NACRTNA GEOMETRIJA (1. Kolokvijum) - 26. Decembar 2004.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : Date su tri tačke projektivne prave svojom afinom koordinatom $A(0)$, $B(1)$, $C(2)$. Odrediti sva parabolička preslikavanja projektivne prave koja slikaju A i B redom u A' i B', takva da važe dvorazmere $(ABCA') = 3$ i $(ABA'B') = 16/15$.

Rešenje : U homogenom koordinatnom sistemu date tačke su $A(0:1)$, $B(1:1)$ i $C(2:1)$.
Iz $\overrightarrow{C} = -\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A'} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$ i $(ABCA') = 3$, dobijamo $2\alpha = -3\beta$, te $\overrightarrow{A'} = -3\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$ i $\mathbf{A'(2:-1)}$.
Iz $\overrightarrow{A'} = -3\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{B'} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$ i $(ABA'B') = 16/15$, dobijamo $5\gamma = -8\delta$, te $\overrightarrow{B'} = -8\overrightarrow{A} + 5\overrightarrow{B}$ i $\mathbf{B'(5:-3)}$
Ako je $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $\lambda X' = MX$, iz $A \to A'$ i $B \to B'$ imamo $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$
Odavde dobijamo dve jednačine: $b = -2d$ i $3(a+b) + 5(c+d) = 0$. Ovo nam daje $5c = d - 3a$. Za paraboličko preslikavanje je $(\mathrm{tr}M)^2 = 4\det M$ što daje jednačinu $(a+d)^2 = 4(ad - bc)$. Ona se gornjim smenama svodi na $5a^2 + 10ad + 5d^2 = 20ad - 4(-2d)(d-3a)$, što daje kvadratnu jednačinu $5a^2 + 14ad - 3d^2 = 0$, sa rešenjima $a = -3d$ i $5a = d$. Dakle tražena preslikavanja su data matricama $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 5 & -50 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Preslikavanje f projektivne ravni zadato je formulama: $\lambda x'_1 = 10x_1 + 6x_2 - 6x_3$, $\lambda x'_2 = -3x_1 + x_2 + 3x_3$ i $\lambda x'_3 = 3x_1 + 3x_2 + x_3$. Odrediti fiksne tačke i fiksne prave preslikavanja f. Naći novi projektivni sistem koordinata u kojem je tačka $(0:0:1)$ beskonačno daleka i u čijim je afinim koordinatama preslikavanje f afino. Napisati formule preslikavanja f u novim koordinatama.

Rešenje:

Matrica preslikavanja f je $M = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Nakon kraćeg računa dobijamo $\chi_M(\lambda) = -(\lambda - 4)^3$. Dakle jedina sopstvena vrednost je 4 (trostruka nula). Posmatrajući jednačine $(M - 4I)X = 0$ i $(M^T - 4I)X = 0$ dobijamo fiksne tačke $\{(a : b : a+b) | a^2 + b^2 \neq 0\}$, kao i fiksne prave $\{[a : b : b - 2a] | a^2 + b^2 \neq 0\}$. Afino preslikavanje ima beskonačno daleku pravu za fiksnu pravu, a kako želimo da tačka $(0:0:1)$ bude beskonačno daleka to ona mora biti na originalnoj fiksnoj pravoj. Dakle iz skupa rešenja fiksnih pravih uzimamo onu koja sadrži našu tačku i to je prava $[1:2:0]$. U prve dve kolone matrice prelaska upisaćemo dve tačke sa te prave na primer $(2:-1:0)$ i $(0:0:1)$, a u treću bilo šta da važi $\det C \neq 0$, na primer $(1:0:0)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \square$$

ZADATAK 3.

Zadatak : Odrediti sve oble krive drugog reda u ravni koje sadrže tačke $A(2,0)$ i $B(0,1)$ i dodiruju y-osu i pravu $x = 2$. Napisati homogenu jednačinu parabole koja pripada familiji prethodno nađenih rešenja. Napisati jednačinu slike te parabole pri preslikavanju zadatom formulama: $\lambda x'_1 = x_2 + x_3$, $\lambda x'_2 = x_1 + x_3$, $\lambda x'_3 = x_1 + x_2$.

Rešenje: U homogenim koordinatama imamo tačke $A(2:0:1)$ i $B(0:1:1)$, kao i tangente krive $a[1:0:-2]$ i $b[1:0:0]$. Očigledno je $A \in a$ i $B \in b$, tako da imamo dva odnosa pol-polara. Ako je G matrica krive to je onda

$$G\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{13} \\ 2a_{12} + a_{23} \\ 2a_{13} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -2\lambda \end{pmatrix} \text{ i } G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{22} + a_{23} \\ a_{23} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dobijamo sistem četiri jednačine: $2(2a_{11} + a_{13}) + 2a_{13} + a_{33} = 0$, $2a_{12} + a_{23} = 0$, $a_{22} + a_{23} = 0$, $a_{23} + a_{33} = 0$. Izrazimo a_{22} i a_{23} preko a_{12}, te vidimo da za oblu krivu mora biti $a_{12} \neq 0$, odakle možemo postaviti recimo $a_{12} = 2$, odakle imamo $a_{22} = 4$, $a_{33} = 4$, $a_{23} = -4$, kao i vezu $a_{11} + a_{13} = -1$.
Jednačina krive biće $ax_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2(a-1)x_1x_3 - 8x_2x_3 = 0$, gde je realni parametar $a \neq 1$ jer je tad $\det G = 0$. Za parabolu imamo uslov dodira sa pravom $x_3 = 0$, te diskriminanta jednačine $ax_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$ mora biti nula, što se dešava za $a = 1$, no tada kriva nije obla! Dakle tražena parabola ne postoji!