NACRTNA GEOMETRIJA (Decembarski rok) - 18. Decembar 2004.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : U afinoj ravni date su tačke $A_1(2,0)$, $A_2(0,2)$, $A_3(3,1)$ i $B(-1,1)$ koje su uzete za bazne tačke i jedinicu novog homogenog sistema koordinata. Ako kriva drugog reda Γ sadrži tačke A_1, A_2, A_3, B i dodiruje x-osu (u starom afinom sistemu), odrediti jednačinu krive Γ u novom afinom sistemu koordinata.

Rešenje :
Veza između starih i novih koordinata je data matricom M sa $\lambda X = MX'$.
Stare homogene koordinate tačaka su $A_1(2:0:1)$, $A_2(0:2:1)$, $A_3(3:1:1)$, $B(-1:1:1)$
Nove homogene koordinata tačaka su $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $B(1:1:1)$
Veze između starih i novih koordinata na ovim tačkama će u potpunosti odrediti matricu M

A_1	A_2	A_3	B
$m_{11} = 2\lambda_1$	$m_{12} = 0$	$m_{13} = 3\lambda_3$	$m_{11}+m_{12}+m_{13} = -\lambda_4$
$m_{21} = 0$	$m_{22} = 2\lambda_2$	$m_{23} = \lambda_3$	$m_{21}+m_{22}+m_{23} = \lambda_4$
$m_{31} = \lambda_1$	$m_{32} = \lambda_2$	$m_{33} = \lambda_3$	$m_{31}+m_{32}+m_{33} = \lambda_4$

Odavde važi $2\lambda_1 + 3\lambda_3 = -\lambda_4$, $2\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4$, odakle se dobija $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$, te je

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\text{pride je i } M^{-1} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

Ako U predstavlja pravu u starim, a U' u novim koordinatama, onda važi $0 = \lambda U^T X = U^T M X'$, odakle je $\mu U'^T = U^T M$, odnosno dobro poznata veza $\mu U' = M^T U$. Ako za U uzmemo x-osu , odnosno pravu $[0:1:0]$ dobijamo $U' = M^T U = [0:2:-1]$. Kako se tangenta projektivnim preslikavanjem mora slikati na tangentu, to je $[0:2:-1]$ tangenta na Γ u novom sistemu. Jednačina krive Γ u novom sistemu ima opšti oblik

$$a_{11}{x'_1}^2 + a_{22}{x'_2}^2 + a_{33}{x'_3}^2 + 2a_{12}x'_1x'_2 + 2a_{13}x'_1x'_3 + 2a_{23}x'_2x'_3 = 0$$

$A_1(1:0:0) \in \Gamma \Rightarrow a_{11} = 0$, $A_2(0:1:0) \in \Gamma \Rightarrow a_{22} = 0$, $A_3(0:0:1) \in \Gamma \Rightarrow a_{33} = 0$. Kako je dalje $[0:2:-1]$ tangenta u $(1:0:0)$ to je ona polara za tačku A_1, što daje

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dakle imamo $a_{12} = -2a_{13}$. Ako uključimo i $B(1:1:1) \in \Gamma \Rightarrow a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$ imamo i $a_{13} = a_{23}$. Iz svega ovoga imamo traženu jednačinu krive Γ u novim homogenim koordinatama zadatu sa $2x'_1x'_2 - x'_1x'_3 - x'_2x'_3 = 0$, što je u novim afinim koordinatama jednačina $2x'y' - x' - y' = 0$. (Inače jednačina krive u starom sistemu je $x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 = 0$) $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : U ravni je data prava s i tačke A, B, C i D'. Perspektivno afinim preslikavanjem sa osom s trougao ABC se slika na jednakokraki trougao $A'B'C'$ sa osnovicom $B'C'$, tako da D' leži na pravoj $B'C'$. Konstruisati trougao $A'B'C'$. Rešavati samo opšti slučaj!

Rešenje: Neka je E središte duži BC. Afino preslikavanje čuva odnose deljenja duži te se E slika u E', središte duži $B'C'$. Kako je $|A'B'| = |A'C'|$, to je E' podnožje visine trougla $A'B'C'$ iz temena A'. U opštem slučaju imaćemo preseke $\{X\} := BC \cap s$ i $\{Y\} := AE \cap s$, a iz osobina perspektivnog preslikavanja $X \in B'C'$ i $Y \in A'E'$. Kako je $B'C'XE' \perp A'YE'$ i $E' \in B'C'D'X$, to je E' podnožje visine iz Y na $D'X$. (ili $E' \in k(XY) \cap D'X$) mora biti na krugu nad prečnikom XY. Parom (E, E') i osom s afino preslikavanje je jednoznačno određeno. B', odnosno C' dobijamo na pravoj $D'X$ u preseku sa pravom paralelnoj zraku afinosti EE' kroz B, odnosno C, dok tačku A' možemo dobiti u preseku YE' i prave kroz A paralelne sa EE'. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom odstojanja data je prava $p(P, V', OV_0)$ i ravan $\tau(t, M', OM_0)$ koja ne sadrži pravu p. Predstaviti projekciju prave kupe čija osnova pripada ravni τ, vrh kupe je data tačka V i jedna izvodnica pripada pravoj p. Naći zatim projekcije prodornih tačaka prave q kroz površ kupe, ako prava q sadrži središte visine i paralelna je pravoj p.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda predstaviti dve mimoilazne prave $p(P, P^c_\infty)$ i $q(Q, Q^c_\infty)$. Konstruisati projekciju prave četvorostrane prizme $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ čija je osnova paralelogram, ako dijagonale A_1C_1 i B_2D_2 paralelnih strana $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$ pripadaju redom pravim p i q.