NACRTNA GEOMETRIJA (Oktobarski rok) - 22. Septembar 2004.
Zadaci i rešenja - Vladica Andrejić

ZADATAK 1.

Zadatak : U projektivnoj ravni dato je preslikavanje f formulama: $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$. Odrediti sve fiksne prave preslikavanja f. Neka je p fiksna prava koja sadrži tačku $P(0:3:2)$. Tačke A i B su definisane sa $\{A\} = p \cap \{x_3 = 0\}$ i $\{B\} = p \cap \{x_2 = 0\}$. Odrediti tačku X tako da važi harmonijska konjugovanost parova A, B i P, X.

Rešenje :

Ako je F matrica preslikavanja f imamo $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Karakteristični polinom je $\det(F - \lambda I) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$, što daje sopstvene vrednosti $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$. Sopstveni vektori matrice $F^T = F$ određuju fiksne prave, a to su $[1 : 1 : 1]$, odnosno $[a : b : -(a + b)]$, gde a i b nisu istovremeno nule! Lako je videti da jedino prava $p[1 : 2 : -3]$ od gornjenavedenih rešenja sadrži tačku $P(0 : 3 : 2)$. Sada je $p \cap \{x_3 = 0\} = \{A(2 : -1 : 0)\}$ i $p \cap \{x_2 = 0\} = \{B(3 : 0 : 1)\}$. Za $\mathcal{H}(AB; PX)$ potrebno je da važi $(ABPX) = -1$. Kako je $(0, 3, 2) = -3(2, -1, 0) + 2(3, 0, 1)$, to će X biti $(12 : -3 : 2)$ jer je $(12, -3, 2) = 3(2, -1, 0) + 2(3, 0, 1)$. $\square$

ZADATAK 2.

Zadatak : Date su tačke A i B i prave a, b i p. Konstruisati centar hiperbole ako je a tangenta u A, b tangenta u B i p asimptota hiperbole.

Rešenje : Neka je $\{P_\infty\} := p \cap u_\infty$ i $\{Q_\infty\} = q \cap u_\infty$, gde je q druga asimptota. Primenimo Paskalovu teoremu na degenerisani šestotemenik $AABBP_\infty Q_\infty$. Za $a \cap BP_\infty =: \{M\}$, $AB \cap u_\infty =: \{N\}$, $b \cap Q_\infty A = \{L\}$ teorema daje kolinearnost M, N, L. Dakle $b \cap Q_\infty A \cap MN = \{L\}$, te $\{L\} := b \cap MN$ i $\{Q_\infty\} := AL \cap u_\infty$ što daje pravac asimptote q. Primenimo Paskalovu teoremu na degenerisani šestostranik $AAQ_\infty Q_\infty P_\infty B$. Za $a \cap u_\infty =: \{U\}$, $AQ_\infty \cap P_\infty B =: \{V\}$, $q \cap BA = \{W\}$ teorema daje kolinearnost U, V, W. Biće $q \cap BA \cap UV = \{W\}$, te $\{W\} := BA \cap UV$ i $q := WQ_\infty$, što određuje asimptotu q. Na kraju centar O dobijamo u preseku asimptota $\{O\} := p \cap q$. **Konstrukcija:** M je presek prave a i prave kroz B paralelne p. L je presek prave b i prave kroz M paralelne AB. V je presek prave kroz A paralelne AL i prave kroz B paralelne p. W je presek prave AB i prave kroz V paralelne a. Centar O dobijamo u preseku prave p i prave kroz W paralelne AL. $\square$

ZADATAK 3.

Zadatak : Metodom dve normalne projekcije data je ravan $\tau(t_1, t_2)$ koja je normalna na π_2 i sa π_1 gradi ugao od 60^o. Predstaviti projekciju prave kupe čija je osnova u ravni τ, dok je ravan π_1 njena tangentna ravan. Predstaviti zatim presek kupe i ravni koja sadrži središte visine kupe i pravu t_1.

ZADATAK 4.

Zadatak : Metodom tragova i nedogleda data je tačka $A_1(A_1^c \in q^c(Q, Q_\infty^c))$ i ravan $\tau(t, t_\infty^c)$. Konstruisati centralnu projekciju kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ako strana $ABCD$ pripada ravni τ i prava AB gradi ugao od 30^o s ravni π.