NACRTNA GEOMETRIJA (Novembarski rok) - 20. Novembar 2004.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak :
1) Mora li kompozicija dve involucije na projektivnoj pravoj biti involucija?
2) Može li kompozicija eliptičke i hiperboličke involucije biti eliptička involucija?
3) Može li kompozicija eliptičke i hiperboličke involucije biti hiperbolička involucija?
Rešenje :
A je matrica involucije ako i samo ako važi $A^2 = \lambda I$.
Za $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, imamo $\lambda I = A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.
Mora biti $a^2+bc = bc+d^2$, $ab+bd = 0$ i $ac+cd = 0$. Prva jednačine $a^2 = d^2$, daje dve mogućnosti. Prva je $a = d \neq 0$ odakle je $b = 0$ i $c = 0$, te je A identičko. Druga mogućnost $a + d = 0$ (odnosno $\mathrm{tr}A = 0$) povlači sve tri jednakosti. Dakle involucija na projektivnoj pravoj je ili identičko ili preslikavanje sa tragom 0.
1) Očigledno važi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Prve dve matrice predstavljaju involuciju (trag im je nula), no kompozicija (proizvod matrica) to očigledno nije. Dakle, kompozicija dve involucije ne mora biti involucija!
2) Šta može biti kompozicija eliptičke i hiperboličke involucije? Kako identičko preslikavanje nije ni jedno ni drugo to su tragovi matrica tih preslikavanja jednaki nuli. Pogledamo li karakteristični polinom matrice imamo $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A \cdot \lambda + \det A = \lambda^2 + \det A$, odakle se vidi da je A eliptičko za $\det A > 0$, odnosno hiperboličko za $\det A < 0$. Neka je E matrica eliptičke, a H matrica hiperboličke involucije. Njihova kompozicija ima matricu $E \cdot H$, a kako je $\det(E \cdot H) = \det E \cdot \det H$ i $\det E > 0$, $\det H < 0$, to je $\det(E \cdot H) < 0$, te ona ne može biti eliptička involucija, što daje negativan odgovor na naše pitanje!
3) Očigledno važi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jasno se vidi da smo dali jedan primer gde je kompozicija eliptičke i hiperboličke involucije, ponovo hiperbolička involucija, pa je odgovor potvrdan! $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : U ravni, je dat četvorougao $ABCD$ koji nije trapez. Odrediti sva perspektivno kolinearna preslikavanja ravni koja imaju A i B za fiksne tačke, dok četvorougao $ABCD$ prevode u paralelogram.

Rešenje: A i B su fiksne tačke perspektivno kolinearnog preslikavanja $'$ sa centrom S. Pretpostavimo da je $A \neq S \neq B$, tj da nijedna data fiksna tačka nije centar. Kako sve fiksne tačke čine skup $s \cup \{S\}$ to bi osa s morala biti $s = AB$. Odatle $CD \cap C'D' \cap AB \neq \varnothing$, te kako je $AB \parallel C'D'$ (jer je $ABC'D'$ paralelogram), imamo i $AB \parallel CD$, te bi $ABCD$ bio trapez, što nije! Dakle jedna data fiksna tačka mora biti centar. Ne umanjujući opštost pretpostavimo da je $S = B$. Kako je B centar to $C' \in BC$ i $D' \in BD$, a iz paralelograma $ABC'D'$ imamo $BC'C \parallel AD'$, te tačka D' mora biti u preseku prave BD i prave kroz A paralelne BC. Naravno tačka C' je u preseku prave BC i prave kroz D' paralelne AB. Tačke A, B, C, D su u opštem položaju, te je preslikavanje zadato njihovim slikama A, B, C', D'. Drugo rešenje se dobija ekvivalentno prethodnom kada uzmemo A za centar. $\square$

Drugo Rešenje: Četvorougao je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale polove. Ako je $\{E\} = AC \cap BD$, mora biti E' središte i duži $A'C'$ i duži $B'D'$. Ovo je motiv za uvođenje tačaka M i N tako da važi $\mathcal{H}(AC; EM)$ i $\mathcal{H}(BD; EN)$. Kako se $\mathcal{H}$ čuva to će biti $\mathcal{H}(A'C'; E'M')$ i $\mathcal{H}(B'D'; E'N')$, te M' i N' moraju biti beskonačno daleke. Dakle MN mora biti protivosa. A i B su fiksne te je $A, B \in \{S\} \cup s$. AB ne može biti osa jer bi bilo $AB \parallel MN$, te i $AB \parallel CD$ što nije! Dakle protivosa je MN, centar je A (ili B), a osa je prava kroz B (ili kroz A) paralelna MN. Preslikavanje je jednoznačno određeno centrom, osom i protivosom, te zadatak ima dva rešenja. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom odstojanja data je ravan $\tau(t, S', OS_0)$. Predstaviti projekciju prave kupe čija osnova pripada ravni τ, središte osnove je data tačka S, a ravan π je jedna tangentna ravan kupe. Predstaviti zatim i projekciju preseka kupe i ravni ρ koja sadrži pravu t i tačku M visine kupe SV koja deli SV u odnosu $2:1$.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda date su tačke S_1 i S_2 ($S_1^c, S_2^c \in p^c(P, P_\infty^c)$). Konstruisati centralnu projekciju kose prizme $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, čija su središta osnova $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ redom tačke S_1, S_2, osnove su kvadrati koji pripadaju ravnima τ_1, τ_2. Ravni τ_1, τ_2 grade ugao od 30^o s projekcijskom ravni π.