cap MC'$. $\square$

Drugo rešenje: Prvi slučaj možemo rešiti i drugačije. Pretpostavka je da je E centar, a AB osa. **Konstrukcija:** $\{M\}:=AB\cap CD$. N konstruišemo u preseku DC i prave kroz B paralelne AD. C' konstruišemo u preseku EC i prave kroz N paralelne ED. $\{D'\}:=MC'\cap ED$. **Dokaz:** $MA:MB=MD:MN$ po Talesovoj teoremi, jer je $AD\parallel BN$. $MD:MN=MD':MC'$ po Talesovoj teoremi, jer je $DD'\parallel NC'$. Sada je i $MA:MB=MD':MC'$, odakle po obrnutoj Talesovoj teoremi imamo $AD'\parallel BC'$, te je $ABC'D'$ trapez. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom odstojanja predstaviti ravan $\tau(t,S',OS_0)$. Odrediti projekciju pravog valjka čija jedna osnova pripada ravni τ, središte te osnove je tačka S i trag t je tangenta osnove, a visina valjka je jednaka prečniku osnove.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda data je ravan $\tau(t,t^c_\infty)$ i prava $p\parallel\tau$ koja gradi ugao od 45^o sa projekcijskom ravni π. Konstruisati centralnu projekciju kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ čija osnova $ABCD$ pripada ravni τ, a ivica A_1B_1 pravoj p.