NACRTNA GEOMETRIJA (Januarski rok) - 12. Januar 2005.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Preslikavanje f projektivne ravni zadato je formulama: $\lambda x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$ i $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Odrediti fiksne tačke i fiksne prave preslikavanja f. Naći novi projektivni sistem koordinata u kojem je tačka $(0:0:1)$ beskonačno daleka i u čijim je afinim koordinatama preslikavanje f afino. Napisati formule preslikavanja f u novim koordinatama.

Rešenje :
Matrica preslikavanja f je $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Nakon kraćeg računa dobijamo $\chi_M(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. Dakle imamo dve sopstvene vrednosti: -1 (dvostruka nula) i 2. Posmatrajući jednačine $(M+I)X = 0$ i $(M-2I)X = 0$, odnosno $(M^T+I)X = 0$ i $(M^T-2I)X = 0$ dobijamo fiksne tačke $\{(a:b:-a-b) | a^2+b^2 \neq 0\} \cup \{(-1:1:3)\}$, kao i fiksne prave $\{[a+3b:a:b] | a^2+b^2 \neq 0\} \cup \{[1:1:1]\}$. Afino preslikavanje ima beskonačno daleku pravu za fiksnu pravu, a kako želimo da tačka $(0:0:1)$ bude beskonačno daleka to ona mora biti na originalnoj fiksnoj pravoj. Dakle iz skupa rešenja fiksnih pravih uzimamo onu koja sadrži našu tačku i to je prava $[1:1:0]$. U prve dve kolone matrice prelaska upisaćemo dve tačke sa te prave na primer $(0:0:1)$ i $(-1:1:0)$, a u treću bilo šta tako da važi $\det C \neq 0$, na primer $(1:0:0)$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tražene formule preslikavanja f su $\lambda X' = FX$. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : U euklidskoj ravni date su različite prave a i t, kao i tačke T i M sa prave t. Ako je T teme parabole i ako su a i t njene tangente, konstruisati drugu tangentu iz tačke M na tu parabolu.

Rešenje: Neka je druga tangenta iz M (prva je naravno t) tražena prava x. Sa A_∞ i X_∞ obeležimo beskonačno daleke tačke pravih a i x. Sa U_∞ obeležimo dodirnu tačke tangente u_∞ (Naravno u_∞ je po definiciji tangenta parabole). U_∞ se može videti i kao beskonačno daleka tačka ose, a osa je normalna na tangentu t u temenu T. Neka je $\{L\} = a \cap t$. Primenimo Brianšonovu teoremu na degenerisani šestostranik $ttxu_\infty u_\infty a$. Ako je $p = (tt)(u_\infty u_\infty) = TU_\infty$, $q = (tx)(u_\infty a) = MA_\infty$, $r = (xu_\infty)(at) = X_\infty L$, to po teoremi imamo konkurentnost pravih p, q i r. Ako je $\{V\} = p \cap q$, to onda $V \in r$, odnosno $X_\infty \in VL$. Sada lako možemo ispisati konstrukciju. $\{L\} := a \cap t$. Tačku V dobijamo u preseku prave kroz T normalne na t (osa) i prave kroz M paralelne sa a. Tražena tangenta x će biti prava kroz M paralelna pravoj VL. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom odstojanja date su prava $p = AC(A', A_0, C', C_0)$ paralelna ravni π i prava $q(Q, M', M_0)$ mimoilazna sa pravom p. Konstruisati projekciju prave prizme $ABCDA_1B_1C_1D_1$, čija je osnova paralelogram s dijagonalama AC i $BD \parallel q$. Visina prizme jednaka je rastojanju izmedju pravih p i q.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda centralnog projektovanja data je prava $t(T, T_\infty^c)$. Predstaviti projekciju prave kupe čija osnova pripada ravni α, koja gradi ugao od 45^o s ravni π, i prava t je tangenta osnove. Poluprečnik osnove jednak je poluprečniku kruga odstojanja i visina je jednaka prečniku osnove.